

# HEURÍSTICAS PARA RUTAS DEL TRANSPORTE PÚBLICO COLECTIVO EN LA CIUDAD DE QUERÉTARO

---

Heuristics for the Collective Public  
Transportation Routes in the City of Querétaro

Salvador Malagón<sup>1</sup>, Arturo González Gutiérrez<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Querétaro

\*Autor de correspondencia  
aglez@uaq.mx

## RESUMEN

Las redes de transporte han existido desde que el ser humano era nómada, migrando en busca de mejores condiciones para que después apareciesen los primeros asentamientos, incluso entonces las redes de transporte pasaron de ser únicamente rutas de migración a vías de comunicación para transportar e intercambiar bienes. En la actualidad los humanos vivimos en megaciudades con dinámicas particulares de traslado de personas, lo que da lugar, entre otros, a sistemas de transporte público colectivo. Es común que se persigan tres objetivos: maximizar la capacidad de ciudadanos que se pueden trasladar, maximizar la conectividad en la ciudad y minimizar el costo de la movilidad. Maximizar el beneficio mientras se minimiza el costo es complicado, pero se puede alcanzar un equilibrio mediante la implementación de estrategias modernas de diseño y el aprovechamiento de nuevas tecnologías. Dentro de las ciencias de la computación y, en específico en el área de inteligencia artificial, existen mecanismos de optimización para problemas de enrutamiento geométrico, como es el caso del diseño de las rutas que recorren los autobuses en el sistema QroBus. El presente artículo plantea la analogía entre el problema del Corredor de Longitud Mínima (MLC por sus siglas en inglés), clasificado como NP-Duro y considerado computacionalmente intratable, y el proceso de diseño de las rutas de transporte. Las instancias sobre las cuales se ejecutan los algoritmos metaheurísticos se construyen a partir de información geográfica y demográfica, con la intención de diseñar rutas en función del diseño de la ciudad de Querétaro y la distribución poblacional. Los resultados obtenidos se contrastan con el diseño de las rutas de transporte del sistema Qrobus.

**Palabras clave:** Inteligencia Artificial, Algoritmos, MLC, Heurísticas, Optimización, Movilidad, Transporte.

## ABSTRACT

Transport networks have existed since human beings were nomadic, migrating in search of better conditions until the first settlements later appeared, and even then transport networks went from being only migration routes to communication routes used to transport and exchange goods. Nowadays, humans live in megacities with particular dynamics of transportation, which gives rise to collective public transportation systems, among others. It is common to pursue three objectives: maximizing the capacity of citizens who can move, maximizing the connectivity in the city and minimizing the cost of mobility. Maximizing the benefit while minimizing the cost it is complicated, but a balance can be achieved through the implementation of modern design strategies and the use of new technologies. Within the computer sciences, and specifically in the area of artificial intelligence, there are mechanisms for optimizing geometric routing problems, such as the design of the routes that buses follow in the QroBus system. This article proposes an analogy between the Minimum Length Corridor problem (MLC), classified as NP-Hard and considered computationally intractable, and the process of designing the routes that buses follow. The instances on which the Metaheuristic algorithms are executed are built from geographic and demographic information, with the intention of designing routes based on the design of the city of Querétaro and its population distribution. The results obtained are compared with the design of the transport routes of the Qrobus system.

**Keywords:** Artificial Intelligence, Algorithms, MLC, Heuristics, Optimization, Mobility, Transportation.

## INTRODUCCIÓN

La primera compañía de transporte público colectivo se creó en Nantes, Francia, en el año 1826 por Stanislav Brady bajo el nombre *Entreprise Generale des Omnibus* [1].



Es posible argumentar que los sistemas de transporte público diseñados en redes distribuidas y con múltiples transbordos en lugar de rutas individuales satisfacen de mejor manera la dinámica de transporte de las ciudades. (Jago Dodson et al, 2011) [2].

El problema de planificación de la red de transporte público ha sido identificado y explicado en detalle por Thompson (1977), Nielsen (2005) y Mees (2000; 2010) [3], [4], [5]. El trabajo de Mees muestra que los servicios de transporte público pueden ofrecer un mayor nivel de servicio, si proporcionan una red interconectada de transferencias para que el pasajero seleccione de la red completa la combinación de segmentos de ruta necesarios para emprender su viaje. Este enfoque de planificación de red significa no proporcionar rutas dedicadas para satisfacer las demandas específicas individuales de los pasajeros, en su lugar se debe proporcionar una red de servicios de transporte que permita una amplia gama de viajes potenciales. En general se puede argumentar que una red bien diseñada consta de cinco principios:

1. Estructuras de redes simples y directas: El principio fundamental es proporcionar rutas directas y simples cuyo recorrido puede recordarse fácilmente, ya sea individualmente o dentro de la red.

2. Existe una jerarquía de líneas en una red: Las redes de transporte público requieren una jerarquía de líneas interconectadas que difieren en capacidad y velocidad con escala de operación.

3. Existe un plan de velocidad, consistencia y confiabilidad: Esto involucra vehículos que pueden viajar rápido a lo largo de rutas con una dependencia mínima de otro tráfico o intersecciones para garantizar la fiabilidad. Esto requiere intervenciones para apoyar la prioridad de Vehículos de transporte público a través del derecho de paso, carriles dedicados y prioridad en las intersecciones. Las líneas deben operar en horarios consistentes y patrones de detención que se apliquen en períodos más amplios. Las líneas que operan horarios consistentes permiten que los tiem-

pos de servicio se memoricen más fácilmente que los patrones inconsistentes y, por lo tanto, pueden evitar la necesidad de consultar horarios.

4. Coordina transferencias convenientes: Proporcionar una estructura básica de líneas que funcionan a alta frecuencia para que los tiempos de espera en las paradas en estas líneas sean mínimos y no se requieran horarios.

5. Proporciona información clara y concisa: La información clara y accesible para los pasajeros es un elemento clave de las redes de transporte público. Las paradas deben proporcionar información suficiente para que los pasajeros puedan ubicar la parada dentro de la red de transporte público y navegar entre rutas.

Esta estrategia de sistema de red para la planificación del sistema de transporte público apunta a crear una red ubicua que sea capaz de ofrecer una multiplicidad de combinaciones de origen-ruta-destino. Es conveniente hacer un análisis de la red de transporte público en nuestro caso de estudio, la ciudad de Querétaro, y tratar de identificar en su diseño la presencia de los cinco principios mencionados anteriormente.

## **Diagnóstico de servicio de transporte público colectivo**

De acuerdo con los datos del Instituto Queretano del Transporte (IQT) [6] la demanda total promedio de viajes en un día hábil en la Zona Metropolitana de Querétaro (ZMQ) es de 593.7 mil usuarios, mientras que para el sábado resultó de 440 mil y el domingo de 270 mil usuarios. En un día hábil un autobús da un promedio de 6.13 vueltas, es decir, inicia la ruta desde un punto determinado y regresa a ese mismo punto para comenzar nuevamente. Durante el sábado se tiene un promedio de 6.04 vueltas al día por autobús y en domingo un promedio de 5.71 vueltas al día por autobús. Para atender a los usuarios en estos recorridos existen 1,050 paradas, con una distancia promedio entre ellas

de 450 metros, así como otros lugares de ascenso y descenso que funcionan por costumbre o comodidad de los usuarios (IQT, 2016). Una estadística que es especialmente relevante para este caso de estudio es el Índice de sobreposición, el cual se entiende como el grado en que algunas rutas del transporte público están sobrepuestas entre sí, lo que genera congestión vial y saturación del servicio. El índice se obtiene al dividir el número total de kilómetros recorridos por las rutas (2,968.37), entre el número de kilómetros utilizados por la red vial (747.94). Para la ZMQ en el año 2015 resultó ser de 3.96 rutas/km.

Después de analizar estos datos, es claro que hay rubros en los que no tenemos injerencia, como incrementar el número de vueltas promedio diarias, también hay otros rubros en los que si podemos proponer una solución, concretamente disminuir el índice de sobreposición de rutas, a través de distribuir de mejor manera el número de kilómetros utilizados por la red vial, o incluso incrementar la cobertura de la red con un diseño eficiente. Por tanto, es posible afirmar que se trata de un problema de optimización de enrutamiento geométrico.

### Problema del Corredor de Longitud Mínima

Para el problema del Corredor de Longitud Mínima (MLC por sus siglas en inglés, *Minimum Length Corridor Problem*) se establece un límite rectangular  $R$  dividido en un conjunto  $P$  de polígonos que corresponden a la periferia de  $R$ . El propósito del problema MLC es definir una solución  $C$  consistente en un conjunto de segmentos de línea (aristas) denominado corredor, que incluya al menos un punto del límite rectangular  $R$  y al menos un punto (vértice) de cada polígono  $P$ , con una longitud total mínima. Fig. (1)

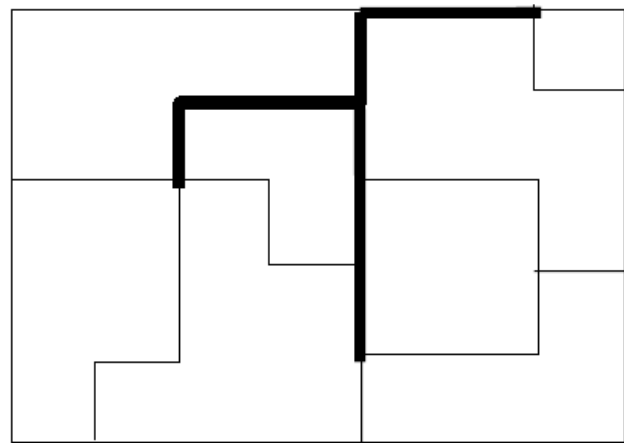


Figura 1. Descripción gráfica del problema MLC.

El problema MLC es un problema de optimización de enrutamiento geométrico, N. Katoh planteó por primera vez el problema MLC en la 12ª Conferencia Canadiense sobre Geometría Computacional [8]. La solución al problema MLC guarda similitud con un árbol extendido de costo mínimo pues se busca minimizar el costo del corredor.

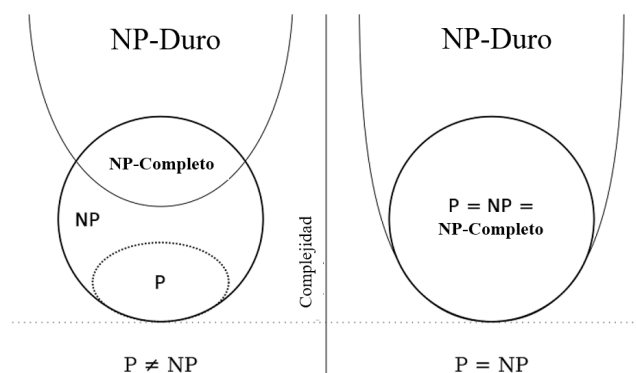
### Problema NP-Duro

Hasta hace poco no se sabía nada sobre la complejidad y la posible aproximación de soluciones óptimas del problema, entonces, Bodlaender et al. [9] y González-Gutiérrez y González [10] simultánea e independientemente informaron que el problema es NP-Duro. El caso de los problemas P vs NP hace referencia a una clase computacional de problemas en la que cualquier solución dada a un problema NP puede ser verificada en tiempo polinómico, pero no hay manera eficaz de encontrar una solución a partir de una fórmula general; es decir, el tiempo requerido para resolver cualquier problema NP-Duro se incrementa muy rápidamente conforme el tamaño del problema crece.

El término P se refiere al conjunto de problemas de optimización que se pueden resolver en tiempo polinomial en una Máquina de Turing Determinística, mientras que el tér-



mino NP se refiere al conjunto de problemas de optimización que se pueden resolver en tiempo polinomial en una Máquina de Turing No-Determinística. De ello, resulta claro que  $P \neq NP$ , Garey [11]. Esto implica que existe un conjunto de problemas de optimización, los cuales están en NP, pero no en P. A esta categoría se le ha llamado NP-Duros. (Fig. 2)



**Figura 2.** Problemas P y NP.

El problema con el que se está tratando es una generalización del problema MLC, que se clasifica como un problema NP-Completo y las implicaciones de abordar un problema de tal complejidad son motivos académicos importantes; Además, se ha establecido que los problemas de optimización que pertenecen a la categoría NP-Duro se consideran intratables computacionalmente hablando, ya que no existe un algoritmo eficiente que produzca una solución óptima para cualquier instancia. La naturaleza de los problemas NP-Duro y su dificultad hace evidente suponer que debe ser tratado con técnicas de Inteligencia Artificial.

Por tanto, se define a la red de transporte Público de la ciudad de Querétaro como el caso de estudio específico sobre el cual se desarrollarán los algoritmos heurísticos presentados en este artículo. Concretamente, el problema del MLC consiste en usar las calles de la Ciudad de Querétaro como el conjunto de líneas  $L$  que dividen a la ciudad en polígonos  $P$  (manzanas), de tal manera que las rutas de transporte público den cobertura a

la totalidad de la población mientras se recorre una distancia mínima. La tesis abordará el servicio de transporte desde la perspectiva del manejo de la información disponible para proponer modificaciones, a partir de la implementación de algoritmos que aproximen un aprovechamiento óptimo de los recursos existentes, para beneficiar directamente a los usuarios del transporte público y a los concesionarios del servicio, además de una larga lista de beneficios indirectos derivados de un incremento en la eficiencia de la red de transporte público.

Una vez establecido que el problema MLC es un problema de optimización NP-Duro, no es posible afirmar que es ineficiente o intratable, pues puede ser tratable para ciertas instancias. De la misma forma en que un problema grande puede dividirse en problemas más pequeños, un algoritmo para un problema complejo puede construirse combinando algoritmos para problemas simples; por tanto, la complejidad del algoritmo puede ser acotada por la composición de complejidades de otras funciones o algoritmos. Luego, cualquier algoritmo construido a partir de algoritmos polinomiales será un algoritmo de orden polinomial.

### Algoritmos Heurísticos

Un algoritmo es una secuencia finita de operaciones utilizada para realizar una tarea, cuya implementación ofrece una solución a un problema. Podemos diferenciar entre algoritmos deterministas y algoritmos no deterministas. Un algoritmo es determinista si en un conjunto de problemas, todas las ejecuciones del algoritmo producen el mismo resultado final (además, todos los resultados intermedios también son iguales). Un algoritmo es no determinista si se introduce aleatoriedad en el proceso de encontrar la solución y por lo tanto los resultados finales e intermedios no tienen por qué coincidir. Al resolver problemas de optimización en respuesta a la precisión, existe la siguiente clasificación:

- Algoritmos de Aproximación: Un algoritmo de aproximación no necesariamente produce soluciones óptimas. Lo que garantiza es un rango de precisión.

- Algoritmos Heurísticos: Son algoritmos que producen soluciones sin ninguna garantía de ser óptimos, a su vez, por lo general tienen un tiempo de ejecución mucho menor, pues generalmente están acotados por la suma de funciones y algoritmos polinómicos.

## METODOLOGÍA

Los algoritmos heurísticos son también llamados algoritmos aproximados, algoritmos basados en el conocimiento o simplemente heurísticas, por lo que su clasificación es bastante complicada, aunque se puede agrupar partiendo de dos conceptos simples: Métodos constructivos y Métodos de búsqueda. Los primeros son capaces de construir una solución a un problema dado, y la forma de construir la solución depende fuertemente de la estrategia seguida. Los segundos parten de una solución factible dada por el diseñador y a partir de ella intentan mejorarla.

El método empleado en la construcción de los algoritmos heurísticos descritos en este artículo es el método constructivo, y se siguen dos estrategias clave: la descomposición y la reducción. Primero se divide sistemáticamente el problema en subproblemas más pequeños. Este proceso se repite (generalmente de forma recursiva) hasta que se tenga un tamaño de problema en el que la solución a dicho subproblema es trivial. Después el algoritmo combina las soluciones obtenidas hasta que se tenga la solución al problema original. Finalmente, se identifican las características que contienen las soluciones buenas conocidas y se asume que la solución óptima también las tendrá. De esta forma se pueden reducir drásticamente las etapas necesarias para resolver cualquier instancia.

En el capítulo de metodología se describen las etapas de diseño, usando como

instancia únicamente el primer distrito de la ZMQ, pues es necesario incluir una tabla donde se muestre cómo se construyen los polígonos de la instancia además de una tabla de adyacencias para los vértices del grafo equivalente de la instancia. En el capítulo de resultados se hace referencia a los resultados obtenidos para la totalidad de la ZMQ al seguir la metodología descrita.

## Instancias

En el contexto de problemas computacionales y matemáticos, una instancia hace referencia a un problema que, aunque pertenezca a una clasificación general, cuenta con características específicas. Hablando del ámbito de la programación orientada a objetos, es posible diseñar un tipo de entidad asignándole distintas propiedades y funciones. Tal y como si se estuviese diseñando un escritorio de oficina, se debe decidir si tendrá cajones o no, cuál será la longitud y altura, el material con el que se construirá y el color; aunque existe una clase de muebles bien definida llamada "Escritorios de oficina", una instancia de esa clase es un escritorio de madera con 2 cajones. Concretamente, las instancias para este caso de estudios son grafos conexos no dirigidos, divididos en polígonos a partir de características poblacionales y geográficas de la ZMQ, mediante el uso de una base de datos del Instituto Nacional Electoral.

## Cartografía de la Zona Metropolitana de Querétaro

La base de datos recopilada por el Instituto Nacional Electoral (INE) y administrada por el Instituto Electoral del Estado de Querétaro (IEEQ) será empleada para la construcción del repositorio cartográfico, donde se incluye información relativa a la distribución del espacio dentro de la ciudad de Querétaro y a la distribución poblacional para poder realizar un cálculo adecuado de densidad poblacional y la posterior subdivisión en polígonos



con densidad poblacional equivalente, con los cuales se realizará el diseño de las rutas de transporte.

La base de datos está diseñada con la siguiente jerarquía territorial.

*MRM: Mapa Electoral de la República Mexicana con División de Circunscripciones Plurinominales:* Este producto cartográfico representa la división electoral federal de la República Mexicana y muestra las 32 entidades federativas agrupadas en cada una de las cinco Circunscripciones Plurinominales.

*CES: Condensado Estatal Distrital:* En este producto se representa la conformación distrital de cada una de las 32 entidades federativas.

*PDS: Plano Distrital Seccional:* Se trata de un plano que representa cada uno de los 300 distritos electorales federales.

*CEM: Carta Electoral Municipal:* Es la representación del área rural de un municipio.

*PUS: Plano Urbano Seccional:* Este producto cartográfico representa el espacio urbano de una localidad tipificada como urbana.

*PSI: Plano por Sección Individual:* Este producto cartográfico representa las manzanas y rasgos físicos correspondientes a sólo una sección electoral federal de localidad urbana.

En la base de datos del INE se encuentran los planos por sección individual de todo el territorio del estado de Querétaro, un ejemplo de estos mapas seccionales es el de la sección 417, donde se encuentra el Centro universitario de la Universidad Autónoma de Querétaro. (Fig. 3)



Figura 3. Plano de sección individual (Sección 417).

## Densidad Poblacional

El estado de Querétaro se compone por 15 distritos y, a su vez, la ZMQ está integrada por 7 de esos distritos estatales (I, II, III, IV, V, VI y VII). Estos 7 distritos están divididos en 417 secciones con una población total (en padrón electoral) de 562,882 personas. Con los mapas de las secciones individuales es posible construir un mapa general como el que se muestra a continuación. (Fig. 4)

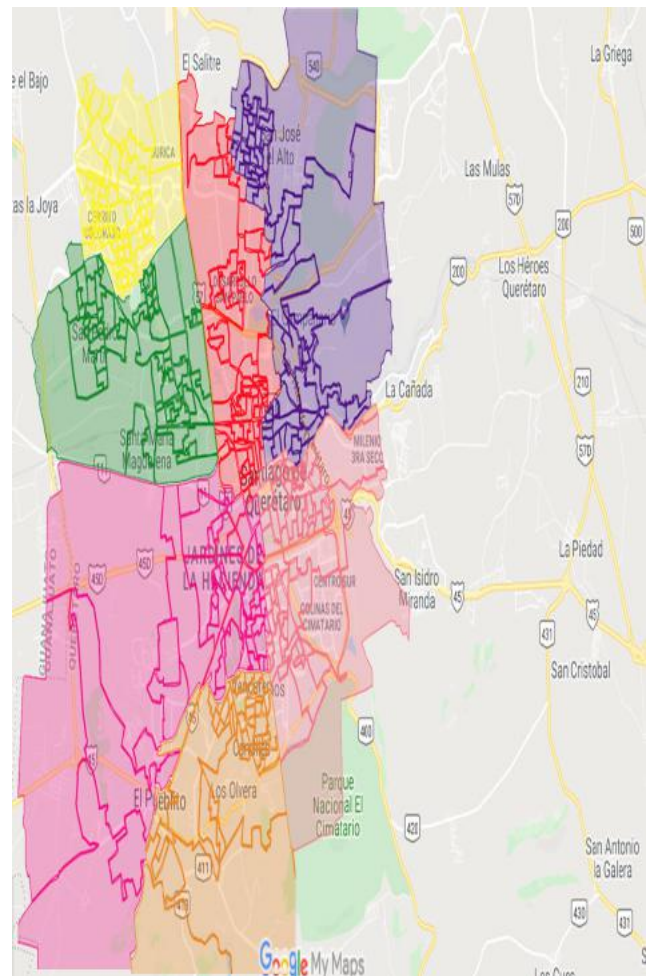


Figura 4. Plano de la Zona Metropolitana de Querétaro.

Cada una de las 417 secciones que componen a la ZMQ tiene una densidad poblacional distinta, por lo que es necesario redistribuir los límites de las secciones para balancear la densidad poblacional dentro de cada nuevo polígono, con la intención de posterior-

mente obtener un grafo equivalente que represente adecuadamente la distribución de la población para brindar un servicio de transporte entre zonas más eficiente. A continuación, se muestra el mapa del distrito I, compuesto por 62 secciones. (Fig. 5)

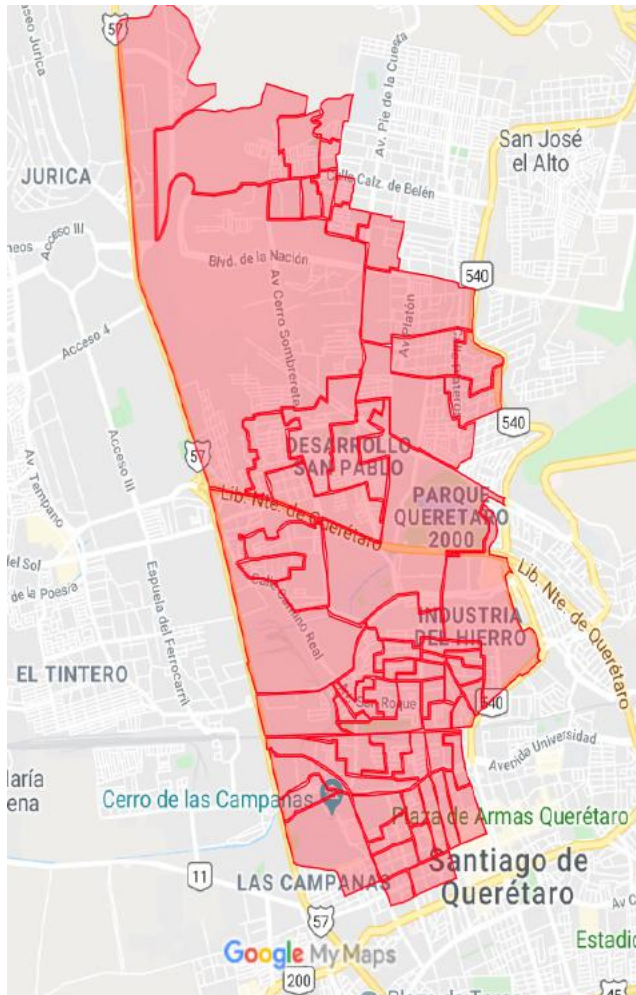


Figura 5. Distrito I de ZMQ.

Para el Distrito I, se procedió a medir la superficie de cada sección para obtener la densidad poblacional al dividir la cantidad de personas entre la superficie en  $\text{km}^2$ . Posteriormente se dividieron algunas secciones en dos (327, 338, 380) y se unieron otras, pasando de un total de 62 polígonos a solamente 11, con una densidad poblacional más balanceada. La tabla 1 muestra la forma en que se organizaron las secciones:

Tabla 1. Composición de polígonos con densidad poblacional balanceada.

Polígono	Sección	Población	Superficie Km <sup>2</sup>	Densidad poblacional	
				Por sección	Por Polígono
1	278	14003	6.098	2296.33	9122.34
	700	1122	0.081	13851.85	
	701	1182	0.059	20033.90	
	702	1031	0.128	8054.69	
	703	1155	0.081	14259.26	
	730	439	0.13	3376.92	
	731	868	0.064	13562.50	
	732	1317	0.234	5628.21	
	733	1384	1.334	1037.48	
2	305	4327	0.306	14140.52	9308.55
	318	4809	0.54	8905.56	
	320	2391	0.49	4879.59	
3	698	1175	0.212	5542.45	8053.53
	699	1288	0.118	10915.25	
	277	6019	0.757	7951.12	
	287	1516	0.198	7656.57	
	288	2872	0.329	8729.48	
	296	1427	0.247	5777.33	
	303	5090	0.763	6671.04	
	319	4474	0.4	11185.00	
4	327	3203	2.082	1538.42	7849.98
	328	2987	0.507	5891.52	
	332	1612	0.1	16120.00	





Polígono	Sección	Población	Superficie Km <sup>2</sup>	Densidad poblacional	
				Por sección	Por Polígono
5	326	2129	1.549	1374.44	8897.55
	347	1339	0.249	5377.51	
	348	1202	0.095	12652.63	
	349	1787	0.251	7119.52	
	361	988	0.055	17963.64	
6	327	3203	2.082	1538.42	10218.66
	338	2867	1.037	2764.71	
	350	1127	0.076	14828.95	
	354	1046	0.074	14135.14	
	363	1230	0.069	17826.09	
7	362	958	0.079	12126.58	8824.92
	368	1145	0.11	10409.09	
	369	944	0.384	2458.33	
	370	793	0.071	11169.01	
	371	887	0.085	10435.29	
	380	1302	0.205	6351.22	
8	338	2867	1.037	2764.71	9588.52
	365	886	0.065	13630.77	
	366	601	0.045	13355.56	
	367	657	0.069	9521.74	
	378	643	0.059	10898.31	
	379	816	0.077	10597.40	
	380	1302	0.205	6351.22	

Polígono	Sección	Población	Superficie Km <sup>2</sup>	Densidad poblacional	
				Por sección	Por Polígono
9	382	1318	0.209	6306.22	7167.79
	383	857	0.141	6078.01	
	384	727	0.103	7058.25	
	391	557	0.084	6630.95	
	392	991	0.115	8617.39	
	393	1550	0.278	5575.54	
	394	1279	0.201	6363.18	
	398	617	0.139	4438.85	
	411	497	0.163	3049.08	
	412	578	0.12	4816.67	
10	413	778	0.127	6125.98	5914.56
	414	746	0.075	9946.67	
	415	844	0.184	4586.96	
	417	789	0.61	1293.44	
	418	925	0.095	9736.84	
	419	627	0.073	8589.04	
	426	1151	0.13	8853.85	
11	429	842	0.087	9678.16	8835.584
	430	1143	0.143	7993.01	

## Teoría de Grafos

La teoría de Grafos es una herramienta de las ciencias de la computación que permite construir modelos matemáticos partiendo de problemas aplicados, el primer y más notorio ejemplo del uso de esta herramienta de abstracción es el caso del problema de los puentes de Königsberg, abordado por Leonhard Euler en 1736 en la publicación "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición) en la cual se demuestra la posibilidad

de encontrar o no una solución a dicho problema mediante el uso de grafos. Este trabajo sentaría las bases para definir posteriormente la teoría de grafos. Para dar solución a un problema de enrutamiento geométrico, como es el caso del diseño de rutas de transporte, resulta conveniente hacer uso de esta misma herramienta. A continuación se presentan definiciones a varios conceptos de la teoría de grafos [11].

**Vértice:** Es la unidad base de un Grafo y está compuesto por un par de coordenadas  $v = \{x, y\}$ . Un vértice  $v$  pertenece al grafo  $G$  y se denota como  $v \in G$ . Un conjunto de vértices en un grafo se denomina familia de vértices. El grado de un vértice hace referencia a la cantidad de aristas que inciden en él.

**Arista:** La conexión entre vértices. Si  $v$  y  $w$  son vértices diferentes, entonces  $v w$  representa la arista que los conecta. Un conjunto de aristas en un grafo se denomina familia de aristas.

**Incidencia:** Una arista es incidente a un vértice si ésta comienza o termina en él. La arista  $v w$  incide en los vértices  $v$  y  $w$ .

**Adyacencia:** Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los une. Los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes si existe una arista  $v w$ . De la misma forma, dos aristas son adyacentes si comparten un vértice. Al caracterizar un grafo se suele incluir una lista o matriz de adyacencias.

**Peso de Arista:** El peso es una cantidad asignada a una arista en un grafo ponderado. El peso puede hacer referencia a costo, distancia, capacidad o cualquier otra característica medible para comparar aristas.

**Polígono:** Un área planar definida por vértices y aristas pertenecientes a un grafo ponderado y no puede ser dividido en subáreas.

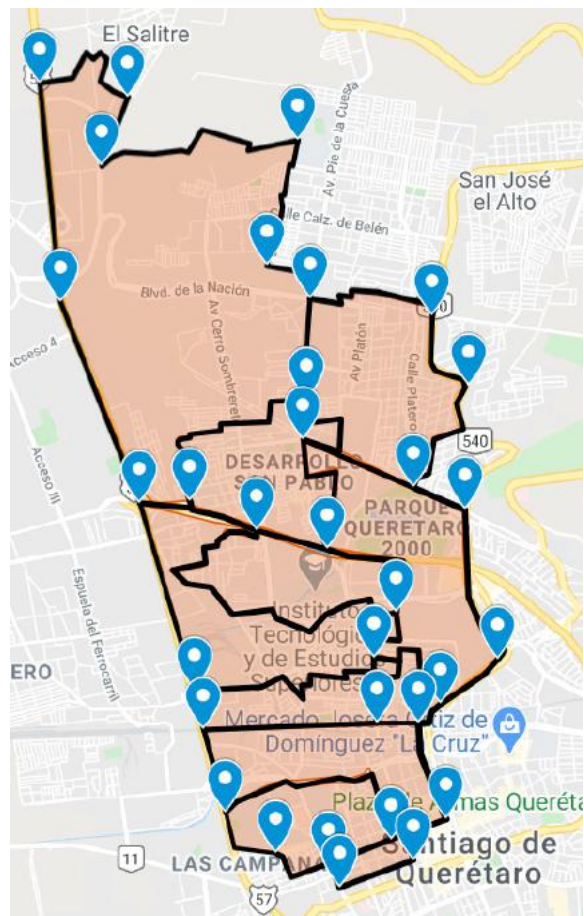
**Ruta:** Una secuencia de vértices unidos por aristas de tal forma que satisfacen criterios específicos de diseño.

El árbol extendido (*spanning tree*) de un grafo conexo es un subgrafo acíclico conexo que contiene todos los vértices del grafo. Si las aristas del grafo tienen asignado un costo, un árbol extendido de costo mínimo (MCST por sus siglas en inglés *minimum cost spanning tree*) es uno donde el costo está definido como

la suma de los pesos de todas sus aristas [12]. Existen algoritmos que resuelven el problema MCST a partir de un grafo conexo no dirigido; el más popular de ellos es el de Prim.

Mediante el uso de la teoría de grafos, se procede a seleccionar coordenadas geográficas que representarán vértices sobre los cuales incidirán las aristas, que en este caso de estudio representan a las calles de la ZMQ. El peso de las aristas hará referencia a la distancia euclidiana de los dos vértices sobre los que incide. Las coordenadas geométricas que se seleccionen deberán corresponder a puntos compartidos por dos o más polígonos, además de algunas otras coordenadas geográficas que ayuden a reconstruir con fidelidad la forma en que están dispuestas las calles y avenidas de la ZMQ.

A continuación se muestra el mapa del Distrito I con la redistribución de polígonos y la selección de vértices necesarios para su representación en forma de grafo. (Fig. 6)



**Figura 6.** Distrito I con polígonos balanceados.



## Construcción de grafo

Con los marcadores azules se construye un archivo que contenga las etiquetas de cada vértice (números del 1 al 32), así como la latitud y longitud de su ubicación geográfica; además, se construye una lista de adyacencias para caracterizar por completo el grafo equivalente del Primer Distrito de la ZMQ (Tabla 2).

**Tabla 2.** Coordenadas geográficas y lista de adyacencias de vértices.

Vértice	Latitud	Longitud	Vértices Adyacentes			
1	-100.43269	20.66123	2	6	-	-
2	-100.42397	20.65995	1	3	-	-
3	-100.42646	20.65345	2	4	-	-
4	-100.40689	20.65587	3	5	-	-
5	-100.41012	20.64416	4	7	-	-
6	-100.43065	20.64074	1	13	-	-
7	-100.40568	20.64116	5	8	9	-
8	-100.39351	20.63957	7	32	-	-
9	-100.40619	20.63167	7	10	12	-
10	-100.40652	20.62792	9	11	14	-
11	-100.39554	20.62342	32	10	17	-
12	-100.41785	20.62212	9	13	15	-
13	-100.42283	20.62196	6	12	19	-
14	-100.40410	20.61772	10	15	16	-
15	-100.41108	20.61937	12	14	16	-
16	-100.39719	20.61173	14	15	20	-
17	-100.39032	20.62134	11	18	-	-
18	-100.38698	20.60734	17	22	-	-
19	-100.41734	20.60452	13	20	23	-
20	-100.39937	20.60748	16	19	21	22
21	-100.39914	20.60139	20	23	24	-
22	-100.39269	20.60316	18	20	24	-
23	-100.41634	20.60082	19	21	25	-
24	-100.39496	20.60151	21	22	26	-
25	-100.41421	20.59302	23	27	28	-
26	-100.39221	20.59240	24	27	-	-
27	-100.39773	20.59050	25	26	29	31
28	-100.40913	20.58926	25	29	-	-
29	-100.40384	20.58831	27	28	30	-
30	-100.40283	20.58604	29	31	-	-
31	-100.39552	20.58852	27	30	-	-
32	-100.39006	20.63297	8	11	-	-

Con esta información se reconstruye un grafo conexo no dirigido equivalente al Distrito I de la ZMQ (Fig.7). Este grafo equivalente al primer distrito de la ZMQ constituye una instancia sobre la cual es posible probar algoritmos que produzcan soluciones útiles para el diseño de las rutas de transporte público en la ZMQ. Entonces, el primer paso es implementar el algoritmo de Prim para conocer el MCST de este grafo y, posteriormente, usar ese valor de costo como la función objetivo que se busca minimizar.

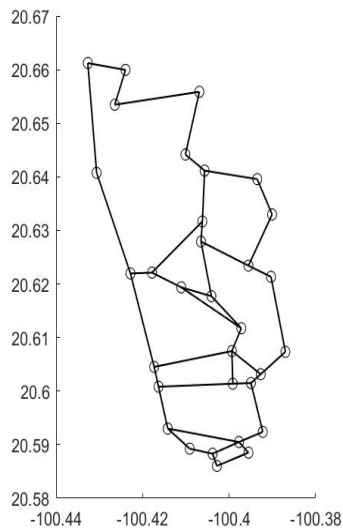


Figura 7. Grafo equivalente del Distrito I.

El algoritmo de Prim (Fig. 8) construye un MCST arista por arista, a través del uso de una lista de vértices que ya han sido conectados entre sí. En cada ciclo selecciona la arista con el costo menor entre un vértice nuevo y uno perteneciente a la lista de vértices ya conectados; luego de  $n - 1$  ciclos —donde  $n$  es el número de vértices en el grafo— se habrán conectado todos los vértices con el costo mínimo asignado a las aristas que los unen, lo que constituye un MCST. El costo de las aristas se traduce en la longitud en kilómetros que recorrería la ruta de transporte público colectivo para brindar servicio a la totalidad del primer distrito.

Algoritmo de PRIM	
$n \leftarrow  V $	▷ Cantidad de Vértices del grafo
$T \leftarrow NULL$	▷ Conjunto de Aristas seleccionadas
3: $TV \leftarrow \{a\}$	▷ Conjunto de vértices en el árbol
$E \leftarrow$	▷ Conjunto de Aristas de G
6: while ( $E \neq \emptyset$ ) && ( $ T  \neq n - 1$ ) do	
Sea $(u,v)$ la arista de costo mínimo tal que $u \in TV$ y	
9: $v \notin TV$	
$E = E - \{(u,v)\}$	
Agregar $(u,v)$ a T	
Agregar v a TV	
if $ T  == n - 1$ then	
T es el árbol de costo mínimo	
end	
18: end	

Figura 8. Algoritmo de Prim.

Al implementar el algoritmo de Prim en el grafo equivalente del primer distrito de la ZMQ, se obtiene el siguiente MCST (Fig. 9);

sin embargo, el MCST no es una solución válida para el problema MLC, pues el algoritmo de Prim conecta el 100 % de los vértices en el grafo, mientras que el objetivo del problema MLC es conectar al menos un vértice de cada polígono contenido en el grafo, por lo tanto, se busca reducir el porcentaje de vértices conectados en el MCST resultante sin privar de cobertura a ningún polígono del grafo [13].

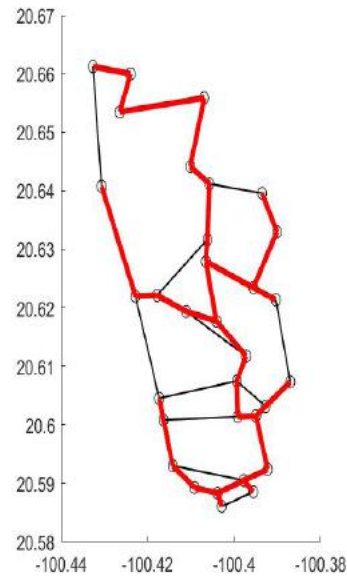


Figura 9. MCST de Distrito I de ZMQ por Prim.

### Algoritmo Heurístico p-MLC-m

El algoritmo p-MLC-m tiene la intención de seleccionar únicamente los vértices necesarios para cumplir con los requerimientos de diseño del problema MLC. En una primera etapa, el algoritmo p-MLC-m discrimina vértices con grado menor a 3; es decir, vértices que inciden en menos de tres aristas del grafo, posteriormente obtiene el centroide de los vértices restantes y asigna un peso a las aristas en función del vértice incidente más lejano al centroide. El radio discriminatorio será el mínimo posible, siempre y cuando permita que el subgrafo incluya todos los polígonos. Este criterio permite al algoritmo discriminar nuevamente vértices que resultan innecesarios de acuerdo con la lógica de



diseño del problema MLC. Luego de este proceso se implementa el algoritmo de Prim para obtener un subgrafo que contiene un MCST. El paso final consiste en eliminar sin recursividad todos los vértices hoja (aque- llos vértices que inciden únicamente en una arista del MCST), siempre y cuando exista al menos un vértice de cada polígono; de este modo se obtiene una solución al problema MLC. (Fig. 10)

```

Algoritmo p-MLC-M
n ← |V|                                ▷ Cantidad de Vértices del grafo
T ← NULL                               ▷ Conjunto de Aristas seleccionadas
3: G ← 3                                ▷ Grado mínimo de vértices
R ← x                                   ▷ Radio Discriminatorio
TV ← {a}                                ▷ Conjunto de vértices en el árbol
6: E ←                                  ▷ Conjunto de Aristas de G

for i = 1 : n do
9:   g = Grado de v
   r = Distancia de v hacia el centroide
   if g < G && r < R then
12:    Agregar v a TV
   end
end
15: while (E ≠ ∅) && (|T| ≠ n - 1) do
   Sea (u,v) la arista de costo mínimo tal que u ∈ TV y
18:   v ∉ TV
21:   E = E - {(u,v)}
   Agregar (u,v) a T
   Agregar v a TV
24:   if |T| == n - 1 then
     T es el árbol de costo mínimo
   end
27: end

for i = 1 : |TV| do
30:   g = Grado de v
   if g < 2 && v ≠ único vértice de un polígono then
     Eliminar v de TV
33: end
end

```

Figura 10. Algoritmo p-MLC-m.

Luego de implementar el algoritmo p-MLC-m obtenemos una solución al problema MLC en el grafo equivalente al primer Distrito de la ZMQ (Fig. 11 a, b) que, si bien no es la solución óptima, sí es una buena solución y nos permite construir una ruta de transporte público colectivo a partir de ella. También se considera al grafo como no dirigido, pues las rutas de transporte recorrerán un circuito; es decir, comenzaran y terminaran en el mismo punto, lo que implica que en el trayecto se recorrerán las calles en ambos sentidos.

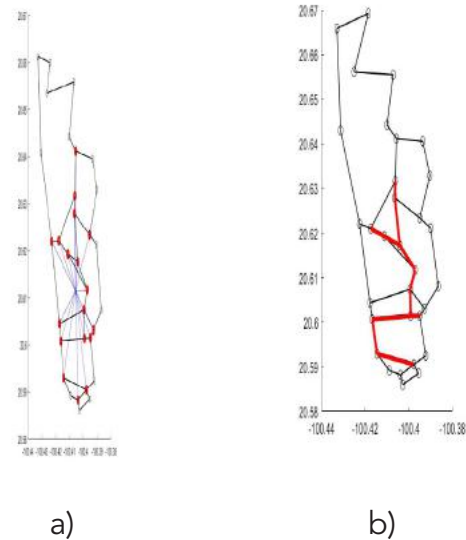


Figura 11. a) Vértices de subgrafo y su distancia al centroide, b) Solución al problema MLC en el Primer Distrito de la ZMQ.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La metodología descrita en el capítulo anterior fue replicada en la ZMQ en conjunto, es decir, las 417 secciones se reconfiguraron en polígonos con una densidad poblacional balanceada, y se obtuvo como resultado un total de 129 polígonos (Fig. 12).

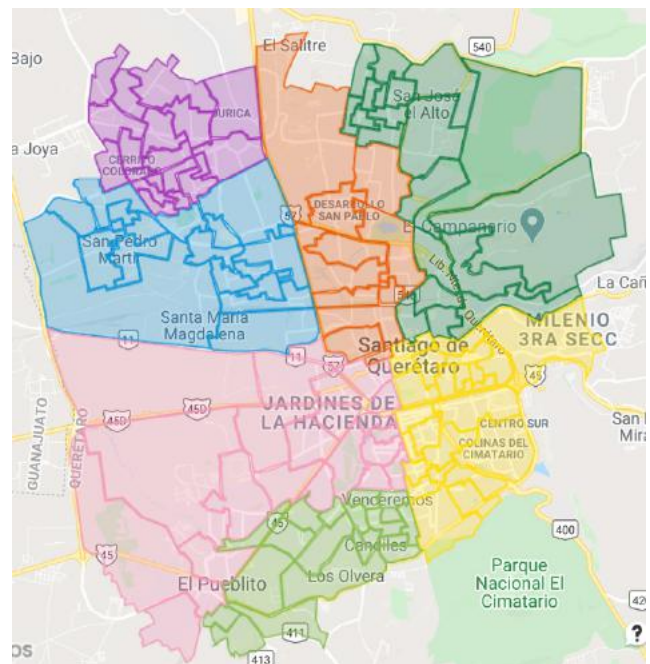
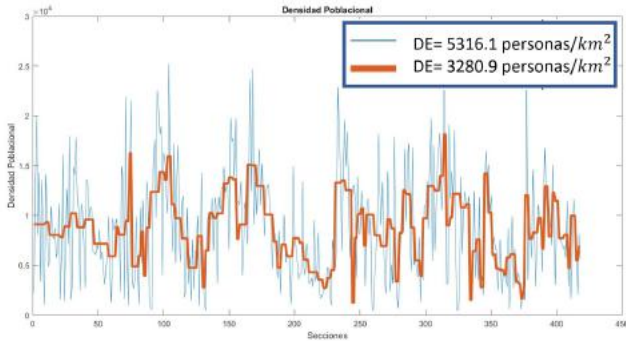


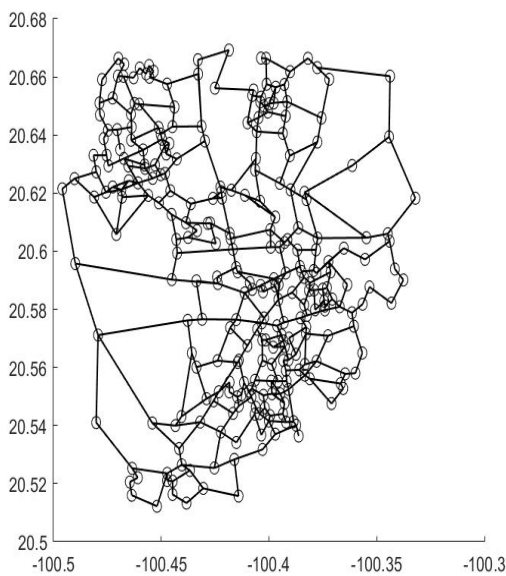
Figura 12. ZMQ dividida en 129 polígonos con densidad poblacional balanceada.

La desviación estándar de la densidad poblacional en las 417 secciones es de 5316.1 personas/ $km^2$ , mientras que la desviación estándar en los 129 polígonos es de 3280.9 personas/ $km^2$  (Fig. 13).



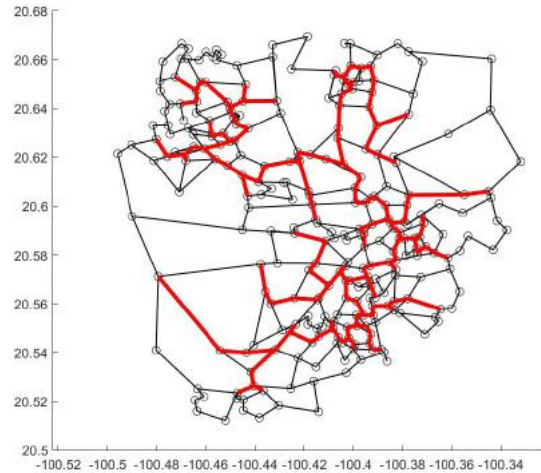
**Figura 13.** Desviación estándar de densidad poblacional por secciones y polígonos.

El grafo equivalente consta de 286 vértices y 572 aristas (Fig. 14).



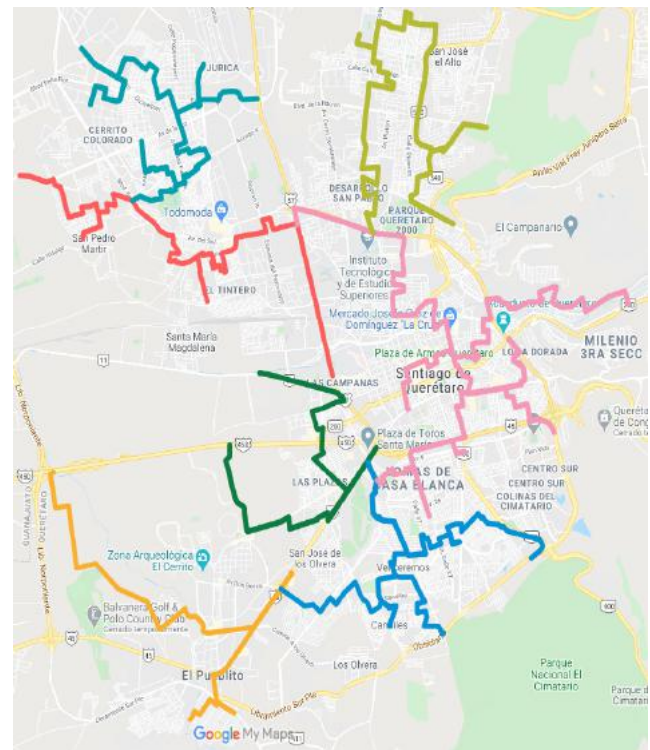
**Figura 14.** Grafo equivalente de la ZMQ.

Con la implementación del algoritmo p-MLC-m en el grafo equivalente de la ZMQ, se obtiene un MCST que es solución factible al problema MLC y brinda cobertura a los 129 polígonos del grafo, haciendo uso únicamente del 55.59 % de los vértices; es decir, 159 de 286. (Fig. 15).



**Figura 15.** Solución al problema MLC en la ZMQ.

Con esta solución es posible dividir el MCST en rutas de transporte público colectivo al destinar una ruta a conjuntos de ramas (aristas) del MCST, lo que resulta en 7 rutas (Fig. 16)



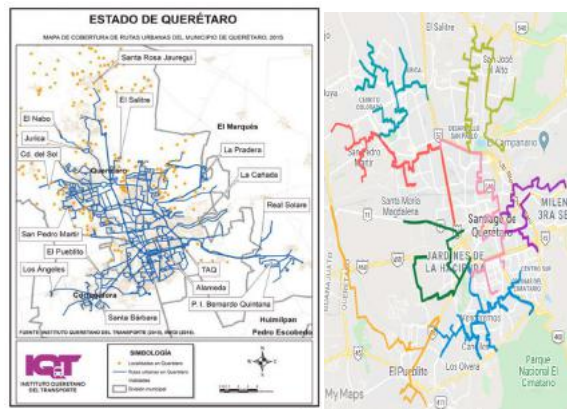
**Figura 16.** Rutas de Transporte público colectivo.



El diseño de las Rutas obtenidas a través de técnicas de inteligencia artificial nos permite hacer la siguiente comparativa con el sistema QroBus (Tabla 3 y Figura 17 a, b):

**Tabla 3.** Comparativa entre Rutas QroBus y MLC.

Característica	QroBus	MLC
Número de Rutas Distintas	76	7
Número total de kilómetros recorridos por las rutas	2968.37	243.38
Extensión Carretera usada por la red de rutas	747.94 km	121.69 km
Distancia Promedio de Ruta	39.05 km	34.76 km
Índice de Sobreposicionamiento	3.96 rutas/km	2 rutas/km



**Figura 17.** a) Sistema QroBus b) Sistema MLC.

## CONCLUSIONES

El MCST producido con la heurística p-MLC-m del grafo equivalente de la ZMQ es una solución al problema MLC, clasificado como NP-Duro. El diseño de las rutas de transporte público colectivo mediante el uso de técnicas de inteligencia artificial, como las heurísticas de optimización de enrutamiento geométrico, permite una traza eficiente de

las mismas. Si bien no son rutas óptimas, debido a la naturaleza del problema, sí se obtienen mejoras substanciales al diseño del periodo 2016-2021 de las rutas del transporte público colectivo de la ZMQ.

El MCST producido por la heurística p-MLC-m, no debe comprenderse como la configuración final de una red de transporte: es una guía que garantiza el recorrido más corto entre zonas de la ciudad de particular interés, que en este caso de estudio hacen referencia a la manera en que está distribuida la población; sin embargo, en otra configuración se podría hacer referencia a la distribución en el espacio de universidades, hospitales o centros comerciales, por ejemplo.

El MCST producido por la heurística p-MLC-m está basado en la totalidad de la ZMQ y puede ser subdividido en una cantidad distinta de rutas, en este caso se dividió en una ruta por distrito. Es posible que en un trabajo futuro se proponga una ruta con jerarquía mayor que conecte los distritos y después implementar el algoritmo p-MLC-M no a la totalidad de la ZMQ, sino de manera individual a cada distrito, en ese caso se producirían 7 distintos MCST y, por lo tanto, otras configuraciones de rutas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo durante toda esta investigación.

## ACRÓNIMOS

- IEEQ Instituto Electoral del Estado de Querétaro
- INE Instituto Nacional Electoral
- IQT Instituto Queretano del Transporte
- MCST *Minimum Cost Spanning Tree*
- MLC *Minimum Length Corridor*
- p-MLC-M *Point - Minimum Length Corridor - Map*
- ZMQ Zona Metropolitana de Querétaro

## REFERENCIAS

- [1] Bibliothèque nationale de France (2018). [Online]. Available: [https://data.bnf.fr/12889967/compagnie\\_generale\\_des\\_omnibus\\_paris/#other-pages-databnf](https://data.bnf.fr/12889967/compagnie_generale_des_omnibus_paris/#other-pages-databnf).
- [2] J. Stone, J. Dodson, P. Mees, M. Burkes, "The principles of public transport network planning: a review of the emerging literature with select examples," *Grith University: Urban Resarch Program*, vol. 15, 2011.
- [3] G. Thompson, J. Kooner, and R. Massman, *Fundamentals of Successful Transit, County of San Diego, San Diego*, 1976.
- [4] G. Nielsen, J. Nelson, C. Mulley, G. Tegner, G. Lind and T. Lange, "Public Transport Planning the Networks" *HiTrans Best Practice Guide 2*, 2005.
- [5] P. Mees, *A Very Public Solution: Transport in the Dispersed City*, Australia: Melbourne University Press, Melbourne, 2000
- [6] Instituto Queretano del Transporte, Programa Estatal de Transporte, Querétaro QRO., 2016
- [7] E. D. Demaine and J. O'Rourke, "Open problems from the 13th. Canadian Conference on Computational Geometry," *Proceedings of the 13th Canadian Conference on Computational Geometry*, 2000. [Online] Available: <http://theory.csail.mit.edu/~edemaine/papers/CCCG2000Open/>
- [8] H. L. Bodlaender, C. Feremans, A. Grigoriev, E. Penninkx, R. Sitters, and T. Wolle. "On the minimum corridor connection and other generalized geometric problems," *In Proc. 4th. WAOA*, vol. 4368 of LNCS.
- [9] A. González-Gutiérrez and T. F. González, "Complexity of the minimum length corridor problem", *Computational Geometry: Theory and Applications*, (2006), 72-103.
- [10] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, New York, U.S.A., W.H. Freeman and Company, 1979.
- [11] O. Cardozo, E. Gómez, M. Porras, "Teoría de grafos y sistemas de información geográfica", *Revista Transporte y territorio*, No. 1, 2009.
- [12] Anany Levitin, *The Design & Analysis of Algorithms*, 3rd Edition, New Jersey: Pearson, 2012.
- [13] A. González, "Meta-Heuristic Algorithms, Lecture #6: Minimum Cost Spanning tree", School of Engineering, Autonomous University of Querétaro, 2020