PädiUAQ

12

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

ISSN 2954-4025

VOLUMEN 6, NÚMERO 12

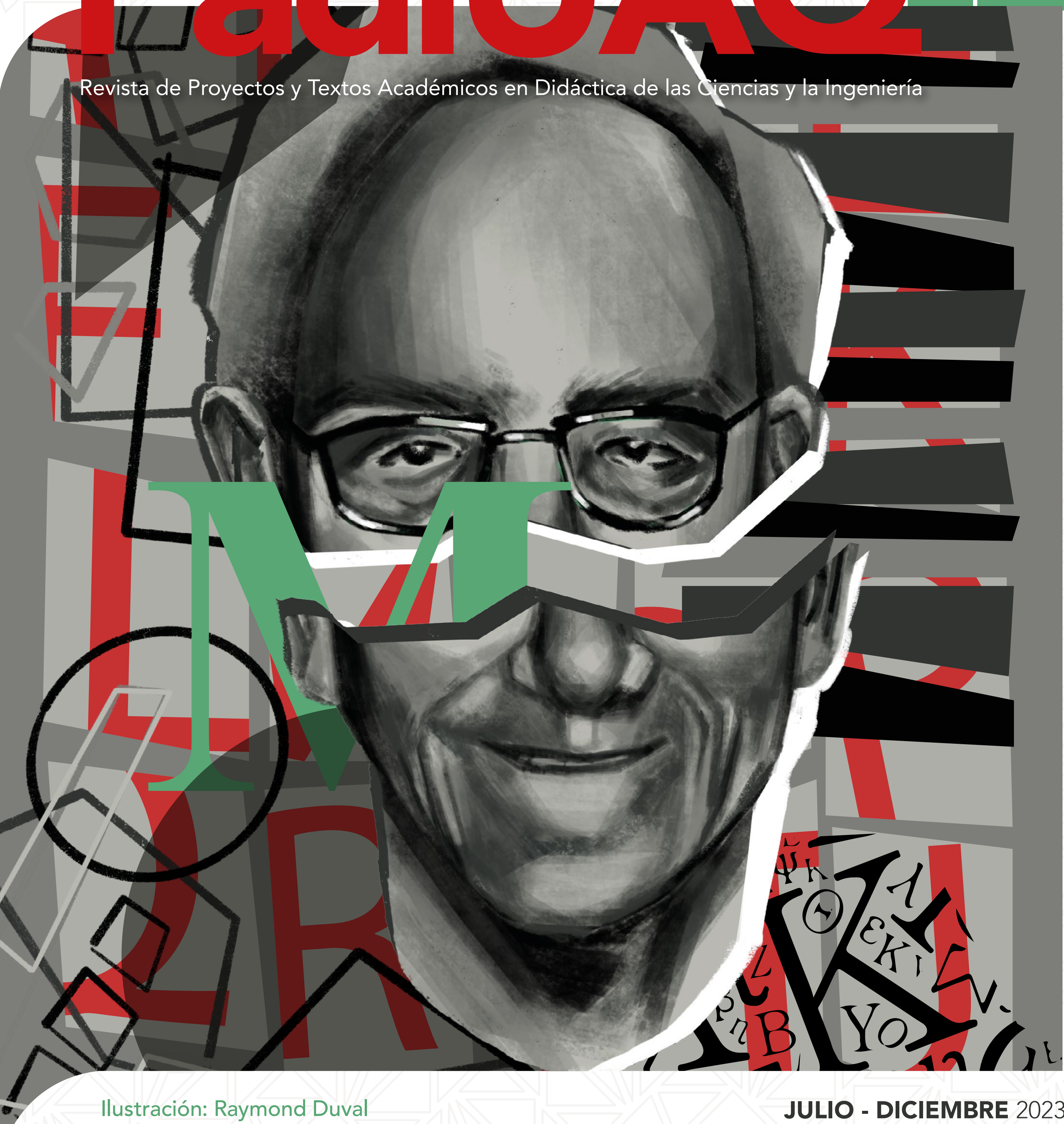


Ilustración: Raymond Duval

JULIO - DICIEMBRE 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

PädiUAQ, vol. 6, No. 12, julio-diciembre 2023, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Cerro de las Campanas, S/N, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00 ext. 6023, https://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padiuaq@uaq.mx Editor responsable: Víctor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-040413274400-102, ISSN: 2954-4025, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Victor Larios Osorio, Cerro de las Campanas, S/N, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., C.P. 76010, fecha de última modificación, 31 de julio de 2023.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

COMITÉ CIENTÍFICO

CONTENIDO

EDITORIAL

LA FORMACIÓN DISCIPLINAR DEL PROFESOR, ¿CONDICIÓN NECESARIA O SUFICIENTE?

THE DISCIPLINARY TRAINING OF THE TEACHER, A NECESSARY OR SUFFICIENT CONDITION?

Víctor Larios Osorio

PRESENTACIÓN

En este texto se presenta una reflexión sobre la complejidad de la formación docente en cuanto a los conocimientos y habilidades que deben aprenderse y desarrollarse para realizar esta labor profesional. Se aborda principalmente lo relacionado con los aspectos disciplinares, pero también se muestra que aunque la práctica y los modelos teóricos son necesarios, resultan ser insuficientes para participar en el proceso de enseñanza apropiadamente.

Palabras clave: formación docente, Práctica docente, Modelo del conocimiento del profesor.

ABSTRACT

This paper presents a reflection on the complexity of teacher training in terms of the knowledge and skills that must be learned and developed to carry out this professional work. The case of what is related to disciplinary aspects is mainly addressed, but it is shown that although they are necessary, they are not enough to participate in the teaching process properly.

Palabras clave: teacher training, teacher's knowledge model, teaching practice.

Hace más de cien años –en 1903 para ser precisos– George Bernard Shaw publicó su obra de teatro *Man and Superman* que incluía un apéndice titulado *Maxims for Revolutionists*. Como su nombre lo indica, este texto es una colección de máximas sobre temas muy variados como la libertad, la civilización, la decencia, la fama y un largo etcétera. Entre esos temas se encuentra el de la educación y ahí Shaw incluyó el aforismo:

> El que puede, hace. El que no puede, enseña. (Shaw, 2008)

Unos 80 años después, Shulman (1986) publicó su artículo *Those who understand: Knowledge growth in teaching* donde critica el aforismo de Shaw y lo califica como "infame", aunque admite:

> Más preocupante aún, su filosofía a menudo parece ser la base de las políticas relativas a la ocupación y las actividades de enseñanza (Shulman, 1986, pág. 4).

Por otro lado, existen frases como la de "quien sabe, puede enseñar", la cual es una expresión neo-idealista que influyó en algunos sistemas educativos europeos (Grugnetti y Speranza, 1999), dando paso a que cualquier profesionista, aunque no tenga una preparación extra en educación, pueda impartir clases.

Estos comentarios se centran en el conocimiento disciplinar del profesor y dejan de lado aquellos relacionados con la educación, aunque –hay que decirlo– en el caso del aforismo de Shaw me parece se menosprecia la labor docente al considerar que su comunidad está formada por personas que no pudieron ejercer como profesionistas en otras áreas (aunque esto ya entraría en otra reflexión).

César Coll y Emilio Sánchez (2008) resumieron las distintas posturas en las que se han basado los programas de formación de profesores en las últimas décadas:

> Aun a riesgo de simplificar en exceso, podríamos decir que de la preocupación por identificar los *rasgos o características de la personalidad* de los docentes «eficaces» –con el objetivo de incorporar estos rasgos a los procesos de selección y de formación–, se ha pasado al interés por determinar los *métodos de enseñanza* «eficaces» –con el objetivo de potenciar su aprendizaje y utilización por el profesorado–, y de aquí al propósito de identificar con precisión las *competencias profesionales* de los docentes «eficaces» –con el fin de situarlas en el núcleo de los currículos y de las actividades de formación del profesorado. (pp. 18-19)

Es importante hacer notar, que en las tres etapas señaladas, la formación disciplinar del profesor está implícita. Y eso es más evidente en la primera –donde se hace alusión a los rasgos de personalidad del profesor– ya que el centro de la formación docente se centraría en lograr que los futuros profesores tuvieran dichos rasgos de personalidad. El conocimiento matemático se toma por descontado.

A primera vista pareciera que esta postura apoya la frase neo-idealista mencionada, pero en las dos últimas etapas mencionadas por Coll y Sánchez se considera que el perfil del profesor no tiene que ver sólo con su personalidad, sino que requiere de técnicas y de competencias que deben aprenderse, adquirirse y desarrollarse. En consecuencia se tienen dos campos amplios del conocimiento del profesor: el disciplinar (el matemático en este caso) y el educativo.

Hay que decirlo, la reflexión al respecto ha llevado al desarrollo de modelos del conocimiento del profesor como en el caso de Shulman (1986; 1987), quien propuso siete categorías de conocimiento del profesor: el del contenido, el pedagógico general, el curricular, el pedagógico del contenido (abreviado PCK por sus siglas en inglés), el de los estudiantes y sus características, el de los contextos educativos y el de los fines, propósitos y valores de la educación.

Con base en esta propuesta han sido planteadas otras, de las cuales mencionaremos algunas, comenzando por la de Hill, Ball y Schilling (2008), quienes proponen la noción del conocimiento matemático para enseñanza (MKT). Dicho se refiere al del contenido (que incluye el común, el especializado, el que está en el horizonte matemático) y al pedagógico del contenido (que incluye el del contenido y de los estudiantes, el del contenido y de la enseñanza y el del currículo).

Por otro lado, la propuesta de Koehler y Mishra (2009) trata, entre otras cosas, de integrar en el modelo el uso de la tecnología digital en el proceso educativo. Así, considera tres categorías de conocimientos: los pedagógicos (PK), los del contenido (CK) y los tecnológicos (TK). Los conocimientos de estas categorías interactúan entre sí y se obtienen más categorías: el pedagógico del contenido (PCK), el tecnológico del contenido (TCK), el tecnológico pedagógico (TPK) y el tecnológico, pedagógico y del contenido (TPACK).

Por su parte, Godino y sus colegas (2018) han presentado el modelo teórico de *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos* (CCDM), el cual considera el trabajo de Shulman y las herramientas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este modelo se considera que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores se organizan de acuerdo a tres dimensiones: la matemática, la didáctica y la meta didáctico-matemática:

> La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La dimensión meta didáctico-matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018, pág. 66).

Estas dimensiones, y sus relaciones, se pueden ilustrar en la Figura 1.

El modelo CCDM se integra al considerar dos aptitudes clave del profesor de matemáticas que son la *competencia matemática* y *de análisis e intervención didáctica*, que a su vez comprenden cinco subcompetencias.

En la figura anterior, lo que corresponde al conocimiento

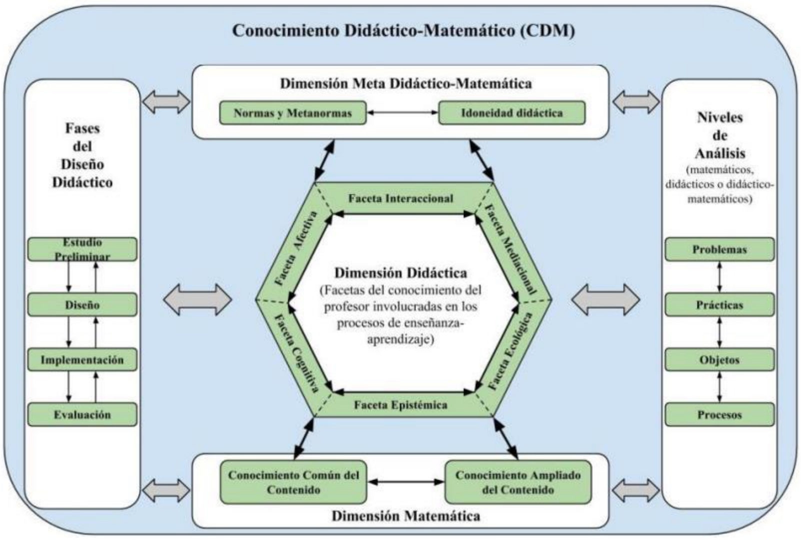


Figura 1. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018, pág. 67).

disciplinar que aborda el profesor se identifica en buena medida en la dimensión matemática (parte inferior de la figura) y que se atañe con la faceta epistémica de la dimensión didáctica. Es preciso detallar que la dimensión matemática incluye el *conocimiento común del contenido* y el *conocimiento ampliado del contenido*, es decir, lo que se debe enseñar e incluso más, de manera que le es posible al profesor –entre otras cosas– establecer vínculos de las Matemáticas de tipo intra-, inter- y multidisciplinarios, de sus aplicaciones y relaciones sociales; de su papel en la formación y en la vida cotidiana de los alumnos, etcétera.

El considerar lo anterior ha permitido hacer propuestas para formación profesional docente como la de Larios, Spíndola, Font y Giménez (2013), en la cual se incluyeron las siguientes competencias relacionadas estrechamente con el conocimiento disciplinar:

- Identificar el contenido matemático que le permita al profesor hacer uso de dicho apartado de manera suficientemente amplia, de modo que pueda realizar su función docente y adaptarse a cambios curriculares si es necesario.
- Ser capaz de justificar y usar el valor formativo y sociocultural de las Matemáticas y su evolución histórica. En este sentido, este conocimiento metamatemático "proporciona ideas para darle sentido y significado para el desarrollo específico que ha tenido y que, finalmente, debe ser introducido en el salón de clases" (pág. 254).
- Considerar los paradigmas epistemológicos principales en la construcción de la actividad matemática, lo cual atiende a un conocimiento sobre el desarrollo histórico y filosófico de las Matemáticas para darle sentido a los procesos y resultados científicos que se enseñan.
- Tomar en cuenta contextos y situaciones en los que se usan o aplican los contenidos matemáticos involucrados en el proceso educativo, para resaltar sus aplicaciones, su funcionalidad y, en especial, el papel que tienen como instrumento de otras disciplinas.

En definitiva, podemos ver que el ser profesor, incluso desde una visión teórica o de análisis a priori, no es una tarea simple y que requiera de menor conocimiento disciplinar –como dice el aforismo de Shaw– que un profesionista que se ha formado para otra área laboral pero que se desempeña como docente, sino todo lo contrario. Asimismo, esto se cumple también para la segunda frase mencionada al inicio de este texto, ya que se requiere un conocimiento disciplinar que no sea superficial, además de un conocimiento didáctico general y específico para la labor de la enseñanza.

Por otra parte, es pertinente mencionar que la adquisición y desarrollo de estos conocimientos y habilidades forman parte, en la gran mayoría de los casos, de un proceso consciente del individuo que le permitirán formarse e incluso entrenar el denominado sistema rápido de toma de decisiones (como diría Kahneman, 2022) o de la intuición secundaria (como diría Fischbein, 1994) para las situaciones alterables que se presentan sin aviso en el salón de clases.

Shulman, tras rechazar el aforismo de Shaw, finaliza su artículo de 1986 con una frase cuyo pensamiento compartimos

> Aquellos que pueden, hacen. Aquellos que comprenden, enseñan. (Pág. 14)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coll S., C. y Sánchez, E. (2008). *El análisis de la interacción alumno-profesor: Líneas de investigación.* Revista de Educación, (346), 15-32.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Godino, J. D., Batanero B., C. y Font M., V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in mathematics education.* ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font M., V. y Pino-Fan, L. R. (2018). *Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM.* Avances de Investigación en Educación Matemática, (13), 63-83. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

Grugnetti, L. y Speranza, F. (1999). *General reflections on the problem history and didactic of mathematics.* Philosophy of Mathematics Education Journal, (11). https://education.exeter.ac.uk/research/centres/stem/publications/pmej/pome11/art5.htm

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). *Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students.* Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Kahneman, D. (2022). *Pensar rápido, pensar despacio.* México, México: Penguin Random House Grupo Editorial.

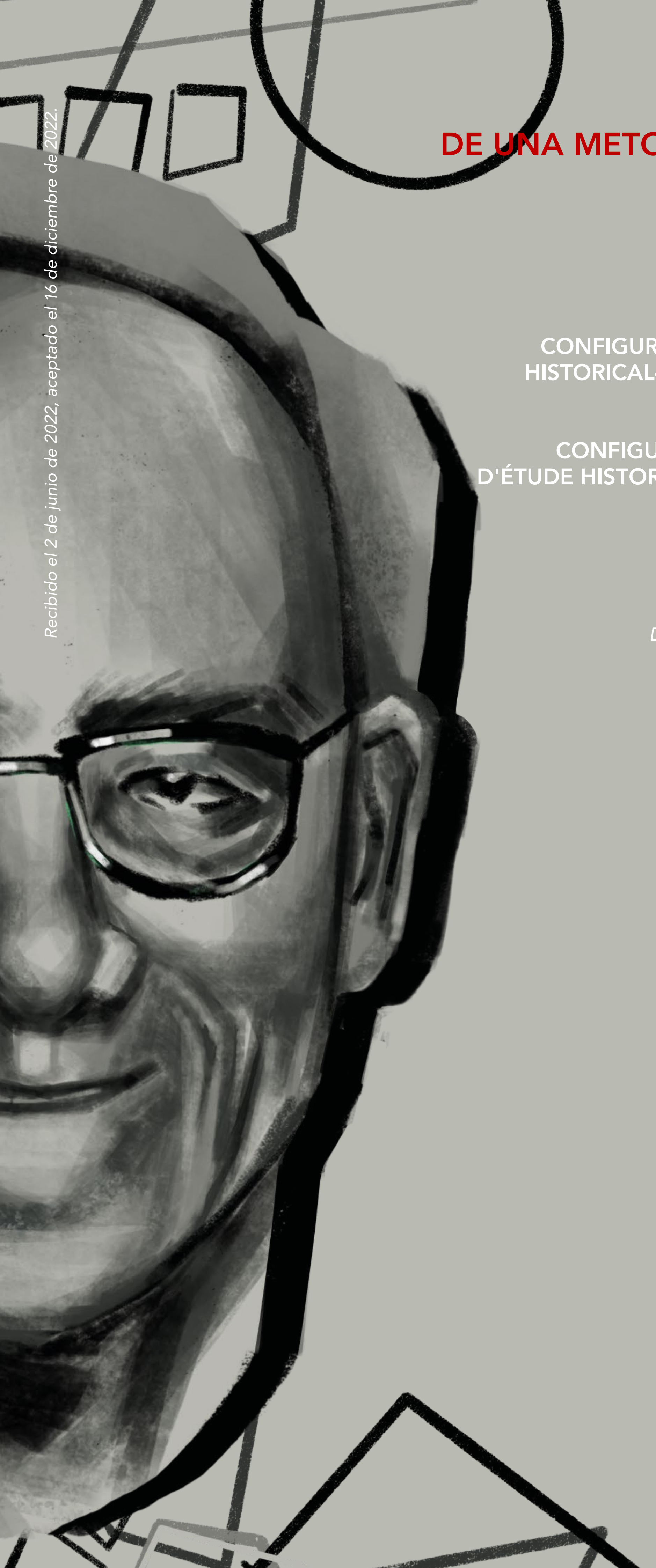
Koehler, M. J. y Mishra, P. (2009). *What is technological pedagogical content knowledge?* Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9 (1), 60-70.

Larios O., V., Spíndola Y., P. I., Font M., V. y Giménez R., J. (2013). Características del profesorado de Matemáticas. Una propuesta. En V. Larios O. y A. J. Díaz Barriga C. (edits.), *Las prácticas docentes en Matemáticas en el Estado de Querétaro* (págs. 233-271). Querétaro, México: Editorial Universitaria - Universidad Autónoma de Querétaro.

Shaw, G. B. (2008). *Maxims for revolutionists.* Recuperado el 21 de abril de 2023, del del proyecto Gutemberg: https://www.gutenberg.org/ebooks/26107

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.* Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004



CONFIGURACIÓN DE UNA METODOLOGÍA DE ESTUDIO HISTÓRICO-DIDÁCTICO DE LIBROS DE TEXTO

CONFIGURATION OF A METHODOLOGY OF HISTORICAL-DIDACTIC STUDY OF TEXTBOOK

CONFIGURATION D'UNE MÉTHODOLOGIE D'ÉTUDE HISTORICO-DIDACTIQUE DES MANUELS SCOLAIRES

Maidy Alejandra Minú Vargas[1], Universidad Autónoma de Querétaro (México)
Diana del Carmen Torres Corrales[2], Instituto Tecnológico de Sonora (México)
[1]alejandraminu@hotmail.com, https://orcid.org/0009-0004-3704-4135
[2]dtorresc89@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-0057-5336

Recibido el 2 de junio de 2022, aceptado el 16 de diciembre de 2022.

RESUMEN

En este artículo se expone la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico, de libros de texto, relativo a la razón y función trigonométrica inversa. Parte de un proyecto más amplio que, fundamentado en la Teoría Socioepistemológica, plantea la pregunta de investigación: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? En los resultados se muestran el diseño y la ejecución de la metodología en cuatro fases: selección de libros, selección de tareas, análisis individual y análisis transversal. En la fase tres se desglosa la forma en que se estructuró el instrumento de análisis individual de tareas en libros de texto basado en tres categorías: caracterización del texto, caracterización de la matemática y producto de enseñanza; también se demuestra la ejecución del instrumento en dos tareas de distintos libros, logrando, a su vez, refinar el instrumento. En comentarios finales se distinguen dos aspectos: uno relacionado con las prospectivas del proyecto de investigación y otro con términos metodológicos. Se espera identificar significados distintos a los procesos memorísticos del uso de la razón y función trigonométrica inversa. Se plantea, además, que el ejercicio de explicitar la presente metodología puede ser una guía para que otros investigadores configuren la herramienta teórica-metodológica necesaria para su proyecto de investigación matemática.

El artículo a continuación presenta la metodología utilizada en un estudio histórico y didáctico sobre la razón y función trigonométrica inversa en el contexto de la ingeniería.

Palabras clave: análisis de libros, formación de ingenieros, matemática educativa, teoría socioepistemológica, trignometría.

ABSTRACT

In this paper, we expose the methodology for data collection, organization, and analysis of a historical-didactical study in textbooks around the topic of inverse trigonometric ratios and functions. The study is part of a broader project that poses a research question grounded on the Socioepistemological Theory: what is the didactical transformation of the inverse trigonometric ratio and function in historical and contemporary textbooks related to engineering? The results of this paper show the design and execution of the methodology in four phases: nook selection, task selection, individual analysis, and traversal analysis. The third phase of this methodology specifies how the three categories in the instrument for individual analysis of textbook tasks were designed. Those categories are text characterization, mathematics characterization, and teaching product. This instrument's usage is shown in the analysis of two tasks from different books, from this analysis the instrument was later revised. In the final comments, two aspects identified are addressed: one about the prospectives of the research project and one about the methodology. With the results of the project, we expect to identify other significances, different from memoiristic processes related to the use of inverse trigonometric ratios and functions. We propose that in the exercise of making explicit this methodology, it can be used as a guide for other researchers that seek to configure theoretical-methodological tools for their research projects following their study

subjects, theoretical foundations, and mathematics of interest.

Keyword: book analysis, engineering education, mathematics education, socioepistemological theory, trigonometry.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous exposons la méthodologie de collecte, d'organisation et d'analyse des données d'une étude historico-didactique dans les manuels scolaires autour du thème des rapports et des fonctions trigonométriques inverses. L'étude fait partie d'un projet plus large qui pose une question de recherche fondée sur la théorie socio-épistémologique : quelle est la transformation didactique du rapport et de la fonction trigonométrique inverse dans les manuels historiques et contemporains liés à l'ingénierie ? Les résultats de cet article montrent la conception et l'exécution de la méthodologie en quatre phases : la sélection des coins, la sélection des tâches, l'analyse individuelle et l'analyse transversale. La troisième phase de cette méthodologie précise comment ont été conçues les trois catégories de l'instrument d'analyse individuelle des tâches du manuel. Ces catégories sont la caractérisation du texte, la caractérisation des mathématiques et le produit pédagogique. L'utilisation de cet instrument est illustrée dans l'analyse de deux tâches de différents livres, à partir de cette analyse, l'instrument a ensuite été révisé. Dans les commentaires finaux, deux aspects identifiés sont abordés : l'un sur les perspectives du projet de recherche et l'autre sur la méthodologie. Avec les résultats du projet, nous espérons identifier d'autres significations, différentes des processus de mémoire liés à l'utilisation de rapports et de fonctions trigonométriques inverses. Nous proposons que dans l'exercice d'explicitation de cette méthodologie, elle puisse être utilisée comme guide pour d'autres chercheurs qui cherchent à configurer des outils théoriques et méthodologiques pour leurs projets de recherche en fonction de leurs sujets d'étude, de leurs fondements théoriques et des mathématiques d'intérêt.

Mots-clés: analyse de livres, formation en ingenierie, enseignement des mathématiques, theorie socioepistemologique, trigonometrie.

INTRODUCCIÓN

Una revisión bibliográfica inicial de la razón y función trigonométrica inversa permitió identificar que el enfoque se basa en promover una comprensión superior de esta matemática dentro del ámbito didáctico del nivel superior. Por ejemplo, estudios que configuran un diseño y toman datos con estudiantes de ingeniería (Martínez Planell y Cruz Delgado, 2016), sobre propuestas de enseñanza basadas en la revisión de literatura (Talkokul, 2017) y sustentadas en el análisis de libros de texto (Mesa y Goldstein, 2017). Estas investigaciones coinciden en la necesidad de comprender, en primer lugar, la noción de razón y función trigonométrica antes de estudiar sus inversas; así como incorporar el estudio del círculo y triángulo rectángulo para formar relaciones entre sus elementos. Adicionalmente, se identifica que algunos estudios y libros de texto utilizan como sinónimo los términos razón y función trigonométrica inversa a pesar de que matemáticamente son diferentes, lo cual se asocia como un síntoma de la carencia de significados que permiten distinguir una noción de otra.

Como decisión metodológica, el presente estudio se sitúa en el ámbito de la ingeniería por la familiaridad y acceso que se tiene a sus programas en una universidad y la comunicación con colegas de otras instituciones. En particular, se identifica una problemática resultado de una revisión inicial de programas de asignaturas de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON, universidad pública autónoma): la razón y función trigonométrica inversa están implícitas porque los programas no las declaran, sin embargo, los libros de texto de la bibliografía y sus profesores ejemplifican tareas donde se utiliza esta rama; en dichas tareas se reconoce un significado matemático relacionado a procesos memorísticos atribuido al uso de fórmulas.

Se opta por un estudio documental que apoye al avance de la literatura en el ámbito didáctico del nivel superior. Fundamentado en la Teoría Socioepistemológica (TS), este trabajo forma parte de una investigación más amplia cuya pregunta base es: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? El objetivo general de la investigación es dar cuenta de las prácticas que acompañan al trabajo en torno a la razón y función trigonométrica inversa para identificar los significados que promueven las tareas que se resuelven en libros de texto de ingeniería. Para el presente escrito, el objetivo es: exponer la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa.

ANTECEDENTES

El volumen 45 de "Textbook Research in Mathematics Education" de la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) expone, desde un panorama internacional, el análisis de libros de texto como objeto de estudio en Matemática Educativa. Los tópicos que se abordan incluyen discusiones metodológicas de cómo realizar el análisis del material, la comparación entre países respecto a los textos que utilizan y su relación con el rendimiento académico de los estudiantes, el análisis de una muestra de las obras respecto a un concepto matemático de interés y la evolución de los libros de matemáticas en un contexto específico. Al respecto, Fan (2013) presenta un marco conceptual sobre los libros de texto de matemáticas y analiza los problemas y métodos contemporáneos para la investigación de dichos ejemplares. El autor identifica la necesidad de ir más allá del análisis y comparación de obras hacia un paradigma de investigación que utilice métodos empíricos y experimentales, de manera que esto permita dar rigor a los estudios sobre literatura académica como investigación científica.

El libro de texto es un instrumento de aprendizaje para el estudiante, se puede usar como recurso material para transmitir conceptos y métodos de las diferentes ciencias, mientras que, como recurso didáctico en la enseñanza universitaria es la principal herramienta de profesores y estudiantes para el desarrollo de significados (Maturano *et al.*, 2021). En Matemática Educativa son objeto de estudio: el papel del profesorado en el desarrollo e innovación del currículum y la interpretación oficial del mismo que dan las editoriales (Braga Blanco y Belver Domínguez, 2016); los significados de conceptos respecto a las estrategias didácticas de enseñanza (Betancur *et al.*, 2021); y la transposición didáctica a la que es sometido el conocimiento matemático cuando es llevado a la enseñanza escolarizada (Bravo y Cantoral, 2012).

Generalmente el análisis de libros académicos implica delimitar a una muestra sobre contenido matemático, a uno o varios niveles educativos y programas de estudios. Debido a esto, se considera que el análisis didáctico busca comprender el significado en la enseñanza desde diferentes aristas, y el análisis histórico-didáctico la evolución de dicho significado en la enseñanza.

Análisis de libros de texto para contenido matemático en general

Se identificaron estudios enfocados al significado que promueven los libros y su estructura. Así, González y Sierra (2004) diseñaron y emplearon un instrumento de análisis histórico-didáctico de libros de texto para el tema de puntos críticos del currículo español de educación secundaria de los planes de estudio del siglo XX. En sus decisiones metodológicas especifican que la muestra fue de 32 obras y cómo establecieron las unidades de información que les permitieron hacer una clasificación en categorías, dimensiones y modalidades asociadas. Exponen ejemplos del análisis realizado para cada periodo, lo que deriva en el perfil de un libro, marcando en cada unidad de análisis la frecuencia de aparición misma que les permite deducir el nombre del perfil.

Por su parte, Pino Fan *et al.* (2019) realizaron un análisis didáctico de diez libros de texto del currículo chileno sobre el concepto de función. Por otra parte, del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se utilizó la noción de configuración epistémica y dos categorías de análisis: cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares de la representatividad y seis de la noción de función. En sus conclusiones los autores mencionan que los resultados pretendidos por el currículo sobre la función no son representativos del significado holístico de referencia porque estos se limitan al significado como relación entre variables, conforme la representación gráfica y la teoría de conjuntos.

Asimismo, Betancur *et al.* (2021) describieron los resultados del análisis didáctico de tres libros de texto del currículo colombiano de pregrado sobre los conceptos acerca de eigenvalores y eigenvectores en operadores lineales. La finalidad de su estudio fue especificar el desarrollo del análisis teórico (primer componente) del ciclo de investigación de la teoría APOE (acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema). Para el análisis de los libros los autores retomaron cuatro criterios de un estudio previo: estructura general del texto, presentación y definición de conceptos, ejemplos y ejercicios, y lector modelo; desarrollaron seis momentos para su ejecución y mostraron en tablas un comparativo de los tres libros.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido matemático en general, Larios y Jiménez (2022) presentaron un análisis de los significados que promueven sobre el concepto de derivada algunos libros de Cálculo para ingeniería. Desde la noción de configuración epistémica del EOS identificaron que se privilegia un significado parcial de la derivada. Por ejemplo, el caso de la pen-

PädiUAQ | Vol. 6 núm. 12 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

diente de la recta tangente, que a veces se confunde con la recta en sí, se presentó un desarrollo parcial del significado holístico: lo que puede implicar la construcción de una representación inadecuada para ese perfil profesional por parte del estudiante.

Análisis de libros de texto para contenido trigonométrico

El estudio de Montiel (2011) es uno de los referentes principales para la investigación en Teoría Socioepistemológica. Fundamentado en en dicha área la autora realiza un estudio histórico-epistemológico y un estudio didáctico de conocimiento trigonométrico, a partir del cual reconoce que la enseñanza de la Trigonometría no es un asunto intrascendente, ya que es un conocimiento con múltiples aplicaciones en las Matemáticas y otras disciplinas como la Astronomía, Arquitectura, Ingeniería, etc.

Montiel (2011) identifica que un escenario de la génesis de la relación trigonométrica fue el astronómico, donde el problema macrono manipulable de cálculo de distancias inaccesibles fue el contexto de origen para identificar la relación no proporcional entre ángulo bisecado/media cuerda en el círculo, lo que actualmente en la escuela equivale a la razón seno del ángulo como cateto opuesto/hipotenusa en el triángulo rectángulo. Así, para fomentar usos y significados trigonométricos, propone que la enseñanza sea acompañada por prácticas especificas; para la razón trigonométrica señala el estudio de la modelación y construcción de diagramas con los que se reflexione sobre el manejo de la proporcionalidad y la escala en un contexto estático y covariacional. Mientras que para la función trigonométrica propone el estudio y la modelación del movimiento, a fin de reflexionar sobre la variación, lo periódico y acotado de la función.

En una sección del estudio didáctico de Montiel (2011) se analizaron tres libros de texto de nivel superior con una importante influencia escolar para la enseñanza de la función trigonométrica: *A Course of Pure Mathematics* de Hardy, *Calculus* de Apostol y *Calculus* de Spivack. El autor del estudio señala que los tres libros dan un tratamiento analítico a la función trigonométrica mediante la demostración de sus propiedades con técnicas matemáticas avanzadas como la derivación, integración, series y ecuaciones diferenciales, asimismo, los tres autores fundamentan su razonamiento en la proporción de la longitud del arco y el área de un sector circular:

> Hardy (1908) hace explícito que para tratar analíticamente a la función trigonométrica es necesario demostrar que un arco puede medirse y en consecuencia asociarle un número llamado longitud, es decir, plantea un fundamento de partida para trabajar con la función (Montiel, 2011, p. 55).

"En Apostol (1984) [...] las funciones trigonométricas son modeladores de fenómenos periódicos [...] y su descripción geométrica no se restringe a estudiar el triángulo rectángulo [...]" (Montiel, 2011, p. 58).

> En Spivac (1991) [...] construye el concepto de función partiendo de definir el seno y el coseno perteneciente a un ángulo dirigido y culminar al definir sen x y cos x para cada *número x*. [...] realiza la equivalencia grados a radianes y comienza su construcción analítica [...] (Montiel, 2011, p. 61).

También, Cantoral *et al.* (2015) realizaron un análisis didáctico de un libro de texto del currículo mexicano sobre el concepto de razón trigonométrica. De la Teoría Socioepistemológica (TS) utilizaron el nivel pragmático (acciones y actividades) del modelo de anidación de prácticas para realizar un análisis documental respecto a la actividad matemática. En primer lugar, describieron la organización didáctica del libro de texto (exploración, institucionalización, ejercitación y aplicación) y los temas previos y posteriores a la razón trigonométrica. En segundo lugar, mostraron ejemplos de tareas del tema matemático de interés y las analizaron con el nivel pragmático del modelo de anidación utilizando las preguntas: qué, cómo y para qué hace. Los autores señalaron que la razón trigonométrica se convierte en una aplicación de la proporcionalidad para calcular un valor faltante debido a que no se requiere estudiar o elaborar diagramas, sino que, de ilustraciones de triángulos rectángulos se logran identificar datos para elegir la razón adecuada a la situación física y así realizar operaciones con apoyo de la calculadora. Concluyeron que se transmite un uso aritmético y algebraico con significado memorístico.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido trigonométrico, Torres Corrales y Montiel (2020) realizaron un análisis didáctico de ocho libros de texto referentes a las nociones trigonométricas asociadas al problema cinemático directo de la Robótica de un programa de Ingeniería Mecatrónica. De la Teoría Socioepistemológica y los resultados de la investigación en Trigonometría configuraron un cuadro de análisis cualitativo para identificar los usos y significados de las nociones trigonométricas en tareas de asignaturas de Matemáticas, Física e Ingeniería. Las autoras identificaron que en gran parte de las asignaturas de Matemáticas se reproduce el uso aritmético y el algebraico asociado al cálculo de valores faltantes para resolver la tarea, mientras que, en las asignaturas de Física e Ingeniería, además de dichos usos, se dan el geométrico y el cuantitativo, con los que se confronta que las nociones trigonométricas no son una aplicación de la proporcionalidad.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica tiene por objeto de estudio: "la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, y el método es el análisis de la práctica, que permitirán estudiar el problema del significado del objeto matemático mediante el uso" (Cantoral, R., comunicación personal, 14 de diciembre de 2017). Lo social se identifica en dos aspectos: la influencia del contexto en tanto su validez relativa donde se usa la matemática y, el significado en constante construcción que los grupos humanos dan al conocimiento matemático a medida que lo emplean en distintas situaciones (Cantoral, 2016).

Las prácticas se estudian y organizan a través de un modelo de anidación. En el caso de la presente investigación se utiliza el nivel pragmático, es decir, la práctica a nivel de acción. Asimismo, se analiza la *acción* directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en su relación con la matemática en juego; desde este momento se pueden identificar los *usos del conocimiento*, caracterizados como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas, 2011, p. 75), "ya sea que el sujeto sea consciente de ello o no, que manipule de manera explícita o implícita, o que utilice representaciones típicamente escolares o propias del contexto" (Rotaeche, 2012, p. 27); "los usos son funcionales porque dan respuesta a la tarea matemática [...]" (Torres Corrales y Montiel, 2020, p. 34).

Para analizar la dependencia del contexto, este debe estudiarse en tres niveles: cultural, situacional y de significación.

> [...] El contexto cultural da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; mientras que el contexto situacional reconoce la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, dichas condiciones las determina el problema que se estudia o pueden ser establecidas mediante un diseño didáctico. El contexto que da forma y sentido a la matemática en juego, lo denominamos contexto de significación (Torres Corrales y Montiel, 2020, p. 32-33).
>
> Para la TS el libro de texto propone un discurso Matemático Escolar (dME), particular porque es un medio de difusión institucional de la construcción social del conocimiento matemático. Por lo que a través de las tareas que se resuelven en el libro de texto se busca identificar las prácticas (explícitas e implícitas) puestas en uso, que permiten el desarrollo del significado independientemente del contexto (época, paradigma educativo, región geográfica, etc.) donde se emplea la matemática (Cantoral *et al.*, 2015).

El dME refiere a:

> "...las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos relativos a la matemática" (Cantoral *et al.*, 2006, p. 86), y que por su estructuración se convierten en "... sistemas de razón que producen violencia simbólica, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos" (Soto y Cantoral, 2014, p. 1534).

METODOLOGÍA

De los métodos y metodologías de análisis de libros de texto presentes en la revisión bibliográfica del apartado Antecedentes y de estudios de Historia de la Educación Matemática –en particular del Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM) y de la Revista de História da Educação Matemática (Histemat)–, se configura una metodología de análisis histórico-didáctico que consta de cuatro fases. De acuerdo con los intereses de la investigación, primero, en la Fase 1 se establecen los criterios de inclusión de los libros, después, en la Fase 2 se seleccionan las tareas representativas a analizar, llegados a la Fase 3 se realiza un análisis individual de las tareas mediante un instrumento que puede ser retomado de otras investigaciones o diseñado por el investigador –siempre y cuando haya compatibilidad teórica entre los referentes y la investigación–, por último, en la Fase 4 se realiza un análisis transversal con el cual se triangula el análisis individual de los libros para dar respuesta al objeto de estudio (Figura 1).

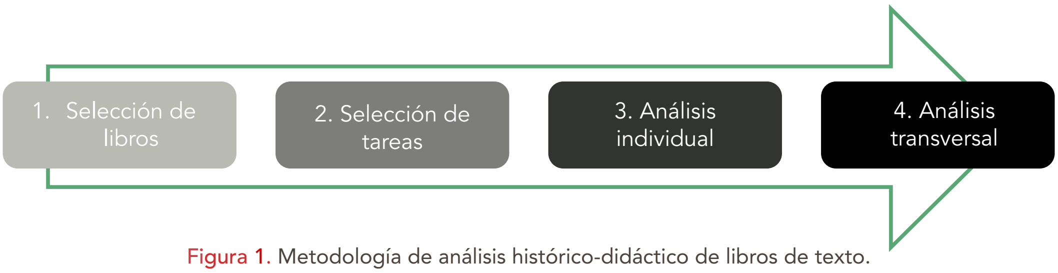


Figura 1. Metodología de análisis histórico-didáctico de libros de texto.

Con la finalidad de mantener coherencia a lo largo del desarrollo de la investigación, esta metodología recibe retroalimentación a medida que se ejecuta, por lo que la realización de una fase permite llevar a cabo ajustes en fases previas o posteriores, según sea necesario.

RESULTADOS

A continuación, se describe la ejecución de la metodología de estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa desde la TS. Para efectos del presente artículo se incluyen las primeras tres fases de la metodología y se muestra el diseño y utilización del instrumento de análisis individual de dos libros de texto; la Fase 4 se omite debido a que el proyecto de investigación se encuentra en la Fase 3.

Fase 1. Selección de libros

En la revisión de literatura, teoría y metodología, la muestra de libros fue intencional. Se aprovechó, además, el acceso a estos y mediante la triangulación de tres criterios de inclusión.

1. Los libros de texto con contenido trigonométrico que indica la revisión bibliográfica del apartado de Antecedentes (Análisis de libros de texto para contenido trigonométrico) de asignaturas de Matemáticas del nivel superior.
2. Los libros de la bibliografía de las asignaturas de Matemáticas que declaran los programas de estudio de ingeniería del ITSON, universidad donde una de las autoras es profesora.
3. Los libros que recomiendan profesores-investigadores que imparten asignaturas de Matemáticas en Ingeniería, en particular los miembros fundadores del grupo latinoamericano Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (www.grupofirme.org.mx). Quienes coinciden en tener presente en sus universidades (tres instituciones mexicanas, dos públicas y una privada; y dos universidades públicas de Latinoamérica, en Guatemala y Colombia) la problemática de la revisión inicial de las asignaturas de Matemáticas de ITSON: las tareas donde se emplean la razón y función trigonométrica inversa tienen un significado matemático relacionado a procesos memorísticos que se atribuye al uso de fórmulas.

Se recopilaron, en formato digital, libros señalados dentro de los criterios de inclusión para elegir aquellos que incluyeran tareas basadas en la razón y función trigonométrica inversa. Los libros se clasificaron en dos categorías según su contexto: históricos (ocho) y contemporáneos (siete libros), los cuales se ubican entre los siglos XIX, XX y XXI (Tabla 1).

	Nombre del libro	Año	Autor	Conceptos	Páginas
Históricos	Plane and Spherical Trigonometry	1875	Chauvenet	Inversas de las funciones trigonométricas	41
	Se promueve el acceso al conocimiento y el logro de todos los estudiantes	1906	S. R. Knigh	Funciones circulares inversas	232, 238, 239
	A Course of Pure Mathematics	1908	Godfrey Harold (Hardy)	Relación entre el logaritmo y el inverso de las funciones trigonométricas	518
	Trigonometría superior	1944	B. N Mukherjee	Funciones circulares inversas	21-31
	Algebra y funciones elementales	1978	Kalnin	Funciones trigonométricas inversas	243-257
	Cálculo I	1984	Tom Apostol	Inversas de las funciones trigonométricas	309-313
	Trigonometric functions (Problem Solvingn Approach)	1988	Panchishkin y Shavgulidze	Funciones trigonométricas inversas	31-36
	Cálculo infinitesimal	1992	Michael Spivac	Límites y derivadas de las funciones trigonométricas inversas	134, 135, 216, 217
Contemporáneos	Geometría Plana y del Espacio	2004	Baldor	Razón trigonométrica inversa	376
	Cálculo I	2010	Ron Larson	Funciones trigonométricas inversas	377-383
	Cálculo de una variable	2010	James Stewart	Funciones trigonométricas inversas y límites	216-221, apéndice c A17
	Cálculo con Trascendentes Tempranas	2011	Denis G. Zill	Funciones trigonométricas inversas y sus propiedades	41-43
	Matemáticas1 Cálculo Diferencial	2011	Denis G. Zill	Funciones trigonométricas inversas	61, 63, 66
	Cálculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 1	2012	Norma Patricia Salinas y colaboradores	Funciones trigonométricas inversas	428-431
	Calculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 2	2012	Norma Patricia Salinas y colaboradores	Antiderivadas de las funciones trigonométricas inversas	217

Tabla 1. Libros de Ingeniería seleccionados para el análisis. Fuente: elaboración propia.

Fase 2. Selección de tareas

En la Tabla 1 se muestra la selección final de tareas de los libros de texto mediante la identificación de conceptos y páginas donde se usa la razón y función trigonométrica inversa. La selección tuvo como criterio de inclusión una clasificación del tipo de tareas, según el tipo de actividad realizada en los libros: expositivas y de ejemplos, de acuerdo con Love y Pimm (1996). Las *tareas expositivas* señalan definiciones y demostraciones que se entienden como formas de evidenciar el significado de la matemática, en ellas los autores expresan la influencia de las teorías de aprendizaje para exponer conceptos. Mientras que las *tareas a modo de ejemplo* desarrollan problemas intra y extramatemáticos que se entienden como formas de evidenciar el uso de la matemática. En ellas los autores expresan formas de poner en práctica la matemática, de manera que brindan un modelo para ser imitado en los ejercicios e incógnitas que más adelante se plantean.

Fase 3. Análisis individual

El instrumento de análisis de tareas en libros de texto fue construido con base en investigaciones de la Teoría Socioepistemológica y de la Historia de la Educación Matemática. Consta de tres categorías secuenciales que recopilan elementos teóricos y de contenido trigonométrico: caracterización del texto, caracterización de la matemática y producto de enseñanza.

En la categoría 1 se identifican cinco elementos del contexto situacional y cinco del cultural. Los temas previos y posteriores reflejan la organización de contenidos propios del libro e influencia en la forma de usar la razón o función trigonométrica inversa. Mientras que la estructura didáctica señala el tipo de discurso del texto de acuerdo con la época en que fue escrito, de ahí que se identifique que algunos libros emplean, por ejemplo, gráficas y tablas de valores de senos y cosenos en sus anexos (Figura 2).

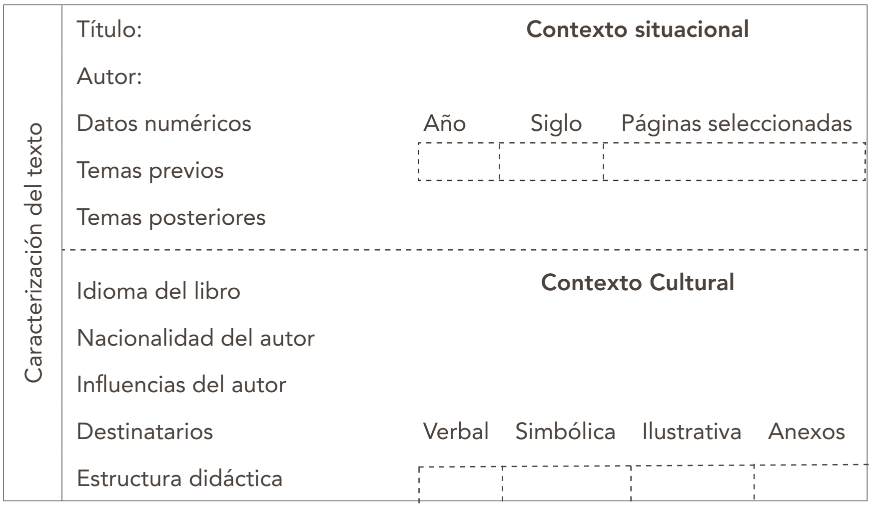


Figura 2. Categoría 1 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Maz Machado, 2005; León Mantero et al, 2019; Maturano et al., 2021).

En la categoría 2 se establece el contexto de significación de cada tarea que propone el libro. Para ello se señalan cinco elementos que permiten analizar las prácticas mediante el uso de la razón o función trigonométrica inversa. La presencia o ausencia de estos elementos no son lo importante como tal, sino comprender en qué condiciones de la tarea se da el uso de función: ¿es una situación matemática o de aplicación de problemas?, ¿se utilizan diagramas, de ser así, incluyen círculos y triángulos?, ¿se especifica el dominio y rango de la función?, ¿hay un proceso de verificación de lo que se define o de la solución a la que se llega? (Figura 3).

Se retoman los usos de las nociones trigonométricas que identificaron Torres Corrales (2020) y Torres Corrales y Montiel (2020) en un programa de Ingeniería Mecatrónica cuando el profesor y los estudiantes resolvieron problemas de Robótica Industrial. Debido a que son los más cercanos al estudio, tanto que son parte del análisis de la práctica de Ingeniería al encontrarse en el último año de formación escolar; se agrega la subcategoría *otros usos* para incluir los particulares que se identifiquen mediante el presente análisis histórico-didáctico de libros:

- *Uso aritmético*, cuando se hacen operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, sobre todo al dividir

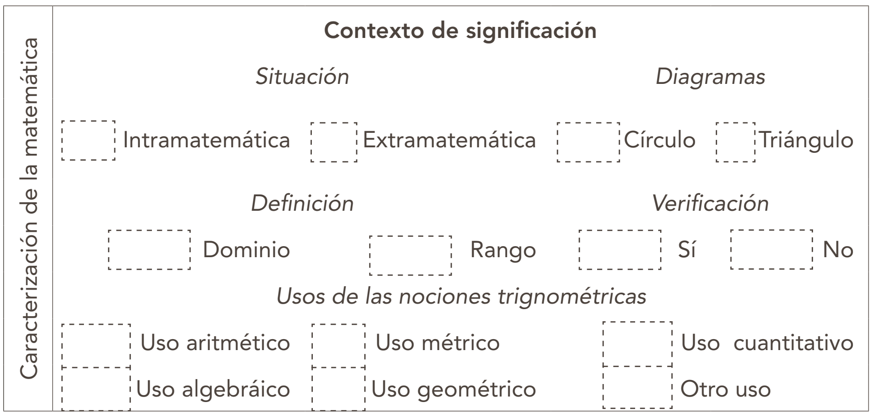


Figura 3. Categoría 2 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Mesa y Goldstein, 2017; Torres Corrales, 2020; Torres Corrales y Montiel, 2020).

longitudes que permiten resolver la tarea.

- *Uso algebraico*, cuando se hacen operaciones con símbolos que no pueden entenderse con operaciones básicas, sobre todo al operar con cantidades simbólicas para resolver la tarea.

- *Uso métrico*, cuando se emplea una convención particular para definir y resolver la tarea.

- *Uso geométrico*, identifica propiedades, se hacen relaciones o se construyen modelos que permiten resolver la tarea.

Ejemplos del análisis individual de los libros de texto

En la Figura 5 se presenta una tarea expositiva del libro histórico *Cálculo I* de Tom Apostol y su respectivo análisis en el Cuadro 1.

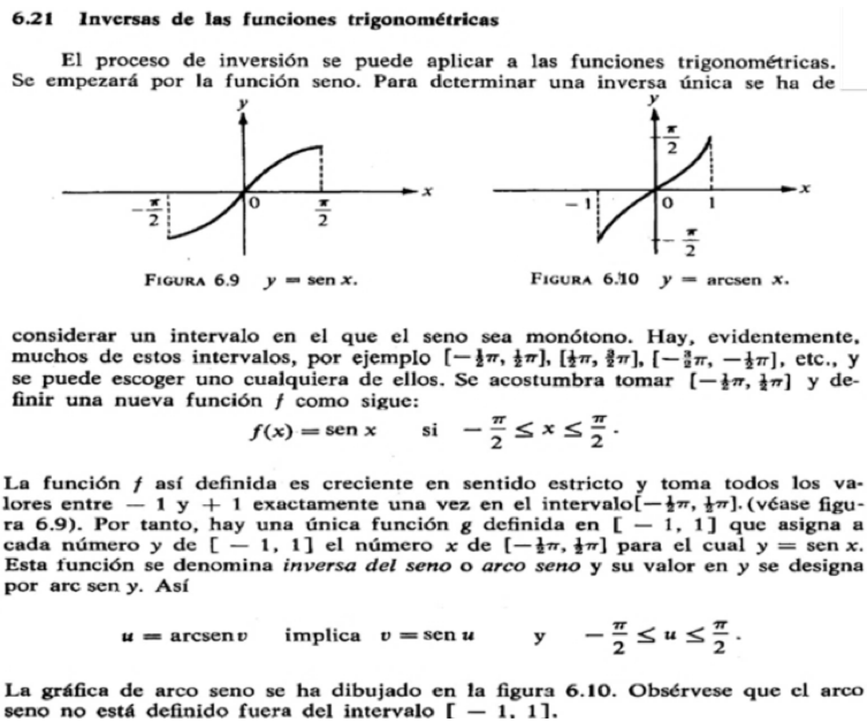
En la Figura 6 se presenta una tarea expositiva del libro contemporáneo *Cálculo de una variable* de James Stewart y su respectivo análisis en el Cuadro 2.

Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto*
	Análisis de la caracterización de la matemática
	Significados que promueve el libro de texto

Figura 4. Categoría 3 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Torres Corrales, 2020; Torres Corrales y Montiel, 2020; Cantoral *et al.*, 2014).

- *Uso cuantitativo*, se determinan que las cantidades las cantidades que se operan provienen de la Trigonometría (triángulo rectángulo, círculo, gráficas de funciones trigonométricas) y estas permiten resolver la tarea.

Finalmente, en la categoría 3 se retoman los resultados de las categorías 1 y 2 para especificar el producto de enseñanza que promueve el libro. Para ello, se hace una síntesis de lo que se identifica en el análisis de la caracterización del texto y de la caracterización de la matemática para interpretar los significados que promueve el libro de texto de la razón o la función trigonométrica inversa (Figura 4).



6.21 Inversas de las funciones trigonométricas

El proceso de inversión se puede aplicar a las funciones trigonométricas. Se empezará por la función seno. Para determinar una inversa única se ha de

FIGURA 6.9 $y = \text{sen}\, x$. FIGURA 6.10 $y = \text{arcsen}\, x$.

considerar un intervalo en el que el seno sea monótono. Hay, evidentemente, muchos de estos intervalos, por ejemplo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, etc., y se puede escoger uno cualquiera de ellos. Se acostumbra tomar $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y definir una nueva función f como sigue:

$$f(x) = \text{sen}\, x \qquad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

La función f así definida es creciente en sentido estricto y toma todos los valores entre -1 y $+1$ exactamente una vez en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (véase figura 6.9). Por tanto, hay una única función g definida en $[-1, 1]$ que asigna a cada número y de $[-1, 1]$ el número x de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ para el cual $y = \text{sen}\, x$. Esta función se denomina *inversa del seno* o *arco seno* y su valor en y se designa por arc sen y. Así

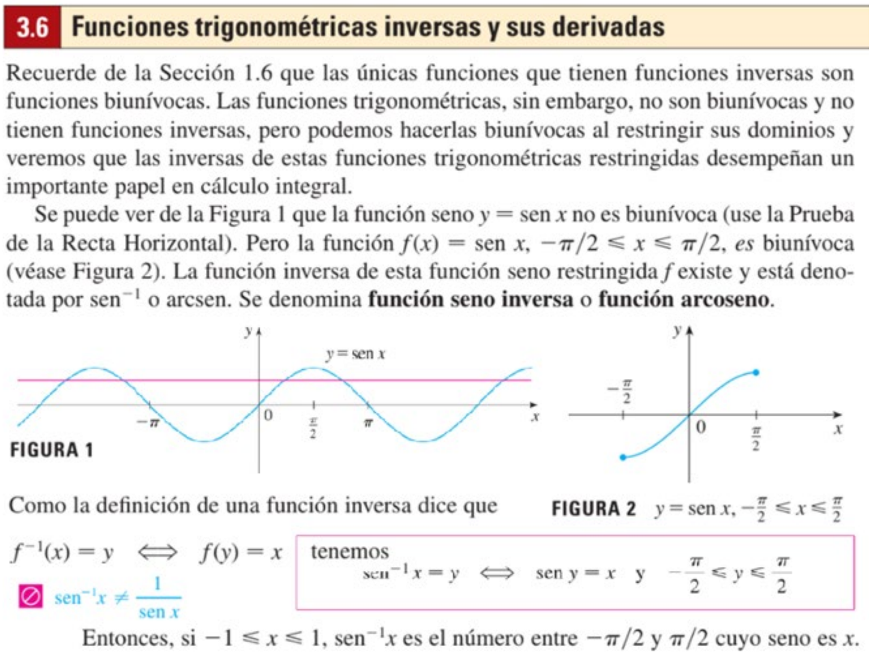
$$u = \text{arcsen}\, v \qquad \text{implica} \quad v = \text{sen}\, u \qquad \text{y} \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}.$$

La gráfica de arco seno se ha dibujado en la figura 6.10. Obsérvese que el arco seno no está definido fuera del intervalo $[-1, 1]$.

Figura 5. Definición de la función arcoseno (Apostol, 1984, p. 310).

Caracterización del texto	**Contexto situacional**	
	Título:	Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal
	Autor:	Tom Apostol
	Datos numéricos	Año: 1984 — Siglo: XIX — Páginas seleccionadas: 310
	Temas previos	Derivadas de funciones inversas
	Temas posteriores	Integrales por fracciones simples
	Contexto Cultural	
	Idioma del libro	Traducido al español
	Nacionalidad del autor	Estadounidense
	Influencias del autor	H. Bohnenblust, A. Erdélyi, F. Fuller, K. Hoffman, G. Springer, H. Zuckerman, B. Gordon, G. Springer, W. Ziemer
	Destinatarios	Nivel Superior
	Estructura didáctica	Verbal: x — Simbólica: x — Ilustrativa: x — Anexos:
Caracterización	**Contexto de significación**	
	Situación	x Intramatemática — Extramatemática
	Diagramas	Círculo — Triángulo
	Restricciones	x Dominio — x Rango
	Verificación	x Sí — No
	Usos de las nociones trigonométricas	Uso aritmético — Uso métrico — Uso cuantitativo — Uso algebraico — Uso geométrico — x Otro uso
Producto de enseñanza	*Análisis de la caracterización del texto*	El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).
	Análisis de la caracterización de la matemática	En la explicación del concepto el autor emplea representaciones algebraicas para definir las funciones f = sen x y y = arcsen x, utiliza el plano cartesiano para verificar gráficamente la función trigonométrica *sen x* y la función trigonométrica inversa arcsen x, señala su dominio y rango respectivos. De aquí se reconoce que la función trigonométrica inversa de *sen x* tiene uso como operador de composición de funciones del tipo $f(g(x))$, donde f es la función trigonométrica o la función trigonométrica inversa, mientras que g es cualquier otra función; y en este caso $g(x) = x$.
	Significados que promueve el libro de texto	La función u= arcsen v es el operador inverso para la función v =*sen u*, entendiendo *a* $u = g(x)$ y $v = f(g(x))$.

Cuadro 1. Ejemplo de análisis cualitativo de una tarea expositiva de un libro de texto histórico.



3.6 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Recuerde de la Sección 1.6 que las únicas funciones que tienen funciones inversas son funciones biunívocas. Las funciones trigonométricas, sin embargo, no son biunívocas y no tienen funciones inversas, pero podemos hacerlas biunívocas al restringir sus dominios y veremos que las inversas de estas funciones trigonométricas restringidas desempeñan un importante papel en cálculo integral.

Se puede ver de la Figura 1 que la función seno $y = \operatorname{sen} x$ no es biunívoca (use la Prueba de la Recta Horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, *es* biunívoca (véase Figura 2). La función inversa de esta función seno restringida f existe y está denotada por sen^{-1} o arcsen. Se denomina **función seno inversa** o **función arcoseno**.

Como la definición de una función inversa dice que

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$ tenemos

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Entonces, si $-1 \leq x \leq 1$, $\operatorname{sen}^{-1}x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Figura 6. Definición de la función seno inversa (Adaptada de Stewart, 2010, p. 216).

COMENTARIOS FINALES

Este estudio forma parte más amplia cuya pregunta de investigación es: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? Para el presente escrito el objetivo fue exponer la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa.

El diseño de la metodología contribuye a la literatura en dos aspectos. En primer lugar, aporta una herramienta teórica-metodológica para realizar un análisis histórico-didáctico de libros de texto de contenidos matemáticos concretos que puede ser retomada para estudiar otros contenidos matemáticos en la Teoría Socioespitemológica, al ajustar los elementos particulares de la Categoría 2 "Caracterización de la matemática". En segundo lugar, este escrito ejemplifica el proceso para la configuración de una metodología de análisis de libros de texto que puede fungir como guía para diseñar otras metodologías, independientemente de la teoría y de los conceptos matemáticos involucrados, esto debido a que se hicieron explícitas la elección de elementos teóricos, la definición de las categorías de análisis de acuerdo con los contenidos matemáticos encontrados en la teoría y en la revisión de la literatura, además del diseño y ejecución de un instrumento de análisis.

En conclusión, como prospectiva se espera que el resultado del proyecto de investigación explique, en el contexto cultural

Caracterización del texto		**Contexto situacional**
	Título:	Cálculo de una variable. Conceptos y contextos
	Autor:	James Stewart
	Datos numéricos	Año: 2010 · Siglo: XX · Páginas seleccionadas: 216
	Temas previos	Derivación implícita
	Temas posteriores	Derivación de funciones logarítmicas
		Contexto Cultural
	Idioma del libro	Traducido al español
	Nacionalidad del autor	Canadiense
	Influencias del autor	George Polya, colegas y estudiantes de la universidad de Toronto, artículos científicos, usuarios y revisores
	Destinatarios	Nivel medio superior y nivel superior
	Estructura didáctica	Verbal: x · Simbólica: x · Ilustrativa: x · Anexos: x
Caracterización		**Contexto de significación**
		Situación: x Intramatemática · ☐ Extramatemática — *Diagramas*: ☐ Círculo · ☐ Triángulo
		Restricciones: x Dominio · x Rango — *Verificación*: x Sí · ☐ No
		Usos de las nociones trigonométricas: ☐ Uso aritmético · ☐ Uso métrico · ☐ Uso cuantitativo · ☐ Uso algebraico · ☐ Uso geométrico · x Otro uso
Producto de enseñanza		*Análisis de la caracterización del texto* A diferencia de ediciones previas, la cuarta edición presenta las funciones trigonométricas inversas en una sola sección (tema 3.6). El autor estructura la forma de presentar los temas a partir de la resolución de problemas que propone George Polya, la cual se explica al final del Capítulo 1. La tarea analizada es de tipo expositiva, se identifica una estructura didáctica de tipo verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar expresiones y operaciones), ilustrativa (incluye gráficas de las funciones seno y arcoseno) y anexos (el autor los llama apéndices y en ellos presenta fórmulas de Trigonometría que ubica en las últimas páginas del libro).
		Análisis de la caracterización de la matemática La declaracións del autor define la función trigonométrica inversa arcoseno, para ello retoma el tema previo de funciones inversas y sus características con la finalidad de hacer más comprensible la explicación y de ampliar la información mostrada en la sección 1.6. El autor da la explicación de una función biunívoca (biyectiva) mediante la gráfica de la función *y* = *sen x* (Figura 1), para ello utiliza el método de la línea horizontal donde se puede visualizar esta característica de la función inversa y comprobar que la función seno no es biunívoca en todo su dominio. Por lo tanto, se da una verificación de la tarea y un <u>uso gráfico</u> al presentar y definir la gráfica de las funciones seno y arcoseno en el plano cartesiano.

Cuadro 2. Ejemplo de análisis cualitativo de una tarea expositiva de un libro de texto contemporáneo.

y situacional de libros de texto relacionados con la Ingeniería, la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa mediante la interpretación del discurso Matemático Escolar (dME). Si bien el libro de texto es un medio de transmisión del dME, su análisis nos permite interpretar los usos y significados de un conocimiento matemático según un grupo humano y con los cuales se fundamentan propuestas de diseño en aula, con el supuesto que pueden darse otros usos y significados, además de los relacionados con procesos memorísticos que suele fomentar la escuela.

REFERENCIAS

Apostol, T. (1984). *Cálculo I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Segunda edición. Reverté.

Betancur, S., Roa, S. y Ballesteros, S. (2021). *Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24(3), 245-276. https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Braga Blanco, G. y Belver Domínguez, J. (2016). *El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación*. Revista Complutense de Educación, 27(1), 199-218. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Bravo, A. y Cantoral, R. (2012). *Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica*. Educación Matemática, 24(2), 91-122. http://funes.uniandes.edu.co/13244/1/Bravo-2012Los.pdf

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (número especial), 83-102. https://www.redalyc.org/pdf/335/33509905.pdf

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 9-28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

Cantoral, R., Reyes Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, Matemáticas y Realidad*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3), 91-116. https://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149

Fan, L. (2013). *Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks*. ZDM, 45(5), 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

González, M. y Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 22(3), 389-408. https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v22n3/02124521v22n3p389.pdf

Larios, V. y Jiménez, A. (2022). Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. Praxis y Saber, 13(33), e12274. https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.1227

León Mantero, C., Maz Machado, A. y López Esteban, C. (2019). La enseñanza del cálculo diferencial e integral en España: un análisis de los libros de texto del siglo XVII. En G. Schubring, J. Bello y H. Vacca (edits.), V Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (pp. 345-357). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://funes.uniandes.edu.co/22503/

Love, E., y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. In International handbook of mathematics education (pp. 371-409). Springer.

Martínez Planell, R. y Cruz Delgado, A. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. The Journal of Mathematical Behavior, 43, 11-133. https://daneshyari.com/article/preview/360616.pdf

Maturano, C., Mazzitelli, C. y Guirado, A. (2021). *El libro de texto universitario de ciencias en la formación docente. Enseñanza de las Ciencias revista de investigación y experiencias didácticas*, 39(2), 83-101. https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3070

Mesa, V. y Goldstein, B. (2017). *Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks*. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3(2), 338-354. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0042-1

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.

Pino Fan, L., Parra Urrea, Y. y Castro Gordillo, W. (2019). *Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220. https://doi.org/doi:10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Boletim de Educação Matemática 28(50), 1525-1544. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos*. Cuarta edición. Cengage Learning.

Talkokul, E. (2017). *Research on the Trigonometry as a Main Function of Sine, Secant, Tangent and Formula of Tan and Cot are Inverse*. International Journal of Mathematics Trends and Technology, 50, 147-152. https://ijmttjournal.org/2017/Volume-50/number-3/IJMTT-V50P523.pdf

Torres Corrales, D. y Montiel, G. (2020). *La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa*. Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 29(58-1), 24-55. https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres Corrales, D. (2020). *Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica* [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados]. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34180.27524

Recibido el 30 de noviembre de 2022, aceptado el 22 de marzo de 2023

EL PROBLEMA DE LA VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UN PROCESO DE ESTUDIO MASIVO. POSIBILIDADES Y LIMITACIONES DE UNA APROXIMACIÓN CUANTITATIVA

THE PROBLEM OF ASSESSING THE DIDACTIC SUITABILITY OF A MASSIVE STUDY PROCESS. POSSIBILITIES AND LIMITATIONS OF A QUANTITATIVE APPROACH

LE PROBLÈME DE L'ÉVALUATION DE L'APTITUDE DIDACTIQUE D'UN PROCESSUS D'ÉTUDE MASSIF. POSSIBILITÉS ET LIMITES D'UNE APPROCHE QUANTITATIVE

Omar Malet[1], Universidad Nacional de Tres de Febrero (Argentina)
Belén Giacomone[2], Universidad de la República de San Marino (San Marino)
Ana María Repetto[3], Universidad Nacional de Cuyo (Argentina)
[1]omalet@untref.edu.ar, https://orcid.org/0000-0003-4112-9217
[2]belen.giacomone@unirsm.sm, https://orcid.org/0000-0001-6752-2362
[3]anarepetto@fed.uncu.edu.ar, https://orcid.org/0000-0002-3446-3500

2

RESUMEN

Los objetivos de este trabajo son: 1) presentar un modelo cuantitativo de valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio masivo de contenido matemático en el período de ingreso a la universidad, como recurso para que quien coordina dicho proceso reflexione sobre su propia práctica y tome decisiones orientadas a la mejora; 2) discutir las posibilidades que el modelo ofrece, y sus limitaciones. El modelo fue desarrollado y puesto a prueba en el marco de una investigación de enfoque mixto con preponderancia cuantitativa, y de carácter descriptivo y exploratorio, encuadrada en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Se basa en un dispositivo consistente en dos cuestionarios (para profesores, para estudiantes) que operacionalizan el constructo idoneidad didáctica y permiten medirlo en una escala intervalar. Los principales resultados de la investigación son: la identificación de las facetas con mayor (respectivamente, menor) idoneidad, y la detección de logros y déficits relativos en cada faceta desde la perspectiva de los profesores; la exploración de la estructura del cuestionario del estudiante mediante el análisis factorial, y la valoración de la idoneidad del proceso de estudio en términos de cada factor desde la óptica de los estudiantes; la identificación de problemáticas específicas del proceso de estudio a partir de la puesta en diálogo de ambos cuestionarios. En cuanto a las limitaciones, son aquellas asociadas a la comparabilidad de las respuestas de quienes respondieron a los cuestionarios, a su objetividad y al carácter global de la medición.

En este trabajo se presenta un modelo cuantitativo para evaluar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio masivo en matemáticas durante el ingreso a la universidad.

Palabras clave: idoneidad didáctica; Medición de la idoneidad didáctica; Ingreso a la universidad; Masividad; Reflexión sobre la práctica de coordinación.

ABSTRACT

The objectives of this work are: 1) to present a quantitative model of assessment of the didactic suitability of a massive study process of mathematical content in the period of admission to the university, as a resource for the person who coordinates said process to reflect on its own practice and make decisions aimed at improvement; 2) discuss the possibilities that the model offers and its limitations. The model was developed and tested within the framework of a mixed approach research with quantitative preponderance, and of a descriptive and exploratory natur, framed in the Onto-semiotic Approach of Mathematical Knowledge and Instruction. It is based on a device consisting of two questionnaires (for teachers, for students) that operationalize the didactic suitability construct and allow it to be measured on an interval scale. The main results of the research are: the identification of the facets with greater (respectively, lesser) suitability, and the detection of relative achievements and deficits in each facet from the teachers´ perspective; the exploration of the structure of the student's questionnaire through factor analysis, and the assessment of the suitability of the study process in terms of each factor from the perspective of the students; the identification of specific problems of the study process from the dialogue between both questionnaires. As for the limitations, they are those associated with the comparability of the answers of those who responded to the questionnaires, to their objectivity and to the global nature of the measurement.

Keyword: didactic suitability; Measurement of didactic suitability; University entrance; Massiveness; Reflection on coordination practice.

RÉSUMÉ

Les objectifs de ce travail sont : 1) présenter un modèle quantitatif d'évaluation de l'aptitude didactique d'un processus d'étude massif de contenu mathématique dans la période d'admission à l'université, en tant que ressource pour la personne qui coordonne ledit processus pour réfléchir sur sa propre pratique et prendre des décisions visant à l'améliorer ; 2) discutez des possibilités offertes par le modèle et de ses limites. Le modèle a été développé et testé dans le cadre d'une recherche d'approche mixte à prépondérance quantitative, et de nature descriptive et exploratoire, encadrée dans l'Approche Ontosémiotique des Connaissances et de l'Enseignement Mathématiques. Il repose sur un dispositif composé de deux questionnaires (pour les enseignants, pour les élèves) qui opérationnalisent le construit d'aptitude didactique et permettent de le mesurer sur une échelle d'intervalle. Les principaux résultats de la recherche sont : l'identification des facettes les plus (respectivement, moins) aptes, et la détection des réalisations et des déficits relatifs dans chaque facette du point de vue des enseignants ; l'exploration de la structure du questionnaire de l'étudiant par l'analyse factorielle et l'évaluation de l´aptitude du processus d'étude en termes de chaque facteur du point de vue des étudiants ; l'identification des problèmes spécifiques du processus d'étude à partir du dialogue entre les deux questionnaires. Quant aux limites, elles sont celles liées à la comparabilité des réponses de ceux qui ont répondu aux questionnaires, à leur objectivité et au caractère global de la mesure.

Mots-clés: aptitude didactique, mesure de l'aptitude didactique, entree a l'universite, massivite, reflexion sur la pratique de la coordination.

INTRODUCCIÓN

Para quienes coordinan procesos de estudio a cargo de un equipo docente numeroso y dirigidos a una población de estudiantes también numerosa, esto es, procesos de estudio masivos, es urgente, o necesario, o, al menos, útil, dar respuesta a una pregunta que, de modo preliminar, puede formularse en los siguientes términos: ¿de qué herramienta es posible valerse para valorar la calidad de dicho proceso? (Malet, 2022).

Es el caso de uno de los autores de este trabajo, responsable de la coordinación de una asignatura que forma parte del Curso de Ingreso a una universidad pública nacional de la República Argentina (Matemática y Metodología para su Estudio, Universidad Nacional de Tres de Febrero).

En 2021, año en que se llevó a cabo la investigación, el equipo docente de la asignatura estaba integrado por 29 profesores, quienes en 27 aulas (virtuales: una condición impuesta por la pandemia de SARS-CoV2) gestionaron un proceso de estudio de duración cuatrimestral destinado inicialmente a 1.212 estudiantes. En razón de estos guarismos, el proceso de estudio organizado e implementado a través de la asignatura puede ser calificado como masivo.

Sin embargo, esa masividad no remite a una propiedad del aula o de la clase, como es usual en la literatura de referencia (Jerez Ya–ez, Hasbœn Held y Orsini S‡nchez, 2016). Se trata, en cambio, de la masividad entendida como propiedad del proceso de estudio en s’, y derivada de la cantidad de docentes, de aulas y de estudiantes comprometidos en ŽI.

Ahora bien, dicha masividad, que es de orden f‡ctico, plantea un desaf’o de orden Žtico: el de ofrecer una educaci—n de calidad en esas condiciones de masividad. Para que el desaf’o se pueda asumir como tal, y no derive en un dilema, se hace necesario resignar la lectura de las relaciones masividad-calidad en tŽrminos de una tensi—n irresoluble (Villanueva, 2010), tanto como admitir el car‡cter polisŽmico, complejo, no est‡tico, relacional, de interjuego dialŽctico con otras dimensiones, de la noci—n de calidad (Montanž, Beltr‡n y Teodoro, 2017).

Refiriéndose a la noción de calidad, estos últimos autores dicen:

En el ámbito educativo su uso es tan frecuente como difícil –por no decir imposible– su definición. Todos hablamos de calidad dando por supuesto que sabemos de lo que hablamos aunque no sepamos definir el objeto o la cualidad a la que nos referimos. Forma parte de aquellos términos que son resultado del triunfo de la ambigüedad o cuya textura es tan abierta y maleable que acaban convirtiéndose en etiquetas, mantras o entelequias metafísicas (hurtadas de cualquier contenido político o histórico), al servicio de consensos amplios y fáciles. (Montané et al., 2017, p. 285)

Aguilar (2006) advierte acerca de los efectos de la socialización de la noción, cuya existencia es aceptada por el común de los ciudadanos-consumidores, constituyéndose, así, en criterio universal en la percepción y elección de bienes y servicios. En términos ontológicos, se esencializa.

Para escapar a los peligros del esencialismo (Breda, Font y Pino-Fan, 2018), en trabajos realizados en el marco del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019, 2020), en lugar de la noción de calidad se ha propuesto la noción de *idoneidad didáctica* (Godino, 2013; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005), definida como criterio global de pertinencia de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, y que es relativa a las circunstancias locales (adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, los conocimientos puestos en juego y los recursos usados).

En función de las consideraciones precedentes, la pregunta inicial puede ser reformulada en estos términos: ¿De qué herramienta puede valerse quien coordina un proceso de estudio que se desarrolla en condiciones de masividad para valorar la idoneidad didáctica de dicho proceso?

La respuesta que aquí se ofrece resulta del diseño y la aplicación de un modelo cuantitativo de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de esas características; el modelo se basa en un dispositivo consistente en dos encuestas por medio de cuestionarios, uno destinado a los profesores, y el otro, a los estudiantes, que se designarán como *cuestionario del profesor y cuestionario del estudiante*, respectivamente.

MARCO TEÓRICO

Para el EOS, el criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática es la noción de idoneidad didáctica, que se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino, Batanero y Font, 2020, p. 11)

Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis dimensiones o facetas en las que, tomando en cuenta los supuestos y las herramientas del EOS, se ha particularizado el criterio general de idoneidad:

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

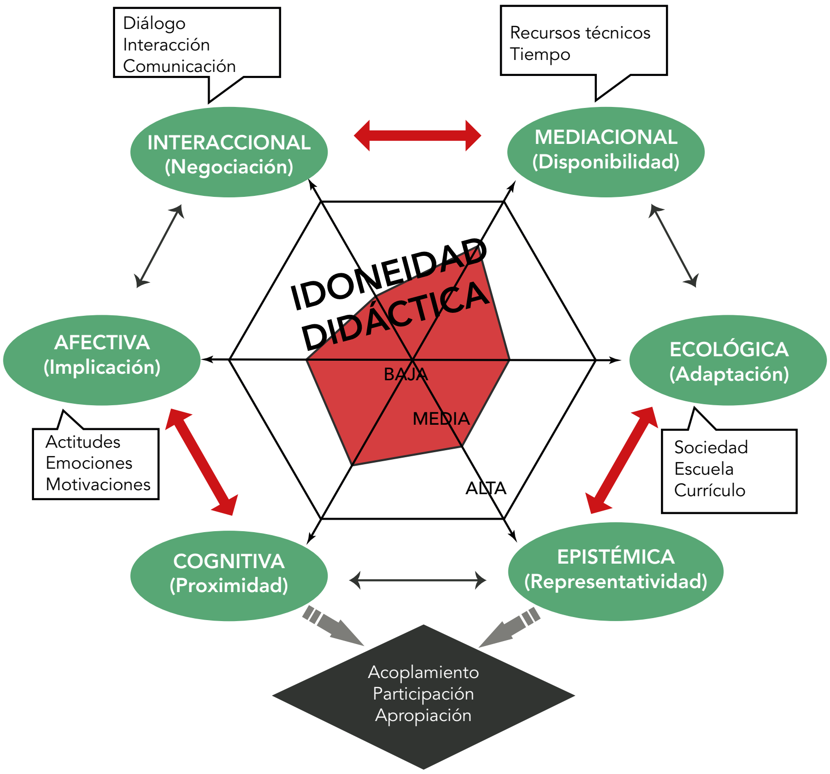


Figura 1. Idoneidad didáctica.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. (Godino, 2013, p. 116)

La Figura 1 reseña las principales características del constructo idoneidad didáctica; en ella, el hexágono regular representa el grado máximo de las idoneidades parciales, mientras que el hexágono irregular representa el grado efectivamente alcanzado en cada una de ellas en un proceso de estudio determinado.

Cada dimensión o faceta está estructurada en distintas componentes. Ahora bien, ni las dimensiones ni sus componentes son directamente observables, por lo cual, para inferirlos ha sido necesario elaborar sistemas de indicadores empíricos como los propuestos en Godino (2013) y en otras publicaciones (por ejemplo: Alsina y Domingo, 2010; Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Breda, Font, Lima y Villela Pereira, 2018; Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

La noción de idoneidad didáctica, y sus facetas, componentes e indicadores, conforman una herramienta muy potente para orientar la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática; el adecuado empleo de la herramienta amerita las siguientes consideraciones:

La noción se puede aplicar tanto al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, como a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio: un material didáctico, un libro de texto o manual, las respuestas de los estudiantes a tareas específicas, un incidente didáctico, etc.

El logro de un alto grado de idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los grados de cada una de las idoneidades parciales. Por ejemplo, los criterios que establecen como deseable enseñarles a los estudiantes una Matemática relevante (criterio epistémico), que la aprendan (criterio cognitivo) y que se los motive para conseguir su implicación (criterio afectivo), suelen estar en tensión entre sí: es relativamente fácil ponerlos en práctica por separado, pero es extremadamente difícil, y valioso, lograr un equilibrio entre los tres.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes. Por ende, responder a la pregunta ¿sobre qué aspectos se puede incidir para mejorar progresivamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática? requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y de los demás actores con los que comparte la responsabilidad del proyecto educativo; en palabras de Godino, Batanero y Font (2020, p. 12) "implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio".

METODOLOGÍA

La investigación se inscribe en un enfoque mixto con preponderancia cuantitativa (CUAN-cual), y tiene carácter descriptivo y exploratorio.

El enfoque mixto de investigación, los métodos combinados o métodos mixtos representan un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación, e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta, para realizar inferencias como producto de toda la información recabada y así lograr un mayor entendimiento del fenómeno en estudio (Hernán-dez-Sampieri y Mendoza Torres, 2018; McMillan y Schumacher, 2005).

Las técnicas utilizadas en este caso son:

Descripción de la asignatura en función de las distintas facetas o dimensiones de la idoneidad didáctica.

Análisis de contenido de antecedentes de utilización de la herramienta idoneidad didáctica en diversos contextos.

Análisis documental de diseños curriculares de educación secundaria, y del programa, el material de estudio y los exámenes parciales y finales de la asignatura.

Análisis estadísticos sobre la base de datos del Curso de Ingreso, para determinar índices de deserción y aprobación.

Encuestas online a todos los docentes y todos los estudiantes 2021 sobre las distintas facetas o dimensiones de la idoneidad didáctica de la asignatura (es a ellas a las que el recorte que supone el presente trabajo hace particular referencia).

Grupos de discusión sobre los resultados de las encuestas con el equipo docente, y sobre esos resultados y la discusión con el equipo docente, con el equipo de coordinación de la cátedra.

Análisis temático de las discusiones.

Algunas de estas técnicas tienen carácter cualitativo; es el caso del análisis de contenido, del análisis documental, de los grupos de discusión y del análisis temático. Sin embargo, por la centralidad que tienen la descripción y las encuestas (técnicas propias de la metodología cuantitativa) en el diseño de la investigación, el estudio se tipifica como CUAN-cual, esto es, como de enfoque mixto con mayor peso de la metodología cuantitativa.

La Figura 2 ilustra la ubicación del enfoque en el continuo que proponen Johnson, Onwuegbuzie y Turner, y que recrean Hernández-Sampieri y Mendoza Torres (2018).

Por otra parte, como la investigación tiene por finalidad especificar propiedades o características de un proceso educativo, se trata de una investigación descriptiva; a la vez, al no haberse encontrado antecedentes de utilización de la herramienta idoneidad didáctica en contextos similares, el estudio se plantea como exploratorio (Hernández-Sampieri y Mendoza Torres, 2018). Acerca de la complementariedad entre

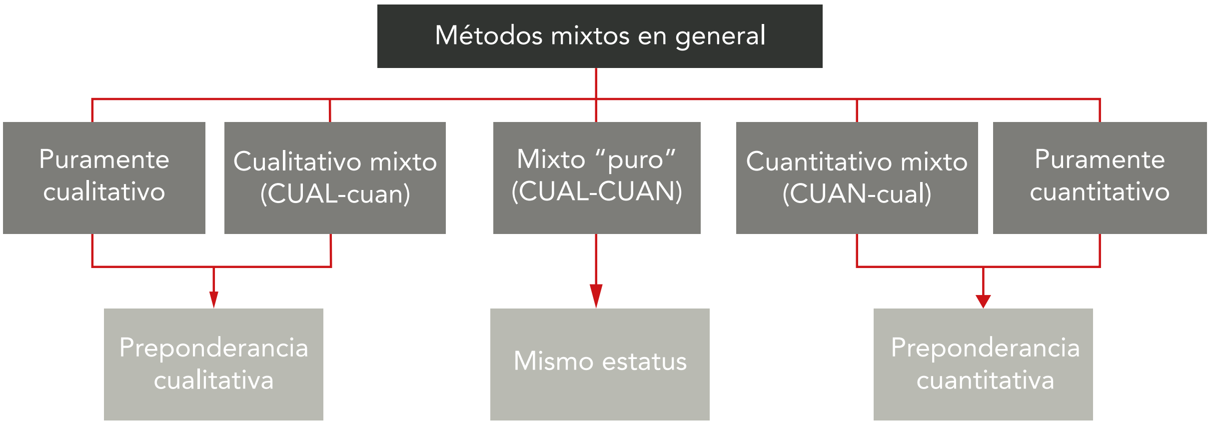


Figura 2. El enfoque CUAN-cual en el continuo de los enfoques de investigación (Hernández Sampieri y Mendoza Torres, 2018, p. 613).

investigación descriptiva e investigación exploratoria, McMillan y Schumacher (2005) afirman que "la investigación descriptiva proporciona datos muy valiosos, particularmente, cuando se investiga un área por primera vez" (p. 268).

En lo que sigue se abordan las cuestiones metodológicas estrictamente referidas a los cuestionarios.

Características generales de los cuestionarios

Combinando en un único sistema los criterios para clasificar encuestas que proponen Mayntz, Holm y Hübner (1993) y López-Roldán y Fachelli (2015), tanto el cuestionario del profesor como el del estudiante pueden caracterizarse como sigue:

Según el modo de administración, se trata de encuestas en línea, autoadministradas, en las que el entrevistador no está presente cuando el encuestado responde. Esta decisión se tomó en función de contemplar dos desafíos: el de la masividad (¿cómo obtener respuestas de una gran cantidad de docentes y estudiantes?) y el de la virtualidad impuesta por la pandemia de SARS-CoV2 (¿cómo obtener esas respuestas de manera remota, en un escenario en el que la presencialidad física no era posible?).

Según la temporalidad, se trata de encuestas sincrónicas, seccionales o únicas que buscan reflejar una cualidad de un fenómeno en un momento dado (la idoneidad didáctica de un proceso de estudio en cierto ciclo académico).

Según la muestra seleccionada, se trata de encuestas censales, ya que tuvieron por destinatarios a todos los profesores a cargo de la asignatura y todos los estudiantes que la cursaban al momento de la aplicación.

Según la naturaleza de las preguntas, se trata de encuestas de opinión.

Según la temática, se trata de encuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática en el ámbito del ingreso a la universidad.

Según el grado de estandarización, son encuestas por medio de cuestionarios estandarizados.

Según el canal de comunicación empleado, son encuestas escritas.

Según el número de encuestados que respondió a cada encuesta, son encuestas individuales.

Ambos cuestionarios están conformados por una serie de ítems: afirmaciones (en el caso del cuestionario del profesor), preguntas (en el caso del cuestionario del estudiante), referidas a distintos aspectos de la asignatura. Los encuestados debían valorar la asignatura desde el punto de vista de cada aspecto, calificándolo con un número de 1 a 9, siendo 1 la peor calificación posible, y 9, la mejor; se trata, entonces, de preguntas cerradas, de escala o asignación de puntaje (Fernández Núñez, 2007; Hernández-Sampieri y Mendoza Torres, 2018; López-Roldán y Fachelli, 2015).

Las afirmaciones y preguntas que los encuestados calificaban son consideradas indicadores de la variable idoneidad didáctica, en las distintas facetas o dimensiones y componentes que la operacionalizan según la propuesta de Godino (2013). En Malet, Giacomone y Repetto (2022) se pueden encontrar más detalles acerca de su elaboración.

El cuestionario del profesor consta de 68 afirmaciones. Algunas de ellas son:

Afirmación 13. (En la asignatura) se identifican y articulan los diversos significados de la función: tabular, algebraico, conjuntista, gráfico (faceta epistémica).

Afirmación 15. Los estudiantes del Ingreso tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema funciones (faceta cognitiva).

Afirmación 25. Las tareas que se proponen tienen interés para los estudiantes (faceta afectiva).

Afirmación 48. El reagrupamiento permanente de los estudiantes en función de sus logros favorece los intercambios entre ellos en condiciones de horizontalidad (faceta interaccional).

Afirmación 60. La duración del curso es suficiente para la enseñanza pretendida, considerando las clases y el trabajo no presencial sobre los ejercicios de resolución domiciliaria obligatoria (faceta mediacional).

Afirmación 66. Los contenidos contribuyen a la formación socioprofesional de los estudiantes (faceta ecológica).

El cuestionario del estudiante consta de 10 preguntas que abarcan aspectos generales de las seis facetas que componen la idoneidad didáctica, y las interacciones entre dichas facetas. A continuación se transcriben algunos ejemplos:

Pregunta 1. Los conocimientos de matemática que tenías al comenzar a cursar la asignatura, ¿fueron suficientes para poder cursarla sin dificultades?

Pregunta 5. El trabajo en grupo con compañeros que tenían conocimientos similares a los tuyos, ¿te motivó para aprender?

Pregunta 6. El material de estudio (cuadernillo) de la materia, ¿te resultó claro?

Ambos cuestionarios fueron validados por un comité de jueces expertos especialistas en el EOS, y puestos a prueba en un estudio piloto previo a su aplicación.

La escala de medida

En sentido estricto, la escala de medida utilizada es una escala ordinal. En efecto, el orden de los nueve puntajes o categorías es una propiedad que todos los encuestados están en condiciones de entender y compartir: ninguno de ellos puede pensar que, por ejemplo, 6 puntos es más que 7 puntos.

Ahora bien, Marradi (2006) observa que en ciertas escalas ordinales (escalas de diferencial semántico, escalas autoanclantes, *feeling thermometers*) es posible adoptar, razonablemente, el supuesto de equidistancia entre las cifras de la escala (propiedad característica de las escalas intervalares), aunque, por supuesto, la equidistancia no puede ser efectivamente controlada por un observador externo al entrevistado.

Las escalas a las que Marradi les atribuye esta cualidad y la que aquí se emplea tienen en común el hecho de que en ellas los puntajes o categorías intermedios presentan una autonomía semántica más reducida que en las escalas ordinales (y, desde ya, que en las escalas nominales). Según Marradi (2006, p.124), “una categoría tiene plena autonomía semántica si puede ser interpretada sin hacer referencia al significado de la propiedad o de las otras categorías”.

En la escala de 1 a 9 utilizada es imposible interpretar una categoría intermedia (6, por ejemplo) si no es por referencia a las demás, en particular a los extremos de la escala (el significado de 6 en una escala de 1 a 9 difiere mucho de su significado en una escala de 1 a 100).

Asumiendo que las categorías de la escala tienen una reducida autonomía semántica, y que, por tanto, según Marradi, cabe adoptar el supuesto de equidistancia, dicha escala puede ser tratada como escala intervalar, y la variable así construida puede ser considerada, si no cardinal, esto es, medible en una escala de razón provista de un cero absoluto, sí cuasi cardinal (Marradi, 2006).

Kerlinger y Lee (2002), en una posición afín a la de Marradi, admiten que, aunque la mayoría de las escalas psicológicas y educativas son básicamente ordinales, en ellas puede suponerse, con considerable certeza, la equidad o igualdad de intervalos.

Por las razones expuestas en los párrafos precedentes, la escala de calificaciones del cuestionario del profesor y del cuestionario del estudiante puede ser interpretada como escala intervalar, interpretación que habilita los modos de medición y análisis propios de este tipo de escala.

Para finalizar el análisis del problema de construcción de la escala, corresponde justificar por qué se optó para ambos cuestionarios por una escala de nueve categorías que comienza en 1.

En primer lugar, se decidió que el cuestionario del profesor y el del estudiante se basaran en una escala común, para unificar la clave de lectura y análisis de las respuestas, y así facilitarlos.

En segundo lugar, si bien es motivo de controversia si debe haber un número par o impar de opciones de respuesta (Bisquerra y Pérez-Escoda, 2015; Matas, 2018), algunos autores se inclinan por la imparidad. Bradburn, Sudman y Wansink (2004) lo hacen para no forzar a los encuestados, artificialmente, a adoptar una posición que no tienen, es decir, para no empujarlos hacia alguno de los extremos de la escala; Pérez Santamaría, Rodríguez Testal, Romero de Loera, Ruvalcaba Coyaso y Lozano Rojas (2002), en cambio, lo hacen a partir de indagar en las preferencias de los encuestados. Además, diversos estudios coinciden en que, aumentando el número de opciones de respuesta, mejoran la sensibilidad de la escala, su confiabilidad y/o su validez (Alwin, 1997; Bisquerra y Pérez-Escoda, 2015; Lozano, García-Cueto y Muñiz, 2008).

Los estudios citados en los dos últimos párrafos convergieron en la decisión de adoptar una escala de 9 puntajes, que concilia las ventajas de la imparidad y de la mejora de sus propiedades, y que, además, es divisible en tres intervalos de igual longitud, que en el marco de esta investigación son interpretados en términos de idoneidad baja (1, 2 y 3 puntos), media (4, 5 y 6 puntos) y alta (7, 8 y 9 puntos).

Por último, se fijó el valor mínimo de la escala en 1 punto y no, en 0, para evitar el carácter peyorativo que suele atribuírsele a una calificación de 0 puntos, y porque es poco probable la total ausencia de idoneidad respecto de los aspectos evaluados.

El estudio piloto

En la fase del estudio piloto, que tuvo lugar en 2020, el cuestionario del profesor fue respondido en línea por uno de los coordinadores de la asignatura (no, por el coordinador investigador) y por tres profesores seleccionados al azar. La información recogida fue utilizada para ajustar la escala de medida (sobre la cual se recabó la opinión del coordinador) y estimar el tiempo que demandaba responder al cuestionario, que en ningún caso excedió los 40 minutos. En cuanto al cuestionario del estudiante, lo respondieron en línea 407 estudiantes, que en conjunto utilizaron los nueve puntajes de la escala y omitieron muy pocas respuestas; por otra parte, el valor obtenido para el coeficiente Alfa de Cronbach (0,837) indica que el instrumento es confiable en términos de su consistencia interna; por ejemplo, Hair, Black, Babin y Anderson (2019) consideran que en un estudio exploratorio el valor mínimo aceptable de dicho coeficiente es 0,600.

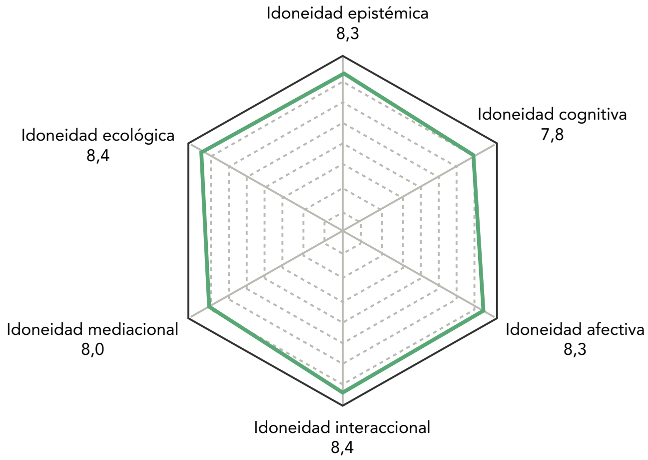


Figura 4. Cuestionario del profesor. Calificación media por faceta.

Figura 3. Mapa cromático de las calificaciones asignadas a cada afirmación por cada profesor.

La aplicación de los cuestionarios

El cuestionario del profesor fue respondido en línea y anónimamente por 32 docentes entre el 17 y el 25 de abril de 2021. El cuestionario del estudiante, por 501 estudiantes, entre el 22 y el 30 de junio del mismo año. En ambos casos, y al igual que en el estudio piloto, el cuestionario se vehiculizó a través de un Formulario de Google. Los respectivos coeficientes Alfa de Cronbach fueron 0,922 y 0,795, valores, estos, que garantizan la confiabilidad de los instrumentos utilizados.

PädiUAQ | Vol. 6 Núm. 12 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La idoneidad didáctica de la asignatura desde la perspectiva de los profesores

Si, como se planteó supra, las calificaciones 1, 2 y 3 puntos se significan como idoneidad didáctica baja, las calificaciones 4, 5 y 6 puntos, como idoneidad didáctica media, y las calificaciones 7, 8 y 9 puntos, como idoneidad didáctica alta, y se consideran las medias de las calificaciones asignadas por cada profesor a las 68 afirmaciones, para 31 de los 32 profesores la idoneidad global del proceso de estudio que tiene lugar en la asignatura es alta; solo para un profesor dicha idoneidad es media-alta, ya que la media de las calificaciones asignadas por ese profesor a las afirmaciones (6,7 puntos) se ubica entre 6 y 7 puntos.

Con el mismo criterio, según las medias, las medianas y los modos de las calificaciones asignadas a cada afirmación por los 32 profesores, la idoneidad del proceso de estudio es alta desde el punto de vista de 67 de las 68 afirmaciones, y media solo desde el punto de vista de una de

	Afirmación	Media
18	*Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo (ejercitación complementaria, clases de apoyo y consulta, trabajo en parejas pedagógicas en las comisiones con mayores dificultades, "segunda oportunidad" de cursar la asignatura en el segundo cuatrimestre, etc.).*	8.4
19	*Se promueve el acceso al conocimiento y el logro de todos los estudiantes.*	8.3
		Q_3 = 8.20
20	*En el trabajo áulico se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia.*	8.2
24	*Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones*	8.2
14	*Los conocimientos previos requeridos para el estudio del tema funciones están contemplados en los diseños curriculares del nivel educativo anterior (nivel secundario).*	8.0
21	*Las respuestas a los exámenes indican que al finalizar el curso los estudiantes que ingresan a la universidad logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (comprenden situaciones, conceptos y proposiciones; son competentes para comunicar y argumentar; muestran fluencia procedimental).*	7.9
16	*El material de estudio aporta los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema funciones para aquellos estudiantes que no los tengan.*	7.8
23	*Los diversos modos de evaluación (exámenes, observación basada en rúbricas, etc.) indican que, aun los estudiantes que no ingresan a la universidad hacen progresos significativos en la apropiación de los conocimientos pretendidos.*	7.8
		Q_1 = 7.75
17	*Los contenidos pretendidos están al alcance de los estudiantes en sus diversas componentes (situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre las mismas).*	7.7
22	*Los diversos modos de evaluación (exámenes, observación basada en rúbricas, etc.) indican que al finalizar el curso los estudiantes que ingresan a la universidad muestran competencia metacognitiva.*	7.7
15	*Los estudiantes del Ingreso tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema funciones.*	6.2

Tabla 1. Afirmaciones del cuestionario del profesor sobre idoneidad cognitiva en orden decreciente.

ellas (media: 6,2 puntos, mediana: 6 puntos, modo: 6 puntos).

Estas valoraciones se visualizan cromáticamente en la Figura 3, en la que a cada celda intersección Afirmación/Profesor se le ha asignado un tono en la escala de los verdes, tanto más claro cuanto más alta sea la calificación correspondiente (las celdas blancas corresponden a las respuestas omitidas). La figura revela el nítido predominio de los tonos claros, esto es, de las calificaciones más altas. Si se la lee por filas, se detectan las afirmaciones que concentran mayores (respectivamente, menores) calificaciones relativas; si se la lee por columnas, los profesores que asignaron mayores (respectivamente, menores) calificaciones respecto de los demás.

Estas primeras aproximaciones permiten concluir que desde la perspectiva de los profesores la idoneidad didáctica del proceso de estudio es alta. Un indicador de ello es que la media de las 2.158 calificaciones asignadas por los profesores a las 68 afirmaciones es 8,2 puntos, valor que coincide con la media de las medias correspondientes a cada afirmación.

Volviendo a la Figura 3, en ella también se advierten diferencias cromáticas entre los conjuntos de celdas correspondientes a cada dimensión.

Para cuantificar esas diferencias, la Figura 4 presenta las medias por dimensión o faceta, calculadas como medias de las medias asociadas a cada una de las afirmaciones de la dimensión o faceta de la cual se trata. Lo hace sobre dos gráficos radiales en un mismo sistema de ejes con origen en 1 (la mínima calificación prevista por el cuestionario del profesor).

El hexágono exterior es el que se obtendría si todas las facetas hubieran recibido la calificación más alta posible, esto es, 9 puntos. El hexágono interior es el que resulta de considerar las medias aludidas más arriba. Como se observa, la media de las medias de las calificaciones que los profesores asignaron a las afirmaciones inscriptas en cada faceta es del orden de los 8 puntos para todas las facetas. Las facetas interaccional y ecológica son las que resultaron calificadas con los puntajes más altos (8,4 puntos); la faceta cognitiva es la que obtuvo la calificación más baja (7,8 puntos).

Sobre la base de estos valores se puede sostener que para los profesores el proceso de estudio que se desarrolla en la asignatura presenta alta idoneidad en las seis dimensiones o facetas del constructo.

Sin embargo, estos primeros niveles de análisis invisibilizan matices que pueden ser sustanciales para valorar más ajustadamente la idoneidad didáctica de la asignatura desde el rol de quienes tienen la responsabilidad de coordinarla.

Para profundizar en el análisis, e interpretar las calificaciones de las idoneidades parciales (por faceta) en términos de los indicadores que las explican, o de algunos de ellos, se pusieron en foco, en cada faceta, las afirmaciones que en promedio recibieron las calificaciones más altas y más bajas, entendidas como aquellas cuya calificación media es superior al tercer cuartil (Q3) e inferior al primer cuartil (Q1), respectivamente; las primeras fueron consideradas como indicadores de logros relativos, o aspectos a preservar; las segundas, como indicadores de déficits relativos, o aspectos a mejorar.

A modo de ejemplo, en la Tabla 1 se presentan las afirmaciones correspondientes a la faceta cognitiva, ordenadas en orden decreciente de las medias de los puntajes que recibieron, y se indican Q1 y Q3 (que fueron calculados con el programa Microsoft Excel).

En materia cognitiva, los logros ponen en valor la inclusión de actividades de ampliación y refuerzo y la promoción del acceso al conocimiento y el logro por parte de todos los estudiantes. Sin embargo, los déficits relativos sugieren que los contenidos pretendidos podrían no estar al alcance de los estudiantes, que la competencia metacognitiva de los ingresantes podría ser insuficiente y, sobre todo, que los aspirantes a ingresar no tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de las funciones. La afirmación referida a este último aspecto es la que recibió la calificación media más baja de todo el cuestionario, y esa calificación indica una idoneidad media.

Factor	Afirmación	Media
F1: Condicionantes del proceso de estudio	*1. Los conocimientos de matemática que tenías al comenzar a cursar la asignatura, ¿fueron suficientes para poder cursarla sin dificultades?* *9. Durante el tiempo que duró el curso, ¿alcanzaste a estudiar todos los temas de la asignatura?*	6.1
F2: Aprendizaje	*2. ¿Cuánto aprendiste en la asignatura?* *3. Lo que aprendiste en la asignatura, ¿es útil para la carrera que elegiste?* *8. El uso de recursos tecnológicos en el desarrollo de la materia (plataforma de la universidad, salas de videoconferencia, programa GeoGebra, etc.), ¿fue positivo para tus aprendizajes?* *10. ¿Estás conforme con el desempeño de tu/s profesor/es de la asignatura?*	7.4
F3: Trabajo en grupo	*4. El trabajo en grupo con compañeros que tenían conocimientos similares a los tuyos, ¿te ayudó a entender mejor los temas?* *5. El trabajo en grupo con compañeros que tenían conocimientos similares a los tuyos, ¿te motivó para aprender?*	7.2
F4: Material de estudio	*6. El material de estudio (cuadernillo) de la materia, ¿te resultó claro?* *7. Los problemas sobre situaciones reales que presenta el material de estudio (cuadernillo) de la materia, ¿te parecieron interesantes?*	6.0

Tabla 2. La idoneidad didáctica del proceso de estudio desde el punto de vista del modelo factorial obtenido a partir del cuestionario del estudiante.

La idoneidad didáctica de la asignatura desde la perspectiva de los estudiantes

Si se consideran las medias de las calificaciones asignadas por cada estudiante a las 10 preguntas, para 255 de los 501 estudiantes la idoneidad global del proceso de estudio que tiene lugar en la asignatura es alta (no inferior a 7 puntos), para 128 es media-alta (superior a 6 puntos pero inferior a 7 puntos), para 105 es media (no inferior a 4 puntos ni superior a 6 puntos), para nueve es baja-media (superior a 3 puntos pero inferior a 4 puntos) y para dos es baja (no superior a 3 puntos).

Con el mismo criterio, según las medias, las medianas y los modos de las calificaciones asignadas a cada pregunta por los 501 estudiantes, la idoneidad del proceso de estudio es alta desde el punto de vista de seis de las 10 preguntas, media-alta desde el punto de vista de dos de ellas (cuyas medias se ubican entre 6 y 7 puntos, y cuyas medianas y modos son 7 puntos), y media desde el punto de vista de dos de las preguntas (el modo de una de las cuales es 7 puntos).

Estas primeras aproximaciones permiten concluir que desde la perspectiva de los estudiantes la idoneidad didáctica del proceso de estudio es media-alta. Un indicador de ello es que la media de las 4.950 calificaciones asignadas por los estudiantes a las 10 preguntas y la media de las medias correspondientes a cada pregunta es 6,8 puntos.

Complementariamente, se exploró la estructura interna del cuestionario del estudiante mediante un análisis factorial exploratorio realizado con el programa jamovi (2021). Tanto el Test de Esfericidad de Bartlett como la Medida de Adecuación Muestral de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) confirmaron la adecuación de los datos al análisis. El primero permitió rechazar la hipótesis de incorrelación con un nivel de significación menor que 0,001; el valor del segundo (0,806) está en el rango que Kaiser (1974) califica como meritorio. Por otra parte, el test de normalidad de Shapiro-Wi-

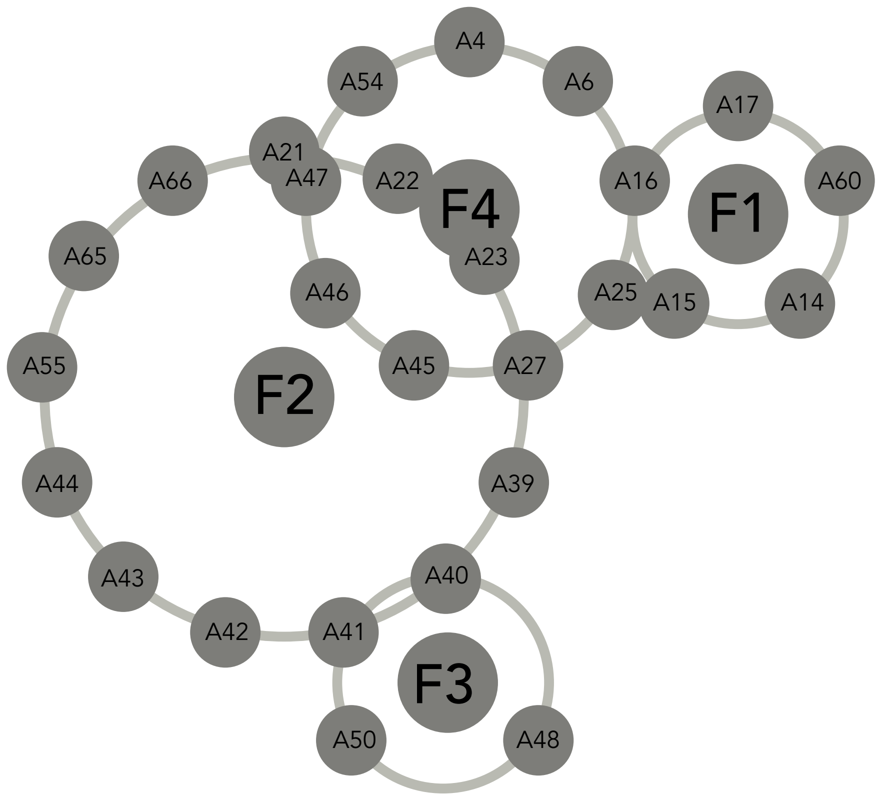


Figura 5. Vínculo entre las problemáticas emergentes del diálogo entre el cuestionario del profesor y el del estudiante.

Ik permitió rechazar la hipótesis de normalidad con un nivel de significación menor que 0,001.

El método de extracción de factores utilizado fue *Principal axis*. Según Fabrigar, Wegener, MacCallum y Strahan (1999), este método es robusto a las violaciones del supuesto de normalidad, ya que no implica asumir supuestos acerca de la distribución, y según de Winter y Dodou (2012) es el método de preferencia para un patrón factorial relativamente simple, o con factores débiles, sea porque las cargas son bajas, o porque el número de variables por factor lo es, lo cual es esperable tratándose de un cuestionario que consta solo de 10 preguntas. Como criterio de rotación se aplicó *Oblimin*, se definió el número de factores mediante la opción *Fixed number*, limitándolo al menor número para el cual la varianza total explicada superara el 50 %, se fijó *Factor loadings/Hide loadings below* en 0,3, y las variables para las cuales esta condición se cumplía en más de un factor se afectaron a aquel en el que su carga era mayor.

En la Tabla 2 se presenta información sobre los factores extraídos, incluyendo las medias de las medias de las calificaciones de las preguntas que componen cada factor.

Como se ve en la tabla, según los estudiantes la idoneidad del proceso de estudio es alta en los factores Aprendizaje y Trabajo en grupo, y media en Condicionantes del proceso de estudio y Material de estudio. Estos dos últimos factores, por tanto, sugieren campos de intervención para la mejora.

La especificidad del diálogo entre el cuestionario del profesor y el del estudiante como herramienta para valorar la idoneidad didáctica de la asignatura

Capitalizando la estructura factorial obtenida, se pusieron en diálogo los dos cuestionarios (el del profesor y el del estudiante), habida cuenta de que el cuestionario del estudiante había sido concebido con la lógica de dialogar con el del profesor.

Metodológicamente, ese diálogo descansa en una t*riangulación de datos o fuentes de datos* (Fusch, Fusch y Ness, 2018), y, más puntualmente, en la comparación de los puntos de vista de profesores y estudiantes (Patton, 2002).

El propósito de este apartado es mostrar cómo la puesta en relación de ambos cuestionarios y de las respuestas que recibieron contribuye específicamente a valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Para la consecución de tal propósito se pivoteó sobre cada uno de los factores extraídos a partir del cuestionario del estudiante, y se lo vinculó con algunas de las afirmaciones del cuestionario del profesor, en términos de *problemáticas* (entendidas como constelaciones de factores –F– del cuestionario del estudiante y afirmaciones –A– del cuestionario del profesor):

Problemática 1: Los conocimientos previos de los estudiantes y la duración del curso, ¿son suficientes para que los estudiantes participen exitosamente del proceso de estudio que se les ofrece?

Problemática 2: Según las distintas estrategias e instancias de evaluación (autoevaluación, exámenes, observaciones mediante rúbricas, etc.), los estudiantes, ¿aprenden cuando cursan la asignatura? ¿Gracias a qué mediaciones didácticas?

Problemática 3: El trabajo en grupos cuyos integrantes tienen conocimientos similares entre sí, ¿beneficia al proceso de estudio?

Problemática 4: El material de estudio, ¿resulta claro e interesante para los estudiantes?

Las problemáticas se vinculan entre sí, como muestra la Figura 5. Su análisis (que por razones de espacio no se aborda en este trabajo) habilita a concluir que para las Problemáticas 2 y 3 la asignatura provee soluciones globalmente satisfactorias; no así para las otras dos.

CONCLUSIONES: POSIBILIDADES Y LIMITACIONES DEL MODELO

De acuerdo con los apartados precedentes, el modelo de valoración de la idoneidad didáctica propuesto ha permitido:

Valorar globalmente la idoneidad del proceso de estudio, e identificar las facetas en las que es más idóneo, y aquellas en las que lo es menos (Figuras 3 y 4).

Identificar logros y déficits relativos del proceso de estudio en cada faceta desde la perspectiva de los profesores (Tabla 1).

Explorar la estructura interna del cuestionario del estudiante mediante el análisis factorial, y valorar la idoneidad del proceso de estudio en términos de cada factor desde la óptica de los estudiantes (Tabla 2).

Reconocer problemáticas específicas del proceso de estudio a partir de la puesta en diálogo de ambos cuestionarios (Tabla 2 y Figura 5).

Sin embargo, como parte del aparato conclusivo, es pertinente interrogar al modelo en clave de las objeciones que puede merecer, y, por ende, de sus limitaciones: ¿Son comparables las respuestas de los profesores entre sí y de los estudiantes entre sí? ¿Habrán sido objetivos los profesores y los estudiantes que respondieron a los cuestionarios? En definitiva, ¿tiene sentido el intento de cuantificar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio masivo?

Marradi (2006), refiriéndose a instrumentos no idénticos, pero sí similares a los que se aplicaron en esta indagación, asevera que el hecho de que sea el mismo sujeto quien valora su estado en cada propiedad que el investigador le presenta, y que exprese la valoración con un instrumento al cual no necesariamente está acostumbrado, conlleva varias consecuencias gnoseológicas que toman la forma de causas de infidelidad y distorsión (las cuales pueden, además, operar simultáneamente).

Una de ellas plantea el problema de la comparabilidad de las respuestas obtenidas: cada sujeto puede concebir de manera diferente (al investigador, y a los otros sujetos) la propiedad que debe valorar. En el caso de la investigación que es objeto de este artículo, esta consecuencia podría atenderse diseñando una rúbrica que para cada afirmación o pregunta indicara bajo qué condiciones corresponde asignar cada uno de los nueve puntajes previstos en la escala. La opción, muy rica en sí misma, difícilmente sea extensible a las 68 afirmaciones del cuestionario del profesor y las 10 preguntas del cuestionario del estudiante, a riesgo de abrumar y desalentar a los respondientes. En cambio, sí es viable para profundizar, *a posteriori*, en algunos indicadores de idoneidad que en una aproximación global como la que aquí se describe se destacaran como más relevantes.

Otra consecuencia gnoseológica y causa de infidelidad es del orden de la objetividad de las respuestas obtenidas. En el marco de este trabajo, la preocupación se dispara porque tanto los profesores como los estudiantes son actores del proceso de estudio por el cual responden, y por ende puede afectar sus respuestas el sesgo de *deseabilidad social*. La deseabilidad social es el fenómeno que hace que los individuos se presenten a sí mismos o a sus organizaciones (en este caso, la asignatura) de una manera favorable (Campos y Rueda, 2017). Cabe precisar que la incidencia del sesgo de deseabilidad en las encuestas ha sido largamente discutida, que no hay consensos sobre la gravedad de sus consecuencias, y que cada uno de los métodos que se han propuesto para abordarlo tiene sus propias limitaciones (Vesely y Klöckner, 2020), por lo cual algunos posicionamientos lo interpretan no ya como un constructo de distorsión que hay que evitar en las mediciones, sino como un rasgo que predispone al individuo a seguir las normas sociales en busca de relaciones sociales armoniosas, que promueve alta autoestima y un sentido de competencia, que le permite ser sensible a la interacción con otros y adaptarse a un ambiente social (Domínguez Espinosa, Aguilera Mijares, Acosta Canales, Navarro Contreras y Ruiz Paniagua, 2012).

Con los resguardos que una discusión no saldada impone, puede afirmarse que, tanto el anonimato de las dos encuestas, como la triangulación y comparación de puntos de vista consustanciales a su diseño, son decisiones metodológicas que, si no garantizan una total ausencia del sesgo de deseabilidad, sí lo atenúan (por cierto, en un grado difícilmente cognoscible).

Por otra parte: ¿es posible postular un observador objetivo que sin estar comprometido con el proceso de estudio pudiera responder los cuestionarios? ¿O para poder hacerlo es condición *sine qua non* haberse sumergido en dicho proceso y haberlo vivenciado? Y si un observador se expusiera a esa experiencia inmersiva, ¿se podría evitar que fuera permeado por ella y desarrollara un compromiso que también sesgara su perspectiva, casi tanto como puede eventualmente estarlo la de los profesores y los estudiantes?

Una tercera causa de infidelidad deriva del hecho de que cada sujeto puede tener tendencia a utilizar la escala de modo sesgado; por ejemplo, un sujeto puede propender a asignar puntajes altos, o bajos, o extremos, o centrales. Para neutralizar estas propensiones, Marradi (2006) propone un procedimiento al que llama *deflación*, y que consiste en: 1) restarle a cada puntaje asignado por un respondiente la media de todos los puntajes que él mismo asignó, convirtiendo, así, los puntajes brutos en desviaciones de un promedio; 2) dividir cada una de estas desviaciones por la desviación típica de los puntajes asignados por el sujeto de que se trate. La primera operación neutraliza la tendencia a asignar puntajes altos o bajos, y la segunda, a asignar puntajes extremos o centrales. Cabe explicitar que en el marco del presente trabajo se aplicó el procedimiento descripto, y se obtuvieron resultados que en lo sustancial coinciden con los que aquí se reportan. Probablemente, la coincidencia sea el producto esperable de la masividad, en tanto que en poblaciones numerosas como las de los profesores y los estudiantes de la asignatura, las tendencias en un sentido y en el otro pueden compensarse entre sí.

Para finalizar, es importante recordar que el propósito de la investigación a la que se alude en este trabajo no es valorar la idoneidad didáctica de un tramo del proceso de estudio, ni el proceso de estudio que tiene lugar en un aula, con un grupo de alumnos en particular, ni el proceso de estudio llevado adelante por un único docente, o transitado por un único estudiante, sino lograr una valoración global o macro que permita la toma de decisiones por parte de quienes tienen responsabilidades de coordinación sobre la totalidad de un proceso de estudio masivo. Las objeciones y limitaciones enumeradas se resignifican, así, como el precio a pagar para la consecución de tal propósito.

REFERENCIAS

Aguilar, L. (2006). *Todo sea por la calidad: Tramar el cambio en educación.* Alzira, España: Germania.

Alsina, Á., y Domingo, M. (2010). *Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 13(1), 7-32. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Alsina_Domingo_RELIME2010.pdf

Alwin, D. F. (1997). *Feeling thermometers versus 7-points scales: Which are better?* Sociological Methods & Research, 25(3), 318-340. DOI: 10.1177/0049124197025003003

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). *Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de Probabilidad en educación secundaria.* Perspectiva Educacional, 56(2), 92-116. DOI: 10.4151/07189729-Vol.56-Iss.2-Art.559

Bisquerra, R. y Pérez-Escoda, N. (2015). *¿Pueden las escalas Likert aumentar en sensibilidad?* Revista d'Innovació i Recerca en Educació (REIRE), 8(2), 129-147. DOI: 10.1344/reire2015.8.2.828

Bradburn, N., Sudman, S. & Wansink, B. (2004). *Asking questions: The definitive guide to questionnaire design — for market research, political polls, and social and health questionnaires.* San Francisco, Estados Unidos: Jossey-Bass.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. y Villela Pereira, M. (2018). *Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del Enfoque ontosemiótico.* Transformación, 14(2), 162-176. Recuperado de http://scielo.sld.cu/pdf/trf/v14n2/trf03218.pdf

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). *Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica.* Boletim de Educação Matemática (Bolema), 32(60), 255-278. DOI: 10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. & Font, V. (2017). *Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflections *and assessment on teaching practice.* Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 13(6), 1893-1918. DOI: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Campos, M. I. y Rueda, F. J. M. (2017). *Sesgo de deseabilidad social en medidas de valores organizacionales.* Universitas Psychologica, 16(2), 1-11. DOI: 10.11144/Javeriana.upsy16-2.sdsm

De Winter, J. C. F. & Dodou, D. (2012). *Factor recovery by principal axis factoring and maximum likelihood factor analysis as a function of factor pattern and sample size.* Journal of Applied Statistics, 39(4), 695-710. DOI: 10.1080/02664763.2011.610445

Domínguez Espinosa, A. del C., Aguilera Mijares, S., Acosta Canales, T. T., Navarro Contreras, G. y Ruiz Paniagua, Z. (2012). *La deseabilidad social revalorada: más que una distorsión, una necesidad de aprobación social.* Acta de investigación psicológica, 2(3), 808-824. https://www.redalyc.org/pdf/3589/358933342005.pdf

Fabrigar, L. R., Wegener, D. T., MacCallum, R. C. & Strahan, E. J. (1999). *Evaluating the use of exploratory factor analysis in psychological research.* Psychological Methods, 4(3), 272-299. Recuperado de http://www.ww.w.statpower.net/Content/312/Handout/Fabrigar1999.pdf

Fernández Núñez, L. (2007). *Fichas para investigadores. ¿Cómo se elabora un cuestionario?* Butlletí LaRecerca, Ficha 8. Recuperado de https://www.ub.edu/idp/web/sites/default/files/fitxes/ficha8-cast.pdf

Fusch, P., Fusch, G. E. & Ness, L. R. (2018). *Denzin's Paradigm Shift: Revisiting Triangulation in Qualitative Research.* Journal of Social Change, 10(1), 19-32. DOI: 10.5590/JOSC.2018.10.1.02

Godino, J. D. (2013). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11, 111-132. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2013_idoneidad_didactica.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in Mathematics Education. ZDM.* The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. DOI: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). *The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics.* For the Learning of Mathematics, 39(1), 37-42. Recuperado de https://flm-journal.org/Articles/7BF8C2BCB-810897D52601E7BD7A1A7.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). *El Enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica.* Revista Chilena de Educación Matemática, 12(2), 3-15. DOI: 10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas.* Paradigma, 27(2), 221-252. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Godino, J. D., Wilhelmi M. R. & Bencomo, D. (2005). *Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion.* Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4(2), 1-26. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/articulos_ingles/suitability_criteria_functions.pdf

Hair Jr., J. F., Black, W. C., Babin, B. J. & Anderson, R. E. (2019). *Multivariate Data Analysis.* Andover, Estados Unidos: Cengage Learning.

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza Torres, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Ciudad de México, México: McGraw-Hill.

Enfoque Ontosemiótico. (s. f.). http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/index.html

Jerez Yañez, O., Hasbún Held, B. y Orsini Sánchez, C. (2016). *Clases masivas en la universidad y su efectividad en los aprendizajes de los estudiantes. Una revisión sistemática desde la investigación educativa.* Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI), 3. Recuperado de https://raco.cat/index.php/RevistaCIDUI/article/view/367478

Kaiser, H. (1974). *An index of factorial simplicity.* Psychometrika, 39(1), 31-36.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de Investigación en Ciencias Sociales.* México, México: McGraw Hill/Interamericana.

López-Roldán, P. y Fachelli, S. (2015). *Metodología de la investigación social cuantitativa.* Bellaterra (Cerdanyola del Vallès), España: Dipòsit Digital de Documents, Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de https://ddd.uab.cat/record/129382

Lozano, L. M., García-Cueto, E. & Muñiz, J. (2008). *Effect* *of the number of response categories on the reliability and validity of rating scales.* Methodology, 4(2), 73-79. DOI: 10.1027/1614-2241.4.2.73

Malet, O. (2022). *La construcción y aplicación de un dispositivo para la evaluación de idoneidad didáctica de una asignatura masiva del ingreso a la universidad: Un recurso para la reflexión profesional.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, República Argentina.

Malet, O., Giacomone, B. y Repetto, A. M. (2022). *Modelo de evaluación de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio masivo en el contexto de la pandemia de SARS-CoV2***.** Boletim de Educação Matemática (Bolema), 36(73), 625-649. DOI: 10.1590/1980-4415v36n73a02

Marradi, A. (2006). *Clasificación, conteo, medición, construcción de escalas. En: I. Vasilachis de Gialdino (Coord.), Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 115-161). Barcelona, España: Gedisa.

Matas, A. (2018). *Diseño del formato de escalas tipo Likert: Un estado de la cuestión.* Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20(1), 38-47. DOI: 10.24320/redie.2018.20.1.1347

Mayntz, R., Holm, K. y Hübner, P. (1993). *Introducción a los métodos de la sociología empírica.* Madrid, España: Alianza.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual.* Madrid, España: Pearson.

Montané, A., Beltrán, J. y Teodoro, A. (2017). *La medida de la calidad educativa: Acerca de los rankings universitarios.* Revista de la Asociación de Sociología de la Educación (RASE), 10(2), 283-300. DOI: 10.7203/RASE.10.2.10145

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* Thousand Oaks, Estados Unidos: Sage.

Pérez Santamaría, F. J., Rodríguez Testal, J. F., Romero de Loera, B., Ruvalcaba Coyaso, J. y Lozano Rojas, O. (2002). *Preferencias por formatos de respuesta en cuestionarios para encuestas.* Metodología de Encuestas, 4(1), 63-74. Recuperado de http://casus.usal.es/pkp/index.php/MdE/article/view/913

The jamovi project (2021). jamovi (Version 1.6) [Computer software]. Recuperado de https://www.jamovi.org

Vesely, S. & Klöckner C. A. (2020). *Social Desirability in Environmental Psychology Research: Three Meta-Analyses.* Frontiers in Psychology, 11, 1395. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.01395

Villanueva, E. (2010, Febrero). *Calidad, masividad y nuevas tecnologías en la educación superior: Tensiones y armonías en un contexto de cambios.* Universidad 2010. 7° Congreso Internacional de Educación Superior, La Habana.

Recibido el 15 de noviembre de 2021, aceptado el 18 de noviembre de 2022.

RAZONAMIENTO CONFIGURAL DE ALUMNOS DE BACHILLERATO AL RESOLVER PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN LA MODALIDAD A DISTANCIA

CONFIGURAL REASONING OF HIGHSCHOOL STUDENTS WHEN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS IN THE DISTANCE LEARNING

RAISONNEMENT CONFIGURAL DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE LORS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES EN MODE À DISTANCE

Leticia Rodríguez Rosas[1]
Víctor Larios Osorio[2]
Universidad Autónoma de Querétaro (México)
[1]letyrr.22@gmail.com, https://orcid.org/0009-0001-3121-4242
[2]vil@uaq.mx, https://orcid.org/0000-0002-4454-8516

RESUMEN

En este artículo se muestra el diseño de una serie de problemas geométricos que involucran algunas de las aprehensiones propuestas por Raymond Duval: perceptiva, operativa, discursiva y secuencial. También se muestran las respuestas dadas a esos problemas por estudiantes de segundo semestre de un bachillerato en el que actualmente se trabaja a distancia; y se analizan los tipos de respuestas dadas para determinar el razonamiento configural que los bachilleres llevan a cabo, a partir de conocer los diferentes tipos de aprehensión presentes en sus procesos de visualización, así como los conocimientos geométricos con los que cuentan.

Palabras clave: aprehensiones, geometría, razonamiento configural, visualización.

ABSTRACT

This article shows the design of a series of geometric problems that involve some of the apprehensions proposed by Duval:perceptual, operative, discursive or sequential. The answers to these problems by second semester students of a high school where they are currently working remotely are also shown; and the types of responses given by the students are analyzed to determine the configural reasoning they carry out, from knowing the different types of apprehension present in their visualization processes, to the knowledge of geometry they possess.

La investigación se enfoca en identificar el razonamiento configural y los conocimientos geométricos utilizados por estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas.

Keyword: Configural reasoning, Apprehensions, Visualization, Geometry

RÉSUMÉ

Cet article présente la conception d'une série de problèmes géométriques impliquant l'une des appréhensions proposées par Duval: perceptuelle, opérationnelle, discursive ou séquentielle. On y trouve également les réponses données à ces problèmes, par des étudiants du second semestre d'un lycée où l'on travaille actuellement à distance; et analyse les types de réponses données par les étudiants, afin de déterminer le raisonnement configural qu'ils effectuent, à partir de la connaissance des différents types d'appréhension présents dans leurs processus de visualisation, ainsi que les connaissances géométriques dont ils disposent.

Mots-clés: did, raisonnement configural, apprehensions, visualisation, geometrie.

INTRODUCCIÓN

Una de las áreas matemáticas en las que los colegiales encuentran mayores dificultades es en geometría, pues "la conciben como una materia difícil. La Geometría es una materia a la que se dedica poco tiempo, dado que su enseñanza se considera menos importante que otros temas, dejándose su enseñanza para el final del curso" (Barrantes, 2004). A su vez, uno de los mayores obstáculos en geometría que encuentran los escolares es la presentación y el razonamiento de lo que visualizan, a menudo debido al poco conocimiento que muestran acerca de geometría, e incluso de otras materias que sirven de apoyo para la solución de problemas geométricos, como lo es el álgebra. A continuación, se mencionan algunos estudios en los que se evidencia cómo el proceso de visualización y el tipo de aprehensión utilizada, así como el conocimiento geométrico, ayudan en el desarrollo del razonamiento configural durante la resolución de problemas geométricos.

Fernández y sus colegas (2012) analizaron las respuestas de 182 estudiantes que habían cursado la asignatura de Sentido geométrico. La intención del curso era que el alumnado utilizara las aprehensiones discursivas y operativas para reconocer propiedades geométricas. Como evaluación del curso, se les pidió a los alumnos resolver dos problemas en los que debían probar la congruencia de dos segmentos en una configuración dada de triángulos. Los resultados permitieron identificar la influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural, y ponen de manifiesto el papel que juega la percepción visual en la activación de determinados conocimientos de geometría.

En un estudio realizado a 55 participantes que resolvieron ocho problemas geométricos en un entorno de lápiz y papel, Torregrosa y sus colegas (2010) seleccionaron algunos en los que era necesario modificar o construir la configuración inicial para determinar cuáles son las subconfiguraciones relevantes para resolver el problema (aprehensión operativa) y qué afirmaciones matemáticas permiten desarrollar la prueba (aprehensión discursiva). El análisis se concentró en identificar evidencias de la forma en que interactúan los procesos de visualización durante la resolución de los problemas. Los resultados permitieron identificar tres tipos de desenlace en relación con la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa en la resolución:

- **Truncamiento:** el razonamiento configural se interrumpe cuando se obtiene la “idea” que resuelve el problema;
- **conjetura sin demostración:** se da cuando el razonamiento configural permite al estudiante dar una respuesta al problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple, sin validarla y expresando la solución mediante el lenguaje natural;
- **estancamiento cíclico del razonamiento:** en este proceso se llega a una situación de bloqueo que impide alcanzar la solución.

En otro estudio dirigido a caracterizar la interacción entre los procesos de razonamiento y los procedimientos de verificación que utilizan alumnos de secundaria en la resolución de problemas de geometría en contexto de lápiz y papel, Prior y Torregrosa (2013) muestran que la utilización de diversos procedimientos de verificación para establecer la verdad de una proposición se relaciona con los distintos desenlaces del razonamiento en los problemas que demandan una demostración.

Saorín y sus colegas (2017) llevaron a cabo un proyecto con el fin de identificar características del modelo de razonamiento configural extendido. En ese estudio se evidenció la potencia de tal modelo para el análisis de las respuestas escritas de los educandos a problemas que involucran el registro algebraico en un contexto geométrico. La investigación se llevó a cabo con alumnos de bachillerato a quienes se les propusieron dos problemas; en el primero de ellos, las subconfiguraciones relevantes que debían identificar para la resolución formaban parte de la configuración inicial, mientras que en el segundo debían ser construidas, lo cual resultaba más complejo. La mayoría de los razonamientos desembocaron en un truncamiento para el primer problema; en el segundo, predominó la conjetura sin demostración, ya que los participantes pasaron por alto las subconfiguraciones relevantes necesarias para la resolución del problema. Por tanto, los resultados demuestran que las características de las configuraciones geométricas iniciales influyen sobre la identificación de subconfiguraciones relevantes y el proceso de razonamiento desarrollado.

Dado lo anterior, se planteó el proyecto descrito en este trabajo, cuyo objetivo es determinar el razonamiento configural de los estudiantes al momento de resolver los problemas geométricos. La intención de esta investigación es contribuir al desarrollo y mejora de los procesos de visualización y aprehensión al resolver problemas geométricos. Para ello, se diseñó una serie de problemas que involucran al menos una de las aprehensiones propuestas por Duval, a fin de que la resolvieran alumnos de bachillerato a manera de examen y de forma asincrónica (a consecuencia de las condiciones sanitarias impuestas por la pandemia de covid-19).

Este trabajo está conformado de la siguiente forma: en el marco teórico se definen los conceptos de visualización, razonamiento configural y los cuatro tipos de aprehensiones propuestas por Duval. En la metodología se describen las actividades desarrolladas y el tipo de aprehensión al que corresponden. Los resultados se presentan ordenados según el tipo de respuestas, con el fin de sintetizar la información; así, en el análisis de resultados se compara la aprehen-

PädiUAQ | vol. 6 núm. 12 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

sión utilizada por los colegiales contra la aprehensión esperada.

MARCO TEÓRICO

Gran parte de la actividad del aprendizaje de la geometría se inicia y concentra en la interacción del observador con lo observado, en este caso, las ideas matemáticas comúnmente expresadas en imágenes y signos. De ahí parte la importancia de la visualización:

> La visualización se refiere en general al uso del sentido de la vista para obtener información para la construcción de ideas, se puede establecer que además de "ver" se debe "saber", pues no basta con ver los objetos para conocer todas sus propiedades. (Acuña, 2012, p. 22).

Diversos estudios reconocen una relación estrecha entre la visualización y los conocimientos previos de los estudiantes al resolver problemas geométricos. Clemente *et al.* (2017, p. 498) consideran que el razonamiento configural es el "proceso que relaciona la visualización y el conocimiento de geometría", ya que vincula la visualización con las aprehensiones operativas y discursivas. Duval (2006) afirma que los procesos de visualización son necesarios para resolver problemas geométricos y así considera que parten de cuatro tipos de aprehensión figural, en los cuales se basa este trabajo: perceptiva, secuencial, operativa y discursiva. Añade que "para funcionar como una figura geométrica, un dibujo debe evocar aprehensiones perceptivas y al menos uno de los otros tres tipos de aprehensión" (Duval, 1995, citado en Gagatsis, 2015, p. 232-233). A continuación, se describe cada una de las aprehensiones:

- **Aprehensión perceptiva:** "Es la primera en ser usada en toda la etapa educativa y también la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del alumno" (Duval, 1998, citado por Prior y Torregrosa, 2013, p. 343). Se refiere al reconocimiento y nombramiento de figuras geométricas, independientemente de su localización y orientación.

- **La configuración** mostrada en la Figura 1 es un ejemplo donde se aplica la aprehensión perceptiva, ya que puede ser vista como la parte superior de una mesa, una moneda, un plato o la representación (dibujo) de una figura geométrica (objeto mental).

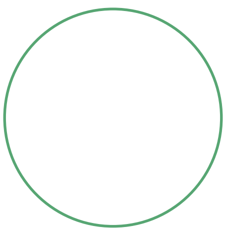


Figura 1. Ejemplo de aplicación de la aprehensión perceptiva.

- **Aprehensión discursiva:** es la habilidad de relacionar la figura con declaraciones, definiciones y atributos matemáticos que no pueden determinarse mediante la aprehensión perceptiva. En la Figura 2 se muestra un ejemplo.

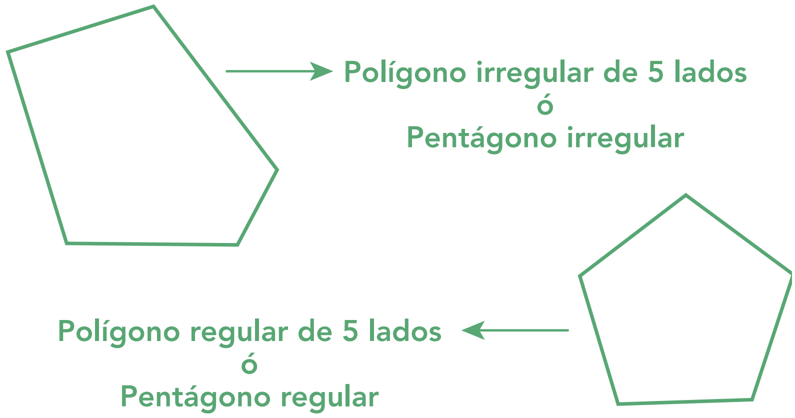


Figura 2. Ejemplos de aplicación de la aprehensión discursiva.

- **Aprehensión secuencial:** Se requiere cuando hay que construir una figura o describir su construcción (Bernabeu *et al.*, 2019). Por ejemplo, si en una actividad se le pide al estudiante dibujar una circunferencia de radio x, y a su vez se le pide dibujar un cuadrado ABCD, de tal manera que el vértice A del cuadrado se encuentre en la misma posición que el centro de la circunferencia y que el lado del cuadrado mida lo mismo que el diámetro de la circunferencia.

- **Aprehensión operativa:** Modificación de una figura para considerar subconfiguraciones, ya sea agregando o eliminando algunos elementos geométricos, o manipulando las partes de una configuración geométrica como un rompecabezas para concentrar la atención sobre ciertas subconfiguraciones particulares.

METODOLOGÍA

La mayoría de los participantes en este proyecto son egresados de telesecundarias que, a pesar de que el bachillerato no trabaja regularmente en modalidad a distancia, habían estado estudiando en sus casas desde meses antes de terminar sus estudios. La forma de trabajo durante el semestre fue a través de la plataforma *Google Classroom*, donde cada lunes por la mañana se designaban las actividades semanales y se cargaban los videos de apoyo necesarios. Las actividades integraban la teoría pertinente y ejemplos para su resolución; además, en lugar de exponer toda la teoría al inicio y final los ejercicios, se la incluía por partes: un segmento de teoría seguido de algún ejercicio para ponerla en práctica, y así sucesivamente hasta cubrir el tema.

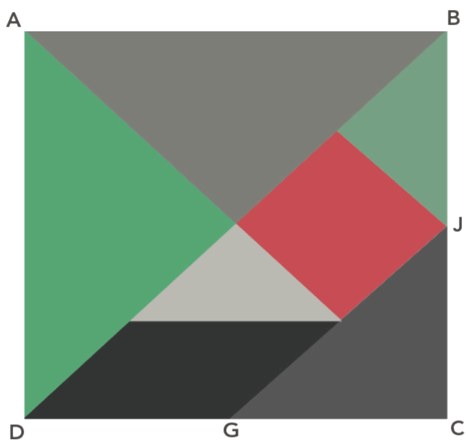
Entre las características del grupo se destacan que la mayoría; hay casi nula participación, sobre todo si se les insta a externar sus dudas; más de la mitad demuestra poca confianza en sí mismos, ya que tardan en contestar y se muestran inseguros ante preguntas directas, aunque sus respuestas sean correctas; dudan y comenten errores al realizar operaciones básicas de cursos pasados.

Para este trabajo se diseñó una serie de problemas geométricos que involucran al menos una de las aprehensiones propuestas por Duval. Estas actividades fueron aplicadas a manera de examen a 25 escuelantes, en su mayoría mujeres, de segundo semestre de bachillerato, al final de su curso de geometría y trigonometría. Posteriormente, se les dirigió una breve entrevista de manera individual con el fin de conocer el razonamiento detrás de algunas de sus respuestas y llevar a cabo un mejor análisis de las mismas. A partir de la siguiente sección se desglosan las actividades diseñadas según el tipo de aprehensión al que corresponden.

Aprehensión perceptiva. Habilidad para nombrar figuras y reconocer subfiguras

Esta primera actividad examina la aprehensión perceptiva de los estudiantes y su capacidad para discriminar, reconocer y nombrar distintas subfiguras a partir de una figura compleja.

Actividad 1.



De acuerdo a la figura anterior, escribe el nombre de cada una de las figuras que se indican:

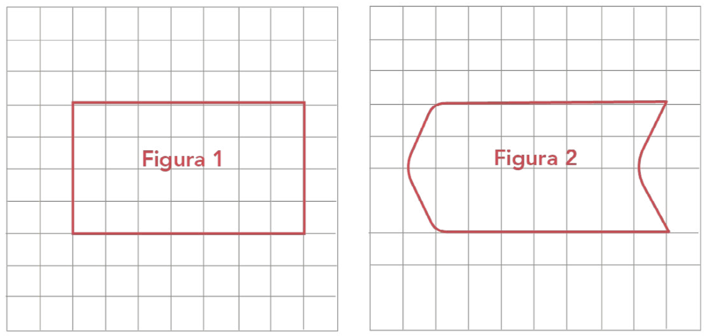
La figura ABCD es un:	La figura JCG es un:
La figura ADH es un:	La figura BIJ es un:
La figura ABH es un:	La figura ABD es un:
La figura DEFG es un:	La figura BCD es un:
La figura EHF es un:	La figura BJGD es un:
La figura HIJF es un:	La figura BJFE es un:

Figura 3. Actividad propuesta para evaluar la aprehensión perceptiva.

Aprehensión operativa. Tareas de reconfiguración

Las siguientes actividades ponen a prueban la habilidad de los estudiantes para modificar una figura geométrica. Se les solicita reconfigurar la silueta inicial para dar con la solución.

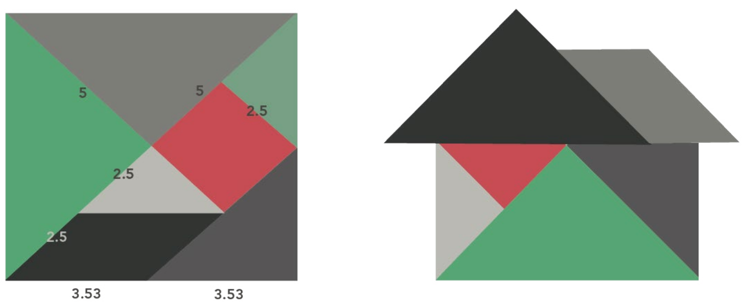
Actividad 2.1. Observa la figura 1 y la figura 2 y subraya la respuesta correcta.



La figura 1 tiene mayor área que la figura 2
La figura 1 tiene la misma área que la figura 2
La figura 1 tiene menos área que la figura 2
¿Cuál de las respuestas anteriores es cierta? ¿Por qué? Explica lo más que puedas.

Actividad 2.2. Observa detenidamente las siguientes figuras.

Figura 1 Figura 2



De acuerdo con la información proporcionada en la figura 1, contesta: ¿Cuál es el área de la figura 2? Justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.

Figura 4. Actividades propuestas para evaluar la aprehensión geométrica.

Aprehensión discursiva. Tareas de producción de pruebas geométricas

El estudiante, con su dominio de geometría y álgebra, debe ser capaz de reconocer que el conjunto de triángulos presentados son parte de un polígono regular de seis lados o, por otro lado, un hexágono. Debe identificar el área proporcionada como el área del hexágono; la altura de cada triángulo como la apotema del hexágono y, por lo tanto, asociar toda esta información con la fórmula correspondiente del área. La fórmula involucra al perímetro y, dado que se trata de un polígono regular, solo es necesario dividir el perímetro entre el número de lados para conocer la dimensión de cada uno de ellos.

Actividad 3 Observa la figura 1 y la figura 2, y subraya la respuesta correcta.

Se le ha pedido a un diseñador de interiores que mande a fabricar un tapete. El tapete debe estar conformado por 6 triángulos con una altura de 3 m cada uno, de un color distinto como se muestra en la siguiente imagen. El área total que debe cubrir el tapete es de 31.14 m2. Ayúdale al diseñador a saber cuánto debe medir cada uno de los lados del tapete, es decir, ¿cuánto debe medir x? Explica detalladamente los pasos a seguir para poder llegar al resultado.

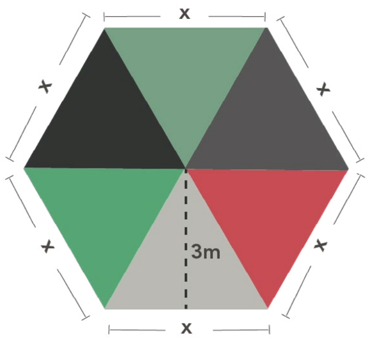


Figura 5. Actividad propuesta para evaluar la aprehensión discursiva y operativa.

Aprehensión secuencial. Tareas de construcción

Esta actividad examina la aprehensión secuencial de los estudiantes (además de la operativa y la discursiva), ya que se sigue un procedimiento ordenado para alcanzar la solución final del problema.

Actividad 4.1. Cuál es el perímetro de un cuadrado circunscrito en una circunferencia de 3.5 cm de diámetro?

Dibuja la figura, calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación. Nota: cuando un cuadrado es circunscrito por un círculo, la diagonal del primero es igual al diámetro del segundo.

Actividad 4.2. ¿Cuál es el área de un círculo inscrito en un cuadrado *ABCD* que, a su vez, se encuentra dentro de un rectángulo *EFGH*, de tal manera que el vértice A del cuadrado corresponde con el centro del rectángulo y uno de los lados del cuadrado coincide con la base del rectángulo, si la base del mismo mide 10 cm y su altura es de 6 cm?

Dibuja cada una de las figuras que se mencionan en el párrafo anterior tal cual se describen, coloca la letra que corresponde a cada vértice de las figuras. Calcula lo que se te pide y justifica tu respuesta con procedimiento y una explicación.

Figura 6. Actividad propuesta para evaluar la aprehensión secuencial.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Actividad 1: Aprehensión perceptiva

Ninguno de los estudiantes tuvo problemas para distinguir los triángulos, pero varios sí a la hora de identificar el paralelogramo, el cuadrado girado y el trapecio (Figura 7). De los 25 alumnos, 8 no reconocieron el paralelogramo, 12 confundieron el cuadrado girado con un rombo o romboide y 9 no identificaron el trapecio. La Figura 8 muestra las respuestas de una estudiante que cometió los tres errores mencionados anteriormente.

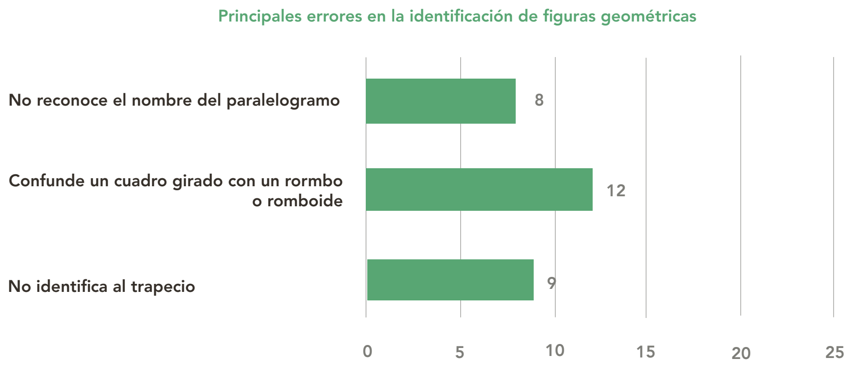


Figura 7. Tipos de errores que cometen los estudiantes al resolver el problema que evalúa su aprehensión perceptiva.

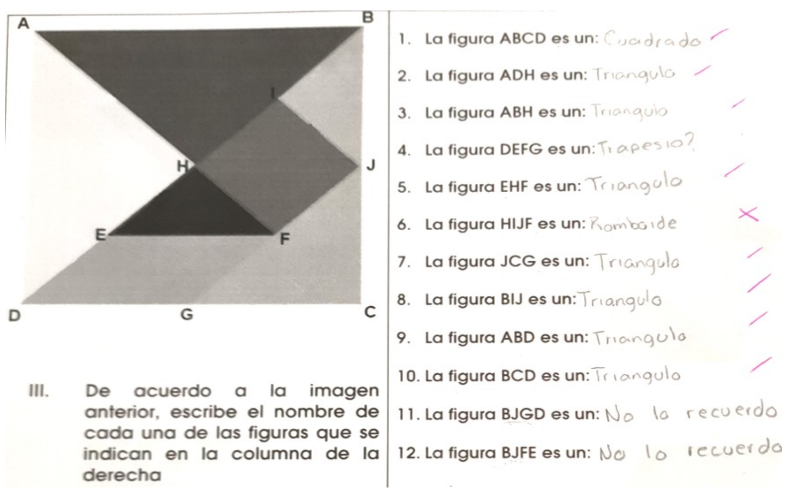


Figura 8. Respuestas de la Estudiante 1 a la actividad de aprehensión perceptiva.

Los estudiantes identificaron las figuras geométricas más conocidas (triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo) en su presentación habitual. Todos reconocieron el cuadrado más grande, sin embargo, algunos confundieron el pequeño con un rombo porque se encuentra girado. Con el triángulo no encontraron inconvenientes hasta que intentaron especificar el tipo (aunque en este problema era innecesario, algunos de los alumnos sí trataron, pero cometieron errores). Tras ver estos resultados, se puede afirmar que la aprehensión perceptiva solo es eficiente cuando se trabaja con figuras bien conocidas y en su presentación habitual.

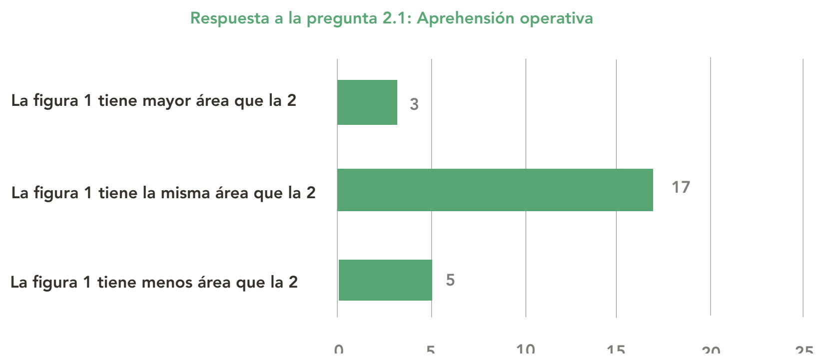


Figura 9. Respuestas de los alumnos al primer problema que evalúa la aprehensión operativa.

Actividad 2.1: Aprehensión operativa

En la Figura 9 se muestra el número de pupilos que resolvieron las tres opciones de respuesta para esta pregunta.

17 de los 25 estudiantes contestaron correctamente, pero solo 8 de ellos justificaron su respuesta.

Presentamos algunas de las justificaciones:

- **Estudiante 1:** *Lo que falta en la izquierda lo completa lo de la derecha.*
- **Estudiante 5:** *La parte sombreada 1 se pasa a donde está el 2 porque la pieza encaja y entonces tenemos un rectángulo congruente al de la figura 1.*
- **Estudiante 13:** *Porque, aunque tiene 2 lados irregulares la figura 2, porque de este lado que le hacen falta cuadros se compensa con el otro lado y se obtiene misma área.*

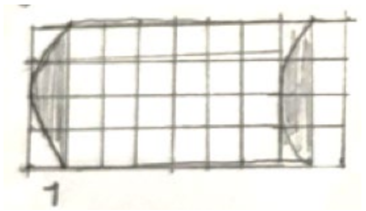


Figura 10. Interpretación de estudiante 5 a problema de aprehensión operativa. Se solicitó a una de las estudiantes que acertó, pero que no respaldó su respuesta, que detallara su razonamiento. Ella contestó:

- **Estudiante 2:** *Me imaginé que era como un alambre y entonces lo jalo hacia acá de ambos lados para enderezarlo y se forma un rectángulo igual al de la figura 1.*

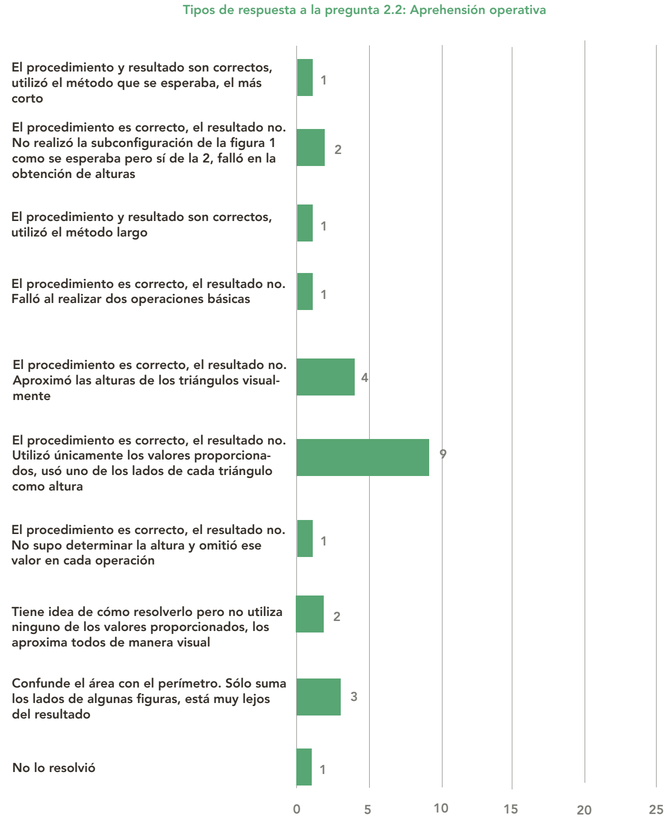


Figura 12. Respuestas al segundo problema que evalúa la aprehensión operativa.

Actividad 2.2: Aprehensión operativa

Únicamente hubo dos resultados correctos, que se detallarán más adelante: uno por el método corto (Figura 11) y el otro por el largo (Figura 13). Dos estudiantes realizaron una subconfiguración de la figura con forma de casa, dividiéndola en tres siluetas básicas, pero determinaron incorrectamente algunas dimensiones. Uno llevó a cabo el procedimiento adecuado y sustitución de valores, no obstante falló al ejecutar operaciones básicas. Cuatro siguieron el procedimiento apropiado, aunque estimaron la altura de manera visual. Nueve utilizaron correctamente las fórmulas para calcular el área de las figuras, sin embargo consideraron las medidas proporcionadas en el problema, es decir, tomaron uno de los lados de cada triángulo como la altura del mismo. Un alumno tuvo dificultades al determinar la altura de los triángulos y decidió omitir ese valor, así que solo dividió la base entre 2. Dos estudiantes comprendieron cómo resolver el problema, pero aproximaron las dimensiones de las figuras visualmente, sin emplear ninguno de los valores proporcionados. Tres participantes confundieron el área con el perímetro e intentaron sumar los lados de algunas figuras; el perímetro que obtuvieron fue incorrecto. Por último, solo un estudiante dejó el problema sin resolver (Figura 12).

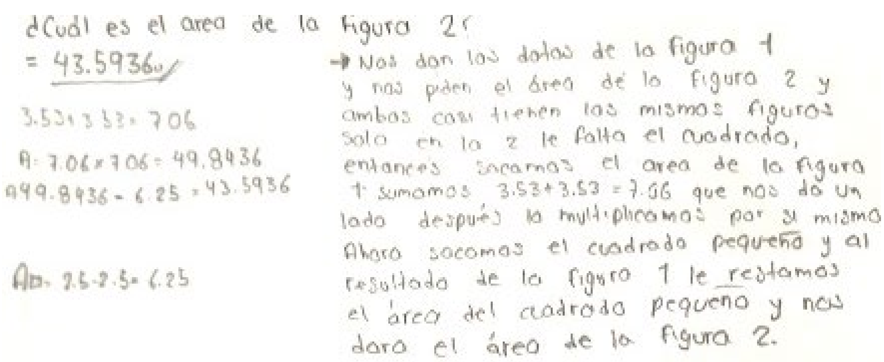


Figura 11. Respuesta de la Estudiante 5 al segundo problema que evalúa la aprehensión operativa.

La Figura 11 muestra la respuesta de la única estudiante que siguió el método corto, el cual se esperaba que siguieran todos.

La mayoría de los estudiantes intentó calcular el área de la casa por el camino más largo, es decir, sumar las áreas de cada figura que la conforma por separado (Figura 13). También en la Figura 13 se observa que una alumna identificó la base y la altura del triángulo como 3 y 6 respectivamente; ambas mediciones son incorrectas.

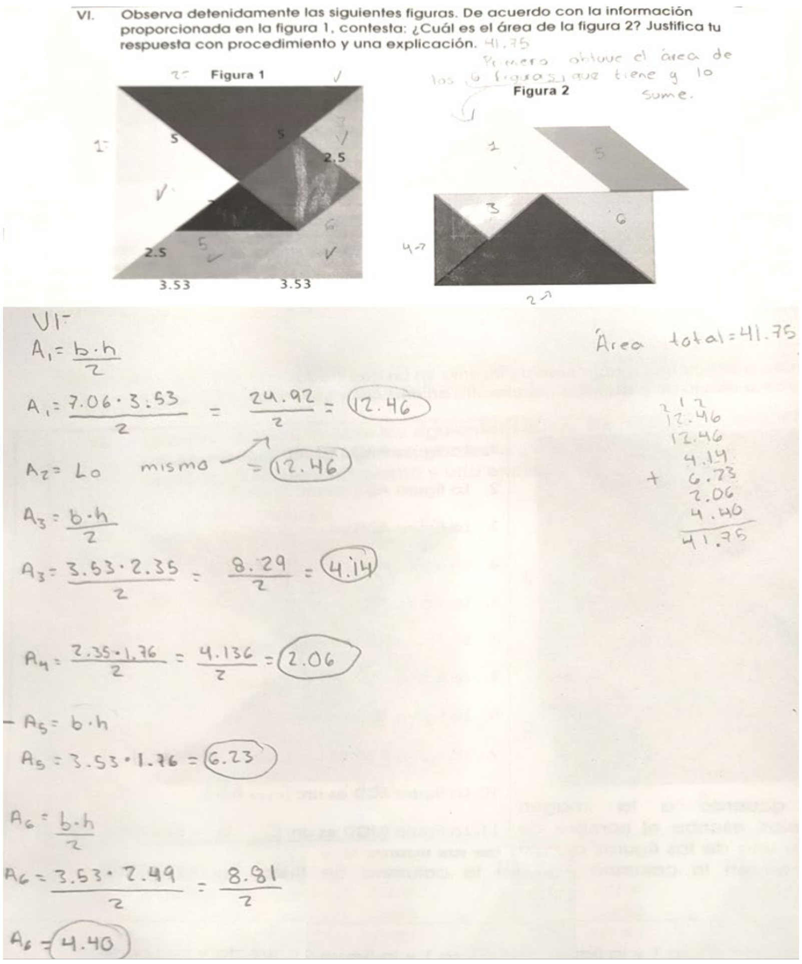


Figura 13. Respuesta de la Estudiante 1 al segundo problema que evalúa la aprehensión operativa.

La Figura 14 muestra el tipo de respuestas que se dieron en esta actividad. De los 25 evaluados, únicamente tres acertaron; 10 confundieron el perímetro con el área y se limitaron a dividir el área total del hexágono (como si se tratara del perímetro) entre el número de lados para conocer la dimensión de cada uno; 5 seleccionaron la fórmula correcta, pero no despejaron adecuadamente; una alumna encontró un resultado cercano al correcto mediante el método gráfico: partiendo de las dimensiones proporcionadas, dibujó la figura y midió cada uno de los lados; 4 alumnos siguieron un procedimiento completamente erróneo; por último, 2 no contestaron el ejercicio. La Figura 15 muestra la respuesta de una de las estudiantes en esta actividad: dividió el área total entre el número de triángulos que conforman el hexágono.

Los resultados de los dos problemas propuestos para evaluar la aprehensión operativa revelan que la mayoría del grupo tiene un desempeño adecuado en actividades sencillas y de carácter individual; por el contrario, se contrapone a la hora de hacer subconfiguraciones de varias figuras al mismo tiempo, pues confunden el concepto de área, vital para resolver los problemas propuestos.

Actividad 3: Aprehensión discursiva

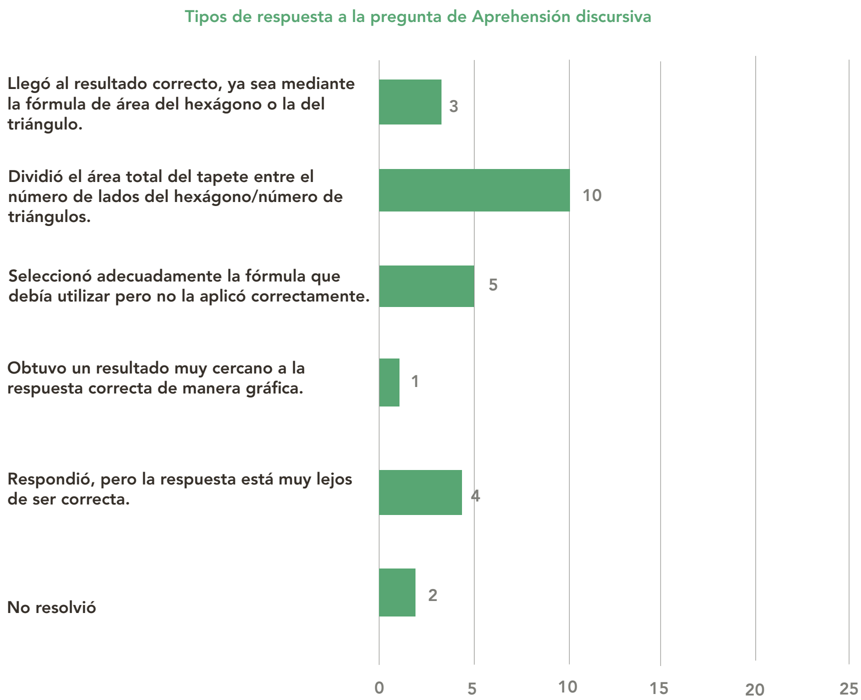


Figura 14. Tipos de respuestas al problema que evalúa la aprehensión discursiva.

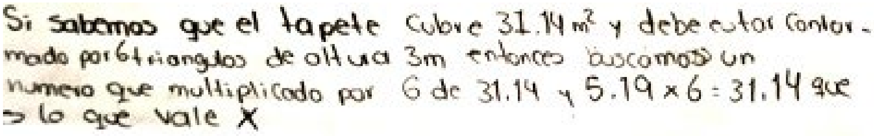


Figura 15. Respuesta de la Estudiante 5 al segundo problema que evalúa su aprehensión operativa.

En entrevista se le preguntó lo siguiente:

Investigador: *¿Por qué dividiste el área total entre seis?*
Estudiante 3: *No responde.*
Investigador: *Señala en la figura lo que representa 31.14 metros cuadrados.*
Estudiante 3: *Señala el contorno del hexágono.*
Investigador: *¿Pensaste que lo que se te estaba dando era el perímetro?*
Estudiante 3: *Sí.*

De acuerdo a los resultados, es en este problema donde los estudiantes enfrentaron las mayores dificultades. La mayoría realizó un procedimiento incorrecto; varios de ellos únicamente dividieron el área proporcionada entre el número de lados del hexágono. Algunos creyeron que solo era cuestión de dividir el perímetro entre el número de lados para obtener lo que se pedía; otros dijeron que no entendieron la instrucción. Es evidente que prevalece una incapacidad de relacionar las figuras con declaraciones, definiciones y atributos matemáticos indeterminables únicamente mediante la aprehensión perceptiva.

Actividad 4.1: Aprehensión secuencial

En la Figura 17 podemos observar que nueve de los 25 estudiantes resolvieron correctamente el problema. Otros cinco realizaron tanto la representación gráfica como el procedimiento de manera correcta, aunque confundieron el radio con el diámetro (Figura 19); 5 más calcularon el perímetro acertadamente, pero su representación gráfica fue errónea; de los 19 pupilos descritos en las líneas anteriores, 14 utilizaron el procedimiento más largo (Figura 16) para la obtención del perímetro, es decir, sumaron los lados del cuadrado, mientras que los otros 5 lo intentaron completar al multiplicar lado por lado (Figura 18). 2 estudiantes más representaron apropiadamente el gráfico solicitado; sin embargo, sus cálculos se encuentran muy lejos de la respuesta; uno tiene una ligera idea de cómo obtener el perímetro, aunque no logró hacerlo y su representación gráfica fue deficiente; por último, 3 no resolvieron el problema.

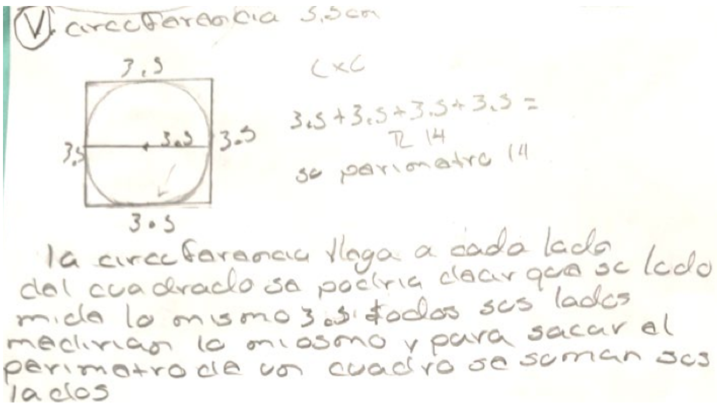


Figura 16. Procedimiento largo de la estudiante 8 al resolver el primer problema que evalúa su aprehensión secuencial.

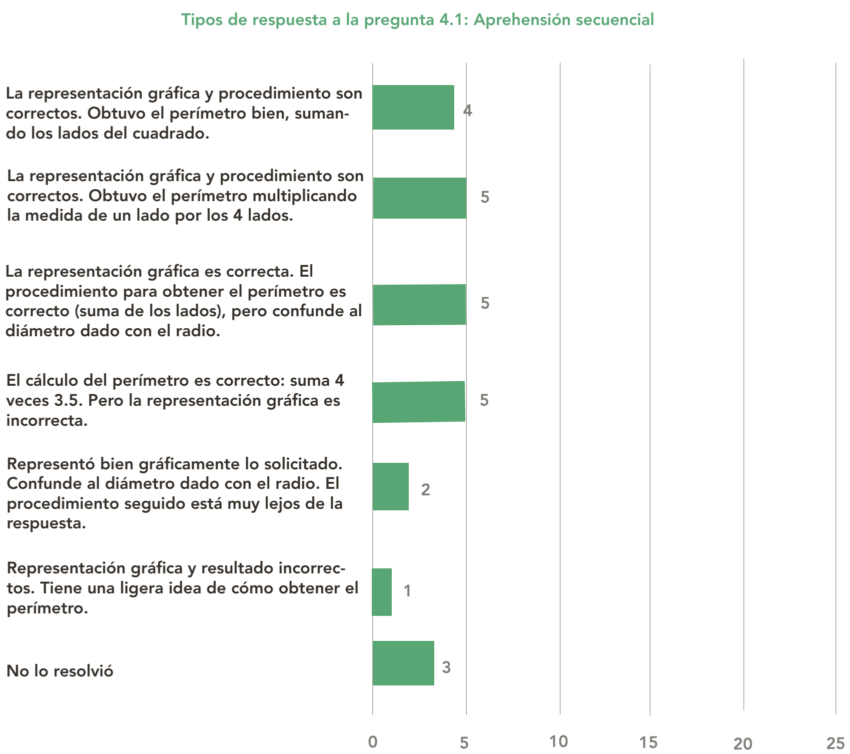


Figura 17. Tipos de respuestas al primer problema que evalúa la aprehensión secuencial.

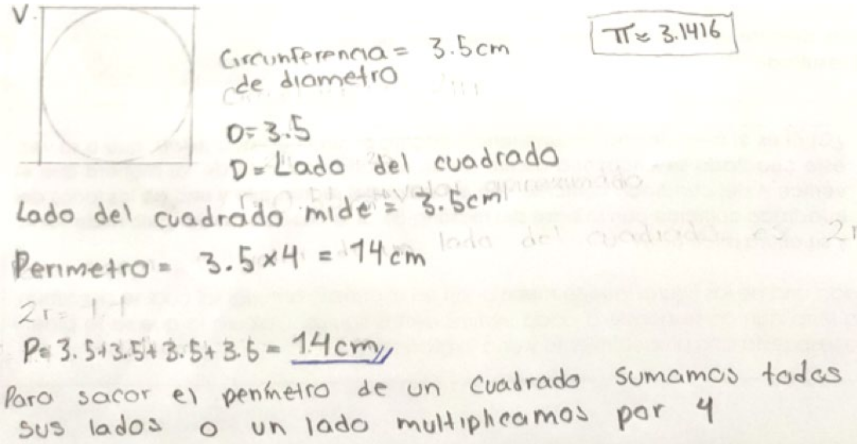


Figura 18. Procedimiento corto de la Estudiante 5 al resolver el primer problema que evalúa su aprehensión secuencial.

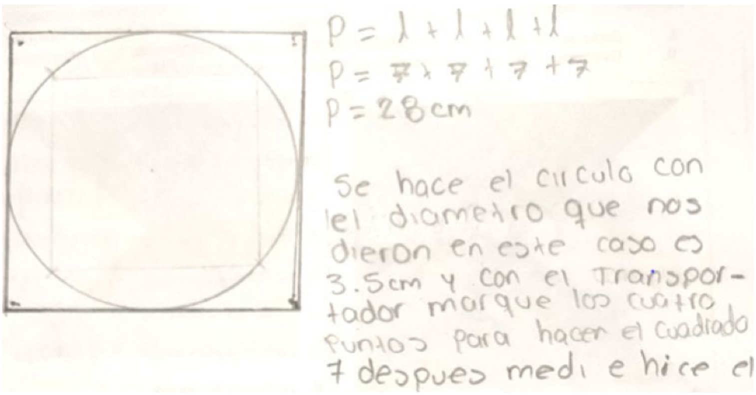


Figura 19. Procedimiento de la Estudiante 4, en el cual confunde el diámetro con el radio.

Actividad 4.2: Aprehensión secuencial

Únicamente 2 estudiantes encontraron la solución a este problema. 6 siguieron adecuadamente algunos de los pasos necesarios; 3 alinearon el vértice A con la línea que parte el rectángulo a la mitad verticalmente, tomaron el cuadrado como si fuese la mitad del rectángulo y sus cálculos fueron erróneos. 6 dibujaron de forma concéntrica las tres figuras que se pidieron; 2 colocaron una línea que va del centro de las figuras al vértice A del cuadrado; esos 2 alumnos y otro más, identificaron algunas características de las figuras trabajadas, pero el procedimiento de los otros tres se encuentra muy alejado de la respuesta. El sistema ejecutado

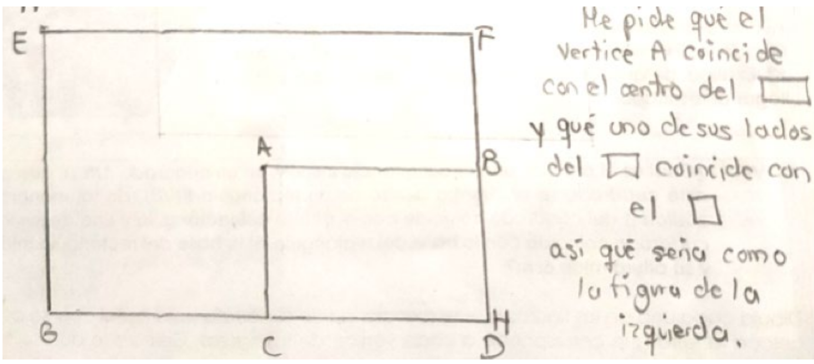


Figura 20. Procedimiento del Estudiante 2 a la segunda pregunta que evalúa la aprehensión secuencial.

por otros 5 estudiantes también se encuentra equívoco, mientras que 3 ni siquiera lo intentaron resolver (Figura 21). En la Figura 20 se observa que el estudiante 2 siguió correctamente algunos de los pasos de la solución correctamente; sin embargo, no realizó ni un solo cálculo de lo que se solicitaba.En la Figura 11 se observa que el estudiante 2, pudo acertar algunos de los pasos del problema; no obstante, no realizó lo que se solicitaba.

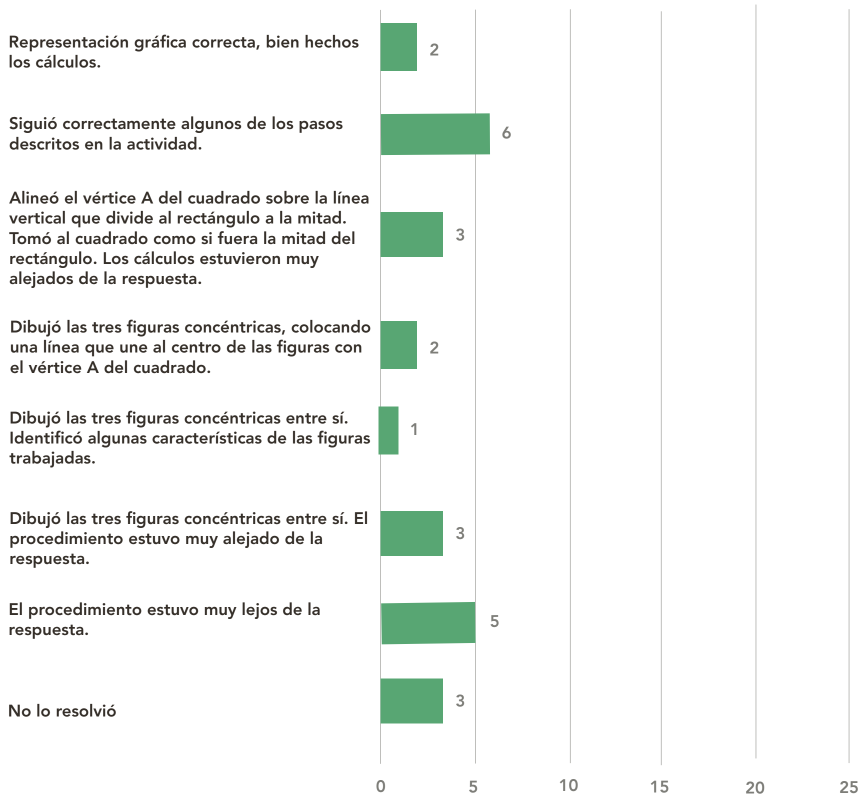


Figura 21. Tipos de respuestas de los estudiantes al segundo problema que evalúa la aprehensión secuencial.

En la Figura 12 y Figura 13 se observa que tanto la Estudiante 8 como la Estudiante 24, respectivamente, alinean el vértice "A" con la mitad del rectángulo. Para conocer la razón por la cual lo realizaron de esa forma, en entrevista se le preguntó a la Estudiante 8:

Investigador: *¿Por qué dibujaste así el cuadrado, en esa posición?*
Estudiante 8: *Porque así lo pedía, dice que el vértice A coincide con el centro del rectángulo y uno de sus lados con la base.*
Investigador: *¿Cuál es el centro del rectángulo?*
Estudiante 8: *Este (señala la línea vertical que divide al rectángulo en dos partes iguales).*

En el primer problema propuesto para evaluar este tipo de aprehensión, la mayoría de los estudiantes realizó la representación gráfica correctamente; sin embargo, falló en la realización de los cálculos; algunos incluso utilizaron el diámetro dado de la circunferencia en lugar del radio. Ante la pregunta de por qué habían procedido así contestaron que se confundieron y pensaron que el diámetro era la mitad de la circunferencia; cabe mencionar que el primer ejercicio era el más sencillo de representar gráficamente.
El segundo problema tuvo un grado de dificultad mayor al primero, y la gran parte de los alumnos no logró resolverlo; a pesar de ello, intentaron representar gráficamente lo que se pedía, aunque al final solo 2 lo resolvieron correctamente y otros 6 siguieron algunos de los pasos de la secuencia. Una porción significativa de participantes no realizó bien los cálculos o simplemente desistieron. Una de las estudiantes que resolvió correctamente el problema,

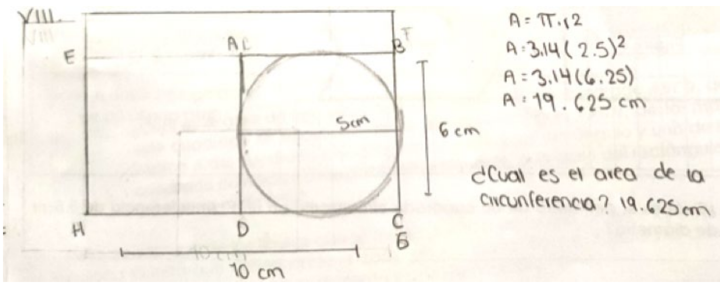


Figura 22. Procedimiento del Estudiante 24 para la segunda pregunta que evalúa la aprehensión secuencial.

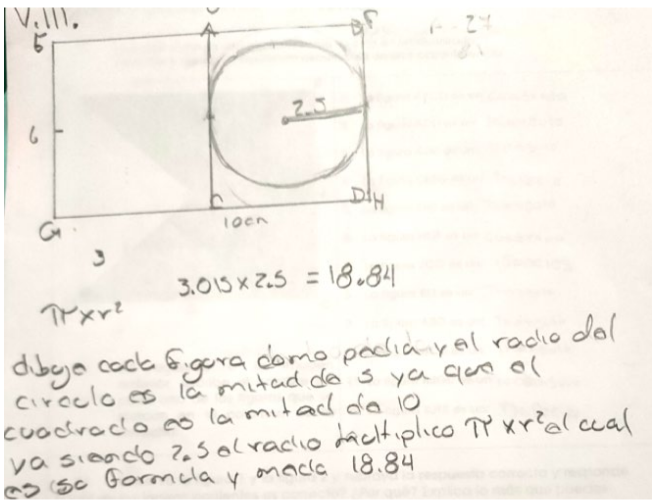


Figura 23. Procedimiento del estudiante 8 para la segunda pregunta que evalúa la aprehensión secuencial.

antes de devolver su evaluación, preguntó a la profesora a qué se refería el texto con que “el vértice A del cuadrado coincide con el centro del rectángulo” y regresó a su lugar a corregirlo (Figura 24). Al comparar las evaluaciones, se puede observar que hubo distintas interpretaciones a dicha instrucción; algunos unieron el centro con el vértice A del cuadrado mediante una línea; otros hicieron coincidir uno de los lados del cuadrado con la mitad del rectángulo, pero no con su centro; mientras que otros no supieron qué hacer.

En los resultados se aprecia:

- **Falta de análisis.** La mayoría se limita únicamente a los datos proporcionados; cuando se solicita calcular algo con base en un dato indeterminado, entra en conflicto (a pesar de que sea posible determinarlo). Los estudiantes esperaban que la profesora les diera exactamente los datos a sustituir en las fórmulas.

- **Problemas en la comprensión lectora.**

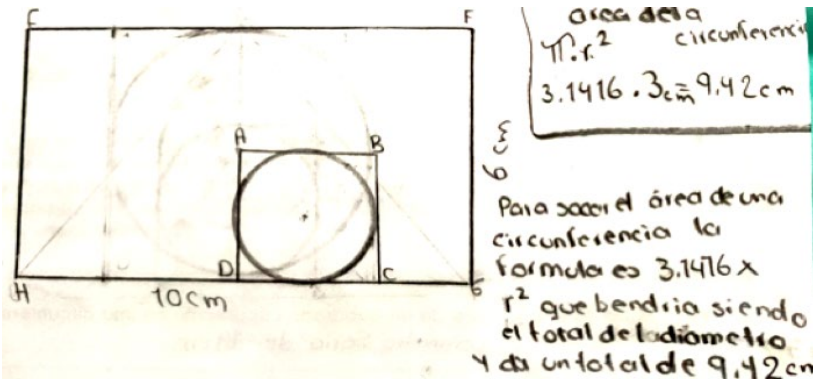


Figura 24. Procedimiento del Estudiante 3 para la segunda pregunta que evalúa la aprehensión secuencial.

CONCLUSIONES

En los resultados se puede notar que el tipo de aprehensión más difícil para los estudiantes es la discursiva, seguida de la secuencial y operativa, aunque también depende del grado de dificultad con el que cuente cada problema. En la aprehensión perceptiva no se tienen mayores dificultades, siempre y cuando se trate de figuras conocidas para ellos; el problema surge cuando se les muestran figuras poco utilizadas o en una posición u orientación distinta a la habitual, como fue el caso del cuadrado girado, los trapecios y el paralelogramo.

- **Falta de motivación o interés.** A pesar de contar con un espacio para resolver dudas respecto a la evaluación, los alumnos no mostraron iniciativa en participar.

- **Desconocimiento o idea errónea de conceptos y definiciones.**

Falta solidez en los conocimientos de los participantes ya que tienen definiciones inciertas de los conceptos y desconocen las propiedades de las figuras que se les presentan; es por eso que, en ciertos momentos, identifican y aciertan algunos de ellos, pero en otros problemas parece que los han olvidado. Ocurre, como menciona Dewey (1993, p. 158), que “los conceptos estandarizan nuestro conocimiento, introducen solidez en lo que, de lo contrario, carecería de forma, y permanencia en lo que, sería cambiante”. Según Acuña (2012, p. 22) “ver con los ojos no es lo mismo que ver con los ojos y con el cerebro interpretando lo que se ve”. Por lo tanto, la mayoría de ellos no puede llevar a cabo un proceso de visualización y uso de aprehensiones adecuado, y en consecuencia su razonamiento configural se ve limitado.

REFERENCIAS

Acuña, C. M. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación.* Barcelona, España: Gedisa.

Barrantes, M. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias 22*(2), 241-250.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad, 19*(2), 103–123. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 497–516. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a24

Dewey, J. (1993). Cómo pensamos. Barcelona: Paidós.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching* *of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37–51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, Raymond. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fernández, T., Díaz, J. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(42a), 39–64. https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000100004

Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore y M.I. Fandiño Pinilla (Eds) *Didáctica de la Matemática - Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231- 248). Chia: Universidad de la Sabana.

Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 16*(3), 339–368. https://doi.org/10.12802/relime.13.1633

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento Configural Extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. En Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe (edit.), *II Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (págs. 1-8). México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento Configural Como Coordinación De Procesos De Visualización. *Enseñanza de Las Ciencias, 28*(3), 327–340.

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO