

ANÁLISIS DE UN PUENTE PEATONAL CONFORMADO POR UNA ESTRUCTURA SOPORTANTE EN FORMA DE TRIDITRABE Y ACOPLADA A MÓDULOS PRESFORZADOS TIPO TENSEGRITY

Analysis of a pedestrian bridge formed by a spatial double layer grid supporting structure and coupled to tensegrity prestressed modules

Ángel Otoniel González Martínez^{1*}, Jaime Moisés Horta Rangel¹,
Guadalupe Moisés Arroyo Contreras¹, Miguel Ángel Pérez Lara Y Hernández¹

¹Universidad Autónoma de Querétaro

*Autor de correspondencia
agonzalez188@alumnos.uaq.mx

RESUMEN

En este trabajo se estudia el comportamiento mecánico de un sistema tensegrity, empleando el método de doble descomposición de valores singulares, el cual consiste en encontrar los valores y vectores singulares del sistema de ecuaciones de equilibrio, y mediante su combinación lineal, determinar las coordenadas y las fuerzas axiales internas, bajo las cuales, el sistema tensegrity alcanza el equilibrio estático. Dicho estudio tiene un carácter no-lineal. A la vez, la estructura soportante del puente peatonal se estudia de acuerdo con la teoría de barras articuladas en el espacio. Las condiciones de frontera incluyen tanto los apoyos de la estructura soportante como de la propia estructura tensegrity. Los resultados obtenidos establecen el nivel de presfuerzo de las barras y tensores del sistema, así como las secciones correspondientes. Se muestran las características del análisis de dichos sistemas estructurales, así como diversas etapas del análisis no-lineal hasta obtener la forma estable que cumpla los requerimientos normativos en la materia.

Palabras clave: Análisis no-lineal, módulo Tensegrity, presfuerzo, estructura metálica, sistema estable.

ABSTRACT

In this paper, a novel configuration of a tensegrity system it is studied. The DSVD form-finding method is applied to obtain the numerical solution of the equilibrium equations. The nodal coordinates and the internal forces that allows the self-equilibrium of the tensegrity system are obtained. The nonlinear structural analysis of the tensegrity assemble is presented. At the same time, the supporting structure of the pedestrian bridge is studied according to the theory of spatial pin-jointed truss structures. Two boundary conditions cases that includes both the supports of the pedestrian bridge supportant structure and the ten-

segrity structure are analyzed, and there are determined the optimal boundary conditions that allows the desired mechanical behavior. The results obtained establish the prestress level of bars and cables elements, as well as the cross-section dimensions required. The characteristics of the analysis of both structural systems are described, as well as various stages of their equilibrium forms until obtaining the stable form that complies with the regulatory requirements in the matter.

Keywords: Non-linear analysis, tensegrity module, prestress, metallic structure, stable system.

INTRODUCCIÓN

La competitividad de los productos de la industria de la construcción (viviendas, edificios, cubiertas, naves industriales, vialidades, puentes vehiculares, puentes peatonales, etc.) es afectada por una gran cantidad de factores, que influyen en la toma de decisiones del cliente o usuario al momento de elegir un proyecto sobre otros. Algunos de estos factores son el monto total de la inversión, la relación costo-beneficio, la ubicación del proyecto, funcionalidad, innovación, atractivo visual, el impacto ambiental y social, entre otros. A través del diseño arquitectónico, es posible controlar muchos de los factores mencionados previamente y de esta manera brindar cualidades a los proyectos de construcción para que resulten atractivos a los usuarios y satisfagan sus necesidades.

Una solución alternativa para atender estas necesidades ha sido la implementación de los sistemas *tensegrity* en estructuras civiles, ya que además de ser atractivos para los usuarios poseen características mecánicas que, a comparación con los sistemas convencionales, incrementan su eficiencia estructural (relación entre carga sobre peso propio) [1]. Además, dada su composición, estos sistemas permiten el uso de materiales sustentables y la implementación de procesos constructivos eficaces, ya que gran porcen-



taje de la estructura se elabora en taller y, en campo, únicamente se realiza el montaje de la superestructura y la construcción de la cimentación.

Las estructuras *tensegrity* (ET) son sistemas compuestos por una red continua de cables bajo fuerzas de tensión, en la cual se encuentran elementos barra aislados, los cuales trabajan ante fuerzas de compresión [2]. Su nombre fue propuesto por R. B. Fuller como una contracción de *tensional integrity*.

Existen tantas definiciones de ET como autores e investigadores en este campo, pero las características de los sistemas considerados en esta investigación son las siguientes [3]:

Los elementos de la estructura son recto

Los elementos cable sólo trabajan a tensión, mientras que los elementos barra únicamente trabajan a compresión

El sistema es auto-equilibrante y

El presfuerzo es necesario para alcanzar el equilibrio estático.

Las ET surgieron a inicios de 1950 del trabajo de K. G. Snelson, R. B. Fuller y D. G. Emmerich. Desde entonces, la investigación en este tipo de sistemas ha crecido y se ha expandido desde las áreas del arte y la arquitectura a campos como las matemáticas, mecánica, ingeniería civil, robótica y nanotecnología [4].

En el campo de la ingeniería civil, la principal aplicación de las ET es como domos o cubiertas. La primera obra de este tipo llevada a la práctica fue la Arena de Gimnasia Olímpica (Figura 1), ubicada en Seúl, Corea del Sur, en el año 1986. Posteriormente surgieron obras con este principio de estructuración como la arena Red bird (EUA), el domo Sun Coast Dome (EUA), Georgia Dome (EUA), la cubierta del estadio La Plata (Argentina), Bifid Tension Dome (España), entre algunos otros.

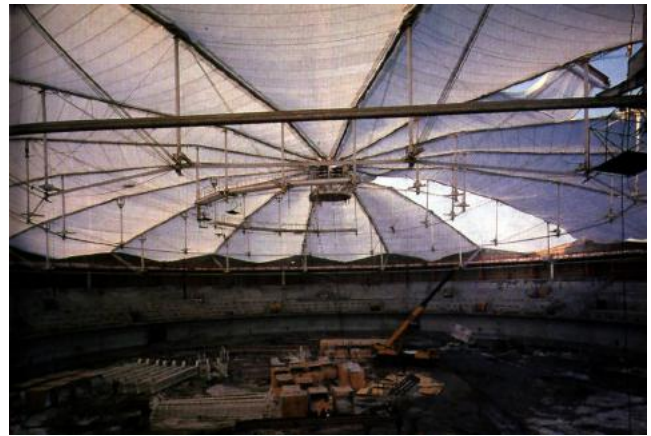


Figura 1. Arena de Gimnasia Olímpica, Seúl, Corea del Sur (1986) [5].

Sin embargo, la gama de aplicaciones de las ET en la ingeniería civil es reducida, ya que la segunda aplicación con mayor número de obras llevadas a la práctica son las pasarelas o puentes peatonales. De acuerdo con Jan De Boek [6], a nivel mundial, sólo existen 2 puentes peatonales construidos e inspirados en las características geométricas y en los principios estructurales de las ET. El registro del primer puente tipo *tensegrity* lo tiene la obra Bridge of Sticks (Figura 2), ubicada en Purmerend, Holanda, construida en el año 2001 y cubre un claro de 128 m. El segundo puente peatonal construido del que se tiene registro es el puente Kurilpa (Figura 3), ubicado en Brisbane, Australia. Tiene una longitud total de 470 m, con un claro máximo de 120 m y con 6.5 m de ancho [6].

Con respecto a las investigaciones documentadas sobre aplicación de las estructuras *tensegrity* en puentes peatonales, se han reportado las siguientes conclusiones:

Rhode-Barbarigos [9] presenta el diseño de un puente *tensegrity* adaptando la normativa estructural Suiza a las necesidades del proyecto. Este puente se diseñó ensamblando módulos *tensegrity* elementales. Diferentes configuraciones del puente fueron evaluadas para un mismo claro a cubrir, y mediante un estudio paramétrico se identificaron los factores que afectan en mayor medida el comportamiento de cada puente.



Figura 2. Puente de palitos (Bridge of Sticks), Purmerend, Holanda (2001) [7].



Figura 3. Puente Kurilpa, Brisbane, Australia (2009) [8].

Se definió un módulo pentagonal como la topología óptima en dicho caso de análisis. Adicionalmente, Rhode-Barbarigos [10] realizó un estudio de un puente peatonal basado en módulos *tensegrity* de "sección hueca", donde se compararon los resultados de dos metodologías empleadas para obtener la solución económica. Posteriormente, Rhode-Barbarigos [11] presenta un estudio de optimización aplicando algoritmos genéticos, con el objetivo de encontrar una solución de diseño eficiente, y sugiere algunas especificaciones de diseño en ausencia de normativas específicas para estructuras *tensegrity*.

Jan de Boek [6] realizó un estudio sobre diversas propuestas topológicas para establecer un puente basado en el principio *tensegrity*, mediante la unión de diversos

módulos básicos. Una de sus principales contribuciones trata de que a menor cantidad de módulos se incrementa la eficiencia del sistema, ya que se reducen los efectos de pandeo en los elementos. Sugiere que las superestructuras de los puentes peatonales basadas en los principios *tensegrity* deberán incluir amortiguadores, ya que aún no se cuenta con suficiente información sobre los efectos que provocarían las vibraciones inducidas cuando un usuario camine por dicho sistema.

Recientemente, Cobos [12] presenta el diseño estructural de un puente tipo *tensegrity*, donde realiza el análisis estático y el diseño estructural del sistema. El puente está compuesto por dos módulos básicos simétricos que cargan un sistema de vigas a flexión, sobre las cuales se desplanta la losa de piso.



Los sistemas tridilosa se componen por una estructura de acero tridimensional y un tablero mixto, mediante los cuales se combina la zona a compresión de los elementos de concreto con la zona a tensión de elementos de acero. Este sistema fue inventado por el ingeniero mexicano Heberto Castillo en 1966. En este sistema de estructuración se logra un alto grado de eficiencia (en algunos casos se alcanza hasta el 90% de eficiencia), que permite elaborar estructuras de bajo peso con resistencias altas a una inversión económica baja. Una de las características de este sistema es que permite reducir un 66% el consumo de concreto y hasta un 40% el uso de acero, de acuerdo con Lorenzo *et al* [13].

En este documento se presenta el procedimiento de búsqueda de forma en equilibrio y el análisis estático no lineal de un módulo *tensegrity* que se acoplará a un sistema de tridilosa. Dicho acoplamiento formará la superestructura de un puente peatonal.

DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

La superestructura del puente peatonal se compone de dos sistemas: el módulo *tensegrity* y el sistema tridilosa.

Descripción del módulo Tensegrity

El módulo *tensegrity* desarrollado en este trabajo se denominará "Módulo X-T", únicamente por simplicidad. Se concibe que el módulo "X-T" es una adaptación al espacio tridimensional del módulo denominado "X-Cross", el cual se considera el sistema *tensegrity* más simple en un espacio geométrico bidimensional [14]. Esta adaptación al espacio 3D tiene el fin de generar un sistema *tensegrity* con características geométricas y arquitectónicas que ayuden a implementarlo en una pasarela peatonal.

La topología del módulo "X-T" se describe en la Tabla 1, y en la Figura 4 se muestra la numeración de los nodos.

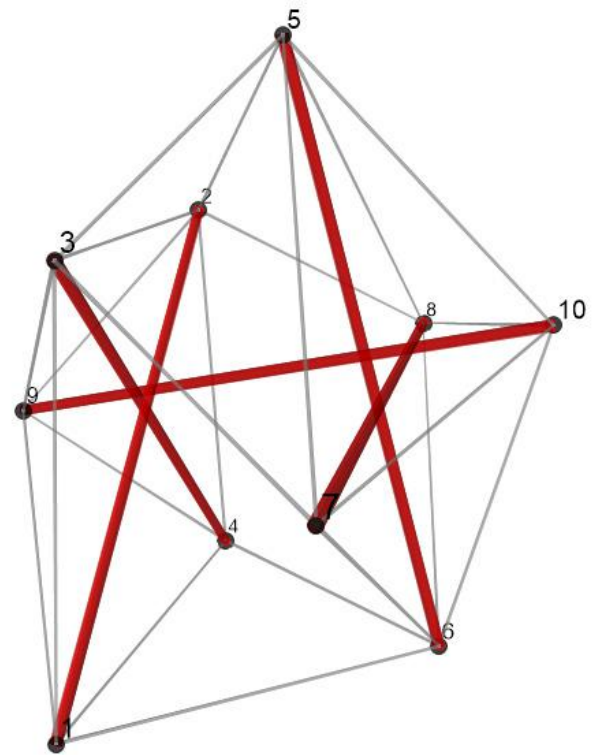


Figura 4. Numeración de nodos del módulo "

El espacio libre interior del módulo "X-T" para la circulación de los peatones (Figuras 5.a y 5.b) es de 2.70 m de ancho y de 2.80 m de altura, mientras que el ancho total es de 4.90 m y la altura total es de 5.45 m. El módulo "X-T" se compone de 27 elementos, de los cuales 5 elementos son tipo barra y los 22 elementos restantes son tipo cable que convergen a 10 nodos.

Descripción de la triditrabe

La pasarela del puente peatonal se compone por un módulo de tridilosa unifilar, la cual será denominada como triditrabe y cuya longitud total es de 28.0 m. El ancho de la tridilosa es de 2.80 m y tiene 1.50 m de altura. Se propone un sistema de piso con paneles "W", con un peso de 1960 N/m². En la Figura 6 se muestra la vista en planta y la vista longitudinal del sistema tridilosa empleado. La carga viva actuante, de acuerdo con la normativa [15], es de 4310 N/m².

Tabla 1. Conectividad del módulo "X-T".

Número de elemento	Nodo inicial	Nodo final	Número de elemento	Nodo inicial	Nodo final	Número de elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2	11	7	6	21	10	8
2	3	4	12	6	8	22	3	7
3	5	6	13	8	5	23	2	8
4	7	8	14	1	9	24	2	5
5	9	10	15	9	2	25	5	3
6	1	4	16	3	9	26	1	6
7	4	2	17	9	4	27	6	4
8	2	3	18	5	10	-	-	-
9	3	1	19	10	6	-	-	-
10	5	7	20	7	10	-	-	-

Las coordenadas resultantes del diseño arquitectónico del módulo "X-T" son las siguientes:

Tabla 2. Coordenadas nodales

Número de nodo	Coordenadas			Número de nodo	Coordenadas		
	X (m)	Y(m)	Z(m)		X(m)	Y(m)	Z(m)
1	0.000	0.000	0.000	6	2.800	2.300	0.000
2	0.000	3.800	3.800	7	3.000	0.800	2.500
3	0.200	0.000	3.900	8	3.000	4.800	2.500
4	0.200	4.000	0.000	9	-1.300	2.200	2.000
5	2.800	2.000	5.400	10	3.700	2.200	2.000

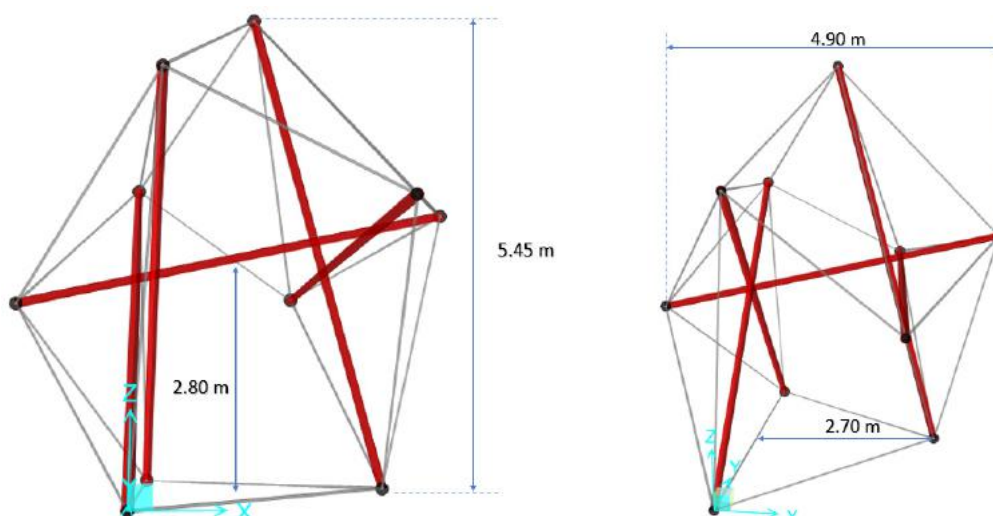
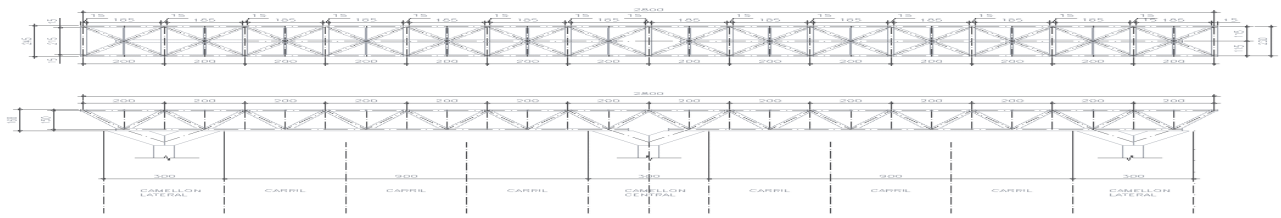
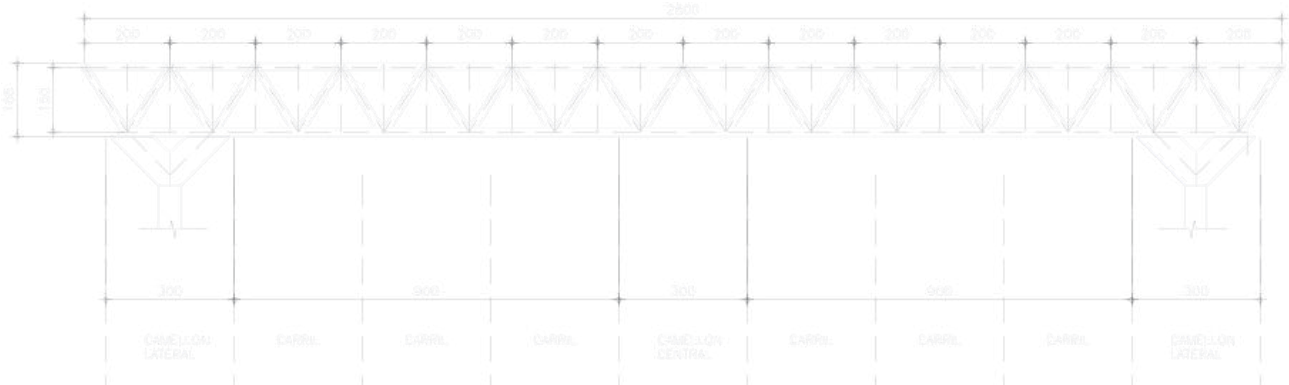


Figura 5. Dimensiones del espacio interior libre para la circulación peatonal del módulo "X-T".



Vista en planta



Vista longitudinal

Figura 6. Vista en planta y vista longitudinal del sistema tridilosa.

CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LAS ESTRUCTURAS TENSEGRITY

La solución del problema mecánico-estructural de las ET implica el análisis de tres principios mecánicos a satisfacer [16]:

1. El equilibrio entre las fuerzas internas $\{t\}$ con las fuerzas externas del sistema $\{f\}$,
2. La compatibilidad entre los desplazamientos externos (nodales) $\{u\}$ con las deformaciones internas (elongaciones o acortamientos) $\{e\}$, y,
3. La relación entre las fuerzas internas $\{t\}$ con las deformaciones internas $\{e\}$, o de manera análoga, la relación entre las fuerzas externas $\{f\}$ con los desplazamientos $\{u\}$.

Estos principios mecánicos pueden sistematizarse a manera de ecuaciones en términos matriciales y vectoriales como:

1. Ecuaciones de equilibrio

$$[A] * \{t\} = \{f\} \quad (1)$$

Donde a la matriz $[A]$ se le denomina matriz de equilibrio.

2. Ecuaciones de compatibilidad

$$\{e\} = [H] * \{u\} \quad (2)$$

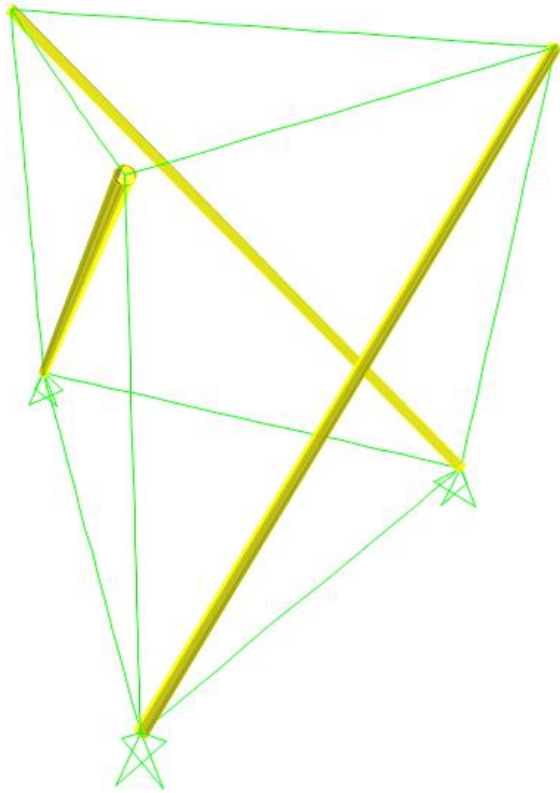
Donde a la matriz $[H]$ se le denomina matriz de compatibilidad.

3. Ecuaciones de rigidez

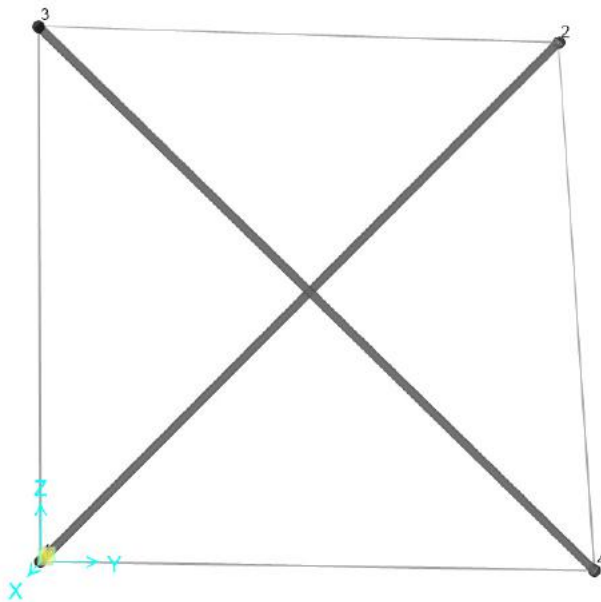
$$[K] * \{u\} = \{f\} \quad (3)$$

Donde a la matriz $[K]$ se le denomina matriz de rigidez.

Para comprender el comportamiento mecánico de las ET es importante analizar los principios mencionados previamente. Consideremos los sistemas *tensegrity* más simples tanto para el caso 2-D ("X-Cross") como para el caso 3D ("Simplex" o "3-plex") de las Figuras 7.a y 7.b, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 7. Sistemas tensegrity más simples para el espacio 2-D (a), denominado "X-Cross", y para el espacio 3-D (b), denominado "3-plex".

Dado que los sistemas *tensegrity* trabajan únicamente ante fuerzas axiales, al plantear las ecuaciones de equilibrio para el sistema 2-D (Figura 7.a) tendremos un sistema de dos ecuaciones de equilibrio: una para la sumatoria de fuerzas en la dirección X y otra para la dirección Y, con 3 variables incógnitas relacionadas a las fuerzas internas de cada elemento que se conectan a cada uno de los nodos. De manera equivalente, para el sistema 3-D (Figura 7.b) tendremos un sistema de 3 ecuaciones: cada uno correspondiente a las direcciones X, Y y Z, con 4 variables incógnitas relacionadas a cada uno de los elementos que se conectan a cada nodo.

La indeterminación estática de una estructura ocurre cuando las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las fuerzas internas de sus componentes que, en términos matemáticos, se define como un sistema linealmente dependiente. Esta característica puede traducirse en que el sistema tiene más elementos de los mínimos necesarios para garantizar el equilibrio estático en el respectivo espacio dimensional del sistema. La indeterminación estática (dependencia lineal) es la característica que brinda la propiedad a las ET de lograr el equilibrio estático a través de la inducción del presfuerzo.

Al evaluar el rango de la matriz $[A]$ es posible conocer el número máximo de columnas o filas que son linealmente independientes y, de acuerdo con Pellegrino y Calladine [17], se asocian a los estados de presfuerzo independientes que permiten el equilibrio del sistema, es decir, si el espacio nulo de $[A]$ tiene dimensión $s=0$, el ensamble es estáticamente determinado, por lo que no requiere efectos de presfuerzo para lograr el equilibrio estático. Sin embargo, si $s > 0$, el ensamble es estáticamente indeterminado y el número de estados independientes de presfuerzo se determina mediante

$$s = b - r^A \quad (4)$$



Donde b es el número de elementos del ensamble y r^A es el rango de la matriz de equilibrio.

En términos similares, una estructura es cinemáticamente determinada, si la posición espacial de un nodo en un ensamble se determina únicamente por la longitud de los elementos que se conectan en dicho nodo. Por otro lado, se dice que una estructura es cinemáticamente indeterminada, si la ubicación espacial de un nodo no se determina únicamente por la longitud de los elementos que convergen en dicho nodo [18]. En otras palabras, y citando a Sergio Pellegrino [17]: "Un marco es cinemáticamente determinado, si cualesquier desplazamiento de un nodo, desde su posición inicial a otra posición diferente, causa un cambio de longitud en los elementos" que se conectan al nodo o pertenecen al ensamble. Además, menciona que "un marco es cinemáticamente indeterminado, si el desplazamiento de un nodo, no cambia la longitud de los elementos del ensamble". El movimiento nodal de un marco cinemáticamente indeterminado se denomina mecanismo, el cual puede clasificarse como mecanismo infinitesimal o como mecanismo finito. El mecanismo infinitesimal hace referencia a un desplazamiento nodal pequeño, mientras que el mecanismo finito alude a desplazamientos nodales grandes.

Para determinar el grado de indeterminación cinemática, se analizará el sistema de ecuaciones de compatibilidad (Ecuación 2), el cual relaciona los desplazamientos nodales $\{u\}$ con las deformaciones $\{e\}$, mediante la matriz de compatibilidad $[H]$. Del principio del trabajo virtual, sabemos que en un sistema en equilibrio el trabajo virtual realizado por las cargas externas $\{f\}$ es igual al trabajo virtual hecho por las cargas internas $\{t\}$. Por lo tanto, para los desplazamientos virtuales $\{\delta u\}$, los cuales pueden ser de valor arbitrario, y las correspondientes elongaciones virtuales $\{\delta e\}$, tenemos que [14]:

$$\{f\}^T \{\delta u\} = \{t\}^T \{\delta e\} \quad (5)$$

Sustituyendo la Ecuación 2 en la Ecuación 5, tenemos:

$$\{f\}^T \{\delta u\} = \{t\}^T [H] \{\delta u\} \quad (6)$$

Ya que los desplazamientos virtuales son valores arbitrarios, simplificamos como:

$$\{f\}^T = \{t\}^T [H] \quad (7)$$

De la relación entre las cargas externas $\{f\}$ y las fuerzas internas $\{t\}$ de las ecuaciones de equilibrio (Ecuación 1), obtenemos que:

$$\{f\}^T = \{t\}^T [H] = \{t\}^T [A]^T$$

Por lo tanto:

$$[H] = [A]^T \quad (8)$$

Y la relación cinemática puede expresarse como:

$$\{e\} = [A]^T * \{u\} \quad (9)$$

El número total de grados de libertad de una estructura es igual a:

$$GLT = d * n \quad (10)$$

Donde d corresponde a la dimensión del espacio geométrico y n al número total de nodos. Ya que los movimientos de cuerpo rígido no generan deformaciones en los elementos (elongaciones o extensiones), podemos excluirlos de este análisis cinemático de la siguiente manera:

$$GL = (d * n) - n^{cr} \quad (11)$$

Donde n^{cr} es el número de movimientos de cuerpo rígido del sistema. Por lo tanto, si un desplazamiento nodal $\{u\}$ (libre de los movimientos de cuerpo rígido), no provoca una deformación (cambio de la longitud de los elementos), es decir:

$$[A]^T * \{u\} = \{0\} \quad (12)$$

Entonces $\{u\}$ es un mecanismo, el cual identificaremos como $\{um\}$. Por lo tanto, el número de mecanismos independientes, o bien, el grado de indeterminación cinemática (m) de una estructura auto equilibrante es:

$$m = (d * n) - n^{cr} - r^A \quad (13)$$

Donde $rA = \text{rango } [A] = \text{rango } [A]T$.

De esta manera, identificamos que el primer procedimiento para resolver un problema mecánico relacionado a una ET se enfocará en estabilizar los mecanismos internos, identificando el presfuerzo adecuado para alcanzar el equilibrio estático. Dicho procedimiento es denominado búsqueda de forma (*form-finding*) o búsqueda de fuerzas en equilibrio (*force-finding*). La clasificación del grado de indeterminación estática y cinemática de estructuras libres de apoyos fijo puede consultarse en la referencia [17], donde se modifica la regla de Maxwell y se adapta a las características de las estructuras auto equilibrantes.

BÚSQUEDA DE FORMA Y FUERZAS EN EQUILIBRIO

El análisis de las ET requiere implementar un procedimiento inicial de búsqueda de forma (*form-finding*) y del nivel de presfuerzo (*force-finding*) requerido para alcanzar el estado de equilibrio (BFF) [19]. Este procedimiento consiste en calcular parámetros que se asocian al equilibrio estático del sistema como ángulos de giro, la relación entre las longitudes cable-barra o la relación entre la fuerza axial y la longitud. Este último parámetro es conocido como coeficiente de densidad de fuerza.

Los métodos de BFF para las ET han sido investigados por una gran cantidad de autores [20] y pueden clasificarse de acuerdo con el enfoque en el que brinden la solución al problema. De manera general, se pueden identificar dos grupos de metodologías: las

cinemáticas y las estáticas. Los métodos cinemáticos asocian la solución de una ET predeterminada, maximizando la longitud de los elementos barra y manteniendo constante la longitud de los cables. La solución de este grupo de métodos se expresa en función de ángulos de rotación de algunos de los elementos con respecto al sistema completo o directamente mediante la relación entre la longitud de los elementos cable entre la longitud de los elementos barra. Los métodos estáticos proveen la solución del sistema de ecuaciones de equilibrio de una ET con topología definida, mediante una relación entre la fuerza de cada elemento y las configuraciones en equilibrio de la estructura.

Para el análisis de la forma en equilibrio y de los valores de presfuerzo de la estructura propuesta, se aplicará el método estático conocido como densidades de fuerza [21] para la formulación del sistema de ecuaciones, mientras que para la resolución de dicho sistema se empleará el método algebraico desarrollado por Yuan *et al.* [22], denominado "Doble Descomposición de Valores Singulares" (DDVS).

Método de las densidades de fuerza: Formulación de las ecuaciones de equilibrio

Consideremos el nodo i que se conecta a los nodos j y k por los elementos ij y por ik , respectivamente (Figura 8). Las ecuaciones de equilibrio están dadas por:

$$(x_i - x_j) \frac{t_{ij}}{l_{i,j}} + (x_i - x_k) \frac{t_{i,k}}{l_{i,k}} = f_{i,x}^{ext} \quad (14.a)$$

$$(y_i - y_j) \frac{t_{ij}}{l_{i,j}} + (y_i - y_k) \frac{t_{i,k}}{l_{i,k}} = f_{i,y}^{ext} \quad (14.b)$$

$$(z_i - z_j) \frac{t_{ij}}{l_{i,j}} + (z_i - z_k) \frac{t_{i,k}}{l_{i,k}} = f_{i,z}^{ext} \quad (14.c)$$



Donde $f_{a,b}$ y $l_{a,b}$ son la fuerza interna y la longitud del elemento AB que conecta los nodos A con B. Este sistema de ecuaciones puede simplificarse y linealizarse empleando la notación de densidades de fuerza donde $q_{a,b} = t_{a,b}/l_{a,b}$.

$$(x_i - x_j)q_{i,j} + (x_i - x_k)q_{i,k} = f_{i,x}^{ext} \quad (15.a)$$

$$(y_i - y_j)q_{i,j} + (y_i - y_k)q_{i,k} = f_{i,y}^{ext} \quad (15.b)$$

$$(z_i - z_j)q_{i,j} + (z_i - z_k)q_{i,k} = f_{i,z}^{ext} \quad (15.c)$$

Las ecuaciones 15.a, 15.b, y 15.c pueden reescribirse como:

$$(q_{i,j} + q_{i,k})x_i - q_{i,k}x_j - q_{i,k}x_k = f_{i,x}^{ext} \quad (16.a)$$

$$(q_{i,j} + q_{i,k})y_i - q_{i,k}y_j - q_{i,k}y_k = f_{i,y}^{ext} \quad (16.b)$$

$$(q_{i,j} + q_{i,k})z_i - q_{i,k}z_j - q_{i,k}z_k = f_{i,z}^{ext} \quad (16.c)$$

Para expresar de manera matricial el sistema de ecuaciones 16.a, 16.b, y 16.c, se requerirá emplear la matriz de conectividad [C], en la cual cada fila corresponde a un elemento de la estructura y cada columna corresponde a un nodo. Por ejemplo, para el elemento AB se colocará el valor 1 en el nodo inicial (nodo A), y el valor de -1 en el nodo final (nodo B), mientras que en los demás nodos se asignará el valor 0. Además, las coordenadas de los nodos se expresarán de manera vectorial, es decir, $\{X\} = \{x_1 \dots x_n\}^T$ corresponde a las coordenadas nodales en el eje X, y de manera análoga para los vectores $\{Y\} = \{y_1 \dots y_n\}^T$ y $\{Z\} = \{z_1 \dots z_n\}^T$. El vector de los coeficientes de densidades de fuerza será $\{q\} = \{q_1 \dots q_n\}^T$. Finalmente el sistema se expresará como:

$$[A]\{q\} = \begin{pmatrix} [C]^T \text{diag}([C]\{X\}) \\ [C]^T \text{diag}([C]\{Y\}) \\ [C]^T \text{diag}([C]\{Z\}) \end{pmatrix} \{q\} = 0 \quad (17)$$

Donde la matriz [A] es la matriz de equilibrio [19].

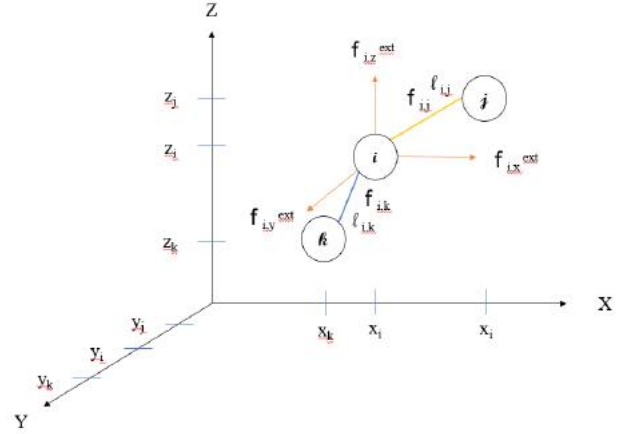


Figura 8. Equilibrio de un nodo libre [19] (Figura adaptada [23])

Descomposición de valores singulares

La descomposición de valores singulares (DVS), propuesta por Pellegrino [24], ha resultado en un método eficaz para encontrar el vector $\{q\}$ y establecer una solución no trivial de la ecuación (17). Este método consiste en que una matriz [A] de dimensiones $3n * b$, donde n es el número de nodos y b el número de elementos, contiene rA valores singulares v_i , distintos de cero, ordenados de manera decreciente que a su vez son las raíces cuadradas de los eigenvalores λ_i del producto matricial $[A]^T[A]$.

La factorización DVS de la matriz [A] se da de la siguiente manera:

$$[A] = [U][V][W]^T \quad (18)$$

Donde $[U] = [u_1 \dots u_{3n}]$ es una matriz ortogonal de dimensiones $3n * 3n$, con vectores u_i ortonormales. $[W] = [w_1 \dots w_b]$ es una matriz ortogonal de dimensiones $b * b$. La matriz ortogonal [V] de dimensiones $3n * b$ contiene rA elementos distintos de cero en la diagonal principal, cuyas columnas corresponden

a los vectores singulares del lado derecho de A , y elementos cero en los demás componentes de la matriz (Figura 9). Los vectores u_i y w_i corresponden a los vectores singulares del lado izquierdo y del lado derecho. Además a partir de esta factorización Pellegrino [24] plantea las siguientes ecuaciones:

$$[A]\{w_i\} = \begin{cases} v_{ii}u_i & i = 1, \dots, r^A \\ 0 & i = r^A + 1, \dots, 3n \end{cases} \quad (19)$$

$$[A]\{u_i\} = \begin{cases} v_{ii}w_i & i = 1, \dots, r^A \\ 0 & i = r^A + 1, \dots, b \end{cases} \quad (20)$$

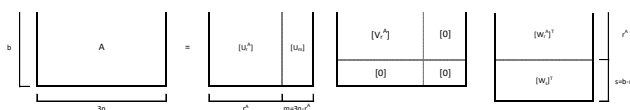


Figura 9. Ilustración gráfica de la DVS de la matriz $[A]$ (Figura adaptada [25]).

La interpretación física que propone Pellegrino de la Ecuación 19, orientada a la parte estática del problema mecánico, es [17]: “De la ecuación 1 a la r^A , se tiene que los primeros r^A vectores singulares izquierdos son las cargas del sistema en equilibrio con los esfuerzos del sistema correspondientes a los vectores singulares del lado derecho, multiplicados por los valores singulares correspondientes”. Así resulta en r^A conjuntos ortogonales de carga y sus correspondientes esfuerzos ortogonales. Sin embargo, las $s=3n-r^A$ ecuaciones restantes establecen que los últimos $s=3n-r^A$ vectores singulares derechos corresponden a las fuerzas internas equilibrantes del sistema.

Para la Ecuación 20, Pellegrino brinda la siguiente interpretación [17]: “Las primeras r^A ecuaciones, [sic] establecen que los primeros r^A vectores izquierdos, [sic] son los desplazamientos del sistema compatibles, con las deformaciones del sistema, correspondientes a los vectores del lado derecho, divididos por sus respectivos valores singulares”. Las últimas $m=b-r^A$ ecuaciones establecen que los

últimos $m=b-r^A$ vectores singulares del lado izquierdo son libres de deformación, o modos de desplazamiento de energía cero.

Sin embargo, ya que los sistemas tensegrity pueden tener más de un modo de presfuerzo independiente, resulta conveniente determinar el modo de presfuerzo óptimo del sistema, para lo cual se empleará la técnica de doble descomposición de valores singulares, propuesta por Yuan et al. [22].

Doble descomposición de valores singulares

La técnica denominada “Doble Descomposición de Valores Singulares” (DDVS) fue propuesta por Yuan et al. [22] para determinar el nivel de presfuerzo óptimo de domos tensegrity, sin embargo, su eficacia no se limita únicamente a este tipo de estructuras, ya que en investigaciones como la de Ochoa [26] y en Cobos [12] se demostró su efectividad en aplicaciones distintas a las propuestas por Yuan et al.

Este método se basa en encontrar los siguientes modos de pretensado [22]:

Modo de pretensado independiente (MPI). Este modo se obtiene directamente de la DVS de la matriz de equilibrio $[A]$ y satisface únicamente la condición de equilibrio de la ecuación (17). A este modo de presfuerzo se le designará como $[T]$.

Modo de pretensado integral (MPIN). Es la combinación lineal del MPI, que además de satisfacer la condición de equilibrio toma en cuenta la simetría de la estructura. A este modo de presfuerzo se le designará como $[TP]$.

Modo factible de pretensado integral (MFPI). Es la combinación lineal del MPIN, que cumple con la condición de rigidez unilateral de los elementos. Este modo de presfuerzo satisface la condición de que los elementos barra trabajan a compresión y los cables trabajan bajo tensión. A este modo se le designará como $[TF]$. En caso que exista más de un MFPI, se generará un modo adicional denominado modo de pretensado óptimo (MPO), y será representado por el vector $[TO]$.



El procedimiento de optimización se describe a continuación. Posteriormente de aplicar la DVS de la matriz [A] y determinar el o los MPI, procederemos a determinar el MPIN. Se designará a los "s" últimos vectores de la matriz [W] como los modos de pretensado independientes [T].

El MPIN puede expresarse como la combinación lineal de los diversos MPI, es decir:

$$G = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s \quad (21)$$

Donde α_i es una constante denominada coeficiente de participación de los modos de presfuerzo.

Para considerar las características geométricas de simetría del ensamble, los elementos con posición similar (simétrica) se agruparán en un mismo conjunto y tendrán el mismo nivel de presfuerzo. Para una estructura con g grupos de simetría, el modo de pretensado es:

$$G_{bx1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ G_g \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Se puede expresarse empleando los vectores bases de fuerzas internas (vectores canónicos) e_i , de valor unitario en la posición i, y con valores de cero en las demás posiciones de la siguiente manera:

$$G_{bx1} = \{e_1 \quad \dots \quad e_i \quad \dots \quad e_g\} \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ G_g \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Igualando las Ecuaciones 21 y 24, tenemos:

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s = e_1 g_1 + e_2 g_2 + \dots + e_g g_g \quad (25)$$

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s + (-e_1 g_1) + (-e_2 g_2) + \dots + (-e_g g_g) = 0 \quad (26)$$

La Ecuación 25 puede expresarse de manera matricial como:

$$[P]\{\omega\} = 0 \quad (27)$$

Donde [P] es una matriz de dimensiones $b \times (s+g)$ que se compone como:

$$[P] = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_i \ \dots \ T_s \ -e_1 \ -e_2 \ \dots \ -e_g] \quad (28)$$

y $\{\omega\}$ es un vector de dimensión $(s+g)$ compuesto de la siguiente manera:

$$\{\omega\} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_i \ \dots \ \alpha_s \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_g]^T \quad (29)$$

Al aplicar la descomposición de valores singulares a la matriz [P], tenemos que la factorización es de la forma:

$$G = \{G_1 \ G_1 \ G_1 \ \dots \ G_i \ G_i \ G_i \ \dots \ G_g \ G_g \ G_g\}^T$$

$$[P] = [U'][V'][W']^T \quad (30)$$

Las matrices [U'], [V'] y [W'] tienen las mismas características y el mismo significado que las descritas previamente. El rango de la matriz [P] será rP . Los vectores $\{w_i\}$ con $rP + 1 < i < (s + g)$ corresponden al llamado MPIN, los cuales conducen a la siguiente ecuación:

$$[P]\{w_i\} = 0 \quad (31)$$

De la Ecuación 30, tenemos que los vectores $\{w_i\}$ son la solución de $\{w\}$. La cantidad de MPIN del ensamble corresponde a:

$$s' = s + g - rP \quad (32)$$

De acuerdo con el valor de s' , las posibles respuestas son:

$s'=1$, si sólo existe un MPIN y si cumple con las condiciones de unilateralidad de los elementos cable y los elementos barra. Este

modo corresponde al MFPI. Directamente el vector $\{w_i\}$ que cumpla la condición correspondiente a $\{w_i\}=\{G\}=\{TF\}$. En caso de que no se cumpla la condición de rigidez unilateral, se considera que el ensamble no es presforzable, ya que no existe ningún MFPI, por lo que es necesario modificar la configuración del sistema (coordenadas de los nodos, la longitud de los elementos o la conectividad).

$s'=0$. En este caso no existe un MFPI, por lo que se tienen que modificar la configuración del sistema (coordenadas de los nodos, la longitud de los elementos o la conectividad).

$s' > 1$. Existen múltiples MFPI, es decir, $\{G_1\}$, ..., $\{G_{s'}\}$. Para determinar el MFPI que cumpla con las condiciones establecidas, se empleará:

$$[TF] = \{TF_1\}\beta_1 + \dots + \{TF_{s'}\}\beta_{s'} \quad (33)$$

Donde b es el coeficiente de participación de los MFPI. Aquel vector que cumpla con las condiciones de unilateralidad de los elementos tipo barra y tipo cable, respectivamente, se denominará Modo de pretensado óptimo (MPO) y se representará con el vector $\{TO\}$.

El procedimiento de búsqueda de forma y de fuerzas en equilibrio se llevó a cabo mediante algoritmos desarrollados en el *software Matlab*.

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Las ET presentan un comportamiento no lineal ante cargas externas, debido a que tanto la rigidez del sistema como las cargas están en función de los desplazamientos y/o las deformaciones. Adicionalmente, el presfuerzo de sus elementos es un efecto de origen geométrico no lineal que brinda el equilibrio del sistema [27]. En este trabajo se considerarán únicamente los efectos de origen geométrico en el rango elástico del material.

El método del elemento finito (MEF) es un procedimiento numérico empleado para encontrar la solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales que permiten modelar un sistema físico. El modelo matemático asociado al funcional optimizado de la energía de deformación es el siguiente:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial (u)} = 0 = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_V [G]^T [MF] [G] dV \{U\} = \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} dV + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Donde $[B]$ es la matriz de derivadas de funciones de forma, $[D]$ es la matriz de constantes elásticas del material, $[G]$ es la matriz de derivadas parciales de funciones de forma, $[MF]$ es la matriz de fuerzas de membrana, $\{U\}$ es el vector de desplazamientos nodales, $[N]$ es la matriz de funciones de forma, $\{b_x \ b_y \ b_z\}^T$ es el vector de fuerzas de cuerpo y $\{F_x \ F_y \ F_z\}^T$ es el vector de fuerzas externas nodales [28].

En el caso de las estructuras tensegrity, los miembros estructurales son representados mediante elementos tipo barra, a los cuales se asocian las siguientes funciones de forma:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad (35)$$

$$N_2(x) = \frac{x}{l} \quad (36)$$

Estas funciones son los componentes de la matriz $[N]$. La estructura de cada una de las matrices previamente mencionadas puede ser consultada en [28].

El modelo matemático de la Ecuación 34 puede representarse de manera simplificada como:

$$[K_t]\{U\} = \{[K] + [K_G]\}\{U\} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Donde $[K_t]$ es la matriz tangente de rigidez, $[K]$ es matriz de rigidez elástica, $[K_G]$ es la matriz de rigidez geométrica y $\{W_x \ W_y \ W_z\}^T$ es el vector de fuerzas asociadas al peso propio de cada elemento.



Análisis estático no-lineal

La solución de la Ecuación 37 se llevará a cabo empleando un método iterativo-incremental, denominado Newton-Raphson. El sistema de la Ecuación 37 se expresará como:

$$[K_t]\Delta\{U\}^j = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Donde Δ simboliza el cambio en la iteración "j" del vector de desplazamientos $\{U\}$.

Para elementos barra, donde únicamente obran efectos axiales, las matrices de rigidez tienen la siguiente estructura:

$$[K] = \left(\frac{EA}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[K_G] = \left(\frac{T}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material, A es el área de la sección transversal del cada elemento, L es la longitud del elemento y T es la fuerza axial interna, valor que se asocia naturalmente al presfuerzo del sistema. La fuerza interna T corresponde al presfuerzo de los elementos cable y su valor inicial, en el elemento i, corresponde directamente con el componente i del vector $\{TF\}$, obtenido en el proceso de búsqueda de forma en equilibrio.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Forma y fuerzas en equilibrio

Una vez definida la conectividad del sistema tensegrity (sección 2.1) se elaboró la matriz de equilibrio [A] mediante la Ecuación 17. Se evaluó la cantidad de estados de presfuerzo independientes con la Ecuación 4 que para este caso corresponde a $s=3$. Posteriormente se realizó la primera DVS a la matriz de equilibrio y se designó a los últimos 3 vectores de la matriz [W] como la matriz de MPI [T]. Al agrupar los elementos de simetría equivalentes y reexpresar el sistema de acuerdo con las Ecuaciones 22 a 26, se obtiene la matriz [P], la cual se factorizará con la técnica DVS. El número de modos de pretensado integral, evaluado con la Ecuación 32, es igual a $s'=3$. Lo que sugiere la existencia de 3 modos de pretensado integral. Las 3 últimas columnas de la matriz [W'] se denominarán como la matriz [TP]. Mediante la combinación lineal de los de la matriz [TP] con una matriz canónica, de acuerdo con lo establecido en la Ecuación 33, se obtienen 3 vectores (matriz [TF]), de los cuales el primer vector cumple con las condiciones de unilateralidad. Este vector corresponde al MPO.

Los resultados obtenidos de cada uno de los modos de pretensado del sistema tensegrity en estudio se muestran en la Tabla 3. El proceso anterior se llevó a cabo de manera iterativa modificando las coordenadas nodales hasta que cumplieran las condiciones de equilibrio, simetría y unilateralidad, requeridas por el procedimiento de BFF.

Las coordenadas resultantes se muestran en la Tabla 4.

Ya que un valor singular corresponde a la raíz cuadrada de un valor característico, es necesario calcular la norma del primer vector de la matriz [TF], la cual corresponde al MPO. Este vector normalizado corresponde a los valores de presfuerzo resultantes del proceso de BFF y se muestra en la Tabla 5.

Tabla 3. Modos de pretensado del módulo "X-T"

Modos de pretensado independiente [T]			Modos de pretensado integral [TP]			Modos factibles de pretensado integral [TF]		
0.000	0.000	-0.566	-0.407	-0.485	0.315	-0.327	0.198	-0.118
-0.012	0.025	-0.449	-0.012	-0.378	-0.598	-0.264	0.160	-0.075
-0.534	0.052	-0.062	-0.578	0.349	-0.209	-0.252	-0.218	0.186
-0.483	-0.238	-0.001	0.327	-0.198	0.118	-0.200	-0.324	0.010
-0.197	0.394	-0.096	0.264	-0.160	0.075	-0.130	0.087	0.277
-0.075	0.149	0.306	0.252	0.218	-0.186	0.148	-0.087	0.176
-0.057	0.114	0.330	0.200	0.324	-0.010	0.169	-0.100	0.155
-0.109	0.218	0.320	0.130	-0.087	-0.277	0.143	-0.082	0.231
-0.043	0.085	0.326	-0.148	0.087	-0.176	0.172	-0.103	0.133
0.231	0.234	-0.023	-0.169	0.100	-0.155	0.084	0.208	0.062
0.316	0.196	-0.007	-0.143	0.082	-0.231	0.127	0.230	0.016
0.312	0.205	-0.010	-0.172	0.103	-0.133	0.124	0.232	0.023
0.255	0.275	-0.029	-0.084	-0.208	-0.062	0.090	0.237	0.078
0.069	-0.138	0.121	-0.127	-0.230	-0.016	0.096	-0.061	-0.079
0.122	-0.245	0.140	-0.124	-0.232	-0.023	0.128	-0.082	-0.156
0.124	-0.248	-0.021	-0.090	-0.237	-0.078	0.035	-0.026	-0.192
0.100	-0.201	-0.025	-0.096	0.061	0.079	0.024	-0.019	-0.157
0.131	-0.353	0.081	-0.128	0.082	0.156	0.096	-0.098	-0.235
0.106	-0.325	0.074	-0.035	0.026	0.192	0.082	-0.097	-0.212
0.082	-0.057	0.019	-0.024	0.019	0.157	0.044	0.012	-0.056
0.090	-0.072	0.023	-0.096	0.098	0.235	0.049	0.009	-0.067
0.031	-0.061	0.015	-0.082	0.097	0.212	0.020	-0.014	-0.043
0.038	-0.077	0.019	-0.044	-0.012	0.056	0.026	-0.017	-0.054
0.075	-0.150	0.036	-0.049	-0.009	0.067	0.050	-0.033	-0.105
0.061	-0.122	0.030	-0.020	0.014	0.043	0.040	-0.027	-0.086
0.043	-0.087	0.021	-0.026	0.017	0.054	0.029	-0.019	-0.061
0.050	-0.101	0.025	-0.050	0.033	0.105	0.033	-0.022	-0.071
-	-	-	-0.040	0.027	0.086	-	-	-
-	-	-	-0.029	0.019	0.061	-	-	-
-	-	-	-0.033	0.022	0.071	-	-	-

Dada la indeterminación estática de los sistemas tensegrity, al formular la matriz de equilibrio [A], se obtiene como resultado una matriz rectangular, por lo que no es posible obtener una solución directa al aplicar técnicas convencionales, tales como la generación del polinomio característico para la obtención de los valores y vectores característicos.



Tabla 4. Coordenadas nodales resultantes del procedimiento de búsqueda de forma.

NÚMERO DE NODO	COORDENADAS			NÚMERO DE NODO	COORDENADAS		
	X	Y	Z		X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000	6	2.800	2.300	0.000
2	0.000	3.800	3.800	7	2.261	-0.829	2.500
3	0.200	0.000	3.900	8	2.261	4.829	2.500
4	0.200	4.000	0.000	9	-1.300	2.200	2.000
5	1.336	2.000	5.464	10	3.613	2.200	3.146

Tabla 5. Coeficientes de presfuerzo resultantes del proceso de búsqueda de forma.

NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)	NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)	NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)	NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)	NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)	NÚMERO DE ELEMENTO	PRESFUERZO (KN)
1	-9.807	6	4.440	11	3.791	16	1.052	21	1.470	26	0.864
2	-7.918	7	5.074	12	3.712	17	0.720	22	0.609	27	1.002
3	-7.563	8	4.291	13	2.709	18	2.875	23	0.764	-	-
4	-5.991	9	5.166	14	2.880	19	2.449	24	1.487	-	-
5	-3.908	10	2.508	15	3.830	20	1.312	25	1.210	-	-

Sin embargo, mediante la aplicación de la técnica DDVS se obtiene una solución numérica (aproximada) del sistema de ecuaciones

de equilibrio. La Figura 10 muestra un esquema de los resultados del proceso de BFF del módulo "X-T".

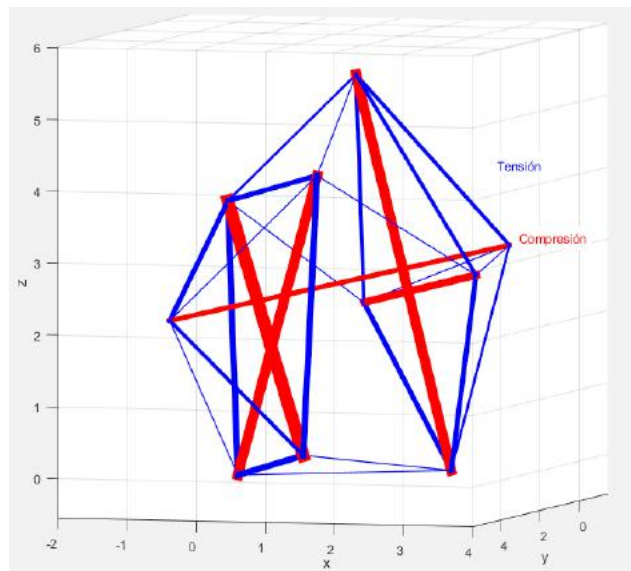


Figura 10. Esquema del presfuerzo resultante del proceso de búsqueda de forma y fuerzas del módulo "X-T"

Análisis estático no lineal

La configuración espacial del módulo "X-T" y el valor de presfuerzo inicial obtenidos del proceso de búsqueda de forma son los parámetros iniciales para realizar el análisis estático no lineal.

Las características mecánicas de los materiales empleados para el análisis estructural se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Características mecánicas de los materiales.

PROPIEDADES	ELEMENTOS BARRA	ELEMENTOS CABLE
NORMATIVA ASTM	A500 GR 42	A586 CLASE A
MÓDULO DE ELASTICIDAD (MPa)	200 000	165474.2
ESFUERZO DE FLUENCIA (MPa)	289	7129
ESFUERZO PROMEDIO DE RUPTURA (MPa)	400	10458

Empleando el programa computacional SAP2000 que aplica el método de elementos finitos (ver sección 5), se analizaron 2 combinaciones diferentes de las condiciones de apoyo del sistema para los nodos 1, 4 y 6. Los grados de libertad (GL) de los 3 nodos asociados a los giros se mantuvieron libres en todos los casos. Para el nodo 1 se restringieron los GL asociados a los desplazamientos tanto para el caso 1 como para el caso 2. La Tabla 7 muestra las condiciones de apoyo de los nodos, donde u_x , u_y y u_z son los desplazamientos en las direcciones X, Y y Z, respectivamente.

Tabla 7. Combinaciones de las condiciones de apoyo.

Nodo	Caso 1			Caso 2		
	u_x	u_y	u_z	u_x	u_y	u_z
1	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido
4	Libre	Libre	Restringido	Restringido	Libre	Restringido
6	Libre	Libre	Restringido	Restringido	Libre	Restringido

La convergencia del análisis no lineal se obtuvo en un total de 10 pasos o iteraciones. La importancia de la implementación de un

proceso de BFF radica en que se asegura el equilibrio del sistema y la convergencia del análisis no lineal, y además se reduce la cantidad de iteraciones necesarias para encontrar la solución. Los desplazamientos de los nodos de apoyos resultantes para cada uno de los casos se aprecian en la Tabla 8 y en la Figura 11.

Tabla 8. Desplazamiento de los nodos de apoyo

Nodo	Caso 1		Caso 2	
	u_x (m)	u_y (m)	u_x (m)	u_y (m)
4	-4.086	0.2049	0	0.004
6	-2.349	2.860	0	0.003

Figura 11. Desplazamientos nodos, vista en planta.

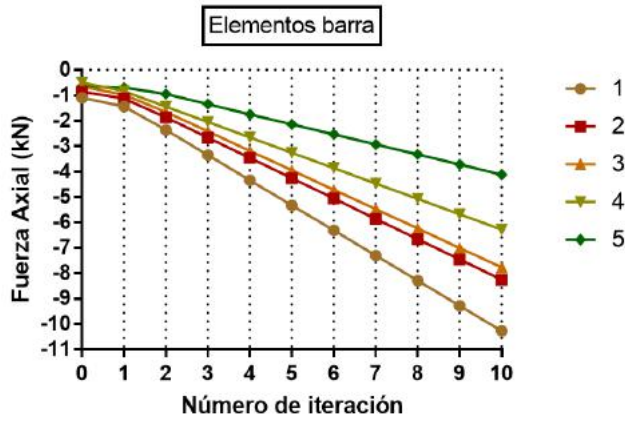
Dado que el módulo va a ser implementado en una pasarela peatonal, se seleccionará la configuración de grados de libertad del caso 2, cuyos desplazamientos son menores a 1 cm. Para el caso 1, los desplazamientos son excesivos y se desfasan del área de la pasarela, por lo que se descartará de este análisis. El desplazamiento máximo para el caso 2 se da en el nodo 7, con un valor de -0.48 cm en la dirección X. Sin embargo, no se altera de manera significativa el área designada para el paso peatonal. Las coordenadas resultantes del análisis no lineal se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Coordenadas nodales resultantes del análisis no lineal. Caso 2.

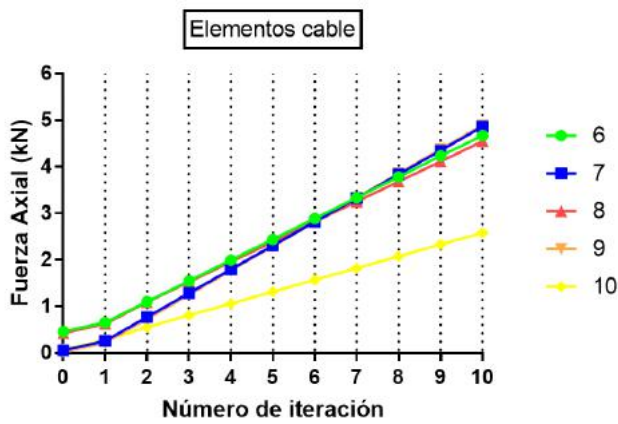
Número de nodo	Coordenadas			Número de nodo	Coordenadas		
	X	Y	X		X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000	6	2.800	2.300	0.000
2	-0.004	3.801	3.799	7	2.256	-0.828	2.498
3	0.196	0.000	3.899	8	2.284	4.877	2.525
4	0.200	4.000	0.000	9	-1.302	2.200	1.998
5	1.332	2.000	5.463	10	3.610	2.200	3.146



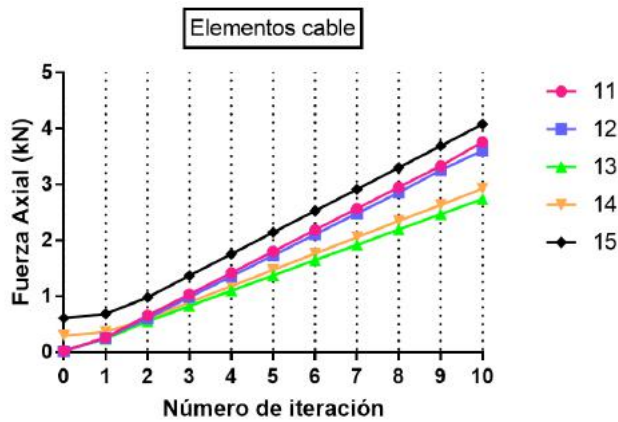
La variación de las fuerzas internas, que se presentan para los elementos del ensamble en cada una de las iteraciones del análisis no lineal, se muestra en las Figuras 12.a, 12.b, 12.c, 12.d y 12.e.



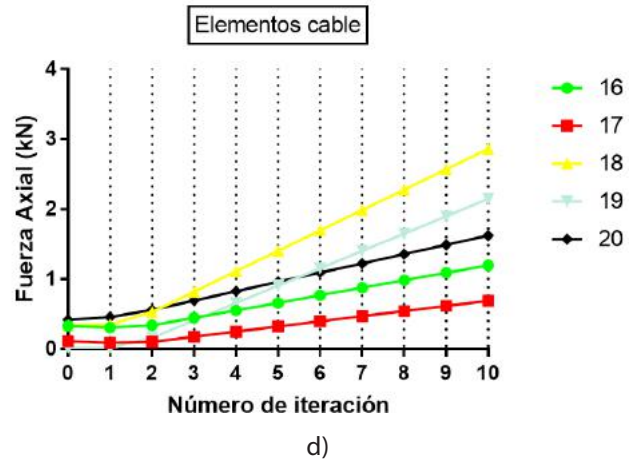
a)



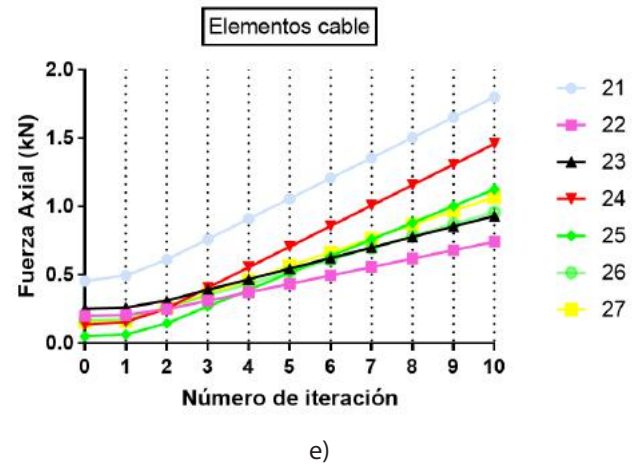
b)



c)



d)



e)

Figura 12. Fuerza axial en elementos barra y cable durante para cada iteración del método Newton-Raphson.

La variación máxima de fuerza axial debido a los efectos del peso propio del sistema para los elementos barra se presenta en el elemento 1, donde se presenta un incremento de 0.462 kN, equivalente a un incremento relativo de 4.71%. En los elementos cable, el incremento máximo ocurre en el elemento 21, con un valor de 0.331 kN, correspondiente a un incremento relativo de 22.52%.

Acoplamiento de sistemas y diseño estructural

El diseño a compresión de los elementos barra se realizó considerando el manual AISC para el diseño y la construcción en acero. La resistencia de diseño de dichos elementos se define como la resistencia nominal reducida por un factor de resistencia (ϕ), cuyo valor es 0.85.

Tabla 10. Coeficientes de presfuerzo resultantes del análisis no lineal.

Número de elemento	Presfuerzo de BFF (kN)	Presfuerzo de ANL (kN)	Número de elemento	Presfuerzo de BFF (kN)	Presfuerzo de ANL (kN)	Número de elemento	Presfuerzo de BFF (kN)	Presfuerzo de ANL (kN)
1	-9.807	-10.269	11	3.791	3.761	21	1.470	1.801
2	-7.918	-8.253	12	3.712	3.606	22	0.609	0.742
3	-7.563	-7.769	13	2.709	2.74	23	0.764	0.931
4	-5.991	-6.281	14	2.880	2.928	24	1.487	1.459
5	-3.908	-4.116	15	3.830	4.078	25	1.210	1.126
6	4.440	4.667	16	1.052	1.198	26	0.864	0.959
7	5.074	4.861	17	0.720	0.692	27	1.002	1.069
8	4.291	4.546	18	2.875	2.862	-	-	-
9	5.166	4.895	19	2.449	2.149	-	-	-
10	2.508	2.583	20	1.312	1.624	-	-	-

Sin embargo, dado que el principio de estructuración de los sistemas tensegrity únicamente considera efectos axiales, se debe asegurar que los elementos mantengan una relación de esbeltez menor a 200 para evitar posibles efectos de flexión en los elementos. Considerando únicamente la resistencia ante cargas axiales, para todos los elementos barra se propone una sección redonda con diámetro de 60 mm, con espesor de pared de 3.9 mm, área de 690.3 mm² y radio de giro de 20.04 mm. Sin embargo, la longitud de esbeltez de estos elementos es mayor que 200. Por lo tanto, se necesita una sección para cumplir esta condición de 88.9 mm, con espesor de pared de 5.5 mm, área de 1438.7 mm² y radio de giro 29.55 mm.

Para el caso presentado en esta investigación, sólo se consideraron los efectos del presfuerzo y del peso propio de los elementos. El diseño a tensión de los elementos cable del módulo "X-T" se llevó a cabo considerando la combinación de carga 1 de la normativa ASCE/SEI 19-10, en la cual se consideran únicamente las cargas originadas por el peso propio y las fuerzas internas generadas por el presfuerzo, incrementadas por un factor de 2.2. La resistencia de diseño de los cables se define como la resistencia nominal del cable, dato proporcionado por el fabricante, reducida, ya sea por el factor de ajuste Nf o por el factor deflector Nd. La

resistencia de diseño debe ser mayor o igual que el esfuerzo generado por la combinación de carga factorizada.

La sección requerida por diseño estructural del módulo "X-T" para los elementos a tensión es un cable de diámetro 9.5 mm, sin embargo, la normativa ASTM A586 define secciones comerciales con diámetro mínimo de 12.7 mm.

El modelado matemático de las estructuras tensegrity, mediante programas computacionales desarrollados para el área de la ingeniería civil estructural, presenta una limitante relacionada al acoplamiento entre las condiciones de frontera de un sistema estructural A, con un sistema B. Específicamente, en el presente caso, las condiciones de frontera de los nodos de apoyo del módulo "X-T", relacionadas con los grados de libertad libres y restringidos al movimiento, no presentan una compatibilidad directa con los nodos de la triditrabe donde se llevará a cabo la unión entre sistemas.

El acoplamiento de dichos sistemas de este trabajo consistió en identificar las reacciones nodales máximas del módulo "X-T", que se transmiten a los nodos de la triditrabe. Dichas reacciones se muestran en la Tabla 11 y en la Figura 13.



Tabla 11. Reacciones en los nodos de apoyo del módulo "X-T" generados por el peso propio y los efectos del presfuerzo.

Nodo	R _x (N)	R _z (N)
1	-82.27	1223.91
4	-111.31	1082.56
6	193.58	1480.35

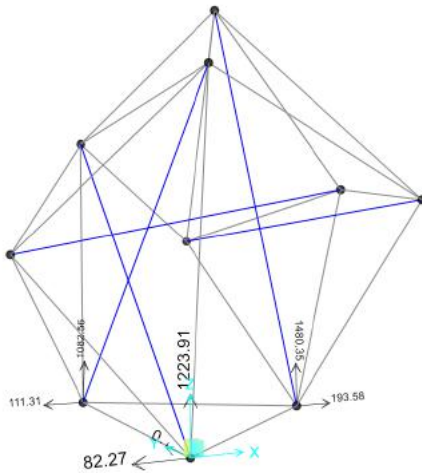


Figura 13. Reacciones en los nodos de apoyo del módulo "X-T" generados por el peso propio y los efectos del presfuerzo (N).

Estas reacciones nodales incluyen el peso de la estructura "X-T" y los efectos asociados a los presfuerzos inducidos en el sistema. En la dirección global Y, no se generaron reacciones, ya que la estructura tiene libertad de movimiento en esta dirección.

Para incluir estos efectos en el modelo de la triditrabe, las reacciones nodales se tradujeron a fuerzas puntuales aplicadas en los nodos de la triditrabe, y en el caso de las reacciones en la dirección vertical (R_z) se llevó a cabo un cambio de sentido en la dirección de la fuerza.

De esta manera, el análisis del sistema triditrabe, se realizó mediante un modelo independiente al del sistema tensegrity, donde se incluyen los efectos producidos por el módulo "X-T". Adicionalmente, se consideraron las cargas mencionados en el apartado 2.2. Para el análisis y diseño se siguió la normativa AASHTO [29] y las "Especificaciones

Guía para el Diseño de Puentes Peatonales LRFD-2009" [15]. La evaluación de deflexiones se realizó con la combinación de servicio 1, donde la deflexión máxima permisible es L/360, que es igual a 0.077 m. La deflexión máxima actuante en el sistema triditrabe es de 0.0189 m (Figura 14), ubicada al centro del claro.

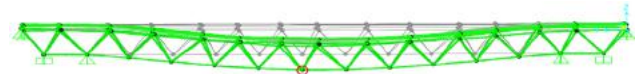


Figura 14. Vista longitudinal del sistema triditrabe de flexión máxima.

El dimensionamiento ante cargas gravitacionales se llevó a cabo considerando la combinación de fuerza 1, de la normativa AASHTO, donde las cargas por peso propio se factorizaron por 1.25, mientras que la carga viva se factorizó por 1.75. La fuerza axial rige el comportamiento del sistema triditrabe y el valor máximo a compresión se dan en los extremos de la cuerda inferior del sistema, con una magnitud de 424 kN, mientras que el valor máximo bajo fuerza axial de tensión se da al centro de la cuerda inferior, cuyo valor es de 275 kN. Los elementos que componen el sistema triditrabe se proponen de sección circular hueca, con un diámetro de 0.1016 m y un espesor de pared de 0.00953 m. Los elementos más esforzados trabajarán a un 80% de su capacidad última. Las fuerzas actuantes se muestran en la Figura 15.

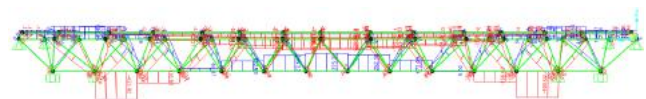


Figura 15. Vista longitudinal del sistema triditrabe, fuerzas axiales actuantes.

El sistema portante de la losa "W" se rige principalmente por esfuerzos de flexo-compresión. La carga axial máxima es de 34 kN a compresión, mientras que el momento flexionante máximo es de 8.92 kN/m. Los elementos propuestos para el sistema portante de la losa son de sección rectangular

hueca, con un ancho y un peralte de 0.1524 m, y un espesor de pared de 0.00953 m. Esta sección trabaja a un 15% de su capacidad, pero se requieren estas dimensiones por cuestiones constructivas.

En las Figuras 16, 17 y 18 se muestra el acoplamiento resultante del sistema de soporte del puente peatonal con 5 módulos tensegrity, separados a una distancia de 6.0 m entre ellos.

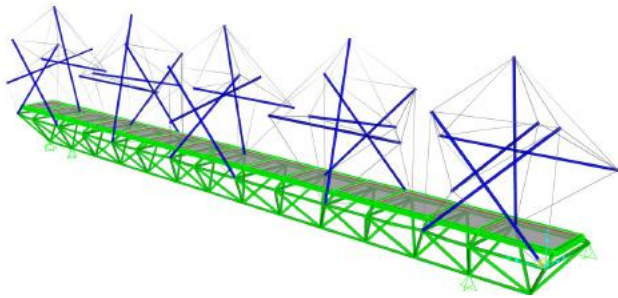


Figura 16. Vista en perspectiva del puente peatonal.

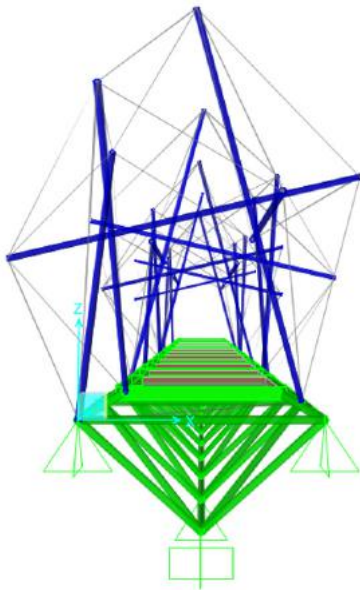


Figura 17. Vista en transversal del puente peatonal.

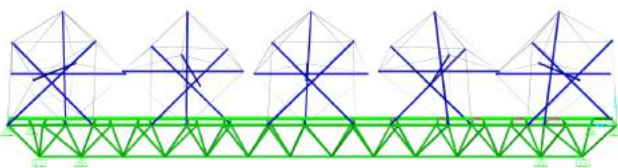


Figura 18. Vista en longitudinal del puente peatonal.

CONCLUSIONES

Se aplicó un método de búsqueda de forma y de fuerzas en equilibrio, basado en la doble descomposición de valores singulares para definir un módulo *tensegrity* que cumpla con restricciones geométricas predefinidas. Este método resulta factible para estructuras *tensegrity* en las que se requiere mantener una posición espacial definida, sin embargo, requiere de múltiples iteraciones para definir un sistema de coordenadas nodales con las que se cumplan las condiciones de equilibrio, simetría y de unilateralidad.

Mediante el análisis no lineal se definió la combinación de los grados de libertad adecuados para acoplar el sistema *tensegrity* al sistema de tridilosa. Restringir los grados de libertad en la dirección vertical (dirección Z) y en la dirección transversal (dirección X) reduce los desplazamientos de la base del módulo "X-T" con lo que se preserva el área interna designada al paso peatonal, y además permite que el sistema distribuya las fuerzas internas de manera uniforme y que el ensamble continúe trabajando de acuerdo con los principios mecánicos de las estructuras *tensegrity*, es decir, que los elementos barra trabajen únicamente a compresión y los cables bajo fuerzas de tensión.

El procedimiento propuesto para acoplar la estructura *tensegrity* "X-T" en la triditrabe permitió generar un modelo simplificado, a partir del cual se pueden conocer las fuerzas axiales y los desplazamientos, que se generan sobre el sistema triditrabe.

La estructura resultante brinda la pauta para desarrollar trabajos futuros, donde mediante el acoplamiento mecánico de sistemas *tensegrity* se mejoren las características estructurales de sistemas convencionales de construcción.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo durante toda esta investigación.



REFERENCIAS

- [1] L. Rhode-Barbarigos, N. B. Hadj Ali, R. Motro, and I. F. C. Smith, "Designing tensegrity modules for pedestrian bridges," *Eng. Struct.*, vol. 32, no. 4, pp. 1158-1167, 2010.
- [2] R. Motro, V. Raducanu, and R. B. Fuller, "Tensegrity Systems," *International Journal of Space Structures*, vol. 18, no. 2, pp. 77-84, 2003.
- [3] J. Y. Zhang and M. Ohsaki, *Tensegrity Structures*. 2015.
- [4] V. Jáuregui Gómez, "Tensegrity Structures and their Application to Architecture," pp. 1-239, 2004.
- [5] Columbia University, "Olympic Domes First of Their Kind," *Engineering News Record*, 1986. [Online]. Available: <https://www.columbia.edu>.
- [6] J. De Boeck, "Tensegrity bridges," Delft. University of Technology, 2013.
- [7] P. Van Stenis, "Stokkenbrug." [Online]. Available: <https://twitter.com/pjvs66/status/768537589884317696>.
- [8] Cox Architecture, "Kurilpa Bridge," 2010. [Online]. Available: <http://www.coxarchitecture.com.au/project/kurilpa-pedestrian-bridge/>.
- [9] L. Rhode-Barbarigos, N. B. Hadj Ali, R. Motro, and I. F. C. Smith, "Tensegrity modules for pedestrian bridges," *Eng. Struct.*, vol. 32, no. 4, pp. 1158-1167, 2010.
- [10] L. Rhode-Barbarigos, H. Jain, P. Kripakaran, and I. F. C. Smith, "Design of tensegrity structures using parametric analysis and stochastic search," *Eng. Comput.*, vol. 26, no. 2, pp. 193-203, 2010.
- [11] N. Bel Hadj Ali, L. Rhode-Barbarigos, A. A. Pascual Albi, and I. F. C. Smith, "Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge," *Eng. Struct.*, vol. 32, no. 11, pp. 3650-3659, 2010.
- [12] J. I. Cobos, "Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales," UNIVERSIDAD DE CUENCA, 2018.
- [13] R. Lorenzo S., B. Arcos R., J. A. Escobar S., and Gómez M. Roberto, "Comportamiento estructural de una piña de un puente tridilosa," Ciudad de México, México.
- [14] J. Y. Zhang and M. Ohsaki, *Tensegrity Structures*.
- [15] AASHTO, *LRFD GUIDE SPECIFICATIONS FOR THE DESIGN OF PEDESTRIAN BRIDGES*. 2009, p. 40.
- [16] M. Schenk, "Statically Balanced Tensegrity Mechanisms," 2005.
- [17] S. Pellegrino, "Mechanics of kinematically indeterminate structures," University of Cambridge, 1986.
- [18] S. Pellegrino and C. R. Calladine, "Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 22, pp. 409-428, 1985.
- [19] G. Gomez Estrada, H. J. Bungartz, and C. Mohr dieck, "Numerical form-finding of tensegrity structures," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 43, no. 22-23, pp. 6855-6868, 2006.
- [20] a G. Tibert and S. Pellegrino, "Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures," vol. 18, no. 4, pp. 209-223, 2003.
- [21] H. J. Schek, "The force density method for form finding and computation of general networks," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 115-134, 1974.
- [22] X. Yuan, L. Chen, and S. Dong, "Pre-stress design of cable domes with new forms," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, no. 9, pp. 2773-2782, 2007.
- [23] G. Gomez Estrada, "Analytical and numerical investigations of form-finding methods for tensegrity structures," p. 152, 2007.
- [24] S. Pellegrino, "Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 30, no. 21, pp. 3025-3035, 1993.
- [25] S. Pellegrino, "Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 21. pp. 3025-3035, 1993.
- [26] L. A. Ochoa Peralta and P. F. Orellana Ochoa, "Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a cubiertas," Universidad de Cuenca, 2017.
- [27] K. Kebiche, M. N. Kazi-Aoual, and R. Motro, "Geometrical non-linear analysis of

tensegrity systems," *Eng. Struct.*, vol. 21, no. 9, pp. 864–876, 1999.

[28] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.pdf*. 2002.

[29] AASHTO LRFD, *Bridge Design Specifications (SI)*, no. September. 2005.