05

EL MODELO DE MARKOWITZ PARA LA SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

MARKOWITZ'S MODEL FOR THE SELECTION OF INVESTMENT PORTFOLIOS

Guillermo Carlos Guerrero Camargo[1*]
Víctor Antonio Aguilar Arteaga[1]

[1]Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro
**guillermo.c.g.c@hotmail.com*

RESUMEN

El acceso a Internet ha fomentado el interés en las inversiones. Ahora, es posible realizarlas con aplicaciones de empresas en tiempo real desde un teléfono inteligente. Dentro de esta estrategia, se encuentra un proceso para escoger en qué invertir el dinero con el mayor rendimiento y el menor riesgo posible. Es decir, se resuelve de manera implícita el problema de la optimización de portafolios de inversión. La primera persona que planteó matemáticamente el problema de su selección fue Harry Markowitz, quien publicó, en los 50, un modelo que optimiza las carteras de inversión. El objetivo de este trabajo es explicar el modelo propuesto por Harry Markowitz y presentarlo a través de Excel para dos acciones: Amazon y Apple. Los elementos que utiliza el modelo fueron: matriz de covarianza, varianza y desviación estándar; este permite minimizar el riesgo y conocer el porcentaje de inversión precisa de cada acción. Con ayuda de Excel, es posible graficar el comportamiento de las carteras de inversión.

Palabras clave: IMA, Markowitz, Portafolio, Inversión, Selección, Excel.

En la década de 1950, el prominente economista Harry Markowitz desarrolló un sofisticado método para elegir un portafolio de inversiones minimizando el riesgo, pero maximizando el rendimiento. Aquí te lo describimos.

ABSTRACT

Internet access has fueled interest in investments. Now, it is possible to carry them out with company applications in real time from a smartphone. Within this strategy, there is a process to choose where to invest the money with the highest return and the lowest possible risk. In other words, the problem of optimizing investment portfolios is implicitly solved. The first person who raised the problem of their selection mathematically was Harry Markowitz, who published, in the 1950s, a model that optimizes investment portfolios. The objective of this work is to explain the model proposed by Harry Markowitz and present it through Excel for two actions: Amazon and Apple. The elements used by the model were: covariance matrix, variance and standard deviation; this allows minimizing the risk and knowing the precise investment percentage of each action. With the help of Excel, it is possible to graph the behavior of investment portfolios.

Keywords: IMA, Markowitz, Portfolio, Investment, Selection, Excel.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con *Para entender la bolsa*, el origen del término titular se puede remontar al trueque de mercancías durante las ferias medievales. Desde entonces, pasando por la creación de la bolsa mexicana en 1908, es común invertir en diferentes mercados monetarios [7] y, en consecuencia, buscar la optimización del proceso de inversión. Esto es, maximizar la ganancia minimizando el riesgo. Por ejemplo, en 1934 se publicó el libro *Security Analysis* y se convirtió en un clásico de la época [3].

En 1950, un estudiante de doctorado en Economía en la Universidad de Chicago llamado Harry Markowitz observó que las personas tendían a diversificar sus inversiones para mitigar el riesgo. Es así como el alumno planteó el problema de su tesis doctoral: con el refrán "No pongas todos tus huevos en una misma canasta" en mente, estableció un modelo matemático para optimizar un portafolio de inversión. Markowitz fue el primero en solucionar este problema con herramientas matemáticas, según lo explica su libro *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* [5].

Después de este trabajo pionero, muchos investigadores explotaron, cuestionaron y mejoraron el modelo expuesto. Sin embargo, este se sigue aplicando actualmente por académicos y profesionales de las finanzas. Hay un acercamiento notable en el artículo "Estado del arte en teoría de portafolios: del análisis individual de acciones a la optimización multiobjetivo" [6]; sin embargo, es difícil seguirles la pista a los demás trabajos inspirados por la propuesta de Markowitz.

METODOLOGÍA CLÁSICA DE H. MARKOWITZ

Las acciones son títulos que representan parte del capital de una empresa. Esto implica que el propietario de una acción es acreedor de una parte de la empresa que emitió dicha acción. Por ejemplo, las acciones se compran y venden en la Bolsa Mexicana de Valores por medio de las "casas de bolsa", las cuales actúan como intermediarias [2]. Conviene definir que una cartera de inversión es un conjunto de instrumentos financieros seleccionados para realizar un negocio.

Fundamentación

Una cartera de activos financieros es una inversión en la que se reparte la totalidad del negocio invertido en los diferentes activos que lo sustentan. El portafolio eficiente se deriva de un proceso de minimizar el riesgo maximizando el rendimiento. Este modelo se fundamenta en la relación entre el rendimiento promedio y su varianza. Este último valor aparece como una representación del riesgo en forma de desviación estándar.

El modelo se apoya en estos puntos:

1. Hipótesis de los mercados eficientes.

2. Los rendimientos de los activos siguen una distribución normal.

3. Se conoce el promedio, la varianza y las correlaciones de los rendimientos.

Riesgo y rendimiento

El conjunto factible de carteras de inversión de dos activos se obtiene graficando las combinaciones del riesgo y rendimiento esperado.

El rendimiento para los periodos t y $t-1$ está dado por la Ecuación 1:

$$R_t = \frac{P - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

Donde: P_t y P_{t-1} son los precios de un activo financiero para los periodos t y $t-1$.

Por lo tanto, se define el rendimiento que se espera del activo para una muestra de T periodos como:

$$RE(R_t) = \bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t \quad (2)$$

Mientras que el riesgo se define como:

$$RI(R_t) = DE(R_t) = \sqrt{Var(R_t)} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2}$$

(3)

Se poseen activos financieros 1 y 2; y con las proporciones invertidas en cada uno de ellos w_1 y w_2, es posible construir un portafolio de inversión $P(w_1, w_2)$, donde:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (4)$$

Por lo anterior, el rendimiento esperado de $P(w_1, w_2)$ es:

$$RE(P) = w_1\bar{R}_1 + w_2\bar{R}_2 \quad (5)$$

y su respectivo riesgo:

$$RI(P) = \sqrt{w_1^2 Var R_1 + 2w_1w_2 Cov(R_1R_2) + w_2^2 Var R_2}$$

(6)

Conjunto factible y conjunto eficiente

Dado que la varianza del portafolio es:

$$Var(P) = w_1^2 Var R_1 + 2w_1w_2 Cov(R_1R_2) + w_2^2 Var R_2$$

(7)

El papel de la covarianza en el riesgo del portafolio resulta importante, pues, mientras los valores positivos de la covarianza desarrollan un mayor riesgo del portafolio, los negativos lo reducen. Según lo anterior, la curva del conjunto factible será más pronunciada mientras más negativa sea la covarianza y viceversa.

Dado que el coeficiente de correlación ρ entre los dos activos está dado por:

$$\rho(R_1R_2) = \frac{Cov(R_1R_2)}{DE(R_1)DE(R_2)}, -1 \leq r \leq 1$$

(8)

mientras menor sea ρ, mayor será la curva del conjunto factible y viceversa.

El portafolio de mínimo riesgo

La cartera de mínimo riesgo o de mínima varianza se llama "portafolio óptimo". Este se encuentra si uno elige las proporciones invertidas en cada uno de los activos financieros (w_1 y w_2), con tal de que la varianza del portafolio sea la mínima. El asunto de optimización para encontrar el portafolio con el mínimo riesgo con dos activos financieros está dado por:

$$Min\, w_1^2 Var R_1 + 2w_1w_2Cov(R_1R_2) + w_2^2 Var R_2$$

(9)

Sujeto a $w_1 + w_2 = 1$.

Sea la Ecuación 10:

$$s_1^2 = Var(R_1), s_2^2 = Var(R_2) y s_{1,2} = Cov(R_1R_2)$$

(10)

La función de Lagrange está dada por:

$$L = w_1^2 s_1^2 + 2w_1w_2s_{1,2} + w_2^2 s_2^2 + \lambda(1 - w_1 - w_2)$$

(11)

Mientras tanto, las condiciones de primer orden son estas ecuaciones:

$$\frac{\delta L}{\delta w_1} = 2w_1s_1^2 + 2w_2s_{1,2} - \lambda = 0$$

(12)

$$\frac{\delta L}{\delta w_2} = 2w_1S_{1,2} + 2w_2^2S_{1,2} - \lambda = 0$$

(13)

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 1 - w_1 - w_2 = 0$$

(14)

Al resolver las ecuaciones de la 12 a la 14, se obtuvieron los siguientes resultados para las proporciones invertidas en cada uno de los activos:

$$w_1 = \frac{s_2^2 - s_{1,2}}{s_1^2 + s_2^2 - 2s_{1,2}} \quad (15)$$

$$w_2 = 1 - w_1 \quad (16)$$

El resultado anterior de nuevo se expresa de la siguiente forma:

$$w_1 = \frac{Var(R_2) - Cov(R_1, R_2)}{Var(R_1) + Var(R_2) - 2Cov(R_1, R_2)} \quad (17)$$

Para buscar el portafolio de dos activos financieros, se plantea el siguiente problema:

$$min = w_1^2 Var R_1 + 2w_1w_2Cov(R_1R_2) + w_2^2 Var R_2$$

(18)

$$w_1 + w_2 = 1, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

(19)

RESULTADOS

Se utilizaron precios de acciones de Apple y Amazon para optimizar una cartera de inversión a través de Excel. En la siguiente tabla se aprecian los valores de los activos Pa(Apple) y Pb(Amazon) a lo largo de 12 meses:

Tabla 1. Precio de los activos

PRECIO DE LOS ACTIVOS.		
Periodo (t)	Pa(Apple)	Pb(Amazon)
20-Sep	$ 115.81	$ 3 148.73
20-Oct	$ 108.86	$ 3 036.15
20-Nov	$ 119.05	$ 3 168.04
20-Dic	$ 132.69	$ 3 256.93
21-Ene	$ 131.96	$ 3 206.20
21-Feb	$ 121.26	$ 3 092.93
21-Mar	$ 122.15	$ 3 094.08
21-Abr	$ 131.46	$ 3 467.42
21-May	$ 124.61	$ 3 223.07
21-Jun	$ 136.96	$ 3 440.16
21-Jul	$ 145.86	$ 3 327.59
21-Ago	$ 151.83	$ 3 470.79

En la Tabla 2 se observan los rendimientos Ra y Rb por periodo de un año de los activos de la tabla:

Tabla 2. Rendimientos.

RENDIMIENTOS		
Periodo (t)	Ra(Apple)	Rb(Amazon)
1_2	-6.00 %	-3.58 %
2_3	9.36 %	4.34 %
3_4	11.46 %	2.81 %
4_5	-0.55 %	-1.56 %
5_6	-8.11 %	-3.53 %
6_7	0.73 %	0.04 %
7_8	7.62 %	12.07 %
8_9	-5.21 %	-7.05 %
9_10	9.91 %	6.74 %
10_11	6.50 %	-3.27 %
11_12	4.09 %	4.30 %

En la Tabla 3, se tiene el promedio del rendimiento de los doce años, RE(Ra) y RE(Rb), la varianza de Ra y Rb, el riesgo RI que es la desviación estándar de Ra y Rb, y la Covarianza

Tabla 3. Promedio del rendimiento:

RE(Ra:Apple)	2.7096 %
RE(Rb:Amazon)	1.0279 %
VAR(Ra)	0.004832 %
VAR(Rb)	0.003127 %
RI(Ra)	6.9512 %
RI(Rb)	5.5916 %
COV(Ra, Rb)	0.002850 %

La matriz de Varianza y covarianza de los dos activos aparece en la Tabla 4.

Tabla 4. Matriz de varianza-covarianza

Varianza-Covarianza.		
	A	B
A	0.004832	0.002850
B	0.002850	0.003127

En la Tabla 5, se muestran tres carteras de diecinueve, donde Wa y Wb son los porcentajes invertidos en cada cartera, RE el rendimiento promedio de cada cartera, VAR la varianza y RI es el riesgo:

Tabla 5. Porcentaje invertido en cada cartera.

	P1	P2	P3
Wa(Apple)	5 %	10 %	15 %
Wb(Amazon)	95 %	90 %	85 %
RE(P)	1.1120 %	1.1961 %	1.2802 %
VAR(P)	0.003105 %	0.003094 %	0.003094 %
RI(P)	5.5719 %	5.5622 %	5.5627 %

En la gráfica de dispersión están los 19 portafolios. En el eje X se encuentra el riesgo y en el Y el rendimiento esperado. Aquí podemos ver el comportamiento de los portafolios:

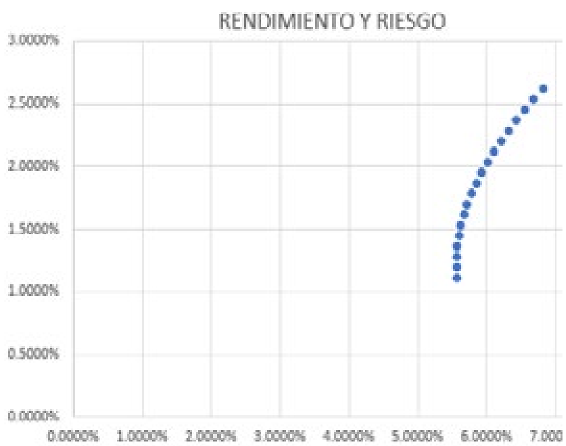

Figura 1. Gráfica de dispersión-Rendimiento-Riesgo.

En la Tabla 6 se obtiene el portafolio óptimo con ayuda de Excel. Si quisiéramos invertir dos millones de dólares con un riego mínimo de RI(P) = 5.56 % y con Rendimiento R(P) = 1.23 % y minimizando la varianza a 0.0031=VAR(P), deberían invertirse $ 245 283.66 dólares (el 12.26 %) a Wa, y $ 1 754 718.32 dólares (el 87.73 %) a Wb.

Tabla 6. Portafolio Óptimo.

PORTAFOLIO ÓPTIMO	
Wa(Apple)	12.2642 %
Wb(Amazon)	87.7359 %
Wa+Wb	100 %
R(P)	1.2342 %
VAR(P)	0.003093 %
RI(P)	5.5611 %
$Wa(Apple)	$ 245 283.66
$Wb(Amazon)	$ 1 754 718.32

CONCLUSIÓN

El trabajo pionero de Markowitz es un buen punto de partida para estudiar el problema de optimizar una cartera de inversión con herramientas matemáticas. Este método nos permitió conseguir el portafolio óptimo con información como el rendimiento y el riesgo. Al final, el inversor decide si pone sus recursos o no, aun con esta información a la mano. Este análisis amplía nuestra visión con base en una formulación matemática que respalda los resultados; nos previene de hacer inversiones al azar y nos escuda de la mercadotecnia. Es necesario considerar que, aunque existen variables que no se pueden controlar y es difícil predecir qué pasará dentro de un año, el análisis de mercado da resultados actualizados con base en el historial: usar modelos matemáticos es lo más cercano a invertir dignamente.

REFERENCIAS

[1] A. Mendizábal Zubeldia, L. M. Miera Zabalza y M. Zubia Zubiaurre, "El modelo de Markowitz en la gestión de carteras", Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, *Cuadernos de Gestión*, vol. 2., núm.° 1, 2002.

[2] A. Brito Gamaliel, B. Becerril Sánchez, *Finanzas Bursátiles*, Ciudad de México, México: Instituto Mexicano de Contadores Públicos, 2011.

[3] B. Graham, D. L. Dodd, *Security Analysis*, Estados Unidos: McGraw-Hill, 2009.

[4] B. Graham, *El inversor inteligente*, Estados Unidos: Harper Collins, 2019.

[5] M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New Haven, Connecticut: Yale University Press, 1959.

[6] N. Ramírez Carmona y O. García Salgado, "Estado del arte en teoría de portafolios: del análisis individual de acciones a la optimización multiobjetivo", Economía coyuntural. *Revista de temas de coyuntura y perspectivas*, vol. 1, núm.4, pp. 101-144.

[7] A. Rueda, *Para entender la bolsa*, Ciudad de México: CENGAGE Learning, 2008.

[8] Investing.com [Online]. Available:https://www.investing.com/equities/amazon-com-inc-historical-data

[9] S. Ross, R. Westerfield y B. Jordan, *Fundamentos de finanzas corporativas*, México: McGraw-Hill, 2014.