

# DISEÑO DE UN CONTROLADOR PD DE POSICIÓN PARA UN *BALL AND BEAM*

---

Design of a PD Position Controller for a Ball and Beam

Omar Nuñez Anguiano<sup>1</sup>, Bernardo Daniel Trujillo Ibarra<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Querétaro

Autor de correspondencia:  
\*omar200396@live.com

## RESUMEN

El presente artículo expone la información con la cual se llevó a cabo el diseño de un controlador PD de un sistema lineal de primer orden denominado “*Ball and Beam*”. Se utilizaron *softwares* como Proteus para el diseño del circuito electrónico y la herramienta *sisotool* de MATLAB para realizar la sintonización del controlador mediante el método clásico del lugar geométrico de las raíces para estabilizar el sistema. Se utiliza un controlador en cascada de corriente para posición y un sensor láser para conocer la posición de la pelota en el eje. De igual forma, se muestran los códigos de programación y la forma en la cual se elabora la sintonización de ambos controladores.

**Palabras clave:** Sistemas lineales, lugar geométrico de las raíces, *ball and beam*.

## ABSTRACT

This paper contains the procedural information for the development of a first-order linear system PD controller called “*Ball and Beam*.” The software Proteus was used for the design of the electronic circuit, and MATLAB’s ‘*sisotool*’ to tune the controller using the classic method of the root locus to stabilize the system. A current cascade controller was used for positioning, and a laser sensor to know the position of the ball on the axis. Additionally, the programming codes are shown for the tuning of both controllers.

**Keywords:** Linear systems, roots locus, ball and beam.

## INTRODUCCIÓN

El sistema *ball and beam* pertenece a un conjunto de sistemas denominados “subactuados”, y es uno de los más populares sistemas de laboratorio para experimentar en el diseño de control, ya que permite simplificar la comprensión y tiene utilidad en el estu-

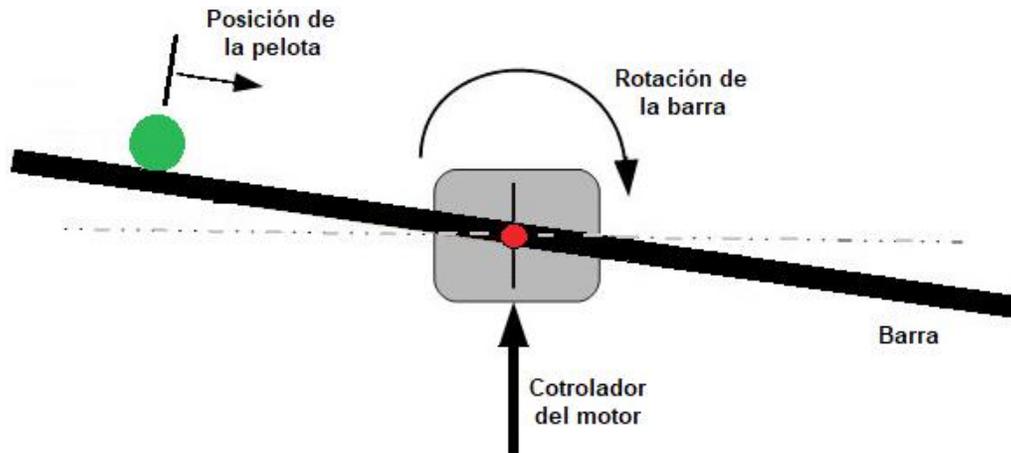
dio de técnicas de implementación clásicas y modernas de control [1], [2]. La regulación de un sistema inestable es muy importante para varios problemas de control, dado que tales sistemas resultan peligrosos al evaluar su posición vertical u horizontal y, a su vez, la estabilidad misma del sistema. Esto se puede estudiar únicamente en laboratorios por medio del modelado de sistemas [2], [3], [4]. Un sistema *Ball and Beam* es también llamado “balanceo de una pelota en una viga”.

Esto generalmente está vinculado a problemas reales de control, como la estabilidad horizontal de un avión durante el despegue y las turbulencias en el vuelo [5], [6]. El objetivo de estos sistemas consiste en controlar la posición de una pelota respecto a un punto de referencia inicial mediante el rechazo o disminución de las perturbaciones generadas por objetos externos al sistema [4]. Las señales de control se pueden derivar por medio de una retroalimentación que brinde la información acerca de la posición de la pelota, dichas señales van directamente a la corriente del motor CD y un par generado por los *drivers* y *encoders* que ayuda a determinar la posición angular del sistema [1], [6], [7], [8].

Este sistema ha sido estudiado y utilizado tanto en la búsqueda como en la evaluación de nuevos métodos para mejorar la estabilidad, obtener controladores de posición más efectivos y proponer nuevas formas de determinar la posición de un objeto. Además, no requiere un montaje complejo, se usan herramientas de evaluación y el control del sistema puede ser avanzado y aplicado a sistemas complejos.

## Planteamiento del problema

El problema recae en la condición de equilibrio de la pelota; dado que la masa de la pelota y la fricción entre la pelota y la barra son mínimas, se puede decir que prácticamente equivalen a cero. El fenómeno de control de posición se muestra en la figura 1.



**Figura 1.** Diagrama de funcionamiento de un *Ball and Beam*.

## Objetivo general

Realizar el diseño y funcionamiento de un sistema “*Ball and Beam*” mediante un sensor de medición de distancia láser y la sintonización del sistema por medio de un controlador PD.

## Objetivos específicos

- Construir una estructura que cumpla las condiciones de espacio del sistema.
- Realizar la programación del Sensor de distancia láser VL53L0-X en el PIC-16F877A por medio de una comunicación  $i^2C$ .
- Satisfacer las necesidades de la planta con un controlador PD capaz de estabilizar y responder rápidamente ante cualquier perturbación.
- Realizar la sintonización del lazo maestro por medio del lugar geométrico de las raíces.

## Marco teórico

Equilibrar una bola en una viga es un problema de control clásico denominado *Ball and beam*, y tiene la característica de ser un sistema subactuado y no lineal; sin embargo, para este caso de trabajo se considera únicamente la parte lineal del sistema, con las consideraciones que se explican más adelante.

El *Ball and beam* consiste en el desplazamiento de una pelota en el interior de una viga con un carril que está sujeto al eje de un motor eléctrico que le permite girar sobre su eje. El objetivo es controlar la posición de la pelota cambiando el ángulo de la viga mediante el movimiento del motor; esto se realiza mediante un controlador que genera una señal eléctrica que regula el motor a través de su voltaje.

Las variables de control para llevar a cabo tal acción son el ángulo de la viga, dado por un *encoder* acoplado al eje del motor, y la posición de la bola, obtenida mediante un sensor situado generalmente en uno de los extremos de la viga. La estabilización de la pelota en un punto fijo —normalmente el centro— representa un desafío, ya que ésta se mueve sobre la viga con una aceleración proporcional a su ángulo de inclinación; además, el sistema es inestable en lazo abierto, pues la posición de la pelota se incrementa sin límites a partir de un determinado ángulo; no obstante, es posible desarrollar un sistema de control que lleve a cabo la tarea.

## Modelado matemático del sistema

Para diseñar y desarrollar con éxito un controlador que satisfaga las necesidades de un mecanismo, es conveniente disponer en la medida de lo posible de un modelo matemático que reproduzca fielmente el comportamiento

del sistema [4]. Un modelo matemático de un sistema dinámico se puede definir como el conjunto de ecuaciones, generalmente diferenciales, que representan la dinámica del sistema en cuestión con bastante precisión.

Este modelo matemático no será único, sino que, dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo será más conveniente que otros [8], [9]. Además, en la obtención de un modelo matemático se debe establecer un equilibrio entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis.

Este mecanismo cuenta con dos grados de libertad: uno es la posición de la pelota a lo largo de la barra horizontal, y el otro es el ángulo de la viga respecto a la horizontal, o dicho de otra manera, la posición del eje del motor. En función de estas variables se obtendrán las ecuaciones de movimiento del sistema [2], [10], [11]. Las magnitudes de fricción son independientes del área de contacto aparente entre las dos superficies, y son proporcionales a la magnitud  $N$  de la fuerza normal que ejerce una de las superficies sobre la otra. La constante de proporcionalidad que relaciona la fuerza de fricción con la fuerza normal es el coeficiente de fricción  $\mu$ ; esta constante adimensional depende del tipo de superficies que intervienen, así que se determina experimentalmente. Estas re-

laciones se expresan en ecuaciones del siguiente modo:

$$f_e \leq \mu_e \cdot N \quad f_{e,max} \leq \mu_e \cdot N \quad f_c \leq \mu_c \cdot N \quad (1)$$

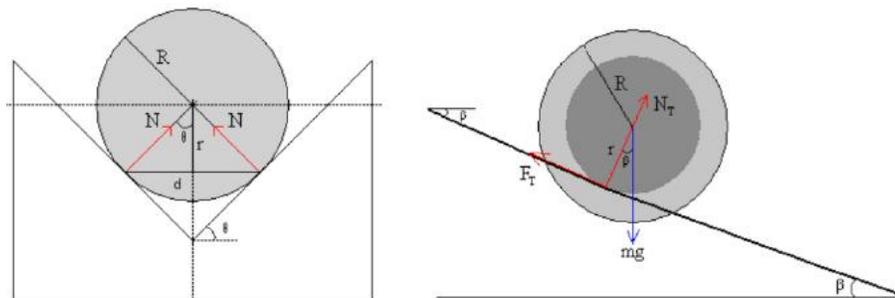
$$f_c < f_e \quad \Leftrightarrow \quad \mu_c < \mu_e \quad (2)$$

El estudio de la fricción en el caso del mecanismo *Ball and beam* se complica cuando se pretende que la bola ruede sin deslizarse sobre el plano inclinado que forma la viga cuando ésta se inclina en cierto ángulo. De este estudio se obtiene el máximo ángulo en que se puede girar la viga para que la bola ruede y no se deslice en su movimiento por la barra.

A partir de la situación dada en la figura 2, en la que la esfera se encuentra apoyada en dos puntos del carril que forma la viga, se supone la existencia de rozamientos iguales en cada uno de esos puntos de apoyo. Según las relaciones geométricas dadas en la primera figura,  $r$  y  $d$  se pueden expresar en función del radio  $R$  de la esfera del siguiente modo:

$$r = R \cos \theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (3)$$

$$d = 2R \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad d = 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad (4)$$



**Figura 2.** Perfil de la viga con bola en relación a las fricciones ejercidas.

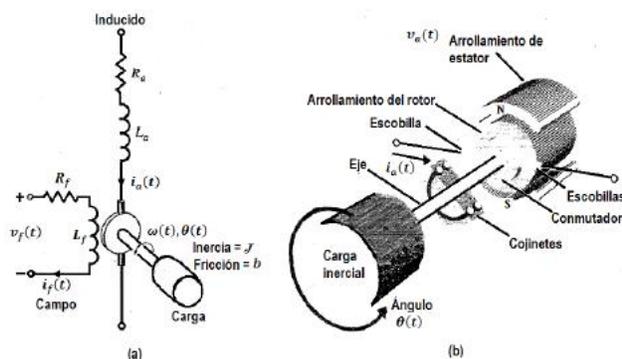


De igual forma, se definen las magnitudes  $F_T$  y  $N_T$  como las resultantes de las fuerzas de rozamiento y de las reacciones de la superficie de la viga sobre la esfera, respectivamente:

$$F_T = 2 F_R \quad (5)$$

$$N_T = 2 N \cos \theta \quad (6)$$

Para fines prácticos, solamente se contempla el ángulo de la viga, debido a que:

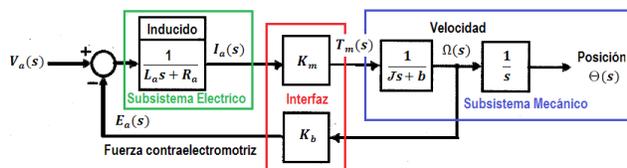


**Figura 3.** Diagrama esquemático de un motor con escobillas.

a) Diagrama del circuito eléctrico.

b) Diagrama del motor con escobillas.

En la figura 3 se puede apreciar la representación general de un motor con escobillas. Como se sabe, la representación de un motor con escobillas está dada por el siguiente lazo de control, donde se consideran la parte eléctrica y la mecánica.



**Figura 4.** Lazo de control de un motor con escobillas.

Tras la simplificación del diagrama de bloques, puede verse que la función de transferencia está determinada por (7).

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[J s + b][L_a s + R_a] + K_b K_m} \quad (7)$$

La constante de tiempo eléctrica del inducido  $\tau = \frac{L_a}{R_a} \approx 0$ ; donde  $R_a \neq 0$  y  $L_a = 0$ , lo cual permite despreciarla, tal que:

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[J R_a s + R_a b + K_b K_m]} \quad (8)$$

Simplificando (8):

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_m}{J R_a}}{s \left[ s + \frac{R_a b + K_b K_m}{J R_a} \right]} \quad (9)$$

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{C_k}{s[s + C_p]} \quad (10)$$

Donde  $C_k = \frac{K_m}{J R_a}$  es la ganancia de trayectoria, y  $C_p = \frac{R_a b + K_b K_m}{J R_a}$  es el inverso de la ganancia de tiempo mecánica.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Los materiales utilizados en la construcción del sistema se muestran en la tabla 1.

**Tabla 1.** Materiales para la construcción del sistema.

MATERIALES	PIEZA
PIC16F877A	1
MAX232	1
DM74LS08	1
Motor Bühler C-4713-60112	1

Encoder HEDS-9100	1
MÓDULO PUENTE H L298N	1
SENSOR DE DISTANCIA LÁSER VL53L0-X	1
CRISTAL DE CUARZO DE 20 MHZ	1
CONVERTIDOR SERIAL DB9 RS232 A USB	3
OPTOACOPLADORES 4N28 / 4N27	4
RESISTENCIA 1 K	1
RESISTENCIA 4.7 K	2
RESISTENCIA 100 K	1
RESISTENCIA 300	3
CAPACITOR 15 F	2
CAPACITOR 27 F	5
CAPACITOR 1 F	1
MÓDULO PUENTE H L298N	1
SENSOR DE DISTANCIA LÁSER VL53L0-X	1
CRISTAL DE CUARZO DE 20 MHZ	1
CONVERTIDOR SERIAL DB9 RS232 A USB	1

También se requirió del uso de los siguientes softwares para llevar acabo la programación del PIC16F877A, el diseño de la PCBA del circuito electrónico y el código de la plataforma experimental:

Dev C++, para controlar el sistema;

PIC C Compiler 5.5, para programar el microcontrolador PIC16F877A;

*Proteus Professional*, para el diseño del circuito electrónico que se muestra en las figuras más adelante.

La programación del PIC16F877A se realizó con el sensor de distancia láser VL53L0-X mediante el protocolo de comunicación i<sup>2</sup>C — cuya arquitectura permite tener una confirmación de los datos recibidos— por medio del puerto serial usando el componente MAX232 y el convertidor serial DB9 RS232 a USB.

Posteriormente se llevó a cabo el diseño de la PCBA para el montaje de los componentes electrónicos; a continuación se muestra el diseño del diagrama esquemático en la figura 5, elaborado en *Proteus Professional*, donde se exhiben las conexiones necesarias del circuito electrónico.

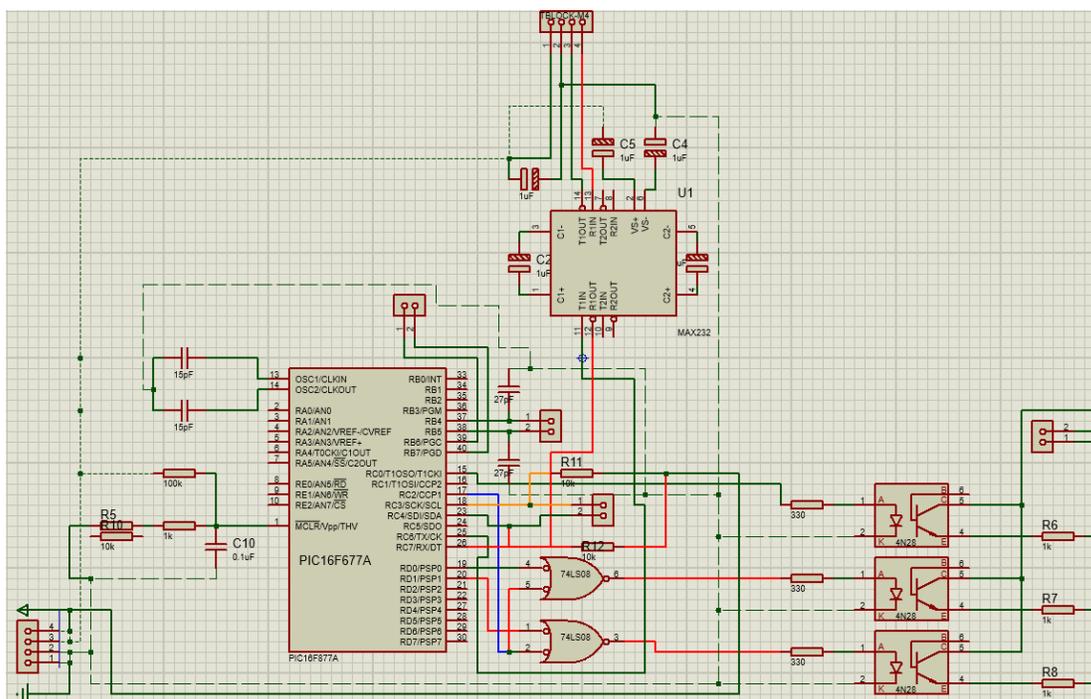


Figura 5. Diagrama Esquemático del circuito electrónico de la PCB.



En la figura 6 se muestra el diseño de la PCB con las terminales requeridas para el circuito eléctrico que se empleó en el desarrollo del sistema y con el que se comprobó que no existieran cortocircuitos ni otros problemas con ninguno de los componentes.

La siguiente etapa fue la de sintonización e identificación de las constantes de la plataforma experimental, para ello se utilizó el lazo de control de la figura 7, que muestra la dinámica del servosistema, es decir, la planta del sistema. Se puede observar claramente la propuesta de un controlador PD en casca-

da, tal que existe un lazo maestro y un lazo esclavo de control.

Para obtener las ganancias de la planta,  $C_k$  y  $C_p$ , se debe realizar una prueba experimental con la viga. Se contempló que la pelota comienza a moverse sobre la viga a una inclinación  $\theta = 5^\circ$ . Se propuso un controlador proporcional de ganancias  $K_p = 30$  y un valor final  $V_f = \pi$ , donde  $V_f$  es el máximo valor de inclinación que puede tener la viga para que el sistema se pueda considerar inestable.

En la figura 8 se observa la gráfica que indica el valor pico  $V_p = 0.157$ .

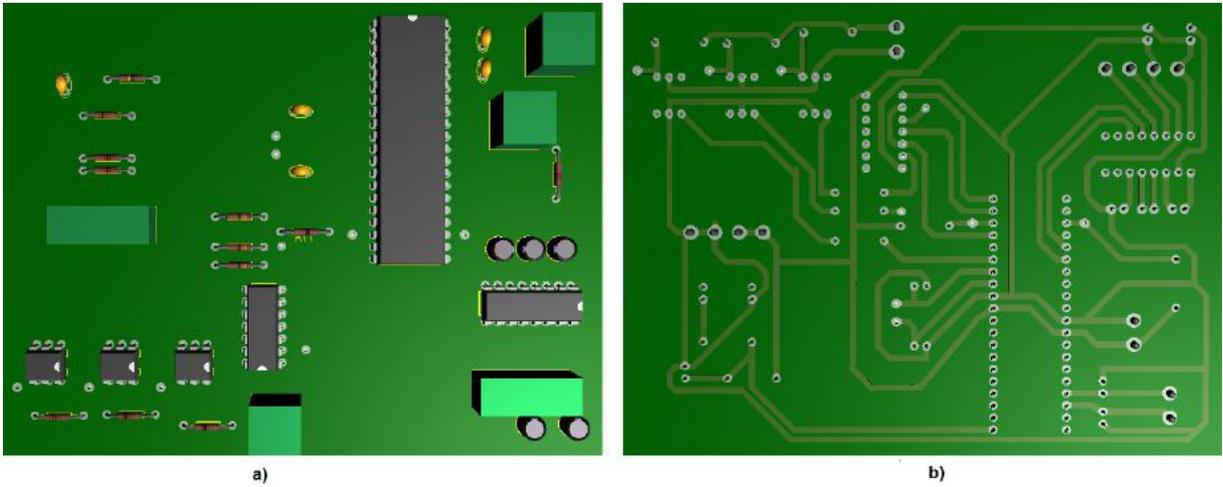


Figura 6. Circuito PCBA.  
a) Parte frontal; b) Parte trasera.

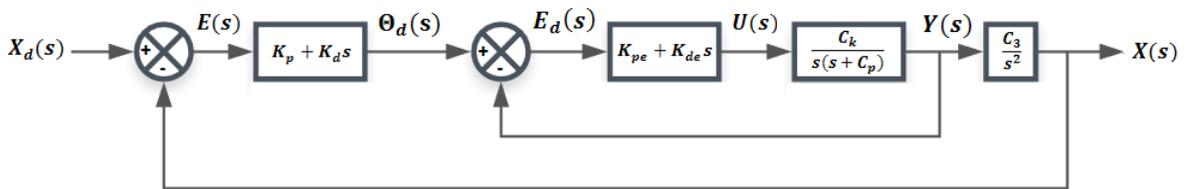


Figura 7. Lazo de control del servosistema.

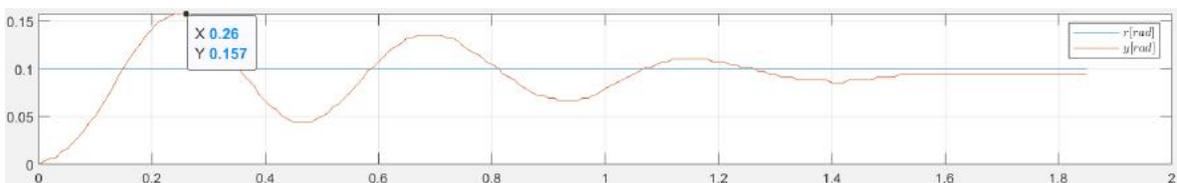


Figura 8. Gráfica del valor pico  $V_p$ .

En la figura 9 de igual manera se observa el tiempo de subida. Con estos datos anteriores se calcularon los valores de las constantes y del lazo esclavo de control.

Los valores de  $C_k$  y  $C_p$  se encontraron mediante la relación de (11) entre sistemas de segundo orden de lazo cerrado, que es la función de transferencia del lazo esclavo.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C_k(K_{de}s + K_{pe})}{s^2 + (C_p + C_k K_{de})s + C_k K_{pe}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (11)$$

De la ecuación (11) se obtuvieron las expresiones (14) y (15), donde se calculan los valores de  $\zeta$  con la ecuación (12), y  $\omega_n^2$  con la ecuación (13).

$$\zeta = \frac{\left( \ln \left( \frac{\left( \frac{V_p - V_f}{V_f} \right) 100}{100} \right) \right)^2}{\pi^2 + \left( \ln \left( \frac{\left( \frac{V_p - V_f}{V_f} \right) 100}{100} \right) \right)^2} \quad (12)$$

$$\omega_n = \frac{\pi - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)}{t_r \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (13)$$

$$C_k = \frac{\omega_n^2}{K_{pe}} \quad (14)$$

$$C_p = 2\zeta\omega_n \quad (15)$$

Los valores obtenidos fueron  $C_k = 4.67079$  y  $C_p = 4.16985$ . Posteriormente se sustituyeron los valores en el lazo esclavo de control de la figura 7, con lo cual fue posible calcular las ganancias  $K_{pe}$  y  $K_{de}$  del controlador a partir de las ecuaciones anteriores, sólo que entonces se utilizó un tiempo de subida  $t_r = 0.1$  y un sobrepaso máximo  $M_p = 30\%$ , para que el sistema cumpliera ciertas condiciones de control. Con lo cual se volvieron a calcular  $\zeta$  y  $\omega_n$ , para después calcular las ganancias proporcional y derivativa del controlador esclavo con las ecuaciones (16) y (17).

$$K_{pe} = \frac{\omega_n^2}{C_k} \quad (16)$$

$$K_{de} = \frac{2\zeta\omega_n - C_p}{C_k} \quad (17)$$

De donde se obtuvo como resultado  $K_{pe} = 76.394$  y  $K_{de} = 0.8183$ . Se realiza una prueba con los valores obtenidos y posteriormente se realizan ajustes técnicos para precisar los valores del sistema, debido a que las constantes del sistema ( $C_k$  y  $V_p$ ) son valores empíricos.

Esto permite mejorar la estabilidad, respuesta y amortiguamiento del sistema. Finalmente, las ganancias fueron  $K_{pe} = 77$  y  $K_{de} = 2$ , tales valores permitieron obtener un tiempo de subida  $t_r = 0.9564$  y un sobrepaso  $M_p = 26\%$ .

Estos resultados se muestran en la gráfica de la figura 10.

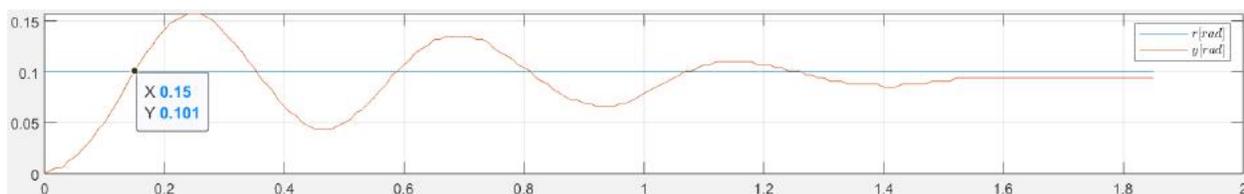


Figura 9. Gráfica del valor pico  $V_p$ .



Dado lo anterior, se simplifica el lazo esclavo del servosistema que se muestra en la figura 7, lo que resulta en el lazo de control maestro del sistema, tal como se aprecia en la figura 11.

Como se puede observar, en el lazo de control del sistema existe una constante desconocida, ésta es una constante de crecimiento que se calcula por medio de una parábola de la forma que se muestra en la ecuación (18), y se debe al incremento de la distancia entre el punto inicial, el punto medio o de equilibrio del sistema, y el punto máximo de distancia. Esta constante representa el crecimiento del ángulo ideal de la distancia respecto al punto inicial

$$y(t) = \frac{C_3 t^2}{2} \quad (18)$$

Tomando en cuenta que en el *Ball and beam* se mide la distancia con la ayuda del sensor de distancia láser, se debe tener un factor constante de crecimiento que gobierne las mediciones del sensor para que pueda afectar a la parábola.

Esta constante experimental se obtiene poniendo el eje horizontal sobre el cual la pelota debe ir colocada, con un ángulo de inclinación  $\theta = 5^\circ$ . Para ello el sensor debe realizar la medición de la distancia conforme la pelota se desliza sobre el riel hasta llegar a la distancia máxima (la figura 12 explica cómo realizar este procedimiento). Este paso se debe realizar cuidadosamente, ya que es una de las constantes más importantes del sistema. Finalmente, se obtuvo la siguiente aproximación que se muestra en la figura 13, donde  $C_3 = 2800$ .

A partir de las constantes del bloque del lado izquierdo —las constantes de la planta y del lazo esclavo— se propuso una modi-

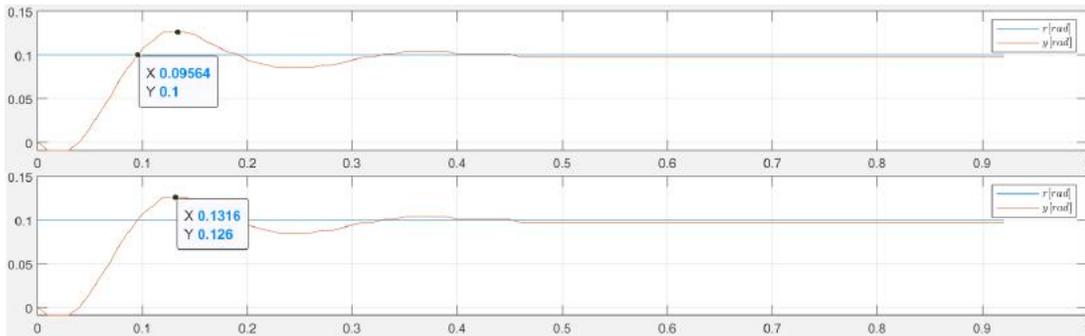


Figura 10. Gráfica de respuesta del lazo esclavo sistema.

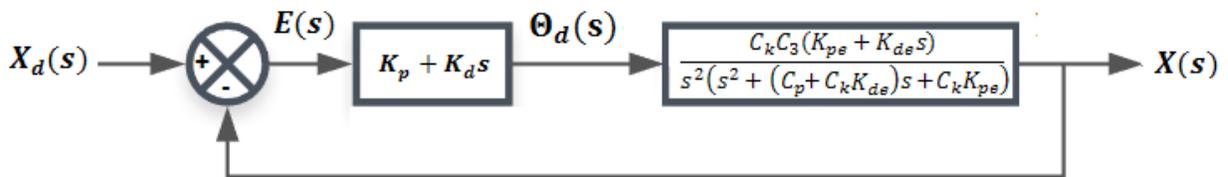


Figura 11. Lazo de control Maestro.

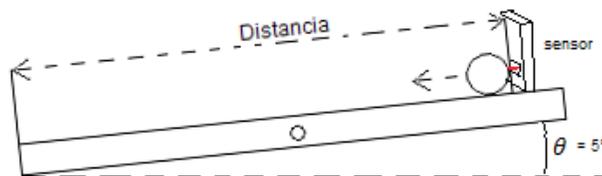
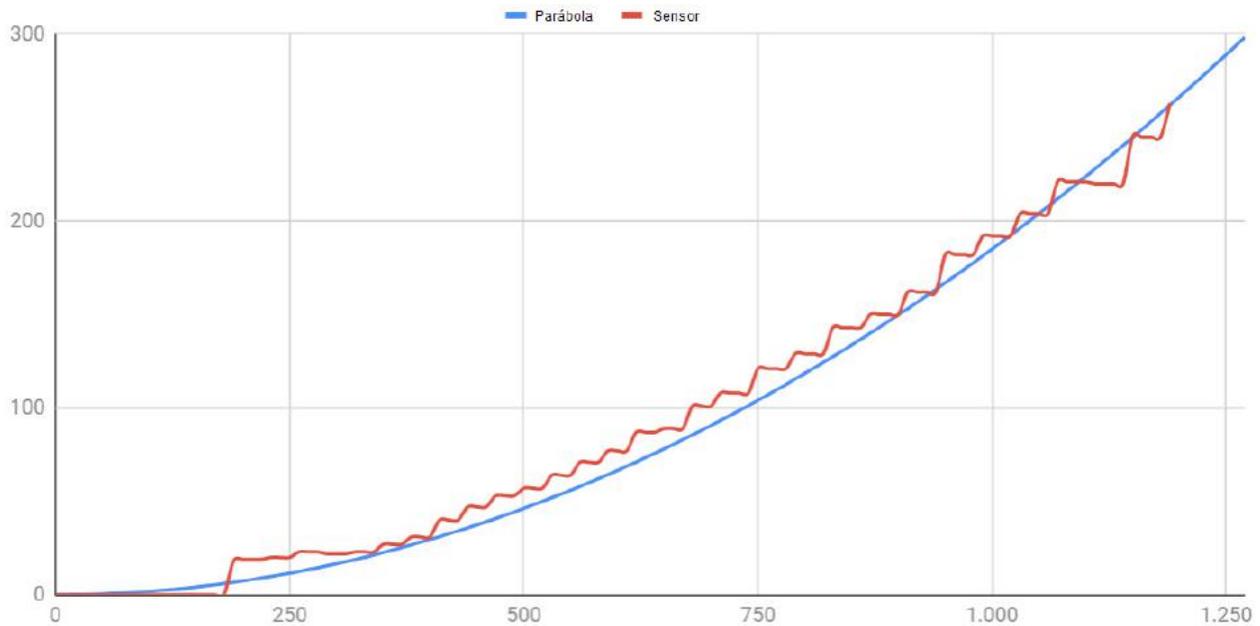


Figura 12. Colocación de la barra para calcular  $C_3$ .



**Figura 13.** Comparación de una parábola y la función de crecimiento constante de  $C_3$ .

ficación en el controlador del lazo maestro, donde se factoriza la ganancia derivativa  $K_d$ ; el lazo de control resulta como se muestra en

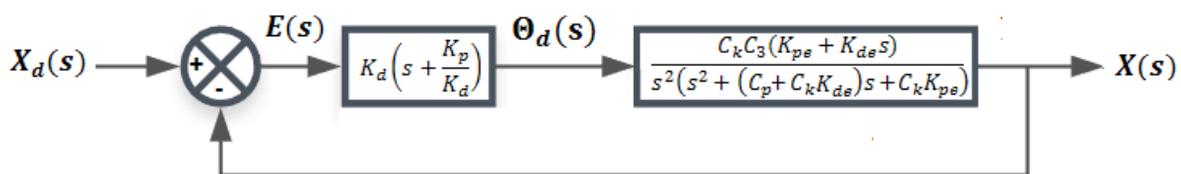
la figura 14, con lo cual  $K_d \left( s + \frac{K_p}{K_d} \right)$  agrega un cero y una constante al sistema.

Aplicando el método de lugar geométrico de las raíces a la función de transferencia  $G(s)$  del sistema, con la función de transferencia de la ecuación (19), se encuentra una ganancia  $K_p=0.001$  y  $K_d=0.001$ .

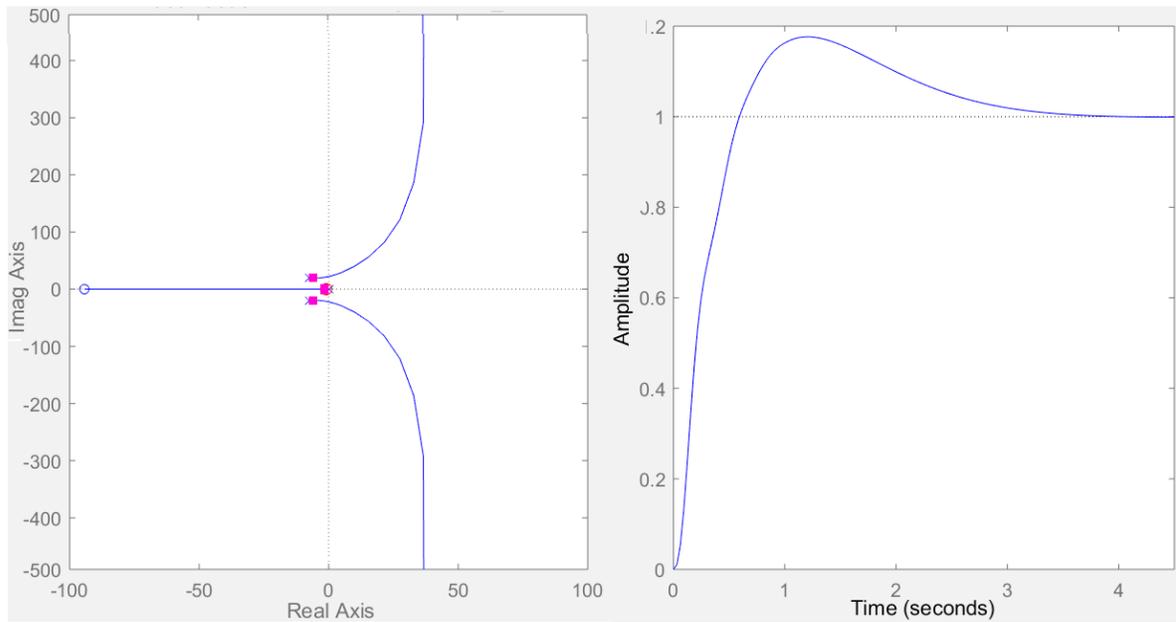
Cabe mencionar que el cero del sistema es  $S = -K_p / K_d$ , localizado en la parte real del semiplano izquierdo, con lo que se garantiza que el sistema sea completamente estable, debido a que los polos y ceros de lazo cerrado del sistema de igual forma se encuentran en el lado izquierdo del semiplano. Con estas ganancias del controlador del lazo maestro se obtiene el siguiente lugar geométrico y respuesta del sistema, mostrados en la figura 15.

Asimismo, se realizó la experimentación para probar las ganancias obtenidas, y se obtuvieron las siguientes respuestas.

$$G(s) = \frac{K_d \left( s + \frac{K_p}{K_d} \right) C_k C_3 (K_{de} s + K_{pe})}{s^2 (s^2 + (C_p + C_k K_{de}) s + C_k K_{pe})} \quad (19)$$



**Figura 14.** Lazo maestro de control del sistema.

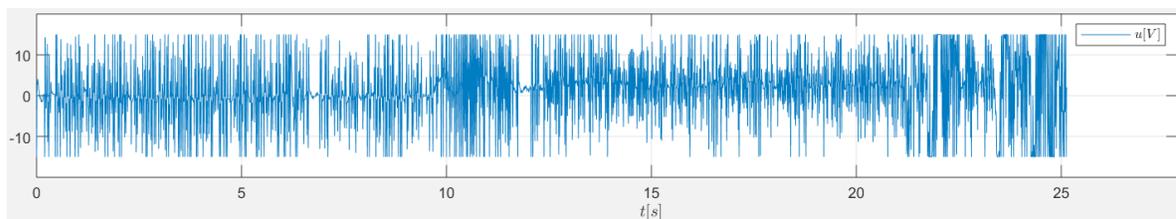


**Figura 15.** Localización del cero del controlador de lazo maestro y respuesta del sistema.

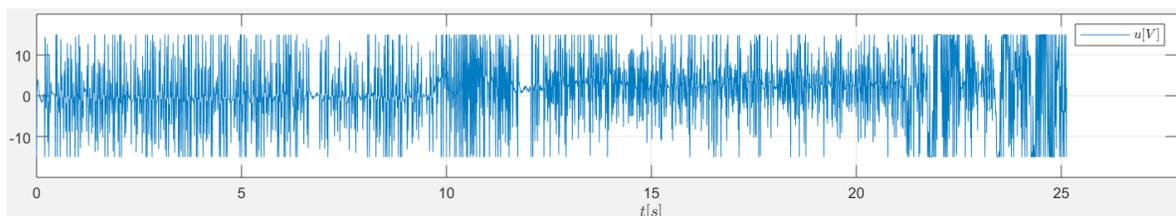
En la figura 16 puede observarse claramente que la señal de salida del sistema contiene bastante ruido; realizando análisis constante, se llegó a la conclusión de que el sensor contiene ruido blanco debido al incremento de la ganancia de  $K_d$ . Ésta es una de las desventajas de utilizar un control con ganancia derivativa: entre mayor sea la ganancia de-

derivativa, mayores son el ruido e inestabilidad que se introduce al sistema.

Por tal motivo las ganancias se ajustaron de forma empírica hasta obtener una respuesta con menos ruido por parte del sistema. Los valores de las ganancias con los cuales se realizó la sintonización del sistema fueron  $K_p=0.001$  y  $K_d=0.00001$ .



**Figura 16.** Respuesta del sistema con control en cascada, mediante el método del lugar geométrico de las raíces.



**Figura 17.** Respuesta final del sistema, ganancias ajustadas de forma empírica.

## RESULTADOS

Finalmente, se obtuvo una correcta sintonización del sistema y se concretaron los objetivos propuestos al comienzo de la elaboración del proyecto. Fue posible elaborar una estructura experimental que cumpliera las características del problema; de igual manera, se concretó la programación y el funcionamiento del sensor de distancia láser VL53L0-X por medio de comunicación  $i^2C$  en el PIC16F877A.

Otro objetivo que resultó satisfactorio fue la sintonización del lazo en cascada que se tiene en el sistema, tanto en la programación como en el funcionamiento físico del sistema. Por último, se muestra una imagen con el proyecto terminado en la figura 18.

## CONCLUSIONES

Tomar en cuenta el ángulo del motor como la variable a regular proporciona grandes ventajas al momento de realizar el control, y además permite disminuir los problemas en la práctica. En este contexto, el proyecto *Ball and beam* permite a los estudiantes desarro-

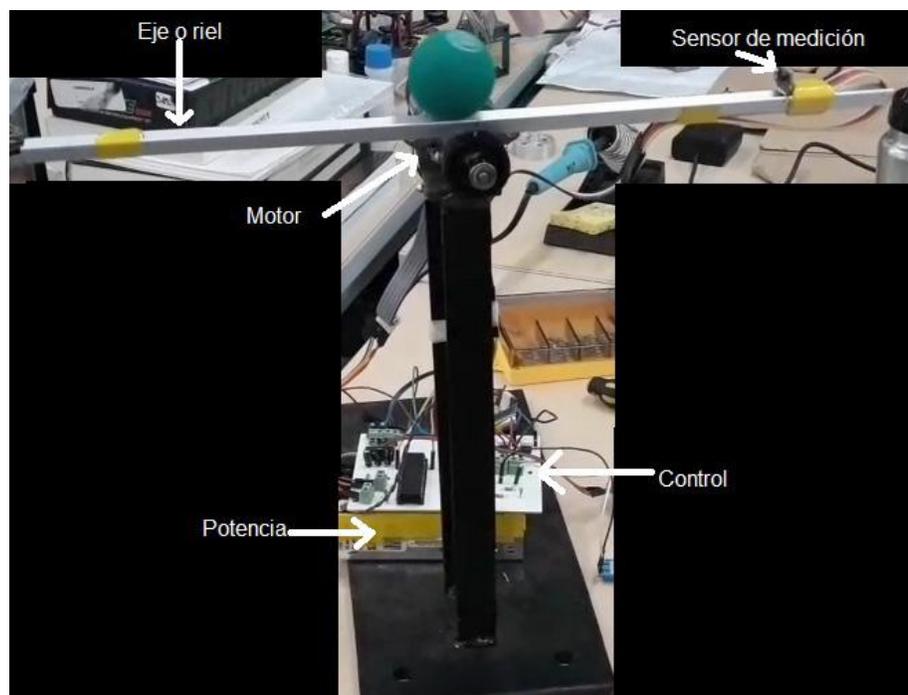
llar sus conocimientos en el área de control mediante la sintonización de un controlador para un sistema lineal.

De esta forma, se cree que los puntos clave para llevar a cabo este proyecto son:

- La programación del PIC y el sensor de medición.
- Un manejo esencial de la instrumentación y la electrónica.
- Comprensión de los conceptos básicos de control y las características de las ganancias de un controlador PID.
- La comprensión del método del lugar geométrico de las raíces.

El análisis matemático de sistemas lineales, a diferencia de los modelos no lineales, facilita el aprendizaje sin la necesidad de un amplio conocimiento en el área; a su vez, esto posibilita decir que el sistema es estable, con el simple hecho de saber que los polos y ceros del sistema se encuentran en la parte real negativa del semiplano izquierdo.

El lazo de control esclavo del control en cascada que se utiliza es relativamente sencillo de sintonizar, ya que las pruebas ex-



**Figura 18.** Sistema *Ball and beam*, plataforma experimental.



perimentales permiten esta sencillez. Caso contrario al lazo de control maestro, que requiere comprender de forma precisa nociones de control más avanzadas, como las características de las ganancias y las consecuencias que cada una ocasiona al sistema, pues éste es el último controlador, y por ello el más importante, debido a que será el encargado de eliminar el error restante conforme al ángulo deseado.

Dentro de los puntos considerados de más relevancia para continuar el estudio de este tipo de sistemas, se encuentra la naturaleza de los mismos. Estos sistemas pertenecen a un amplio conjunto de sistemas llamados subactuados, los cuales son parte importante en el área de control ya que siempre cuentan con características como no linealidad, y menor cantidad de actuadores que las variables existentes en el sistema.

Al cumplir con estos puntos, se logra obtener los resultados deseados. La elaboración del proyecto *Ball and Beam* contribuye de manera importante en el aprendizaje personal y académico de los alumnos, ya que resalta los puntos más importantes en el área de control automático de forma práctica.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] W. Bolton, *Ingeniería de control*, Segunda ed., México, D. F.: Alfaomega, 2001.
- [2] A. J. Carrillo-Paz, *Sistemas automáticos de control: Fundamentos básicos de análisis y modelado*, Segunda ed., UNERMB, 2011.
- [3] R. Canales-Ruiz y R. Barrera-Rivera, *Análisis de sistemas dinámicos y control automático*, México: Limusa, 1976.
- [4] I. Fantoni y R. Lozano, *Non-linear control for underactuated mechanical systems.*, E. D. Sontag y M. Thoma, Edits., France: Springer Science & Business Media, 2001.
- [5] B. C. Kuo, *Automatic control systems*, Séptima ed., México: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1996.
- [6] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Tercera ed., Naucalpan de Juárez, Estado de

México: Prentice-Hall Hispanoamericana S: A., 1998.

[7] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Quinta ed., Madrid: Pearson Educación, 2010, p. 904.

[8] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza y R. V. Carrillo-Serrano, *Control automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*, Primera ed., México, D. F.: Colección CIDETEC del Instituto Politécnico Nacional, 2013.

[9] V. M. Hernández-Guzmán y R. Silva-Ortigoza, *Automatic control with experiments*, Switzerland: Springer International Publishing, 2019.

[10] G. C. Goodwin, S. F. Graebe y M. E. Salgado, *Control system design*, Primera ed., Valparaíso,: Prentice Hall, 2000.

[11] J. M. Ramos-Arreguín, J. E. Vargas-Soto y E. Gorrostieta-Hurtado, *Robótica y mecatrónica*, Primera ed., Querétaro, Querétaro: Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C., 2018.

