PädiUAQ

11

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

VOLUMEN 6, **NÚMERO** 11

ENERO - JUNIO 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

PädiUAQ, vol. 6, No. 11, enero-junio 2023, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, Querétaro Qro., C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00 ext. 6023, https://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padiuaq@uaq.mx Editor responsable: Víctor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-040413274400-102, ISSN: 2954-4025, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Victor Larios Osorio, Cerro de las Campanas, S/N, Col. Las Campanas, Querétaro Qro., C.P. 76010, fecha de última modificación 30 de enero de 2023.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

PädiUAQ
Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

COMITÉ EDITORIAL

CONTENIDO

EDITORIAL

SECCIÓN MONOTEMÁTICA

3 INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE LOS CONTENIDOS DE PROBABILIDAD DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA COSTARRICENSE

Luis A. Hernández Solís, Carmen Batanero

PROYECTOS DOCENTES

4 REGULARIZACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA, SAN JOAQUÍN 2021

Jessica Martínez Martínez, Luisa Ramírez Granados

5 DISEÑO DE SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN PROBLEMAS: APLICACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Julisa Elizabeth Anaya López,
Yennitzzia Sanjuanita Ibarra Molina

EDITORIAL

NÚMERO TEMÁTICO SOBRE *EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS*

Luis Roberto Pino Fan
Universidad de Los Lagos, Chile
luis.pino@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0003-4060-7408
Editor Invitado

PRESENTACIÓN

El *Enfoque Ontosemiótico* (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos es, en la actualidad, una teoría propia de la didáctica de las matemáticas que surge a inicios de los noventa (Godino y Batanero, 1994) con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Así, a nivel internacional, por ejemplo, en la *Encyclopedia of Mathematics Education*, el EOS se presenta como "un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos utilizados en la investigación en Educación Matemática" (Presmeg, 2014). Desde su surgimiento, y como un ejemplo de "teoría viva", el EOS ha seguido desarrollándose, profundizando y actualizando sus herramientas teórico-metodológicas (*e. g.*, Godino, Batanero y Font, 2007; 2020; Pino Fan, Castro y Font, 2022), lo que ha permitido emplearlo y aplicarlo a temas relevantes y vigentes relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tales como evaluación y desarrollo de conocimientos y competencias del profesorado, diseño de experiencias formativas para estudiantes y profesores, análisis del currículo y de los libros de texto de matemáticas, estudio sobre la complejidad y riqueza matemática, uso de recursos y medios para promover su educación, entre otros temas relacionados con aspectos epistémicos, cognitivos, interaccionales, afectivos y ecológicos. Estos trabajos de investigación (artículos, tesis, libros y más) se encuentran disponibles para su consulta en la web del enfoque ontosemiótico http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/ y desde la web de algunos de sus colaboradores: https://www.ugr.es/~batanero/, http://www.pagvf.esy.es/index.htm, http://www.lrpino-fan.com/.

Con este número especial, la *Revista Pädi*UAQ manifiesta un reconocimiento al trabajo desarrollado por parte de la comunidad internacional de investigación que utiliza el enfoque ontosemiótico; con los artículos que se han incluido en este número, muestra ejemplos de los usos de algunas de las herramientas teórico-metodológicas del EOS para el estudio de fenómenos relacionados con la representatividad de significados de los objetos matemáticos que se presentan en el currículo de matemáticas y en los libros de texto. Por otro lado, se reitera y ejemplifica la disposición y apertura al diálogo académico que puede suscitarse entre los posicionamientos del EOS y de otras teorías de la didáctica de la matemática (*e. g.*, Drijvers *et al*. 2013; Font *et al*. 2015; Pino Fan *et al*. 2017), con la finalidad de identificar puntos de encuentro que permitan unificar horizontes para emprender indagaciones más profundas y pormenorizadas de los fenómenos de investigación propios de la disciplina.

De tal modo, en el primer artículo de este número especial, titulado "Una mirada a la socioepistemología desde el enfoque ontosemiótico en didáctica de las matemáticas", el autor Juan D. Godino (Universidad de Granada, España) reflexiona sobre las similitudes y diferencias entre la teoría socioepistemológica y el enfoque ontosemiótico, así como las posibles complementariedades entre estas dos vertientes teóricas. Tales razonamientos se enTablan a partir del análisis de dos ejemplos concretos de investigaciones realizadas desde la socioepistemología y deliberadas desde los posicionamientos del EOS: uno sobre las contradicciones que se les presentan a estudiantes universitarios cuando se enfrentan a la existencia de logaritmos negativos, y el otro sobre la identificación de elementos que constituyen la epistemología de la periodicidad, lo cual involucra aspectos culturales, históricos, institucionales y cognitivos. Como resultado, se evidencia un origen común para las dos teorías y la posible efectividad de coordinarlas a partir del diálogo académico para la investigación de fenómenos de interés común, lo cual habla de una convivencia sana y colaborativa del EOS con la TSEM en los contextos latinoamericano e internacional.

Luis A. Hernández Solís (Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica) y Carmen Batanero (Universidad de Granada, España) presentan en el segundo texto, titulado "Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad del currículo de matemática costarricense", un estudio sobre la idoneidad epistémica del currículo costarricense de matemáticas para la educación general básica, en torno a la iniciativa para el estudio de la probabilidad. Como resultado, los autores muestran que los significados de probabilidad aspirados por el currículo son representativos del significado holístico de referencia de probabilidad; además, homologan indicadores de idoneidad epistémica singulares para la probabilidad, los cuales lograrían servir como directrices y guiar el diseño y valoración de acciones formativas sobre este tema matemático.

En el tercer artículo titulado "Estudio del currículo chileno en torno a la división como isomorfismo de medida: El caso 5° básico", las autoras Yanet Rivas León (Universidad de Los Lagos) y Maximina Márquez Torres (Universidad de Los Lagos, Chile) nos ofrecen un estudio de la representatividad de los significados de la división como isomorfismo de medida pretendidos por el currículo chileno respecto de su significado holístico de referencia (isomorfismo de medida división-medida y división-partitiva). El currículo es entendido en ese estudio como la dupla *planes de estudio-libros de texto*. Como hallazgo principal, las autoras evidencian que el currículo de matemáticas de 5° básico lleva un tratamiento casi exclusivamente procedimental de la división, mediante el aprendizaje del algoritmo, en detrimento del uso de diversas representaciones y de problemas en los cuales se deba hacer una interpretación del resto.

Antes de finalizar esta editorial, quiero expresar especial agradecimiento al Dr. Víctor Larios Osorio, por la invitación para organizar este número especial, y por permitirnos, con su generosidad y con esta oportunidad, mostrar un poco de los resultados de quienes conformamos la comunidad internacional que desarrolla y utiliza el enfoque ontosemiótico.

REFERENCIAS

Drijvers, P. Godino, J. D., Font, V. & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23–49.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., Rubio, N. (2015). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics.* DOI 10.1007/s10649-015-9639-6.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15.

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font, V. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, 11(2), 97-124.

Presmeg, N. (2014). Semiotics in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 538-542). London, U.K: Springer. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8, 2014.

SECCIÓN MONOTEMÁTICA

Artículo por invitación

UNA MIRADA A LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

A LOOK INTO THE SOCIO-EPISTEMOLOGY FROM THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

Juan Díaz Godino
Universidad de Granada, España
jdgodino@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

1

RESUMEN

La articulación de marcos teóricos es un tema de creciente interés en educación matemática, puesto que, aunque la diversidad de teorías permita enriquecer los fundamentos de la investigación, al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico y tecnológico. En este trabajo se analiza el marco teórico de la socioepistemología en matemática educativa desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. La comparación y posible articulación de ambas teorías se aborda mediante el análisis de dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco de la socioepistemología: "Tratamiento de la contradicción en matemáticas por estudiantes universitarios, cuando son enfrentados a la existencia del logaritmo de los números negativos" y "El estudio de aspectos culturales, históricos, institucionales y cognitivos relacionados con la periodicidad". Como resultado del análisis se identifican semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos, así como sus relaciones con la teoría de situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico. Asimismo, se muestra en qué sentido las ontologías matemática y didáctica que se proponen dentro del enfoque ontosemiótico pueden contribuir al progreso y articulación coherente de dichas teorías.

Se analizará el marco teórico de la socioepistemología en matemática educativa desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y el saber matemáticos. Como resultado se identifican semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos, así como sus paralelismos con la didáctica y antropológica de lo didáctico.

Palabras clave: articulación de teorías, enfoque ontosemiótico, socioepistemología.

ABSTRACT

The articulation of theoretical frameworks is a topic of growing interest in mathematics education; however, although the diversity of theories allows enriching the foundations of research, at the same time it can constitute a hindrance to its consolidation as a scientific and technological field. This paper analyzes the theoretical framework of socioepistemology in educational mathematics from the point of view of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The comparison and possible articulation of both theories is approached through the analysis of two examples of research carried out within the socioepistemology framework: "Treatment of contradiction in mathematics by university students, when they are confronted with the existence of the logarithm of negative numbers" and "The study of cultural, historical, institutional and cognitive aspects related to periodicity". As a result of the analysis, similarities, differences and complementarities of these theoretical models are identified, as well as their relationships with the theory of didactic situations and the anthropological theory of didactics. Likewise, it is shown in what sense the mathematical and didactic ontologies proposed within the ontosemiotic approach can contribute to the progress and coherent articulation of these theories.

Keywords: networking theories; onto-semiotic approach; socio-epistemology.

INTRODUCCIÓN

El carácter relativamente reciente de la didáctica de la matemática como área de conocimiento explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Font, 2002; Gascón, 1998; Sierpinska y Lerman, 1996; Sriraman y English, 2010), cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización de los diferentes programas de investigación, han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando para fundamentar la investigación en educación matemática. Asimismo, la articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger *et al.*, 2008), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática es hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico.

En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) se abordó la comparación de distintos modelos teóricos desarrollados en Francia en el ámbito de la didáctica de la matemática, clarificando el uso de nociones cognitivas y epistémicas en la teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 2002), campos conceptuales (Vergnaud, 1990) y la antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999). También se hizo referencia a la dialéctica instrumento-objeto (Douady, 1986), a los registros de representación semiótica (Duval, 1995) y a la noción de concepción presentada en Artigue (1990). Esta contrastación de modelos teóricos se realizó desde el punto de vista que proporciona el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino *et al.*, 2007; Godino, 2022). Otras publicaciones sobre articulación de teorías en educación matemática con el EOS están disponibles en el repositorio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es.

En este trabajo abordamos desde ese mismo enfoque un análisis similar de la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME), desarrollada por Cantoral y Farfán (1998; 2003; 2004), Cantoral *et al.* (2014), Cordero (2001) y otros investigadores, que ha sido ampliamente usada, principalmente en el ámbito de la comunidad de investigadores de Latinoamérica. Profundizamos, para el caso de la socioepistemología, en el análisis comparativo de teorías socioculturales realizado en Godino (2019), donde también se relaciona el EOS con la etnomatemática y la TAD.

Comenzamos sintetizando las principales nociones introducidas en el EOS, que usaremos como referencia para interpretar y comparar el marco de la socioepistemología en matemática educativa. Seguidamente, incluimos una síntesis de las características de la TSME y de los principios que la definen, así como una descripción resumida de dos investigaciones realizadas en dicho marco. Incluimos también una interpretación de los estudios descritos y de los principios teóricos de la TSME desde el punto de vista del EOS. Subsecuentemente analizamos algunas concordancias y complementariedades entre estos enfoques teóricos y sus conexiones con la TSD y la TAD. Concluimos el trabajo con algunas ideas sobre la necesidad y posibilidad de consolidar un enfoque unificado sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de las matemáticas que tenga en cuenta las dimensiones epistemológica (incluidos los aspectos socioculturales), cognitiva e instruccional.

MARCO TEÓRICO

SÍNTESIS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar los cimientos de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas (Wittgenstein, 1953), pragmatistas y semióticas (Peirce, 1958) para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la educación matemática, tales como qué es un objeto matemático; cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, etc.) en un contexto o marco institucional determinado; y qué significa el objeto 0 para un sujeto en un momento y circunstancias dadas. En trabajos posteriores[1] (Godino, 2002; Godino *et al.*, 2007; Font *et al.*, 2013) se abordó el problema de la significación y representación mediante el desarrollo de una ontología matemática explícita sobre supuestos iniciales de tipo antropológico, que da cuenta del origen humano de la actividad matemática y de la relatividad socioepistémica de los significados. Este giro antropológico y pragmatista sobre el conocimiento matemático se dio sin perder las ventajas de la *metáfora objetual*, esto es, asumiendo también planteamientos referenciales sobre el significado (Ullmann, 1962; Godino *et al.*, 2021).

1 Remitimos al lector al trabajo de Godino *et al.* (2020) para una síntesis más completa del EOS. Las publicaciones donde se desarrolla y aplica el EOS están disponibles en el repositorio web, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

Desde sus comienzos, la motivación del EOS ha sido la necesidad de clarificar y articular nociones de otros marcos teóricos, inicialmente las usadas en el seno de la didáctica francesa, con el objetivo de compatibilizar las concepciones epistemológicas y cognitivas. Para tal fin se introdujo la idea de *práctica matemática* en los siguientes términos: "...es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). En esta definición se asume que las prácticas (operativas y discursivas) pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. A su vez, una institución está constituida por los individuos involucrados en una misma clase de situaciones problemáticas. Ello conlleva la realización de unas *prácticas sociales* que suelen tener rasgos particulares y son generalmente condicionadas por las reglas, modos de funcionamiento e instrumentos disponibles en la institución. La noción de práctica matemática está en la base, tanto del modelo epistemológico como del cognitivo; en su versión epistémica, es una acción intencional: tiene una finalidad compartida en el seno de una comunidad y, por tanto, está normada mediante convenciones, hábitos o reglas. Pero el objeto matemático (conceptos y proposiciones, procedimientos, argumentos) permanece en la escena, ya que en la praxis intervienen objetos y estos, a su vez, emergen de una reciprocidad dialéctica constituyente (Font *et al.*, 2013).

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes dependen de los contextos de uso, de las instituciones en que tienen lugar las actividades y de los sujetos implicados en las mismas (es decir, se aplica la metáfora de los juegos de lenguaje y formas de vida de Wittgenstein, 1953). El aprendizaje de un objeto por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales del primero por parte del segundo; y se produce mediante la negociación, el diálogo y el acoplamiento progresivo de significados. En el EOS, el significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica (relaciones entre una expresión y un contenido) y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo o intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, notación, concepto, etc.). El sentido se interpreta como un significado parcial, es decir, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

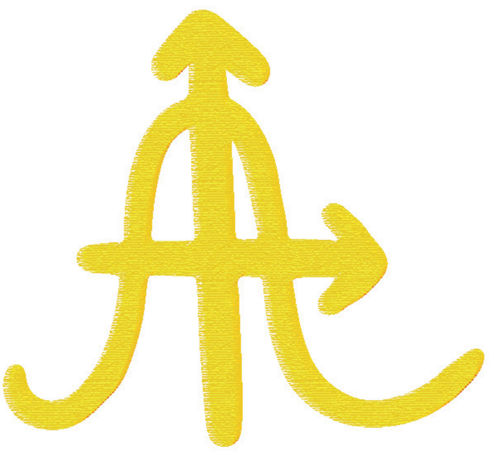
En trabajos más recientes, el modelo ontosemiótico del conocimiento matemático se ha ampliado con otros supuestos y herramientas teóricas; en particular, la noción de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), la cual permite abordar cuestiones de tipo instruccional; por ejemplo, qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos formativos que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos.

La dimensión normativa (Godino *et al.*, 2009) e idoneidad didáctica (Godino, 2013) permiten abordar nuevas preguntas y posibilitan la reflexión metadidáctica:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?
- ¿En qué medida se puede valorar como idóneo un proceso educativo-instruccional en unas circunstancias dadas y qué cambios se podrían introducir para mejorar dicha idoneidad?

Desde el punto de vista metodológico, el EOS tiene en cuenta las cuatro fases propias de las investigaciones orientadas al diseño educativo: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. Cada una de ellas tiene en cuenta las siguientes dimensiones:

- *Epistémica y ecológica*. Se determinan los significados académicos puestos en juego en cada una de las fases del proceso; son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso instruccional.
- *Cognitiva y afectiva*. Se describen los significados personales en los distintos momentos del proceso en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos de los estudiantes. Además, se analiza la sensibilidad del desarrollo a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al paso de estudio seguido.
- *Interaccional y mediacional*. Se analizan los patrones de interacción y su secuencia orientada a la fijación y negociación de significados entre el profesor y los estudiantes. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.



En el sistema teórico del EOS también se ha desarrollado la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013) para el análisis y valoración de los procesos educativos-instruccionales desde el punto de vista de la optimización de los mismos, dado que el fin último de la investigación didáctica debe ser, además de comprender dichos procesos, la mejora de los aprendizajes.

Teoría socioepistemológica de la matemática educativa

La TSME "se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional" (Cantoral *et al.*, p. 93). El origen de este marco teórico está en los trabajos de Cantoral, Farfán y otros expertos del grupo de investigación de la sección de educación superior del departamento de matemática educativa del CINVESTAV (IPN, México), quienes de manera especial han centrado sus trabajos en el área del análisis matemático.

Se considera como una necesidad básica para la investigación en matemática educativa el adoptar una "aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 1998, p. 355). La TSME plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo social, histórica y culturalmente situado, y lo problematiza a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. Además, se interesa por la discusión y planteamiento de propuestas de enseñanza, colocando la prioridad sobre el qué enseñar (la naturaleza de las propias matemáticas) "y no sólo, como ha sido habitual en las investigaciones educativas, sobre el cómo enseñar" (Cantoral *et al.*, 1998, p. 367). Se asume que, para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, es preciso acudir a un examen minucioso del saber (sea popular, técnico o culto), a su problematización, concordando, por tanto, con las aproximaciones epistemológicas a la didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998):

> De este modo, la Socioepistemología se caracteriza por ser una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional que toma en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que

> nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. (Cantoral *et al.*, 2014, p. 98)

En la TSME, se propone no sólo una visión nueva y ampliada de la epistemología que resalta la relatividad socioepistémica de los significados de los objetos matemáticos, sino además una manera sistémica de afrontar el estudio de las interacciones entre esta visión de las matemáticas con sus dimensiones cognitiva e instruccional.

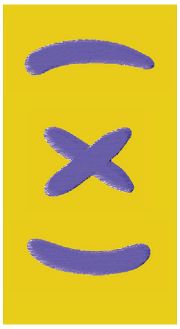
Principios de la TSME

La noción central de este marco teórico es la de *práctica social*; además, se asumen cuatro principios:

1. *Principio normativo de la práctica social*. Son las generadoras, la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento; "La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la práctica ejecutada), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la orientación de la práctica)" (Cantoral *et al.*, 2014, p. 100). Como ejemplo de tales prácticas sociales se cita la de predicción: la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad.

2. *Principio de la racionalidad contextualizada*. La racionalidad con la que se actúa depende del contexto del individuo. El escenario sociocultural en el que se conduce el sujeto influye en las conductas, pero también en la manera de obrar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita.

3. *Principio del relativismo epistemológico*. Como contraposición al absolutismo epistemológico, que opta por la asunción de universales o verdades únicas, la TSEM concibe que el saber es, de hecho, una multitud de verdades relativas:



> Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo (contextual), y particularmente la Socioepistemología, acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean "erradas" existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado, para de allí, desarrollar el pensamiento matemático y construir conocimiento. (o. c., p. 102)

4. *Principio de resignificación progresiva (o apropiación situada).* Se asume que el conocimiento matemático adopta diversos significados según la historia, los contextos y las intenciones con las que se usa. Con la resignificación se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.

Con relación a la noción de significado de los objetos matemáticos se acoge una posición pragmatista, como se puede ver en la siguiente cita:

> Por tanto, podemos asegurar que la Socioepistemología estudia la vida de los objetos matemáticos al seno de la vida social y, en consecuencia, el significado dejará de ser visto como un atributo del objeto, y empezará a considerarse como un derivado de su valor de uso. El significado deviene de este modo del uso situado que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales. (Cantoral *et al.*, 2015, p. 16)

En síntesis, una vez que se usa un conocimiento —es decir, se consolida como un saber— su validez será relativa a un entorno, ya que de él emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva).

En la TSME se ha introducido la noción de *discurso Matemático Escolar* (dME) para designar una manera tradicional de entender la matemática escolar como un sistema de razón estructurado lógicamente o como un lenguaje formal y estructuralista. El dME supone que los estudiantes entienden ideas complejas sólo con mostrarles su definición formal en términos de conceptos precedentes, y que comprenden un resultado al

PädiUAQ | vol. 6 núm. 11 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

presentarles su demostración y, que el conocimiento resultante les permitirá aplicar las matemáticas a muy diversas situaciones de sus vidas en un futuro. Un objetivo central de las investigaciones basadas en la TSME es proponer cambios en esta visión tradicional del dME hacia la perspectiva de *construcción social del conocimiento*:

> En nuestra opinión, el Rediseño del discurso Matemático Escolar es el reto mayor del cambio educativo, ¿cómo organizar el conocimiento escolar con base en la realidad de quien aprende sin abandonar al contenido de las Matemáticas?, ¿cómo esta organización puede ser parte de la profesionalización docente?, y ¿qué papel juega la vida cotidiana en estos procesos? Estas preguntas fueron configurando al programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa. (Cantoral *et al.*, 2015, p. 7)

> Se concede una importancia esencial a las *situaciones-problemas*, las cuales son consideradas como la "razón de ser" de los objetos matemáticos. Por ejemplo, en el caso del *pensamiento variacional* (o funcional), la situación-problema es la de predicción de una cantidad de magnitud en función de otra. La solución de esta clase de problemas moviliza un sistema de prácticas en distintos tipos de lenguajes (gráfico, algebraico, numérico, etc.). Por otra parte, "El objeto matemático binomio de Newton se presenta como entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una situación que precisa de la predicción" (Cantoral *et al.*, 1998, p. 362)

EJEMPLOS DE DOS INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL MARCO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

En esta sección describimos brevemente dos ejemplos de aplicación para mostrar el sentido y uso que se hace en la Socioepistemología de los supuestos y nociones teóricas mencionadas. Se trata del trabajo de Cantoral y Farfán (2004) sobre la sensibilidad a la contradicción de estudiantes universitarios ante la definición del logaritmo de los números negativos y el estudio de Buendía y Cordero (2005) acerca de la noción de periodicidad de funciones.

Estudio sobre los logaritmos de los números negativos

El problema didáctico

En este artículo, Cantoral y Farfán (2004) describen una investigación relativa al tratamiento de la contradicción en matemáticas por parte de estudiantes universitarios cuando son enfrentados a las cuestiones: ¿Qué responderías a un alumno que pregunta a qué será igual el logaritmo de un número negativo? ¿El logaritmo sólo se define para números positivos?

El trabajo experimental está basado en un estudio teórico previo de tipo histórico en que examina los debates entre Leibniz y Bernoulli a propósito de la definición del logaritmo de los números negativos. A comienzos del siglo XVIII los logaritmos de los números positivos estaban definidos de manera satisfactoria y las reglas de las operaciones con logaritmos habían sido bien formuladas. Sin embargo, sobre los números negativos había aún una concepción incompleta. Leibniz refuta la existencia del logaritmo de los números negativos con el argumento: "Si log(–1) existiera sería igual a la mitad de log (√-1), conclusión que para mí se presenta como absurda". Para dar una respuesta a la tesis de Leibniz, Bernoulli propuso una ampliación de los números negativos basada en razones de simetría: "como *dx/x = –dx/(–x)*, mediante integración se obtiene que *log (x) = log (–x)*", argumento que implica que la definición de los logaritmos de los números negativos prescinde de los números complejos.

El debate entre Euler y Bernoulli puso en evidencia una serie de contradicciones que condujeron a replantear y extender la idea de función, aceptando las funciones multiformes. Mientras que Euler se orienta a la creación de nuevas herramientas teóricas, Bernoulli defiende la necesidad de conservar el cuerpo teórico clásico, según el cual los números reales son el soporte de cualquier extensión teórica. "Comienza de este modo la construcción social de la variable compleja. Fueron necesarios casi trescientos años para que los complejos fueran finalmente aceptados (primero como números, después como variables)" (Cantoral *et al.*, 2004, p. 141).

Bernoulli sostuvo correspondencia tanto con Leibniz como Euler sobre el tema de los logaritmos de los números negativos. La exploración de sus intercambios permite mostrar que los conceptos y procedimientos relativos a las definiciones matemáticas son el resultado de un largo proceso de interacción social en el cual una reflexión y una crítica profundas facultan la consolidación de un saber social culturalmente establecido (o. c., p. 143). Este tipo de análisis histórico del desarrollo de los objetos matemáticos, que busca los problemas originarios de donde provienen, así como los debates entre los miembros de la comunidad que construye los objetos es un rasgo característico del *enfoque socioepistemológico*. Se aporta, por tanto, una visión ampliada de la propia epistemología matemática, mostrando la génesis sociocultural de las matemáticas.

Pero el estudio histórico-epistemológico-sociocultural tiene una finalidad educativa. En el caso de la definición del logaritmo de los números negativos se han podido constatar las dificultades, obstáculos y el largo proceso en la construcción del conocimiento en la comunidad de profesionales matemáticos. "No debería, por tanto, asombrar que la aceptación de este universo de los nuevos números sea un verdadero problema para los estudiantes desde el punto de vista de su comprensión" (o. c., p. 141).

Cantoral y Farfán parten del estudio histórico como base para el diseño y desarrollo de una investigación en el marco de la ingeniería didáctica (Artigue, 1992). Conciben una secuencia didáctica en la que los estudiantes y los profesores enfrentan situaciones que requieren de la ampliación de la función logarítmica a los números negativos y, por lo tanto, se encuentran por tanto obligados a aceptar los números y las variables complejas. El problema abordado en la investigación se refiere a la descripción de la sensibilidad de los estudiantes universitarios ante resultados matemáticos contradictorios y de sus diferentes maneras de argumentar ante este tipo de circunstancias. La situación que se plantea a los estudiantes es más bien de naturaleza metamatemática: el edificio matemático tiene que ser consistente, libre de contradicciones. ¿Son conscientes los estudiantes de este rasgo esencial de las matemáticas? Ante una afirmación contradictoria, ¿cómo la abordan? ¿Qué papel desempeñan la cultura matemática escolar y las intervenciones del profesor en la superación de las contradicciones?

Síntesis del diseño y desarrollo de la experiencia

El proceso de estudio organizado se apoya en la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; 2002): "Con este fin, hemos elaborado una serie de secuencias de aprendizaje conteniendo varias situaciones de acción, de formulación y de validación cuya activación depende en principio de las respuestas aportadas por los participantes" (o. c., p.141). Con esta ingeniería didáctica se trata de "observar y analizar la manera en la que los estudiantes piensan, argumentan, negocian, discuten y construyen sus conocimientos" (o. c., p. 142). Pero principalmente el estudio se orienta a identificar los aspectos relacionados con la sensibilidad a la contradicción y la búsqueda de la coherencia en el interior del aparato matemático.

Los participantes fueron doce estudiantes de edades entre 18 y 26 años de una institución pública mexicana, su profesor y dos especialistas en didáctica de la matemática. Ninguno de los pupilos tenía conocimientos previos sobre variables complejas. Se les propuso una secuencia de actividades a partir de la siguiente cuestión inicial:

> *¿Qué responderías a un alumno que pregunta a qué será igual el logaritmo de un número negativo? ¿El logaritmo sólo se define para números positivos?*

A esta siguen otras interrogantes en las que se sugieren posibles soluciones extraídas del debate histórico descrito previamente. En particular se les propone la solución $\ln(-x) = \ln(x)$,

> *¿Nuestro alumno estaría satisfecho con esta respuesta? ¿Y tú? Razona tu respuesta.*

Esta primera serie de preguntas fue respondida por escrito en una sesión de una hora. Una semana más tarde se propuso una segunda secuencia de actividades. Se confronta a los estudiantes ante los siguientes resultados obtenidos con deducciones correctas; por una parte $\ln(-1) = 0$, y por otra $\ln(-1) = \pi i$.

> *¿Esta igualdad constituye una contradicción? Explica y argumenta.*

Para tener una visión más clara de las respuestas de los sujetos se organizó además un diálogo de cada estudiante con su profesor en aquellos casos en que las respuestas aparecían confusas o requerían una discusión más profunda. Estas entrevistas se realizaron dos semanas después de la realización de las secuencias de actividades y fueron grabadas y transcritas. La interacción se apoyaba sobre la estructura de las actividades realizadas y sobre las respuestas dadas por el estudiante, dejándole un tiempo considerable para reflexionar. Algunos estudiantes reiteraron sus respuestas iniciales, mientras que otros modificaron su posición.

Resultados

El análisis de las respuestas de los estudiantes a la secuencia de situaciones planteadas y a las interacciones del profesor en las entrevistas individuales lleva a clasificarlos en dos grupos:

Un cierto número de sujetos acepta la idea de que si los logaritmos de números negativos existen es razonable pensar que sean en cierta manera "simétricos" respecto de los correspondientes a los números positivos. Al mismo tiempo sostienen que si se acepta una definición de ese tipo, entonces una parte de la teoría correspondiente deberá ser reconstruida con el fin de dar cuenta de igualdades del tipo $ax = y$, con $a > 0$ y $y < 0$. Esto supone que x no sea un número real. Ninguno de los estudiantes menciona, sin embargo, los números complejos.

La segunda categoría, más numerosa, rechaza sistemáticamente admitir la posibilidad de tratar los logaritmos de números negativos. Sus argumentos se basan en el hecho de que los logaritmos de números negativos son indefinidos, o que son inexistentes. Los discursos argumentan explicaciones similares a las que se dan en una clase: "No puede existir un número positivo que, al elevarlo a una potencia, dé un número negativo". O bien, parten de la definición que se encuentra frecuentemente en los libros, en las que se consideran a y b positivos para mostrar la imposibilidad de trabajar con negativos.

Conclusiones

La interpretación de los resultados de la investigación muestra de nuevo la contribución del enfoque socioepistemológico al ámbito de estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una conclusión del trabajo es que la sensibilidad a la contradicción de los estudiantes universitarios no emana completamente de la precisión con la cual se realizan los procedimientos y los razonamientos matemáticos. Se pone de manifiesto que también intervienen elementos propios del entorno escolar y del discurso matemático escolar.

El proceso mediante el cual se construye la aceptación de un nuevo resultado en la clase de matemáticas se basa parcialmente en la lógica interna de la deducción matemática; además:

> ...la aceptación o resistencia vienen más bien de la interacción de las relaciones de poder entre los participantes en este juego del saber. En ciertos casos, la resistencia a aceptar la extensión de Bernoulli obedece a otra forma de relación de poder que podría explicarse por el papel que juega el libro en la clase de matemáticas. (o. c., p.159)

Debido a que carecían de elementos teóricos más completos, la mayor parte de los estudiantes rechazó casi totalmente los argumentos matemáticos que defendían la validez de la extensión de la definición de los logaritmos a los números negativos. La insistencia del profesor fue insuficiente, al igual que la serie de deducciones matemáticas que podrían comprender. La inexistencia de este resultado en el corpus visible de los estudiantes nos hace comprender que el saber matemático escolar no se forma solamente mediante la deducción, ni constituye un sistema ordenado de proposiciones derivadas de principios, sino que también, y sobre todo, es la consecuencia de numerosos y complejos mecanismos de aceptación social.

El problema de cómo se aborda y aprecia la contradicción en el estudio de las matemáticas por parte del alumnado universitario es de naturaleza más bien metamatemática y metacognitiva; pero sin duda, de interés didáctico. Y ha puesto de manifiesto un fenómeno de tipo socioepistemológico: la influencia de la cultura escolar, conformada por los libros de texto y la capacidad retórica del profesor en las interacciones didácticas, puede ser un factor determinante en el aprendizaje matemático.

Interpretación desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico

El enfoque socioepistemológico en matemática educativa reclama una atención específica a la construcción social del conocimiento matemático, tanto en su dimensión institucional (desarrollo histórico-cultural), como personal (desarrollo del conocimiento individual en el seno de las instituciones educativas). En este segundo caso la descripción y explicación del desarrollo del conocimiento del sujeto tiene lugar en dos ámbitos complementarios: 1) Las interacciones sociales en la clase, que concuerdan con las investigaciones realizadas en el marco del interaccionismo simbólico en educación matemática (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000; Sierpinska y Lerman, 1996); 2) las interacciones entre los significados personales y los institucionales. Cada persona es miembro de una red de instituciones (vida cotidiana, clase de matemáticas, clase de ciencias experimentales, etc.), en cada una de las cuales existen formas específicas de razonar y validar el conocimiento. El sujeto tiene que aprender a discriminar los diversos significados según cada circunstancia, pero esto requiere un proceso formativo explícito.

El fenómeno metacognitivo descrito en esta investigación —las dificultades de estudiantes universitarios para reconocer y valorar las implicaciones epistémicas de obtener resultados contradictorios en matemáticas y de intuir posibles vías de solución— se debe explicar, al menos en parte, por la variedad de maneras de afrontar las contradicciones en los diversos contextos institucionales de los sujetos. Las conclusiones obtenidas por esta investigación concuerdan con las encontradas en el trabajo de Recio y Godino (2002) en el campo de la demostración matemática. En este trabajo se analizan los diversos significados de la demostración en distintos contextos institucionales (lógica y epistemología, vida cotidiana, clase de matemáticas y ciencias experimentales). La diversidad e interacción de estos significados en las personas, sujetos de dichas instituciones, se disponen como explicación de los conflictos y limitaciones en los esquemas de demostración manifestados por los estudiantes ante problemas sencillos que requieren una demostración deductiva.

En una primera fase, el EOS propone fijar la atención de la investigación en didáctica de las matemáticas en caracterizar los significados institucionales de referencia correspondientes al tipo de problemas matemáticos cuyo estudio se pretende abordar. Tales significados son entendidos como sistemas de prácticas y se concretan en una red de objetos emergentes. En la investigación de Cantoral y Farfán (2005) se plantea el problema matemático inicial: *¿Cómo definir los logaritmos de los números negativos teniendo en cuenta su definición para los positivos?* (Designemos este problema como PMLN, problema matemático del logaritmo negativo). El estudio histórico realizado permite describir la "construcción de los significados" para esta cuestión por los matemáticos que se ocuparon inicialmente de la misma (Leibniz, Bernoulli y Euler). En este proceso se deben respetar dos principios: la permanencia de las leyes formales previamente aceptadas y la ausencia de contradicciones. Aparece entonces una diatriba asociada: la ausencia de contradicción en el edificio matemático, que es de naturaleza metamatemática (PMM, problema metamatemático).

Cantoral y Farfán se centran en el estudio de los significados personales de los estudiantes acerca del PMM, en el caso particular de la extensión de la definición de logaritmo a los números negativos. Es irrelevante que los estudiantes "aprendan" cómo se hace la ampliación; la secuencia de actividades diseñadas y las interacciones entre profesor y estudiante no pretenden que los alumnos descubran la solución al PMLN, ni tampoco que el profesor se la explique (de hecho, se indica que los estudiantes en ningún momento recibieron esa información). La cuestión abordada es básicamente de naturaleza metacognitiva. ¿En qué medida los estudiantes son conscientes del principio de no contradicción en la construcción de las matemáticas? ¿Qué factores condicionan el grado de sensibilidad a la contradicción en matemáticas?

Desde el punto de vista del EOS los participantes son incapaces de resolver las contradicciones que se les plantean en la secuencia de tareas porque la solución está fuera de su zona de desarrollo cognitivo en un ambiente heurístico-constructivista. El paso a los números complejos pone en juego objetos y técnicas matemáticas complejas que requieren procesos de aprendizaje específicos. El marco implícito en que se ha diseñado la investigación es el de la Teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 2002) y la metodología asociada de la Ingeniería didáctica (Artigue, 1992). La atención a la complejidad ontosemiótica de los conocimientos matemáticos, metamatemáticos y metacognitivos que propone el EOS lleva a sugerir las limitaciones de las configuraciones adidácticas propuestas por la TSD para lograr el aprendizaje. El estudio del problema matemático de ampliación de los logaritmos a los números negativos, y del problema metamatemático de consistencia y ausencia de contradicción en matemáticas, requiere organizar procesos de escrutinio en los cuales las configuraciones dialógicas y magistrales (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Burgos y Wilhelmi, 2020) podrían desempeñar un papel protagónico en la mejora de la idoneidad didáctica de dichos procesos.

Estudio de la periodicidad de las funciones

Problema didáctico

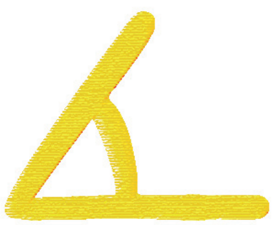
El foco de atención de este trabajo de Buendía y Cordero (2005) es el estudio de los fenómenos periódicos, incluyendo los aspectos culturales, históricos, institucionales y cognitivos que están relacionados con la periodicidad:

> El objetivo de la investigación es proponer una epistemología de lo que es periódico, cuyos elementos se extraen de las prácticas realizadas por los individuos cuando tratan aspectos de las conductas repetitivas de las gráficas de las funciones que representan movimientos. (o. c., p. 301)

Para ello se diseña una situación en la que la práctica social de la predicción se transforma en una línea de argumentación situacional que resignifica lo que es periódico. "El fin es mostrar los elementos que constituyen la socioepistemología de la periodicidad que estamos proponiendo" (o. c., p. 301).

Entre las cuestiones abordadas en esta investigación se indica que con frecuencia los estudiantes (y algunos profesores) carecen de marcos de referencia que les permitan resignificar su conocimiento matemático (con el término *resignificar* Buendía y Cordero se refieren a la discusión sobre el uso y forma de conocimiento en ciertas situaciones específicas, discusión que depende de la organización de los grupos humanos y de los tipos de situaciones y prácticas planteadas). Este dilema ocurre en particular con la periodicidad de funciones; hay una oposición entre la definición analítica de periodicidad y los comportamientos de naturaleza periódica asociada con los fenómenos: lo que es periódico se concibe como algo repetitivo, cualquiera que sea el tipo de repetición presente.

Se plantea la cuestión del significado de lo que es periódico como algo que viene condicionado por los contextos socioculturales y los campos de aplicación de dicha concepción. La noción formal de función periódica $f(x+p) = f(x)$ no refleja el significado de lo que es periódico. Además, los usos escolares de la periodicidad, limitados al estudio de algunas funciones como $y = sen\ (x)$, llevan a atribuir significados parciales restringidos. Aunque el concepto de periodicidad se trata generalmente en el currículo como una propiedad de ciertas clases de funciones periódicas, la definición suele dejarse aparte para prestar atención a los comportamientos de las gráficas de las funciones. Pero este constituye una característica en cierto modo ajena a la estructura matemática; sólo es un recurso para discutir ciertas propiedades matemáticas de las funciones y de sus gráficas. Sin embargo, los sujetos hacen referencia al comportamiento de las gráficas ante ciertas actividades matemáticas que no lo ameritan. Esto indica la importancia de tener en cuenta, además de las respuestas de los estudiantes como una fuente de información con relación a la construcción del conocimiento matemático, las actividades que realizan para tal fin. Esto justifica el énfasis que damos a las prácticas sociales con relación al conocimiento matemático.



Las prácticas sociales como una fuente de reconstrucción de significados

Se describe el papel esencial que la socioepistemología atribuye a la práctica social como fuente para la reconstrucción de significados. "La epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social en la que el conocimiento se construye" (o. c., p. 305). En la investigación realizada se tienen en cuenta prácticas relacionadas con la construcción de los aspectos periódicos de las funciones, lo que quiere decir que dan importancia al desarrollo y uso de herramientas implicadas en la construcción del conocimiento, así como al papel de las personas y el contexto social en el que se desempeñan. De este modo, la epistemología ofrece explicaciones basadas en las características particulares de las personas que hacen matemáticas en contextos socialmente organizados.

Este punto de vista resalta una oposición entre las naturalezas y funciones del trabajo matemático y la matemática escolar; sin embargo, esta última necesita interpretar y reorganizar a la primera mediante la reconstrucción de los significados de los procesos y conceptos en los diferentes niveles escolares. El resultado de esta reconstrucción de significados es que las categorías del conocimiento matemático son extraídas directamente de las prácticas sociales compartidas. Asumimos, por tanto, que estos precedimientos son la base de la reorganización del trabajo matemático y el rediseño del discurso matemático escolar.

Estudio experimental

La TSME se interesa por la dimensión cognitiva implicada en los estudios didácticos. De hecho, la parte experimental de esta investigación se centra en la descripción de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario que parte de una colección de ocho gráficas de funciones; estas describen relaciones espacio–tiempo con algún aspecto repetitivo en movimientos de objetos. Y tres de estos casos corresponden a funciones periódicas. Se dan sucesivamente las siguientes consignas a los estudiantes:

1. *Describe el tipo de movimiento que se representa en cada gráfico y después clasifica las gráficas según cualquier criterio de semejanza o diferencia*. El fin de esta consigna es mostrar que los estudiantes consideran la periodicidad (en el sentido general de repetición) como menos relevante en la clasificación de las funciones que otros criterios tales como continuidad/discontinuidad del gráfico.

2. *Predice la posición del objeto móvil en cada gráfico después de 231 segundos y clasifica las gráficas*. El fin es que los estudiantes se den cuenta de que puede haber diferentes maneras de repetición en un gráfico.

3. *¿Cuál de los gráficos es periódico?* El propósito es que los estudiantes revisen su concepción de periodicidad como una propiedad que caracteriza un cierto tipo de repetición.

Se pide a los alumnos que comparen sus clasificaciones de las gráficas antes y después de la actividad de predicción. Se trata de ver el efecto que tiene en la identificación de la periodicidad el hecho de haberles instado de antemano a predecir el comportamiento de la gráfica.

Interpretación desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico

El hilo argumental del trabajo de Buendía y Cordero es que los estudiantes no movilizan la aplicación de la definición formal (o analítica) de la periodicidad de una función de manera inmediata en situaciones pertinentes. Y con frecuencia malinterpretan que una función es periódica cuando aparece algún tipo de repetición en la gráfica. A pesar de la simplicidad de la definición $f(x + p) = f(x)$, la interpretación y aplicación de esta regla en casos concretos puede ser tardía.

La descripción del problema esbozado en la investigación reconoce la dualidad personal–institucional para los significados de los objetos matemáticos que propone el EOS. Los estudiantes construyen conceptos personales sobre la periodicidad de funciones como consecuencia de los sistemas de prácticas compartidas en las clases de matemáticas, los cuales configuran e implementan significados académcios específicos, que pueden diferir de los alcances de referencia en una institución matemática profesional. El estudio socioepistemológico realizado sobre el origen de la periodicidad de funciones en matemáticas ha permitido a los autores diseñar una ingeniería didáctica que puede ayudar a resolver esta contrariedad. La directriz es asociar la periodicidad con la *práctica de la predicción* en una secuencia de gráficas de funciones que relacionan el espacio y el tiempo en un movimiento. La actividad de predicción obliga a movilizar la regla de la periodicidad, lo que facilita discriminar los movimientos periódicos de los que no lo son.

La TSME incluye como una primera etapa en el proceso de investigación didáctica el análisis *a priori* del objeto de enseñanza, centrado en la búsqueda de los fenómenos extra o intramatemáticos que constituyen la razón de ser de tales objetos. Para ello, la historia resulta un recurso importante como fuente de inspiración en la selección de tales fenómenos y el diseño de actividades instruccionales. Por otra parte, el EOS asume el discurso relativo a las prácticas sociales, aunque lo expresa en términos diferentes. El significado de los objetos matemáticos se interpreta en términos pragmáticos: como sistemas de prácticas asociadas a campos de problemas, relativos a los distintos contextos socioculturales, de uso y los juegos de lenguaje en que se abordan. En ambos modelos teóricos se asume la relatividad socioepistémica de los significados. La institución se concibe como una colectividad de personas que comparten problemas, prácticas y herramientas. La comunidad de profesionales de la matemática es una más de tales instituciones implicadas en la creación, uso y difusión de las matemáticas, y en su seno se configuran representaciones específicas.

En el trabajo de Buendía y Cordero encontramos un uso del término *Socioepistemología*, no para referirse a un enfoque teórico ni una manera de concebir la naturaleza de la actividad matemática, sino como un sustantivo que designa un objeto teórico nuevo, asociado a un concepto matemático específico (periodicidad de una función), y que se compone de diversos elementos. Vemos aquí una gran similitud con el concepto introducido en el EOS como sistema de prácticas operativas, regulativas y argumentativas, que designamos *significado del objeto*. Dichas prácticas están asociadas a un cierto tipo de situaciones-problemas y son relativas a un contexto institucional.

Los autores utilizan con frecuencia el término *resignificar* con un sentido que parece concordar con los postulados pragmáticos asumidos en el EOS para los significados de los objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista institucional como el personal. Como se dijo con anterioridad, un mismo objeto matemático puede tener diversos significados dependiendo de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje donde participa.

CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES

Consideramos que la TSME se puede incluir dentro del programa de investigación en didáctica de las matemáticas que Gascón (1998) describe como el *programa epistemológico*: el punto de partida está en la construcción de modelos epistemológicos del propio saber matemático que se pretende enseñar, y no en el cómo enseñar o en cómo aprenden los estudiantes. Pero al igual que el EOS, procura huir de posiciones extremas, como el epistemologismo (reducir la problemática didáctica a la epistemología) y el psicologismo (centrarse de manera exclusiva en el estudio de la mente del sujeto que aprende). Tanto TSME como EOS comparten el fin de incidir en el sistema educativo con propuestas de intervención didáctica fundamentadas:

> Se perfila de este modo, una nueva línea de investigación que toma como objeto de estudio a la base socioepistemológica de los saberes matemáticos que incluyen también las intuiciones primarias del alumno y que tiene por objetivo último el rediseño del discurso matemático escolar. (Cantoral *et al.*, 1998, p. 367)

Tanto la TSME como el EOS asumen supuestos similares acerca del origen humano de los objetos matemáticos, y por tanto, el rechazo de posiciones platónicas. Los objetos matemáticos emergen de sistemas de prácticas sociales ligadas a campos de situaciones-problemas. De este modo, la indagación de los distintos momentos históricos y contextos institucionales en que ocurre esta emergencia es una estrategia metodológica compartida y la base para la elaboración de propuestas de intervención en los currículos y en las clases de matemáticas. Los dos modelos teóricos estudiados adoptan también un punto de vista sistémico para las cuestiones de investigación en matemática educativa. No obstante, partir de la elaboración de modelos socioepistemológicos de los objetos matemáticos (sistemas de prácticas relativos a marcos institucionales, sociales o culturales dados) no implica el olvido de las restantes dimensiones del estudio matemático: la cognitiva y la instruccional.

En el caso del EOS se ha optado por consolidar las dimensiones epistemológica y sociocultural en una visión ampliada de la epistemología. Para el EOS, como ocurre con la teoría antropológica de Chevallard (1992; 1999), la epistemología tiene que ser entendida en términos socioepistemológicos, aunque es conveniente, en términos antropológicos:

> La ‘antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de

estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 846)

Para una adecuada y fructífera articulación entre el EOS y la TSME es necesario analizar el significado atribuido en ambos marcos a la noción de práctica y de práctica social, así como el papel atribuido a las situaciones-problemas. El enfoque socioepistemológico considera la *predicción* como una práctica social:

> Hemos elegido la idea de comportamiento de las funciones como el eje alrededor del cual construir la relación entre práctica social y periodicidad, y la predicción como la práctica social asociada. De manera más específica, estudiaremos la relación entre predicción y periodicidad en el contexto de las gráficas de las funciones, esto es, entre el reconocimiento de la periodicidad en el gráfico de un movimiento y la acción de hacer enunciados sobre lo que este movimiento será en un futuro estado, dada cierta información actual. (Buendía *et al.*, 2005, p. 306)

Deducimos de esta cita que una práctica social, según la TSME, viene a ser una *acción-situada* socialmente compartida, y por tanto normada por convenciones o hábitos. Es cierto que las comunidades humanas usualmente *hacen* predicciones del valor de cantidades desconocidas en un momento dado en función de otras cantidades de magnitudes relacionadas (¿cuál es el espacio que recorrerá un móvil que se desplaza a 60 km/h después de transcurridas 2 horas?). En la medida en que la *acción* es compartida en el seno de las sociedades o comunidades de prácticas, podemos decir que se trata de una práctica social. El EOS propone analizar la acción de predecir distinguiendo entre la situación-problema de predicción y las técnicas realizadas para resolver esa tarea. De esta manera, distintos grupos sociales o marcos institucionales pueden compartir un tipo de problemas, pero las prácticas (operativas y discursivas), y por tanto los objetos emergentes de tales prácticas (procedimientos, recursos lingüísticos, reglas y justificaciones), pueden diferir. Las sociedades comparten ciertas necesidades y maneras de afrontarlas, pero estas prácticas (acciones situadas e intencionales) a menudo son divergentes.

En el EOS, para hablar de *prácticas sociales* es necesario especificar el tipo de situación-problema que se aborda y el marco institucional específico donde se realiza, ya que tales prácticas son dependientes de dichos factores (consideramos preferible hablar en términos de *sistemas de prácticas sociales o personales* y no en singular). Además, hemos ampliado la relatividad socioepistémica del significado de los objetos matemáticos en la dirección de los contextos de uso internos a la propia matemática y a los juegos de lenguaje (Wilhelmi *et al.*, 2007). Para el estudio de las *socioepistemologías* relativas a un objeto matemático aportamos una tipología de objetos emergentes de los sistemas de prácticas articulados en configuraciones epistémicas.

Consideramos que el EOS puede aportar a la TSME algunas valiosas herramientas teóricas para el estudio de la dimensión cognitiva, o sea, los significados personales de los alumnos: objetos y sistemas de prácticas personales, dualidades cognitivas y conflictos semióticos. Esto permite un nivel de análisis microscópico con posibilidades descriptivas y explicativas nuevas. A su vez, para la dimensión instruccional, la TSME parece asumir en gran medida la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; 2002) como modelo teórico de referencia y la ingeniería didáctica (Artigue, 1992) como metodología de investigación de propuestas de intervención en el aula. Nuestra teoría de las configuraciones didácticas y los criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemático (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino *et al.* 2014) pueden constituir herramientas complementarias.

El EOS y la TSME están estrechamente relacionados con el constructivismo social (Ernest, 1998), el interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000; Sierpinska y Lerman, 1996), la antropología del conocimiento de Chevallard (1992; 1999) y con la fenomenología didáctica de Freudenthal (1982). Llegamos a esta conclusión estudiando el trabajo de Buendía y Cordero (2005), donde el análisis socioepistemológico de la periodicidad se centra en mostrar los problemas prácticos (fenomenologías externas) que históricamente dieron origen a esa noción[2]. El tratamiento formal en el campo del análisis matemático de la periodicidad estuvo fuertemente influenciado por el interés de los matemáticos del siglo XVIII en la descripción analítica del movimiento. Esto motivó el desarrollo de prácticas de predicción con relación a movimientos para los cuales la periodicidad es una característica esencial (movimientos repetitivos). De igual modo, Cantoral (2001) detectó una relación dialéctica de la predicción en fenómenos físicos de cambio y variación con lo que es analítico en la matemática del movimiento.

REFLEXIONES FINALES

Desde nuestro punto de vista, los dos marcos teóricos descritos en este trabajo tienen un origen común: la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau. En ambos casos se considera necesario adoptar una visión nueva sobre la epistemología de las matemáticas, concediendo esencial importancia a la actividad de las personas comprometidas en la solución de problemas matemáticos. Esta posición es compartida también por la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999), pero, a pesar del giro radical que supuso en la manera de ver las matemáticas, el modelo epistemológico de la TSD —centrado en la modelación del saber y el conocimiento matemático en términos de situaciones— resulta insuficiente al dejar implícitos aspectos esenciales, principalmente la naturaleza y origen del saber sabio y los componentes del discurso matemático. La TAD propone un modelo epistemológico, sobre bases antropológicas, en el que las matemáticas se conciben en términos de organizaciones praxeológicas formadas por la cuaterna tareas, técnicas, tecnologías y teorías. De esta manera, el modelo epistemológico de las situaciones didácticas se enriquece al hacer explícitos componentes para los saberes y conocimientos matemáticos.

La TSME atribuye el origen de las matemáticas a la capacidad resolutiva del hombre, pero además considera fundamental explicitar tanto el componente sociocultural en la construcción del conocimiento matemático como el papel que desempeñan las herramientas utilizadas y los vastos significados atribuibles a los objetos matemáticos. El modelo epistemológico propuesto por el EOS concuerda, en líneas generales, con los correspondientes a la TAD y la TSME. Comparte los supuestos antropológicos sobre la actividad matemática y sobre los procesos y productos socioculturales emergentes. Incorpora, no obstante, en su concepción de las matemáticas, de manera explícita, los elementos básicos del giro lingüístico introducido por Wittgenstein en la filosofía de las matemáticas y los aportes de la semiótica para describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación matemática.

El giro antropológico y sociocultural en la manera de concebir las matemáticas no debería suponer, un olvido de la dimensión cognitiva, esto es, del papel del sujeto que construye y aprende matemáticas. Por esta razón, el EOS introduce, junto con el institucional, un modelo de cognición individual construido sobre las mismas bases pragmáticas y antropológicas. En este sentido, consideramos que el EOS puede ser un desarrollo coherente de los modelos teóricos mencionados, en los que la dimensión cognitiva queda en un segundo plano, o modelada sobre bases teóricas dispares. Asimismo, la herramienta de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del EOS, al permitir un análisis microscópico de los procedimientos de resolución de problemas, ayuda a reconocer la complejidad ontosemiótica de los mismos, lo cual lleva a matizar el papel de las situaciones adidácticas en los mecanismos de aprendizaje matemático (Godino *et al.*, 2020).

El análisis de la TSME realizado en este artículo deberá ser ampliado en otros trabajos en los cuales se aborde con más profundidad las concordancias y complementariedades con otras teorías socioculturales, como la etnomatemática, iniciada en Godino (2019). Se pueden indagar las relaciones con los principios de la educación matemática realista (Gravemeijer, 2020; Van Den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014;), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991), que pone también un énfasis especial en las conexiones de las matemáticas con sus aplicaciones en los diversos contextos sociales y tecnológicos. Del mismo modo, se requiere estudiar los lazos, tanto de la TSME como del EOS con la teoría histórico-cultural de la actividad (Engeström, 2015; Roth y Radford, 2011) y la teoría de la objetivación de Radford (2013; 2014).

2 Un análisis similar se puede hacer del artículo Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez (2018) sobre modelización matemática.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2,3), 241-286. https://revue-rdm.com/2005/epistemologie-et-didactique/

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 299-333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* Springer.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2–3), 137–168. https://revue-rdm.com/2004/la-sensibilite-a-la-contradiction/

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810.

Cantoral, R., Reyes Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R., Moreno Durazo, A. y Caballero Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. ZDM, 50, 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73-112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Lawrence Erlbaum.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103-128.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Peter Lang.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics.* SUNY.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista* EMA, *7*(2), 127-170.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Kluwer.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-33. https://revue-rdm.com/1998/evolucion-de-la-didactica-de-las/

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3), 237-284. https://revue-rdm.com/2002/un-enfoque-ontologico-y-semiotico/

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D. (2019). Concordancias y complementariedades de las teorías socioculturales en educación matemática. *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 113–139.

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática* (REVIEM), *2*(2), 1-24 - e202201.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y/

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(1), 147-164. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font. V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88. https://revue-rdm.com/2006/analisis-de-procesos-de/

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200. https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70-92.

Gravemeijer, K. (2020). A Socio-constructivist elaboration of realistic mathematics education. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics*, ICME-13 Monographs, (pp. 217-233). Springer.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. 1931-1935. Harvard University Press.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44. https://doi.org/10. 4471/redim at.2013.19

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop *et al.* (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Kluwer.

Sriraman, B. y English, L. (Eds) (2010). *Theories of mathematics* *education. Seeking new frontiers.* Springer.

Ullmann, S. (1962/1978). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Aguilar.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2,3), 133-170. https://revue-rdm.com/2005/la-theorie-des-champs-conceptuels/

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *27*(1), 77 – 120. https://revue-rdm.com/2007/configuraciones-epistemicas/

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Crítica.

Recibido el 28 de marzo de 2022, aceptado el 19 de septiembre de 2022.

ESTUDIO DEL CURRÍCULO CHILENO EN TORNO A LA DIVISIÓN COMO ISOMORFISMO DE MEDIDA: EL CASO 5° BÁSICO

STUDY OF THE CHILEAN CURRICULUM AROUND DIVISION AS AN ISOMORPHISM OF MEASUREMENT: THE 5TH BASIC CASE

Yanet Riveras León
Universidad de Los Lagos, Chile
yriverasleon@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8877-8276

Maximina Márquez Torres
Universidad de Los Lagos, Chile
maximina.marquez@ulagos.cl
https://orcid.org/0000-0002-0019-8809

2

RESUMEN

El presente trabajo considera analizar la perspectiva que enTabla el currículo chileno en torno a la división y justificar la importancia de un estudio sobre los temas que engloba este concepto en enseñanza básica. Debido a la relevancia que adquirió este material para el profesorado al momento de impartir sus clases, este estudio se centra en 5° básico. Para llevarlo a cabo, se contemplaron dos marcos teóricos: los problemas de estructura multiplicativa (isomorfismo de medidas) planteados por Vergnaud (1997) y la verificación de los significados pretendido y holístico de referencias publicados en el enfoque ontosemiótico. A continuación, se dará cuenta del análisis presentado por dicho planteamiento. Esta investigación es de corte cualitativo, descriptivo e interpretativo. Como conclusión se obtuvo que la dupla curricular enfoca el trabajo en el aprendizaje de la búsqueda del algoritmo de la división y deja de lado aquellos objetos matemáticos que permiten la articulación entre configuraciones.

Busca evidenciar y determinar los significados pretendidos por el currículo chileno sobre la división como isomorfismo a través de la teoría de los campos conceptuales, la investigación con referencia en el EOS y la instrucción matemática.

Palabras clave: currículo chileno, división, enfoque ontosemiótico, isomorfismo de medidas.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the perspective around the division promoted by the Chilean curriculum and justify the importance of conducting an analysis of the issues of this concept in basic education. Due to the relevance that this material acquires for teachers at the time of their classes, this time we will focus this work on 5th grade. To carry out this analysis we have relied on two theoretical frameworks, on the one hand, we have the problems of multiplicative structure (isomorphism of mesasures) proposed by Vernaud (1997) and to verify what are the intended and holistic meaning of references proposed in the Ontosemiotic Approach. On this occasion, we will give an account of the analysis presented by the Ontosemiotic Approach. This research is qualitative, descriptive and interpretative. As main conclusions, the curricular pair focuses the work on learning the search for the division algorithm, leaving aside those mathematical objects that allow the articulation between configurations.

Keywords: chilean curriculum, division, measurement isomorphism, Ontosemiotic Approach.

INTRODUCCIÓN

La división es considerada una de las operaciones más importantes dentro del currículum chileno, pues permite solucionar de manera rápida y eficiente los problemas cotidianos que se pueden resolver a través de la distribución equitativa de objetos, identificando cuando existen sobrantes tras una repartición. Se procura que los estudiantes se familiaricen a temprana edad con acciones de reparto en cantidades iguales y busquen distintos mecanismos que les ayuden a encontrar la respuesta en incógnitas donde la división tiene resto, también denominada división inexacta. Además, se pretende que solucionen dichas situaciones apoyados en concreto del material para posteriormente cambiarlo al registro pictórico y simbólico (método COPISI), y finalmente alcanzar el cálculo del algoritmo de la operación (Gutiérrez, Morales y Valdés, 2018).

Es necesario indagar sobre la enseñanza y aprendizaje de esta operacion matemática, ya que algunas investigaciones reportan que los alumnos presentan dificultades (Saíz, 1994; Ivars y Fernández, 2016; Bustamante y Vaca, 2014; Aravena y Morales, 2019) al momento de interpretar el resto en un problema, o al asociar dicho enunciado del problema con la división que deben llevar a cabo para resolverlo. La solución de problemas con este tipo de operación matemática se presentan en la mayoría de las actividades del currículo de educación básica en Chile, reafirmando su manifestación a lo largo de la escolaridad.

Cabe mencionar que, este trabajo es una mínima parte de otras investigaciones cuyo objetivo era “evaluar los significados de la noción de división que considera el currículo chileno, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto a la luz del isomorfismo de medida expuestos por Vergnaud (1997) y los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico” (Riveras y Márquez, 2021). Cuando los estudiantes realizan una práctica matemática, se moviliza un conjunto formado por situaciones, problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, entre otros (Font, Godino y Gallardo, 2013); por lo tanto, es importante identificar cuáles promueve el currículo chileno. De esta manera, se busca evidenciar y determinar los significados pretendidos por los libros de texto chilenos sobre la división como isomorfismo de medida en el caso de 5° básico.

ANTECEDENTES

Marco Teórico

Para el desarrollo de esta investigación se contemplaron dos marcos teóricos: la teoría de los campos conceptuales expuestos por Vergnaud (1997) —enfocada en los problemas de isomorfismo de medida de división-medida y división-partitiva— y la investigación con los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos en el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. La teoría de los campos conceptuales permitió centrar la investigación en las actividades cognitivas del estudiante.

Vergnaud (1997) define los problemas de estructuras multiplicativas como un conjunto de situaciones en las que es necesaria una multiplicación, división o combinarlas además de un análisis cognitivo para resolverlas. También considera que en ello intervienen dos conceptos fundamentales: el aprendizaje y la enseñanza; y distingue tres categorías de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medida, un solo espacio de medida y producto de medidas. En este caso se trabajará con el isomorfismo de medida, que se clasifica como en la Figura 1

En cuanto al enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007), este marco teórico permite realizar un análisis detallado de los significados pretendidos sobre cómo se trabaja la noción de división en el currículo chileno (entendemos por currículo los programas de estudio y libros de texto) a través del material propuesto por el Ministerio de Educación. Dentro del EOS, la noción de *sistema de prácticas* es fundamental desde un punto de vista epistemológico y didáctico. Godino y Batanero (1994) entienden por sistema de prácticas a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334). Estas prácticas pueden ser desarrolladas por una persona o compartidas por una institución. Según Font, Godino y Gallardo (2013) “las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los libros de texto son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas” (p. 104). En el EOS se considera a los

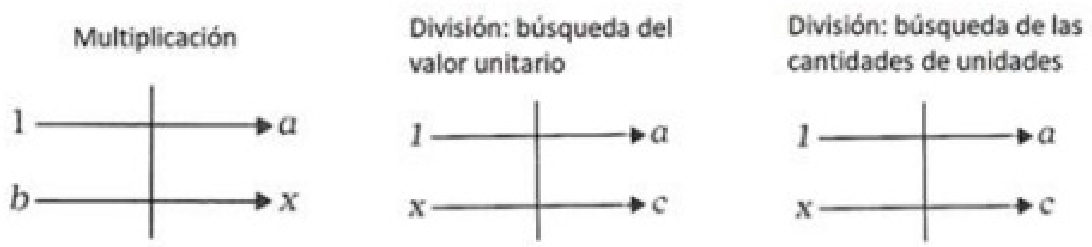


Figura 1. Representación de problemas de isomorfismo de medida (Vergnaud, 1997).

objetos matemáticos como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver dificultades (Godino y Batanero, 1994).

Al analizar y determinar los significados solicitados por los libros de texto se utilizó la siguiente tipología de *objetos matemáticos* primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007, p.7): elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos), situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios), conceptos/definiciones (introducidos mediante descripciones: recta, punto, número, media, función, derivada), proposiciones o propiedades (enunciados sobre conceptos), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y métodos, deductivos o de otra clase). Dichos términos conforman la configuración ontosemiótica, que puede ser de carácter cognitivo (configuración cognitiva) si se trata de los *objetos matemáticos primarios* que moviliza un sujeto como parte de su práctica matemática desarrollada a propósito de la solución de un problema, o de tipo epistémica (configuración epistémica) si se trata de los *objetos matemáticos institucionales*. En este trabajo se utiliza la noción de configuración epistémica para determinar los significados determinados por los libros de texto chilenos y cómo abordan la noción de división.

Dificultades en la enseñanza de la división

En relación con las dificultades presentadas en los procesos de enseñanza de la *división*, específicamente en educación primaria, se han realizado varias investigaciones que van desde cómo se introduce el desarrollo del algoritmo hasta el material que se le proporciona a los profesores (Aguayo, Piñeiro y Flores, 2016). Diferentes estudios se han referido a la enseñanza y el aprendizaje de algoritmos aritméticos, que han sido motivo de discusión en lo referente al proceso de enfoque del concepto y los procedimientos que se utilizan.

En cuanto a la búsqueda del algoritmo en la resolución de problemas, se han realizado talleres con estudiantes de 5-6 años en España, donde se plantean problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Ellos debían resolver problemas de multiplicación, división de reparto y agrupamiento, utilizando el conteo de elementos. Las dificultades eran cercanas a los alumnos con acciones vividas anteriormente. Además, el material utilizado fue seleccionado por los educandos (De Castro y Escorial, 2007).

Con la finalidad de aportar a los maestros estrategias que les permitieran superar dichos obstáculos, Saíz (1994) investigó las complejidades que presentan los niños de 5° y 6° grado en Argentina al resolver divisiones. Los resultados mostraron que cuando los estudiantes se enfrentan a estos ejercicios desconocen qué operación deben realizar, si una multiplicación o una división. Por otro lado, las explicaciones de los profesores eran ambiguas y dificultaban aún más la situación. Otros conflictos que se presentaron fue que el alumnado ignoraba cómo interpretar correctamente las divisiones con resto.

Problemas de división y su relación con los estudiantes

Como menciona el título, Ordoñez (2019) realizó en Perú investigaciones donde individuos de tercer grado debían construir el concepto de división. Se les presentaron actividades de reparto para las cuales carecían de conocimientos por tratarse de una operación que se trabaja en cuarto grado; no obstante, sí conocían la adición, la sustracción y la multiplicación. Realizaron sesiones de actividades individuales y grupales en las que se abordó la noción de división y divisibilidad con números naturales. Los resultados mostraron que el concepto de reparto equitativo es intuitivo para los estudiantes pues es una actividad que realizan a diario, de modo que se logra la comprensión del concepto por encima del aprendizaje de memoria que podría presentarse como una dificultad en un futuro.

Debido a los insatisfactorios resultados del alumnado mexicano en la prueba PISA, se realizó un estudio que pretende diagnosticar qué sucede cuando estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria se enfrentan a problemas de isomorfismo de medidas del tipo división-reparto; los resultados evidenciaron dificultades en relación con el lenguaje, la notación y otros conceptos involucrados. Aunque se les permitió el uso de calculadora, las respuestas en primaria fueron en su mayoría incorrectas, mientras en secundaria el desempeño fue positivo (Bustamante y Vaca, 2014).

En un estudio realizado en 4° básico (Santiago de Chile), Aravena y Morales (2019) se propusieron develar elementos que permiten caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la división en el sistema de los números naturales. Esta experiencia se desarrolló debido a comentarios realizados por docentes en los que expresaban lo difícil que resultaba enseñar este contenido y lo complejo que era para los alumnos la comprensión del mismo. A estos últimos se les propusieron diversas actividades en los que debían resolver divisiones de reparto e interpretación del resto. Al momento de realizarlas los educandos no tuvieron dificultades; sin embargo, cuando se les presentó un problema de agrupamiento no lo reconocieron como una división.

Problema de investigación

El currículo chileno considera a la división como una operación valiosa, dado que se le atribuyen aplicaciones que son útiles en varios contextos de la vida diaria; sin embargo, también se comprende como una de las operaciones más complejas en los procesos de enseñanza-aprendizaje en educación básica. En lo que refiere a la materia, resulta difícil para los profesores plantear actividades que estén enfocadas a la aplicación de esta operación. Aunado a lo anterior, el material que se utiliza con frecuencia es inadecuado y termina por generar dificultades en la comprensión del proceso requerido para esta operación.

La revisión de la literatura permite identificar los distintos obstáculos que existen a la hora de implementar actividades relacionadas con problemas de isomorfismo de medida; estas pueden ser epistemológicas, ontológicas y didácticas.

La historia menciona que (Bell 1985; Gairín y Oller, 2013; Boyer, 1986), desde la antiguas cunas de la civilización, los matemáticos pasaban mucho tiempo intentando descifrar y resolver problemas donde estaba presente la división, lo que demuestra que la complejidad en el desarrollo de esta operación siempre han existido. Hoy en día los estudiantes presentan mayores conflictos en el desarrollo de este concepto. En el caso de los profesores, también existen obstáculos en la enseñanza de esta operación, por lo que resulta urgente analizar cómo se desarrolla en los programas y libros de textos chilenos e identificar los significados pretendidos por el currículo chileno a la noción de división en 5° básico.

METODOLOGÍA

El estudio es de corte cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), ya que las preguntas e hipótesis están presentes antes, durante y después de la recolección de datos. A medida que se avanza con el trabajo, estas se pueden clasificar de acuerdo a la importancia y perfeccionar a posteriori. El objetivo principal es evaluar los significados pretendidos y holísticos de referencia expuestos en el enfoque ontosemiótico presentes en libro de texto y programa de estudio de 5° básico (Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, 2017).

Análisis de la noción de división en 5° básico, según el EOS

En el caso del curso de 5° básico se analizó el currículo (libro de texto y programa de estudio) con la intención de evidenciar cómo enfoca la noción de división. Mediante dicha revisión fue posible visualizar que las actividades están centradas principalmente en la búsqueda del algoritmo por sobre la resolución de problemas y que existen pocas relacionadas a la interpretación del resto, lo que se puede evidenciar en la Tabla 1.

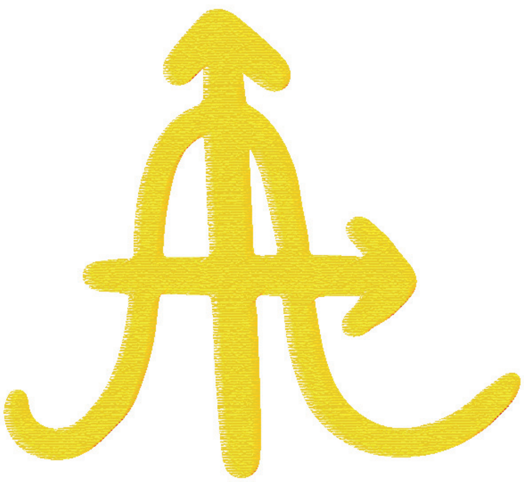


Tabla 1. Actividades presentadas en los libros de texto en relación con la división en 5° básico.

Algoritmo de la división		Interpretación del resto	
Ejercicio	Problema	Ejercicio	Problema
69	13	3	8

Análisis del programa de estudio

El programa de estudio de 5° (Mineduc, 2013) básico está dividido en cuatro unidades y cinco ejes temáticos, cada uno de ellos relacionado con las unidades. En cuanto a la división, esta se encuentra en la unidad 1 en el eje de números, compuesta por ocho objetivos de aprendizajes. La noción de división se enuncia en los objetivos de aprendizaje 2 a 6. Cabe señalar que cada uno de ellos está relacionado con sus respectivos indicadores de evaluación, en concordancia con las actividades propuestas en los libros de texto.

Objetivos de Aprendizaje Se espera que los estudiantes sean capaces de:	Indicadores de evaluación sugeridos Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_2 Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación: • Anexar ceros cuando se multiplica por un múltiplo de 10 doblar y dividir por 2 en forma repetida. • Usar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.	• Determinan productos cuando uno de los factores es múltiplo de 10, 100 o 1.000. • Calculan multiplicaciones, aplicando mitades y dobles. Por ejemplo: 34 - 5 = 17 • 10. • Calculan multiplicaciones, aplicando repetidamente dobles y mitades. Por ejemplo: 12 - 25 = 6 - 50 = 3 - 100. • Aplican la propiedad distributiva en multiplicaciones, des componiendo en múltiplos de 10. Por ejemplo: 102 -4 - (100 ÷ 2)-4 - 100-4 + 2.4. • Doblan multiplicaciones dadas para realizar multiplicaciones. Por ejemplo: para calcular 12 x 3, piensan en 6x3 y la doblan. • Usan propiedades conmutativa y asociativa para multiplicar números. Por ejemplo: 25 - (-4) = 25 - (4 - 3) = (25 - 4) - 3 = 100 - 3 = 300.
OA_4 Demostrar que comprende la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito: • Interpretando el resto. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones.	• Modelan la división como el proceso de reparto equitativo, usando bloques de base diez, y registran los resultados de manera simbólica. • Explican el resto de una división en términos del contexto. • Ignoran el resto de divisiones en el contexto de situaciones. Por ejemplo: determinan que 5 equipos de 4 personas cada uno se pueden formar con 22 personas. • Redondean cocientes. • Expresan restos como fracciones. • Expresan restos como decimales. • Resuelven un problema no rutinario de división en contexto usando el algoritmo y registro del proceso.

OA_5 Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones con expresiones numéricas, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción cuando corresponda.	• Realizan operaciones sumas y restas. • Realizan operaciones combinadas de sumas y restas que involucran paréntesis. • Calculan expresiones desconocidas en igualdades en que intervienen sumas y restas. • Resuelven sumas y/o restas de multiplicaciones y/o divisiones. • Aplican reglas de paréntesis en la operatoria con expresiones.
OA_6 Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren las cuatro operaciones y combinaciones de ellas: • que incluirán situaciones con dinero y • usar la calculadora y el computador en ámbitos numéricos superiores al 10.000	Seleccionan y usan una estrategia para estimar la solución de un problema dado. Demuestran que la solución aproximada a un problema no rutinario dado, no requiere de una respuesta exacta. • Determinan respuestas aproximadas. • Estiman la solución de un problema dado y lo resuelven. • Resuelven problemas matemáticos relativos a cálculos de números, usando la calculadora. • Identifican qué operación es necesaria para resolver un problema dado y lo solucionan. • Determinan lo razonable de una respuesta a un problemano rutinario. • Evalúan la solución de un problema en su enunciado. • Explican la estrategia utilizada para resolver un problema.

Figura 2. Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación, Unidad 1 (Mineduc, 2013, pp. 55-57).

Como las configuraciones epistémicas están relacionadas con las *situaciones-problemas* presentes en los programas de estudio, se pretende que, al desarrollar las actividades, los estudiantes sean capaces de argumentar y comunicar, además de representar de manera gráfica la información con el fin de comprender más fácilmente los planteamientos. Los ejercicios que se presentan son contextualizados y se esperan que se conecten con otras asignaturas para que los alumnos logren relacionar la información de forma transversal. En lo que respecta a los *elementos lingüísticos*, se espera que estos expresen información de manera verbal y simbólica utilizando algunos conceptos clave, tales como *producto*, *cociente*, *resto*, entre otros.

Análisis para el libro de texto de 5° básico

El libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación de Chile para 5° básico presenta la división en la unidad 1, *Números naturales, operaciones y patrones*, segmentada en cuatro lecciones. El concepto se encuentra en la lección dos de *La multiplicación y división* y la lección tres de *Estrategias de cálculo y problemas*.

Configuración epistémica

Con respecto a las *situaciones-problemas*, se encontraron cuatro elementos:

1. Resolución y comprobación de un problema.
2. Problemas contextualizados de división interpretando el resto
3. Ejercicios de división mediante reagrupación de centenas, decenas y unidades.
4. Multiplicación como método para comprobar el resultado de la división.

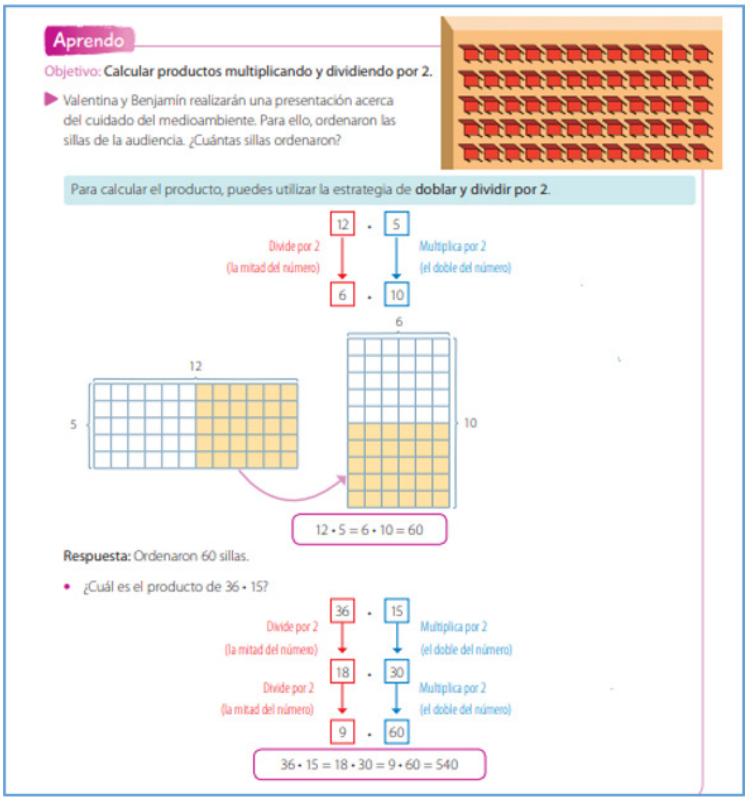


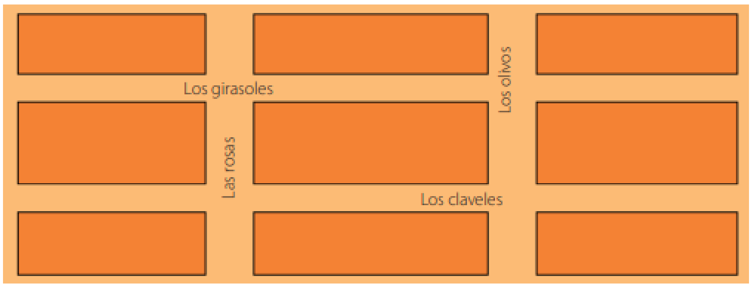
Figura 3. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, p. 58).

b. Una agencia de turismo espera a 135 turistas para la próxima semana. Cada uno de los vehículos de la agencia puede llevar a 7 pasajeros. ¿Cuántos vehículos se necesitarán para transportar a todos los turistas?

Figura 4. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, p. 73).

Objetivo: **Resolver problemas interpretando el resto de una división.**

▶ La municipalidad de una ciudad dispone de 126 árboles para plantar en las siguientes calles:



Si se plantará la mayor cantidad posible de árboles de manera que quede la misma cantidad en cada calle, ¿cuántos árboles no se plantarán?

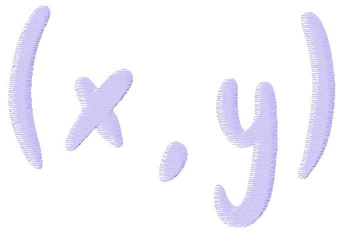
La cantidad de árboles que se plantarán en cada calle se puede calcular como:

```
 12'6' : 4 = 31 → Cociente
– 12
   06
 –  4
    2 → Resto
```

Cada calle tendrá 31 árboles nuevos y sobrarán 2 del total de árboles que disponía la municipalidad.

Respuesta: Por lo tanto, 2 árboles del total no se plantarán en las calles.

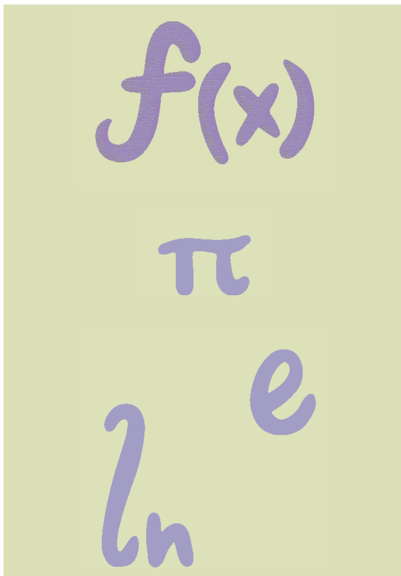
Figura 5. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, pp. 71).



Respecto al segundo tipo de problemas, el estudiante, además de resolver un problema cercano a nuestra realidad, debe interpretar qué sucede con el resto, tal como se muestra en la figura 3; sin embargo, estos sólo se abordan en 5° básico y los que se presentan en este libro son escasos. Gran parte de ellos promueve hallar el cociente mayoritariamente.

En la tercera categoría se encontraron actividades con relación a la interpretación del resto (siendo este el único libro que presenta dichas actividades), tal como se muestra en la figura 4.

Las *situaciones-problemas* detectadas pueden clasificarse en verbales, gráficas (Tablas), pictóricas y simbólicas respecto a los *elementos lingüísticos*. Del mismo modo, las *representaciones* se expresan con material concreto, pictórico y simbólico.



Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La Tabla 2 resume la clasificación de los planteamientos que se espera que desarrolle el alumnado con relación a las distintas cuestiones presentadas en el libro de texto.

Tabla 2. Representaciones previas y emergentes de los problemas de 5° básico.

Representación para la noción de división					
		Emergentes			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
Previos	Verbal				
	Concreta				
	Gráfica				
	Simbólica				

Es posible observar cuatro clases en cuanto al tipo de problemas. En el primer caso tenemos una *situación-problema* que se expresa de manera verbal y se busca que se responda de igual forma, por ejemplo:

10 Resuelve los siguientes problemas.

a. Mariana, Benjamín, Carolina y Daniel estimaron el cociente de 468 : 5. Estas son sus respuestas:

Nombre	Respuesta
Mariana	2500
Benjamín	450
Carolina	90
Daniel	9

Explícale a un compañero o compañera cuál de las respuestas es más cercana al cociente real.

Figura 6. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, p. 73).

En la segunda categoría existe una relación verbal-simbólica; es decir, la *situación/problema* se expresa de manera verbal, pero se pide al estudiante que represente la solución de manera simbólica, por ejemplo:

6 **Analiza y responde. Luego, justifica con ejemplos.**

a. Si un número es dividido por 2, ¿cuáles son los posibles restos?

b. Si un número es dividido por 3, ¿cuáles son los posibles restos?

Figura 7. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017. p. 72).

En la tercera clase se encontró que, cuando la actividad es presentada de manera gráfica, se espera que la solución se exprese de manera simbólica, tal como lo muestra la Figura 8.

En cuanto a los *conceptos/definiciones*, se encontraron nociones previas: mitad, mitad de números pares, propiedad distributiva de multiplicación con respecto a la suma, estimar cocientes, división, entre otros; y emergentes: dividir reagrupando centenas, decenas y unidades, y resolver problemas interpretando el resto de una división (siendo éste el único libro de básica que presenta este tipo de problemas). Asimismo, se identificaron propiedades relacionadas con reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y división sobre la adición y sustracción cuando corresponda. El libro establece la relación entre la multiplicación y la división para encontrar el producto, por ejemplo: "*El producto de* 12 • 5 *es equivalente a* 6 • 10", es decir, "*Puedes doblar y dividir por* 2 *en forma sucesiva*", tal como se muestra en la Figura 2.

En la cuarta clasificación se encuentran las *situaciones-problemas* en las que la actividad se expresa de manera simbólica y se espera que la solución se represente del mismo modo, como en la Figura 9.

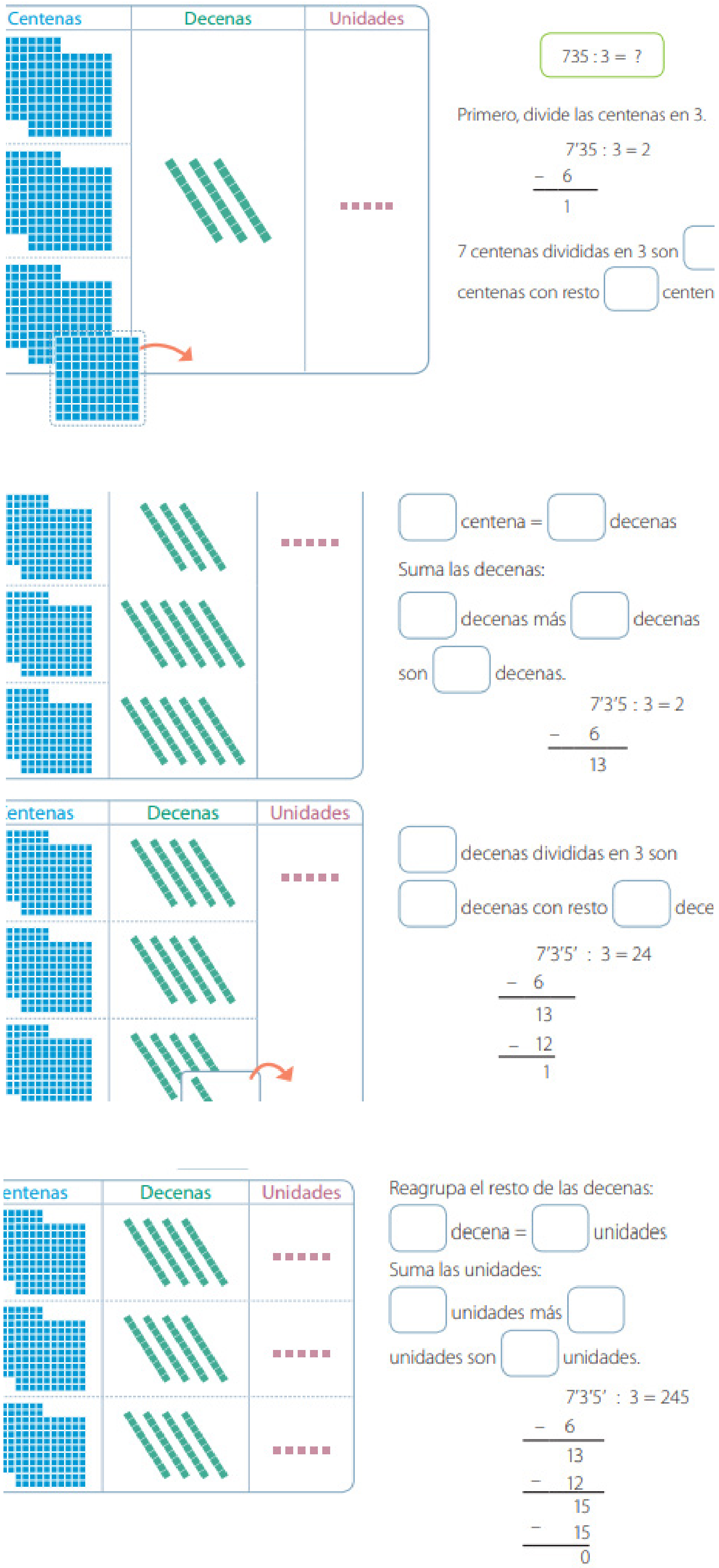


Figura 8. Ejemplo de problema (Ho Kheong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, pp. 69-70).

4 Estima cada cociente.

a. 569 : 5 **c.** 322 : 6

b. 417 : 2 **d.** 126 : 4

Figura 9. Ejemplo de problema (Ho Khong, Gan Kee y Ramakrishnan, 2017, pp. 69-70).

DISCUSIÓN

En torno a los significados holísticos de referencia presentes en la dupla curricular de 5° básico (programa de estudio y libro de texto), se estableció que la mayoría de las actividades están relacionadas con el aprendizaje del algoritmo de la división, transitan de lo verbal a lo simbólico y dejando de lado la marcha de lo verbal a lo gráfico, de lo concreto a lo gráfico y de este a lo simbólico. Lo anterior dicho puede ocasionar dificultades a futuro en la comprensión de problemas donde se requiere el cambio de registro, dando por trabajados este tipo de situaciones en niveles inferiores. Ahora, consideramos que los objetos matemáticos se movilizan en la resolución (en nuestro caso la división), es necesario hilar de estas representaciones, pues son la parte ostensiva de una serie de proposiciones y procedimientos que permite visualizar la articulación en la configuración y dar cuenta de la elaboración de una buena práctica (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Por otro lado, se observa una predilección por la realización de ejercicios que privilegian la búsqueda del algoritmo sobre la resolución que permiten el incremento de habilidades de índole superior. En consecuencia, esto puede generar dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, pues los libros de texto son considerados una herramienta fundamental para el profesorado al momento de impartir sus clases. De ahí la importancia de profundizar en el análisis de un libro de texto de matemáticas, mostrando así aspectos relevantes como análisis de tareas, errores, representaciones, etc.

Un aspecto a resaltar es que es el único libro de texto de educación básica que presenta problemas donde se debe realizar la interpretación del resto, aunque en poca medida. Este hallazgo resulta relevante, ya que en la literatura (Saíz, 1994; Ordoñez, 2019; Lago, et. al 2008; Márquez, *et. al* 2019) está demostrado que los alumnos frecuentemente encuentran dificultades y cometen errores en la resolución de esta clase de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del Proyecto Regular CR22/18 "Caracterización del conocimiento para la enseñanza de futuros profesores sobre la división medida", bajo la tutela de la vicerrectoría de investigación y posgrado de la Universidad de Los Lagos.

REFERENCIAS

Aguayo Arriagada, C. G., Piñeiro, J. L. y Flores, P. (diciembre de 2016). La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo. *En Actas del* XVI *Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ni más ni menos*. Jérez: SAEM THALES.

Aravena, A. y Morales, A. (2019). Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena. PNA, 13(3), 147-171.

Bell, E. T. (1969). *Historia de las Matemáticas*, Nueva York.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática,* Madrid, España.

De Castro Hernández, C.; Escorial González, B. (2017). Resolución de problemas aritméticos verbales en la educación infantil: Una experiencia de enfoque investigativo, CSEU La Salle, Universidad Autónoma de Madrid, España.

Font, V.; Godino, J. D.; Gallardo, J. (2013): The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.

Gutiérrez Guzmán, N., Morles Estruch, N. y Valdés Figueroa, F. (2018), *Progresiones de aprendizaje en espiral en Matemática*, Ministerio de educación Chile División de Educación General Unidad de educación especial, Chile, Santiago, 30 - 31.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación, editorial Mc Graw Hill Educación, Sexta edición, México D.F.

Ho Kheong, F., Kee Soon, G. y Ramakrishnan *Ch. (*2017*). Texto para el estudiante. Matemática* 5° *básico,* Chile Santillana Chile, S.A.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática*. España, 28(1), 9-38.

Lago, M. O.; Rodríguez, P.; Enesco, I.; Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellas. Un estudio sobre los problemas de división con resto en 1° de ESO. *Anales de Psicología*, 24(2), 201-212.

Márquez, M. Hernández, E. y García, J. (2019). Estrategias en la resolución de problemas de división-medida por estudiantes de sétimo básico en Chile. *Espacios*. 40(33), 1-10.

Mineduc (2013). *Programa de Estudio para cuarto año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile. Páginas 194. ISBN 978-956-292-373-6

Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallán, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 317-338.

Ordoñez Montañez, C. C. (5–10 de mayo de 2019). *Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria*. Comunicación presentada en XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática Medellín, Colombia. Universidad de Medellín y Universidad de Antioquía, Medellín – Colombia.

Riveras, Y. y Márquez M. (2021). *Análisis del currículo chileno en educación básica en torno a la división como isomorfismo de medida* [Tesis de maestría, Universidad de los Lagos, Chile]

Saíz, I. (1994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir. En Parra, C. & Saíz, I. (comps.). *Didáctica de las Matemáticas: reflexiones pedagógicas*. Buenos Aires, Argentina. Ed. Paidós.

Vergnaud (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE LOS CONTENIDOS DE PROBABILIDAD DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA COSTARRICENSE

Recibido el 29 de marzo de 2022, aceptado el 21 de septiembre de 2022.

EPISTEMIC SUITABILITY INDICATORS OF THE PROBABILITY CONTENTS IN THE COSTA RICAN MATHEMATICS CURRICULUM

INDICATEURS D'ADÉQUATION ÉPISTÉMIQUE DU CONTENU DE PROBABILITÉS DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DU COSTA RICA

3

Luis A. Hernández Solís
Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica
lhernandez@uned.ac.cr
https://orcid.org/0000-0003-2956-8102

Carmen Batanero
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es
https://orcid.org/0000-0002-4189-7139

RESUMEN

Se analiza la idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad en las orientaciones curriculares de matemáticas para la educación general básica costarricense. Nos apoyamos en la *Teoría de idoneidad didáctica* del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, creada para apoyar el diseño y evaluación de programas de estudio y acciones formativas para profesores. Gracias el análisis de contenido, las normas de las que se infieren indicadores de idoneidad epistémica terminan por igualarse; estos a su vez se confrontan con los propuestos por dicha teoría y otros generados en trabajos previos, a fin de determinar sus concordancias y complementariedades. En general, se evidencia una alta idoneidad epistémica de las directrices sobre la enseñanza de la probabilidad para estos niveles educativos; es decir, un adecuado acoplamiento del significado institucional de la probabilidad acomedido con el referencial. Asimismo, se resalta el valor de las situaciones-problema como ente integrador y catalizador del lenguaje, las reglas y la argumentación. Los indicadores pueden orientar y apoyar la acción docente en el diseño e implementación de procesos de instrucción de la probabilidad y constituir un recurso útil para la formación inicial y actualización continua de educadores.

Este proyecto presenta una síntesis que puede guiar al docente en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la probabilidad, en el marco de las orientaciones curriculares costarricenses; y constituye un puente entre estas y su práctica docente.

Palabras clave: Costa Rica, currículo, educación general básica, idoneidad epistémica, probabilidad.

ABSTRACT

In this paper we analyse the epistemic suitability of the probability contents in the mathematics curricular guidelines for Costa Rican General Basic Education. We rely on the theory of didactic suitability from the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, developed to support the design and evaluation of curricula and teacher training. Through content analysis, norms are identified from which indicators of epistemic suitability are inferred, which are compared with those proposed by this theory and others generated in previous works, in order to identify their concordances and complementarities. In general, the inferred indicators show a high epistemic suitability of the probability teaching guidelines for these educational levels; that is, a good match between the intended institutional meaning and the institutional reference meaning of probability. Furthermore, the value of problem situations as an integrator and catalyst of language, rules and argumentation is highlighted. The indicators identified can guide and support teaching action in the design and implementation of probability instruction processes and constitute a useful resource for the initial and continuous training of educators.

Keywords: Costa Rica, curriculum, general basic education, epistemic suitability, probability.

RÉSUMÉ

Cet article analyse la adequation épistémique du contenu des probabilités dans les directives du programme de mathématiques de l'enseignement général de base du Costa Rica. Nous nous appuyons sur la théorie de l'adéquation didactique de l'approche ontosémiotique de la connaissance et de l'enseignement des mathématiques, créée pour soutenir la conception et l'évaluation des programmes d'études et des activités de formation des enseignants. Au moyen d'une analyse de contenu, on identifie des normes à partir desquelles on déduit des indicateurs d'adéquation épistémique, qui sont comparés à ceux proposés par cette théorie et à d'autres générés dans des travaux antérieurs, afin d'identifier leurs concordances et leurs complémentarités. En général, les indicateurs déduits montrent une grande adéquation épistémique des directives sur l'enseignement des probabilités pour ces niveaux d'enseignement, c'est-à-dire un bon couplage du sens institutionnel prévu avec le sens institutionnel de référence des probabilités. En outre, la valeur des situations problématiques en tant qu'entité intégrant et catalysant le langage, les règles et l'argumentation est mise en évidence. Les indicateurs identifiés peuvent guider et soutenir l'action pédagogique dans la conception et la mise en œuvre des processus d'enseignement des probabilités et constituent une ressource utile pour la formation initiale et la mise à jour continue des éducateurs.

Mots-clés: Costa Rica, programme d'études; enseignement général de base; adéquation épistémique; probabilité.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la probabilidad cobra relevancia en todos los niveles educativos, debido a la necesidad de proporcionar a los ciudadanos una cultura probabilística (Gal, 2005) en distintas áreas profesionales y científicas. Además de ser una parte importante de la matemática que se puede relacionar con otras, como la aritmética, álgebra y funciones, cálculo, geometría y medida, la probabilidad es una herramienta imprescindible para la toma de decisiones en condiciones aleatorias (Batanero, 2005; Borovcnik, 2016). En consecuencia, son muchos los autores que abogan por la incorporación de esta disciplina desde la escuela elemental (Alsina, 2017; Vásquez *et al.*, 2019).

Abundan los países que introducen contenidos de probabilidad desde edades tempranas (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2013; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, 2014 y National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Costa Rica no ha sido una excepción, por lo que los recientes programas de estudio de matemática para la educación preuniversitaria (MEP, 2012) han prestado especial atención al área de estadística y probabilidad, cuyos contenidos y expectativas de aprendizaje se organizan de manera integrada, desde el primer año de educación primaria hasta el último de educación secundaria.

La finalidad de este trabajo es analizar la idoneidad epistémica de la propuesta curricular costarricense para la educación general básica (EGB). En concreto, se sigue la metodología sugerida por Godino *et al.* (2012) para inferir indicadores de idoneidad epistémica del tema de probabilidad, a partir del análisis de las directrices curriculares en los planes de estudio de matemática del Ministerio de educación pública costarricense (MEP, 2012). En lo que sigue, se describe el currículo de matemática costarricense, se expone el marco teórico, la metodología empleada, los resultados y se discuten las conclusiones.

Currículo de Matemática Costarricense

El currículo costarricense de matemáticas para la educación general básica (MEP, 2012) está organizado en tres de los cuatro ciclos del sistema educativo de este país. Los dos primeros corresponden a la educación primaria y los otros dos a la secundaria. Los planes de estudio de matemáticas en cada ciclo se organizan de forma integrada del primero al último curso en torno a los conocimientos y habilidades relacionadas cuyo desarrollo se espera. Se plantean cinco áreas:

- Números
- Medidas
- Geometría
- Relaciones y álgebra
- Estadística y probabilidad

El presente trabajo se centrará en la materia de la probabilidad. Dicha área prevalece a lo largo de todos los ciclos; en educación primaria, abarca la misma proporción que geometría, medidas y relaciones y álgebra; en educación secundaria constituye una cuarta parte del currículo.

Conocimientos de probabilidad que se desarrollan en la EGB

Como se muestra en las Tablas 1 y 2, los conocimientos de probabilidad se desarrollan de manera paulatina y su complejidad es creciente, desde el primer año (educación primaria) hasta el noveno (educación secundaria), que

Tabla 1. Conocimientos probabilísticos que se desarrollan en la educación general básica del currículo de matemática costarricense MEP (2012).

Conocimientos	I Ciclo			II Ciclo			III Ciclo		
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
Situaciones: aleatorias y seguras.	×	×	×	×				×	
Eventos: seguro, probable, imposible, más y menos probables.		×	×	×	×			×	
Resultados simples de un experimento aleatorio.			×	×	×			×	
Representación de eventos.				×				×	
Definición clásica o laplaciana de probabilidad.						×		×	
Propiedades de las probabilidades						×		×	
Eventos simples y compuestos								×	
Muestras Aleatorias									×
Probabilidad frecuencial									×
Introducción a la ley de los grandes números									×

Nota. El séptimo año carece de contenidos de probabilidad, para dar mayor espacio al refuerzo de contenidos estadísticos estudiados en educación primaria.

constituyen la EGB en Costa Rica. En el primer ciclo se trata que los niños identifiquen las situaciones donde interviene el azar, como aquellas cuyo resultado es impredecible, y las diferencien de las deterministas. Se propone no solo realizar juegos con monedas, dados, ruletas y otros dispositivos, sino incluir situaciones cotidianas vinculadas a la incertidumbre, que acerquen al niño a estas experiencias. Para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas sin llegar a la cuantificación de las probabilidades, solo se habla de eventos más o menos probables.

En segundo ciclo se sugiere analizar probabilidades de juegos de azar y problemas del contexto estudiantil. Se aprovecha la intuición desarrollada en el primer ciclo para profundizar en conceptos relacionados con eventos y sus representaciones. En el último año se introduce el cálculo de probabilidades según la ley de Laplace. En consecuencia, se da un salto cualitativo en la enseñanza; partiendo de ideas intuitivas, se llega a calcular probabilidades como una proporción de resultados favorables respecto a los posibles.

En el tercer ciclo se lleva a cabo una transición de la educación primaria a la secundaria, por lo que en octavo año hay una nivelación y precisión de conceptos probabilísticos estudiados en el ciclo anterior y se incrementa la dificultad de los problemas planteados. En el último año se introducen la definición frecuencial de probabilidad y la ley de los grandes números.

Aunque hay conocimientos que se repiten en diferentes años, en la Tabla 2 se puede apreciar que el nivel de profundidad de cada contenido es creciente por ciclo. Además, en tercer ciclo se formalizan los conceptos y propiedades mediante mayor precisión matemática y uso de lenguaje simbólico y, junto con las habilidades generales presentadas en la Tabla 2, aparecen otras asociadas a ejes disciplinares transversales del currículo que los estudiantes deben lograr a lo largo de toda la EGB: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal; la contextualización activa como un componente pedagógico especial y el uso de la historia de las matemáticas.

Tabla 2. Habilidades generales asociadas a conocimientos probabilísticos en el currículo de matemática costarricense para EGB.

Conocimientos	Habilidades generales		
	I Ciclo	II Ciclo	III Ciclo
Situaciones: aleatorias y seguras.	Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas.		
Eventos aleatorios.	Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. - Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos.	Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento.	Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
Probabilidad clásica o laplaciana.		Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.	Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades vinculadas con el evento: seguro, probable e imposible.
Probabilidad frecuencial			Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

MARCO TEÓRICO

Utilizaremos el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994, Godino *et al.*, 2007; 2019), que concuerda epistemológicamente con MEP (2012), debido al papel central que el EOS confiere a las situaciones problema y las prácticas deducidas de ellas y a la importancia dada en MEP (2012) a la resolución de problemas como vehículo de aprendizaje. De este marco teórico se utilizará el constructo *significado institucional* y la clasificación de tipos de objetos que permitirán analizar el contenido de las orientaciones curriculares.

Además, se empleará la idoneidad didáctica y, en particular, la de tipo epistémico y sus indicadores.

Significados institucionales y personales

El EOS parte de una formulación ontológica de los objetos matemáticos, que, a partir de la *situación-problema* define los conceptos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado del objeto* (Godino *et al.*, 2007; 2019). El significado de los objetos matemáticos se origina de las prácticas llevadas a cabo por una persona o institución al resolver problemas relacionados con dichos objetos.

Una práctica es “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334) y puede ser personal o institucional.

Las *prácticas institucionales* están normadas por los sujetos de una institución (grupo que realiza prácticas sociales tomando en cuenta sus instrumentos, reglas y modos de funcionamiento) mientras las *personales* corresponden a un sujeto. Se define el *objeto institucional* como un emergente del sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas y dicho sistema de prácticas se concibe como el significado institucional del objeto. En Godino *et al.* (2007) se clasifican los significados institucionales en *referencial*, *pretendido*, *implementado* y *evaluado*, y los significados personales en *global*, *declarado* y *logrado*. En este trabajo, nos centraremos en dos tipos de significados institucionales que es necesario comparar, según Godino (2013), para evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de estudio:

a) *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido y
b) *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Para analizar el significado *pretendido* de la probabilidad en el currículo es necesario explicitar el *referencial* del tema. Batanero (2005) y Batanero y Díaz (2007) indican que el significado de probabilidad ha sido polifacético a lo largo de la historia (Batanero *et al.*, 2005) e introducen diferentes significados parciales: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, axiomático, lógico y propensión. La comprensión global de la probabilidad requiere la de sus varios significados que deben ser relacionados entre sí, por lo que puede ser "la razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad", según el contexto donde se aplique (p. 260).

Por otro lado, Godino (2013) advierte que "el significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio" (p. 119), por lo que tomaremos como significado de referencia de la probabilidad en la EGB costarricense (estudiantes de 7 a 15 años, aproximadamente) el conjunto de tres enfoques: intuitivo, clásico (o laplaciano) y frecuencial, que son los presentados en el currículo (MEP, 2012).

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Godino *et al.* (2007) describen diferentes tipos de objetos matemáticos o entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático y que emergen de los sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas:

- *Situaciones-problema*: aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas que conllevan actividad matemática. Por ejemplo, la cuantificación de la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio específico.
- *Elementos lingüísticos*: Expresiones, notaciones y gráficos empleados para enunciar o resolver problemas y permitir la operacionalización del mismo. En el caso de la probabilidad, pueden aparecer representaciones tabulares y gráficas, lenguaje cotidiano (*suerte*, *posibilidad*) o matemático (*esperanza matemática*, *distribución de probabilidad*) y símbolos algebraicos.
- *Conceptos-definición*: Asociados a cada objeto matemático e introducidos mediante definiciones o descripciones. Algunos casos serían los conceptos de *equiprobabilidad*, *espacio muestral* y *evento seguro*.
- *Proposiciones*: Enunciados que involucran relaciones o propiedades de los conceptos. Por ejemplo, que la probabilidad de un suceso es un valor entre 0 y 1.
- *Procedimientos:* Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que se pueden aplicar en la resolución de situaciones-problema, como enumerar o contar los casos favorables de un suceso y casos posibles del experimento aleatorio.
- *Argumentos*: Usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos. Un tipo sería realizar una simulación de un experimento aleatorio para analizar la convergencia de la probabilidad frecuencial a la clásica.

Idoneidad didáctica

Como se ha indicado, en este trabajo nos centraremos en la *idoneidad didáctica* (Godino, 2013), herramienta creada para apoyar el diseño y evaluación de programas de estudio y acciones formativas de profesores. Se define como el grado en que un proceso de instrucción es adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino *et al.*, 2006; Godino *et al.*, 2016). Se trata de la articulación coherente y sistémica de las seis componentes de idoneidad: *epistémica* (representatividad del significado institucional), *ecológica* (ajuste a la sociedad y el entorno), *cognitiva* (adecuación a los estudiantes), *afectiva* (aspectos emocionales), *interaccional* (permite identificar y resolver conflictos de significado) y *mediacional* (adecuación de los recursos didácticos) (Godino *et al.*, 2007). Para cada una de estas facetas Godino (2013) propone componentes y criterios de idoneidad que se deben entender como reglas de corrección emanadas de la comunidad científica, orientadas a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor" (Godino *et al.*, 2009, p. 60).

En este trabajo analizamos la *idoneidad epistémica*, que "refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia" (Godino *et al.*, 2007). Es decir, se pretende medir en qué grado el significado de la probabilidad pretendido en MEP (2012) es pertinente desde el punto de vista de la teoría probabilística aceptada en la comunidad matemática (significado de referencia). Para Godino (2013), los componentes de la idoneidad epistémica son los objetos primarios considerados en el EOS y sus relaciones (Tabla 3), para cada uno de los cuales propone una serie de indicadores que incluiremos en nuestro trabajo.

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica según Godino (2013, p. 119).

Componentes	**Indicadores**
Situaciones-problema	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, etc.) traducciones y conversiones entre las mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones,etc.) se relacionan y conectan entre sí.

Antecedentes

Nos basamos también en algunos trabajos que han analizado la idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos curriculares. Así, Godino *et al.* (2012) proponen una metodología para la evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares. La ejemplifica estudiando los contenidos matemáticos generales de los *Principios y estándares del* NCTM (2000), centrándose específicamente en los que refieren al análisis de datos y probabilidad. En la Tabla 4 presentamos los específicamente ligados a la probabilidad:

Tabla 4. Indicadores de idoneidad epistémica en los estándares de NCTM (2000) (contenido de probabilidad).

Problemas	• Se plantean problemas – investigaciones (proyectos) con diversas fuentes y tipos de datos teniendo en cuenta los elementos básicos de la probabilidad.
Lenguajes	• Se utilizan diferentes representaciones de uso convencional en probabilidad, tales como números, símbolos, coordenadas cartesianas, palabras, frecuencias absolutas, frecuencias relativas, Tablas, histogramas y diagramas (de barra, lineal, de sectores, de caja y de puntos). Los gráficos incluyen los títulos y etiquetas que permiten identificar claramente los datos representados. • Se incluyen situaciones en las que se requiere discriminar entre el uso más adecuado de una u otra representación.
Reglas (conceptos, procedimientos, proposiciones)	• Se describen y evalúan las posibilidades de ocurrencia de un suceso como posible, imposible, probable o seguro, a partir de experiencias cercanas y de la observación de regularidades en experimentos aleatorios simples. • Se introduce la regla de Laplace como un modelo que permite predecir el valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento simple, sin realizar el experimento aleatorio.
Nota. Adaptación de la Tabla mostrada en Godino *et al.* (2012, p. 349).	

Beltrán Pellicer *et al.* (2018) presentan una guía de valoración de la idoneidad didáctica de la probabilidad en la educación secundaria obligatoria (estudiantes de 12-16 años) para dotar al docente de un instrumento que promueva la reflexión en torno a experiencias de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. Específicamente, para nuestro estudio utilizaremos la Tabla 5, donde se sintetizan los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por dichos autores.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica específicos para los procesos de estudio de la probabilidad.

Componentes	**Indicadores**
Situaciones-problema	• Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). • Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. • Se propone una muestra representativa de contextos para ejercitar y aplicar los contenidos. • Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios.

Componentes	Indicadores
Lenguajes	• Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias. • Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado. • Se emplean términos precisos. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
Reglas	• Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. • Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario, así como las propiedades de las frecuencias relativas. • Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. • Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de Tablas y diagramas de árbol. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo. • Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	• Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad.

Nota. Resumen de Beltrán Pellicer *et al.* (2018, p. 536).

Los indicadores que aparecen en las Tablas 4 y 5 asocian cada uno de los componentes de la idoneidad epistémica a los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica), considerando el significado clásico como un punto de inicio para cuantificar las experiencias aleatorias que se presentan de manera informal o subjetiva. Posterior a este significado se introduce el frecuencial para articular otros componentes que surgen de los contenidos estadísticos.

METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo con un alcance descriptivo (Hernández *et al.*, 2014), basado en el análisis de contenido (Andréu, 2011). Dicha técnica se empleará para extraer y sistematizar las normas relacionadas con la faceta epistémica contenidas en MEP (2012), que se resumirán para deducir de ellas indicadores de idoneidad epistémica, siguiendo el método expuesto en Godino *et al.* (2012).

En una primera fase, el texto es dividido en unidades de análisis, las cuales se clasifican según las facetas y componentes que propone la *Teoría de la idoneidad didáctica*, seleccionando las que se refieren al tipo epistémico. En una segunda etapa, dichas unidades son comparadas entre sí y reducidas con el fin de evitar reiteraciones. Posteriormente, se infieren indicadores de idoneidad epistémica, específicos de la probabilidad.

Finalmente, se redactan las normas reducidas identificadas en el currículo de matemática de Costa Rica (MEP, 2012), redactándolas en forma de indicadores y presentando una Tabla resumen, que es comparada con los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por Godino (2013), Godino *et al.* (2012) y Beltrán Pellicer *et al.* (2018). La finalidad de la metodología descrita es la elaboración de una síntesis de indicadores de idoneidad de los contenidos de probabilidad del currículo costarricense que sirva de guía para el diseño y evaluación de la instrucción en el tema y en la formación de profesores. Al mismo tiempo se identifican limitaciones y complementariedades entre los instrumentos.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección se resumen las normas generales y específicas asociadas a contenidos probabilísticos establecidas en MEP (2012). El marco del EOS las considera como epistémicas, esto es, referidas a características de los objetos matemáticos desde el punto de vista institucional. Igualmente, se describen las explicaciones y justificaciones de las mismas. Dichas normas se clasifican según las componentes de la idoneidad epistémica propuesta por Godino (2013), es decir, según se refieren a los diferentes tipos de objetos matemáticos descritos en el marco teórico o sus relaciones (para no ser reiterativos, se entiende que todas las normas se leen comenzando con "se deben").

Normas epistémicas sobre las situaciones-problema

Puesto que la estrategia metodológica subyacente en MEP (2012) es la resolución de problemas, existen normas generales al respecto, que orientan la enseñanza de los diferentes tópicos matemáticos, incluida la probabilidad. Se han identificado en MEP (2012) las siguientes:

- "Identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las matemáticas" (p. 24).
- "Determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente" (p. 24).

Asociadas a las anteriores normas, se han podido encontrar las siguientes explicaciones y justificaciones:

> Se asume que usar este tipo de problemas es una generosa fuente para la construcción de aprendizajes en las matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteamiento y resolución de problemas conlleva la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (p. 13).
>
> La resolución de problemas, sean del entorno o abstractos, está asociada sustancialmente a la naturaleza de las matemáticas. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas define la actividad de los profesionales matemáticos en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación (p. 28).

Normas específicas de probabilidad

También se han identificado en MEP (2012) las siguientes directrices sobre el papel de las situaciones-problema en el estudio de la probabilidad; algunas muestran una posición normativa, otras aportan razones por las cuales se requieren estas actividades:

- "Dirigir la acción estudiantil hacia el planteo de problemas vinculados con el cálculo de probabilidades" (p. 361).
- "Formular situaciones u organizar juegos en los cuales se puedan establecer diferencias claras entre situaciones aleatorias o inciertas y situaciones seguras" (p. 146).
- "Motivar el planteamiento de situaciones genéricas como la lotería nacional, los juegos de dados, el Tico-Bingo, entre otros" (p. 361).
- "Formular situaciones de aprendizaje (juegos o situaciones de la cotidianidad) que permitan identificar el número de resultados a favor de un evento determinado y tomar decisiones con base en ese conocimiento" (p. 257).
- "No es recomendable limitarse únicamente a los juegos de azar, se requiere adecuar situaciones al contexto estudiantil para favorecer una mayor comprensión de la incertidumbre en la vida cotidiana" (p. 369).
- "Aprovechar las situaciones para precisar el concepto de probabilidad de un evento como la proporción de casos a favor del evento; o sea, la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales" (p. 360).
- "Proponer problemas del contexto donde el análisis de probabilidades permita la toma de decisiones" (p. 361).
- "Generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito" (p. 365).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre el papel de la resolución de problemas en el estudio de la probabilidad:

- Construir los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al contexto estudian-

til, en diversas circunstancias que involucren los diferentes significados de la probabilidad.
- Resolver problemas que susciten la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre.
- Generar problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios.
- Evaluar y controlar las estrategias de resolución de problemas probabilísticos.

De estas normas se infieren los indicadores de idoneidad asociados a la resolución de problemas que se incluyen en la Tabla 6. Asociadas a ellas, en MEP (2012) se han podido encontrar explicaciones o justificaciones como "En todo momento, lo que es apenas natural en esta área, las temáticas se presentan a través de problemas reales" (p. 55) o también:

> *Se desea subrayar en esta visión la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes.* (p. 28)

Normas epistémicas sobre los elementos lingüísticos/representaciones

A partir de los procesos matemáticos "representar" y "comunicar" se plantean en MEP (2012) normas generales que orientan el uso del lenguaje matemático en las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo:

- "Fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares)" (p. 26).
- "Identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas" (p. 25).
- "Elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas" (p. 26).
- "Expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa" (p. 25).
- "Traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada" (p. 26).

Asociadas a estas normas generales, se establecen en la malla curricular indicaciones puntuales por contenido probabilístico como las que se presentan en la Figura 1:

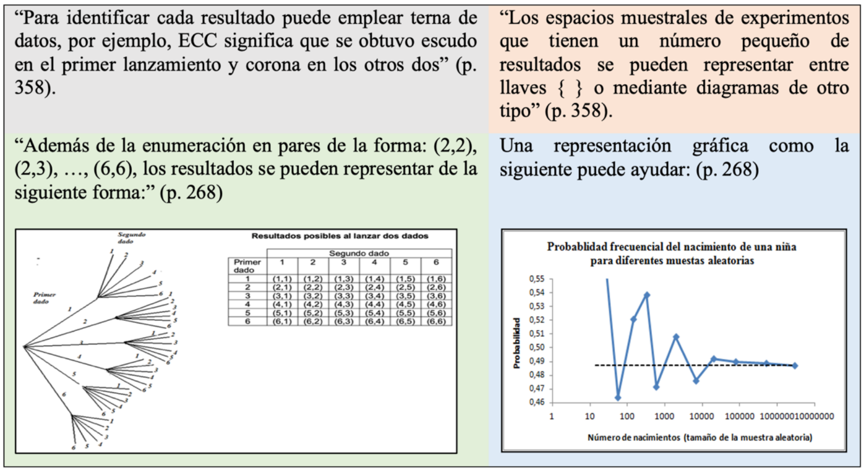


Figura 1. Indicaciones puntuales asociadas al componente Lingüístico/Representaciones.
Fuente: MEP (2012).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a conocimientos probabilísticos en los MEP (2012).

Normas específicas de probabilidad

- "Iniciar el análisis de los términos *probable*, *imposible* y *seguro*" (p. 154).
- "Incluir diagramas, esquemas, cuadros y gráficos con información que puede ser interpretada dentro del contexto" (p. 161).
- "Enfatizar el papel que juegan las representaciones tabulares y gráficas dentro de los análisis estadísticos y probabilísticos" (p. 370).
- "Considerar la presentación de información por medio de cuadros, diagramas y gráficos como una estrategia de gran importancia para comunicar resultados de los análisis efectuados" (p. 370).

- "Estas representaciones contengan suficientes elementos: título general, títulos secundarios, entre otros; de modo que un lector pueda comprender el mensaje que comunican sin necesidad de recurrir a más información" (p. 370).
- "Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas)" (p. 370).
- "Emplear programas de computadora, por ejemplo, hojas de cálculo, editores de texto, programas graficadores u otras herramientas que pueden ayudar a mejorar la calidad de la representación y reducir el tiempo en su construcción" (p. 370).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre el uso del lenguaje en probabilidad, a partir de las cuales se infieren los correspondientes indicadores de idoneidad presentados en la T abla 6.

- Emplear distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, Tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis.
- Precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico (*experimento aleatorio*, *eventos*, *espacio muestral*, *puntos muestrales*, *evento seguro*, *evento imposible*, etc.) partiendo del vocabulario que emplea el estudiantado en situaciones cotidianas.
- Traducir de una representación a otra, reconociendo ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar.
- Utilizar diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones (MEP, 2012):

> Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida (...) La representación y manipulación de objetos matemáticos no deben verse como un fin en sí mismo, debe entenderse que estas representaciones y sus leyes expresan a la vez acciones mentales y características de los objetos matemáticos (...) Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. (pp. 37, 55, 58)

Normas epistémicas sobre las reglas (conceptos, propiedades, procedimientos)

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a conceptos, propiedades y procedimientos probabilísticos en MEP (2012):

- "Diferenciar entre una situación aleatoria y una determinista o segura" (p. 146).
- "Identificar eventos seguros o aleatorios, y dentro de las situaciones aleatorias aquellas que son más o menos probables de acuerdo con nociones intuitivas" (p. 169).
- "Identificar situaciones más probables o menos probables dentro del contexto estudiantil" (p. 155).
- "Inducir que es igualmente probable obtener un escudo (E) o una corona (C) al lanzar una moneda y por ende que los eventos obtener un escudo y una corona (EC) y obtener una corona y un escudo (CE) al lanzar dos monedas son igualmente probables" (p. 167).
- "Generalizar la idea de que una situación es más probable que otra si tiene más posibilidad de ocurrir, o sea ocurre con mayor regularidad" (p. 154).
- "Intuir hechos que tienen una mayor probabilidad de ocurrencia y de este modo favorecer sus decisiones" (p. 146).
- "Definir el concepto de probabilidad como la proporción de casos favorables de un evento entre el total de casos. Aquí debe quedar claro que esta definición es válida siempre que todos los resultados sean igualmente probables" (p. 261).
- "A partir de la definición laplaciana o clásica de probabilidad, y de los conceptos de evento probable, imposible y seguro, es conveniente que la acción estudiantil esté dirigida hacia la deducción de algunas de las propiedades básicas que cumplen las probabilidades" (p. 361).
- "Generar la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo, en el sentido que entre más grande sea la

muestra con la que se trabaja, más se aproxima la probabilidad frecuencial de un evento a su valor real" (p. 368).

Las normas anteriores, como también otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes normas asociadas a elementos regulativos, de las que se infieren los indicadores de idoneidad correspondientes presentados en la Tabla 6:

- Diferenciar entre fenómenos deterministas, aleatorios y entre sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones.
- Estimar y calcular probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuencial) propuesto según nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado.
- Deducir las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico.
- Emplear la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.

Igualmente se encuentran justificaciones para dichas normas:

> El concepto clásico de probabilidad se ha venido construyendo paulatinamente en función de la identificación de los puntos muestrales que están a favor de un evento dentro del espacio muestral. No obstante, ante lo limitado de la definición clásica o laplaciana se requiere introducir el análisis probabilístico con base en la definición frecuencista, por la cual se aproximan las probabilidades mediante una frecuencia relativa determinada a través de una muestra aleatoria. Este enfoque genera una aproximación a las probabilidades, aprovechando la noción intuitiva de la ley de los grandes números para identificar la evolución que esas probabilidades van experimentando a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. (p. 379)

Normas epistémicas sobre los argumentos

A partir de los procesos matemáticos "razonar y argumentar" y "comunicar", se plantean en MEP (2012) normas generales que orientan la importancia de la argumentación en las diferentes áreas matemáticas:

- "Plantear una conjetura y buscar los medios para justificarla (en adecuación a cada nivel educativo), ya sea por medio de materiales concretos, diagramas, calculadoras u otros instrumentos" (p. 56).
- "Cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas" (p. 56).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas sobre la argumentación asociadas a conocimientos probabilísticos.

Normas específicas de probabilidad

- "Comunicar mediante una adecuada argumentación las respuestas a dichas interrogantes" (p. 148).
- "Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas" (p. 360).
- "Simular otras situaciones que permitan apreciar la ley de los grandes números. Por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo es posible generar números aleatorios que permiten simular fenómenos de distinta naturaleza" (p. 369).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre la argumentación en probabilidad.

- Emplear de manera gradual diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado.
- Plantear conjeturas y justificarlas empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen y debatan los argumentos expuestos.
- Utilizar simulaciones como apoyo en la argumentación relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como:

> Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos (...) La justificación y prueba son parte

> esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar. Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. (pp. 24, 37, 56)

Normas epistémicas sobre las relaciones entre componentes

A partir del proceso matemático "conectar", se plantean normas generales que orientan la forma en que deben relacionarse los conceptos o las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo:

- "El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces" (p. 57).
- "Entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad" (p. 25).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a relaciones sobre conocimientos probabilísticos en MEP (2012). Las dos primeras conectan elementos regulativos de otras áreas matemáticas con elementos regulativos probabilísticos, siguen dos que conectan elementos regulativos estadísticos y probabilísticos. Las dos siguientes conectan situaciones-problema con estos mismos elementos; sigue otra que conecta la argumentación y resolución de problemas.

Normas específicas de probabilidad:

- "La probabilidad conecta mucho con *Números* y *Geometría*, y se debe tratar de manera informal en los primeros años para ir avanzando en su abstracción en la Secundaria" (p. 55).
- "Este problema permite conectar los conceptos de Probabilidad con el cálculo de áreas en *Geometría*. Se puede identificar que es más probable la figura que tiene mayor área" (p. 360).
- "Establecer vínculos entre los conceptos estadísticos y los probabilísticos" (p. 163).
- "Aunque los problemas con el análisis de las probabilidades pueden diferir de los problemas eminentemente estadísticos, los principios básicos que los regulen deben ser los mismos" (p. 380).
- "Favorecer los procesos de resolución de problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil" (p. 360).
- "Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas)" (p. 370).
- "Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas" (p. 360).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre relaciones, que se traducen en indicadores (Tabla 6).

- Conectar la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular números y geometría, usando en lo posible la resolución de problemas.
- Plantear problemas que relacionen la estadística y la probabilidad y ayuden a desarrollar elementos regulativos de probabilidad.
- Emplear diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad.
- Utilizar la argumentación para respaldar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

En relación con las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como las siguientes:

> Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas (...) Observar la aplicabilidad e interconectividad de las Matemáticas refuerza su aprecio y disfrute (...) Las Matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar los procesos transdisciplinarios que desde los primeros años escolares se deben cultivar. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces (...) Las conexiones con el entorno y otras materias son fáciles de realizar en Estadística y Probabilidad en todo momento. (pp. 24, 57, 59)

Síntesis de indicadores de idoneidad epistémica

En la Tabla 6 aparecen los indicadores de idoneidad epistémica específicos del tema de probabilidad inferidos de la sistematización de las normas extraídas de MEP (2012). Su comparación con las Tablas 3, 4 y 5 nos lleva a obtener las siguientes conclusiones:

Los indicadores obtenidos sobre la componente de situaciones-problema abarcan los propuestos en Godino (2013) y los específicos de probabilidad planteados en el NCTM (2000) (Godino *et al.*, 2012), puesto que los problemas tienen en cuenta los elementos básicos de la probabilidad y además son planteados empleando diversos contextos. Respecto a los derivados por Beltrán Pellicer *et al.* (2018), no se cita en el currículo el significado subjetivo de la probabilidad, pero implícitamente se contempla un primer acercamiento al insistirse en la toma de decisiones. Se añade, en nuestro caso, el control y evaluación de las estrategias de resolución de problemas probabilísticos, relegado por los autores anteriores.

Tabla 6. Indicadores de idoneidad epistémica específicos de Probabilidad inferidos de los Programas de estudio de Matemática MEP (2012).

Componentes	Indicadores
Situaciones-problema	• Se construyen los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al estudiantado, en diversos contextos que involucren los diferentes significados de la probabilidad. • Se resuelven problemas que suscitan la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre. • Se busca que el estudiantado genere problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios. • Se busca que el estudiantado evalúe y controle las estrategias de resolución empleadas en problemas probabilísticos.
Lenguajes	• Se emplean distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, Tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis. • Se precisa, de manera paulatina, el lenguaje probabilístico (experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, puntos muestrales, evento seguro, evento imposible, etc.) partiendo del vocabulario que emplea el estudiantado en situaciones cotidianas. • Se busca que el estudiantado pase de una representación a otra, reconociendo las ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar. • Se utilizan diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Se diferencian los fenómenos deterministas de los fenómenos aleatorios y los sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones. • Se estiman y calculan probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuentista) propuesto según el nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado. • Se deducen las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico. • Se emplea la ley de los grandes números desde el punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.

Componentes	Indicadores
Argumentos	• Se emplean, de manera gradual, diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado. • Se plantean conjeturas y se justifican empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen los argumentos expuestos. • Se utilizan simulaciones como apoyo en la argumentación, relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.
Relaciones	• Se conecta la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular números y geometría, usando en lo posible la resolución de problemas. • Se plantean problemas que relacionan la estadística y la probabilidad y ayudan a desarrollar elementos regulativos de probabilidad. • Se emplean diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad. • Se utiliza la argumentación para justificar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

Respecto al lenguaje probabilístico, los indicadores inferidos en nuestro trabajo incluyen los contemplados por Godino (2013), excepto el nivel adecuado del lenguaje para los niños a los que va dirigida la enseñanza; sin embargo, este indicador está implícito cuando se señala que se debe precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico, partiendo de vocabulario cotidiano o cercano al estudiante para posteriormente crear conexiones con los términos formales. La traducción entre diferentes representaciones supone las situaciones de expresión e interpretación matemática. Además, en nuestro caso, se añade el uso de medios digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas. Los comentarios anteriores implican que se incluyen los indicadores deducidos del NCTM (2000) por Godino *et al.* (2012) y los sugeridos por Beltrán Pellicer *et al.* (2018).

Respecto a las reglas, los indicadores de Godino (2013) están contemplados, en cuanto que los alumnos han de emplear, deducir y aplicar definiciones y propiedades de la probabilidad. Todas las reglas citadas por Godino *et al.* (2012) y por Beltrán Pellicer *et al.* (2018) se incluyen en los indicadores del currículo costarricense, aunque expresados de forma diferente. El uso de Tablas y diagramas de árbol se sitúa dentro de los indicadores referidos al lenguaje, ya que en los MEP (2012) se consideran herramientas de representación de objetos matemáticos para la comunicación y resolución de problemas, más que contenidos en sí mismos.

Igualmente, nuestro conjunto de indicadores compila los relacionados con la argumentación obtenidos por Beltrán Pellicer *et al.* (2018) y, al igual que en ese caso, se añade la simulación como un tipo particular de argumentación apropiado para el trabajo con la probabilidad. Además, en nuestro caso, se agrega el uso de diversos recursos y representaciones que apoyen los argumentos presentados. En Godino *et al.* (2012) no se incluye este componente y en Godino (2013) no se cita la argumentación.

Finalmente, los indicadores asociados con las relaciones contemplan los de Godino (2013) y Beltrán Pellicer *et al.* (2018); no obstante, en Godino *et al.* (2012) son ausentes. En nuestro caso, el conjunto de indicadores en este componente es más rico, puesto que se divide en cuatro diferenciados, que tienen en cuenta la resolución de problemas conectada con elementos regulativos (en áreas probabilísticas y otras), con la argumentación y con el uso de representaciones.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se analizó el documento curricular MEP (2012) que regula la enseñanza de la matemática en educación general básica en Costa Rica, para inferir indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad, siguiendo el método sugerido en Godino *et al.* (2012). Consideramos que este análisis es un primer acercamiento a la valoración de la calidad de dichas orientaciones curriculares.

El conjunto de indicadores obtenidos y la comparación con diferentes modelos propuestos previamente sugiere que estos documentos incluyen normas de las cuales se deducen todos los indicadores propuestos por Beltrán Pellicer *et al.* (2018), Godino (2003) y Godino *et al.* (2012), generalmente con algo más de especificación y centrando las situaciones-problema como el componente modular que integra y cataliza a los demás (lenguaje, reglas y argumentos), lo cual concuerda con lo que plantea el enfoque curricular de MEP(2012). Asimismo, se evidencia a nivel general que se promueven las ventajas de la probabilidad en diversas áreas, no solo matemáticas. En consecuencia, se deduce una alta idoneidad epistémica de los MEP (2012) para la enseñanza de la probabilidad en la EGB; es decir, existe un adecuado acoplamiento de los significados institucionales pretendido y referencial de la probabilidad, respaldado por la investigación didáctica previa.

Finalmente, resaltamos la relevancia que la *Teoría de idoneidad didáctica* ha tenido como instrumento de valoración de las orientaciones curriculares de Costa Rica, explicitando de modo objetivo indicadores de la forma en que se contemplan en dicho currículo los diversos tipos de objetos matemáticos propuestos en el EOS y sus relaciones.

Por supuesto, reconocemos que puede haber una diferencia entre lo propuesto en el programa y lo implementado en el salón de clase, de modo que la idoneidad epistémica final de la enseñanza en cada curso y situación dependerá de cómo se traduzca el currículo a la acción de aula. No hay que olvidar, además, el resto de componentes de la idoneidad didáctica, cuyo análisis quedaría pendiente para nuevos trabajos y dependería del contexto que rodea la acción didáctica.

No obstante, consideramos que este proyecto presenta una síntesis que puede guiar al docente en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la probabilidad, en el marco de las orientaciones curriculares costarricenses; y constituye un puente entre estas y su práctica docente (Godino *et al.*, 2012). También, valoramos que puede servir de insumo para la formación inicial docente y como material para procesos de capacitación en conocimiento didáctico-matemático.

RECONOCIMIENTOS

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil. *Épsilon*, 95, 25-48.

Andréu, J. (2011). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada.* Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2013). *The Australian curriculum: Mathematics.* ACARA

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. In K. Franbçois (Ed.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127).

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). *The nature of chance and probability*. En G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 16-42). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32(61), 526-548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3),1491-1516.

Gal, I. (2005). *Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas.* En G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school (pp. 39-63)..

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2016). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39–88.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663.

Godino, J., Rivas, H., y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, 7(2), 331-354. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0002.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. AIEM*: Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la Investigación. 6ta Edición. Mc Graw Hill.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. MECD.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I,* II *Y* III *Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The Council.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae*, 21(3), 131-154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

PROYECTOS DOCENTES

Recibido el 15 de noviembre de 2021, aceptado el 7 de marzo de 2022.

REGULARIZACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA, SAN JOAQUÍN 2021

MATHEMATICAL REGULARIZATION FOR MIDDLE SCHOOL STUDENTS, SAN JOAQUIN 2021

Jessica Martínez Martínez
Universidad Autónoma de Querétaro, México
marisolmtz215@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8361-8743

Luisa Ramírez Granados
Universidad Autónoma de Querétaro, México
luisa.ramirez@uaq.mx
https://orcid.org/0000-0001-9814-662X

4

RESUMEN

La educación en zonas rurales engloba condiciones diferentes de aquellas que rigen la que se imparte en zonas urbanas debido a una infinidad de factores. A causa de la pandemia generada por el covid-19, se observó que los estudiantes de las comunidades del municipio de San Joaquín, Querétaro, han tenido que enfrentarse a los problemas tecnológicos que implican las clases virtuales. Como consecuencia, no se han abarcado los temas previstos en las materias (en especial matemáticas). Este proyecto se planteó brindar una regularización en temas de índole matemático a los alumnos de los tres grados de la escuela secundaria general Jaime Torres Bodet.

Palabras clave: educación, matemáticas, secundaria, zonas rurales.

ABSTRACT

Education in rural and urban zones has different conditions because of multiple factors. Now, with covid-19, it has been observed that students from the communities of San Joaquín, Querétaro, are facing technological issues regarding virtual classes. This results in some serious delays in the courses, especially mathematics. During this project, it has been planned to offer regularization classes about mathematic topics to the students from the three degrees of the general junior highschool Jaime Torres Bodet. Those results were analyzed and are shown below.

Keywords: education, mathematics, junior high school, rural zones.

Ante los bajos niveles educativos de las zonas rurales y los problemas causados por la pandemia del covid-19, este proyecto busca regularizar en matemáticas a los estudiantes de secundaria de San Joaquín, Querétaro, con apoyo de estudiantes de la UAQ.

INTRODUCCIÓN

La educación en zonas rurales

Uno de los principios básicos que sustentan a una sociedad justa es la igualdad de oportunidades. La definición de los elementos que conforman esta igualdad resulta compleja; sin embargo, hay acuerdo en que la educación es uno de los más importantes. Es evidente que en el nivel mundial la igualdad de acceso a la educación, aun a la educación básica, dista de ser universal puesto que prevalecen enormes diferencias en el nivel educativo entre países y dentro de los mismos.

El nivel educativo de la población es un componente fundamental del grado de desarrollo de un país. La evidencia en el sentido de que una mano de obra altamente educada es uno de los factores clave para promover el desarrollo es amplia. Algunos autores incluso señalan que la carencia de una educación adecuada ha sido una de las causas determinantes en la persistencia e incremento de la pobreza en América Latina (Londoño, 1996).

A pesar de que en México el Artículo Tercero Constitucional ha sufrido diversas reformas a lo largo del presente siglo (1934 y 1945), sus principios básicos, gratuidad y obligatoriedad de la educación básica, permanecen. El sistema educativo mexicano aún enfrenta grandes retos que han sido señalados desde distintos puntos de vista por los autores que tratan el tema educativo en nuestro país. Los datos del censo de 1990 indican que en ese año poco más de 1.5 millones de niños entre los seis y los 12 años no asistían a la primaria; lejos de ser este un fenómeno exclusivo de las áreas rurales, se presenta también en los municipios urbanos y especialmente en las áreas donde se concentra la población más pobre y excluida (Aguado, 1995).

En la primera mitad del siglo XX, el principal problema de equidad educativa que enfrentaba la población rural era su falta de acceso a escuelas primarias y secundarias; sin embargo, con la expansión de la oferta, esa carencia dejó de ser el principal reto educativo del medio rural y empezaron a cobrar importancia las dificultades que los niños enfrentan para concluir su educación básica, así como los menores niveles de logro educativo que tienen respecto a los estudiantes del medio urbano (Parker y Pederzini, 2000). Los problemas de acceso que afectaron a la población rural durante ese periodo tienen todavía repercusiones en el rezago educativo: millones de personas mayores de quince años no han culminado sus estudios de educación básica.

En los países subdesarrollados la pobreza y la educación exhiben grandes retrasos. En América Latina, aproximadamente el 35 % de la población se encuentra en situación de pobreza y la escolaridad promedio de la fuerza laboral de estos países se ubica en poco más de 6 años, lo que contrasta con la de los países desarrollados, que supera los 10 años (Parker y Pederzini, 2000). Según Lorey en 1995, el problema más grave del sistema educativo mexicano es la deserción, ya que solamente el 50 % de los estudiantes que ingresan en cualquier nivel educativo terminan sus estudios; y en las áreas rurales, el 75 % de los niños no terminan sus primeros seis años de educación primaria.

Los factores familiares relacionados con el nivel económico juegan un papel importante en la deserción porque los padres necesitan que sus hijos contribuyan al ingreso familiar (Londoño, 1996). Si bien la asistencia a la escuela es un fenómeno individual, las decisiones fundamentales sobre educación son mejor comprendidas en el ámbito familiar; los determinantes sociofamiliares tienen un fuerte impacto en la explicación de la exclusión de la educación básica en los segmentos inferiores de la sociedad, particularmente para aquellos que concluyeron la primaria pero, incluso tras superar los obstáculos sociofamiliares e institucionales, no continúan estudiando la secundaria (Bracho, 1995).

El medio rural de México es donde la adversidad es más aguda; a pesar de los avances logrados en los últimos años, un porcentaje alarmante de la población de este sector sigue sumido en la pobreza. Algunos estudios atribuyen esta situación a las desigualdades educativas (López Acevedo, 2004). Según Ordaz (2007), en términos de cobertura educativa, el sector rural está rezagado con respecto al resto del país; la escolaridad promedio, medida en años, es de 8.9 para el sector urbano y de 5.6 para el rural. Según las cifras del II Conteo de población y vivienda 2005, el 72.2 % de la población rural carece de instrucción o solo alcanza la primaria; en contraste, el 55 % de la población urbana tiene una instrucción de al menos la secundaria. Esto nos muestra que, a medida que el nivel educativo aumenta, las tasas de escolaridad en zonas rurales disminuyen a un ritmo mayor que las urbanas.

Como se evidencia en el desempeño del sector rural, la calidad educativa es pobre. Un indicador de ello son los resultados del Examen de calidad y el logro educativo (Excale); de acuerdo con los resultados del año 2006, el 25.8 % de los estudiantes de sexto de primaria de las escuelas públicas rurales se ubica por debajo del nivel básico de logro en el aprendizaje del idioma español, frente al 13.2 % de los alumnos del mismo grado académico en las escuelas urbanas públicas. Únicamente el 2.2 % de estos alumnos en el sector rural presentan un logro educativo avanzado, a diferencia del 6.6 % en el medio urbano (Ordaz, 2009). Con los alumnos de secundaria, las diferencias crecen: en las escuelas rurales (telesecundarias) apenas 1.2 % de los alumnos de tercero tiene niveles avanzados en español o matemáticas. Por su parte, la proporción de alumnos de las secundarias privadas (ubicadas principalmente en el medio urbano) que presenta niveles avanzados es del 22.2 % en español y 7.3 % en matemáticas (Ordaz, 2009).

Además del problema de la calidad en general, es apremiante el de la distribución de la misma. La calidad de la educación primaria, medida por sus resultados en pruebas básicas de competencia, se distribuye inequitativamente entre la zona urbana de clase media y todas las demás. Son las escuelas de las zonas marginadas las que reportan indicadores de repetición; los factores sociales y económicos intervienen fuertemente en la repetición de los alumnos inscritos en las escuelas urbanas, pero tienen menor incidencia en las rurales (Ezpeleta y Weiss, 1996).

Las evaluaciones a partir de pruebas estandarizadas aplicadas por instituciones nacionales e internacionales, como la Organización para la cooperación y el desarrollo económicos, con el Programme for International Student Assessment (PISA) o la UNESCO, a través del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, muestran que, en las escuelas rurales latinoamericanas, tanto mestizas como indígenas, los estudiantes obtienen los resultados más bajos. El abandono escolar, la extraedad (alumnos que tienen más de dos años por encima de la edad promedio esperada para cursar un determinado grado) y el rezago educativo son condiciones que indican la presencia de problemas de dicha población para ejercer su derecho a la educación (Juárez, 2017).

Impacto de la virtualidad en la educación en tiempos de covid-19

La educación virtual se define como aquella que se realiza a distancia a través del ciberespacio por medio de la conexión y el empleo de Internet, que perscinde de un tiempo y lugar específicos, y que permite establecer un nuevo escenario de comunicación entre docentes y estudiantes (Bonilla, 2016). Hasta ahora, en términos generales, la educación virtual estaba más bien reservada a experiencias aisladas que aportaban estrategias innovadoras de enseñanza y aprendizaje de manera complementaria a la educación presencial. De hecho, desde hace varias décadas se trabaja en la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como herramientas puestas al servicio de la educación, lo que representa una revisión de los procesos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, y un desafío para el rol docente (Almirón y Porro, 2014).

Debido a la crisis surgida durante el año 2020, la educación en línea ha adquirido una relevancia sin precedentes que marcará un parteaguas en las prácticas pedagógicas y en los sistemas educativos actuales a nivel global. Asimismo, se han puesto en evidencia las desigualdades sociales, culturales y económicas de más de 180 países víctimas de la pandemia por covid-19. La necesidad y urgencia que trajo consigo la crisis sanitaria actual hizo que los gobiernos cerraran las puertas de las instituciones educativas como una medida para mitigar los efectos de la pandemia, afectando así al 94 % de los estudiantes a nivel mundial (Bravo García y Magis Rodríguez, 2020).

El reto de los sistemas educativos en los últimos meses ha sido mantener la vitalidad de la educación y promover el desarrollo de aprendizajes significativos. Para ello, han contado con dos aliados clave: los docentes y la virtualidad —en términos más precisos, los docentes a través de la virtualidad—. Esto ha representado un desafío sin precedentes, ya que la mayoría de los profesores tuvieron que generar sus propios aprendizajes para trabajar en entornos virtuales y, a la vez, fueron los responsables de enseñar a sus estudiantes a manejarse en ese espacio (Bonilla Guachamín, 2020). Para que una modalidad de educación virtual sea de calidad, debe contemplar ciertos requisitos: los recursos tecnológicos adecuados y el servicio necesario para acceder al programa educativo; que la estructura y el contenido del curso virtual ofrezcan un valor formativo; que se realicen aprendizajes efectivos y que sea un ambiente satisfactorio tanto para los estudiantes como para los profesores (Marciniak y Gairín Sallán 2018).

Así, la educación de nuestros días ha recurrido a entornos virtuales de aprendizaje puestos a disposición por entidades gubernamentales o plataformas institucionales de muy bajo rendimiento que rápidamente sobrepasaron el máximo de su capacidad. Otros recursos fueron de gran importancia, principalmente el uso de redes sociales y el fortalecimiento de comunidades de aprendizaje. Con respecto a las primeras, siempre hubo cierto reparo en su utilización y una tendencia a acentuar más los obstáculos y riesgos que las ventajas y oportunidades que ofrecían los grupos virtuales, no solo educativos, sino también sociales; sin embargo, con el brote de la pandemia, se han convertido en un recurso invaluable (Robles y Sato 2020). Las comunidades de aprendizaje, a su vez, pueden darse a nivel institucional con la finalidad de favorecer la capacitación y colaboración entre los docentes (Vaillant, 2017), lo que en estos momentos ha significado que se sientan acompañados y preparados para enfrentar los desafíos.

Se busca que los entornos virtuales de aprendizaje estén basados en la interpretación y solución de problemas (Gutiérrez Rodríguez, 2018); que además sean activos y colaborativos; que sean afectivos y gamificados, entre otros aspectos. Sin embargo, a raíz de la situación de pandemia, cada docente con sus estudiantes ha generado entornos de aprendizaje de características singulares. Dichos espacios virtuales se han configurado paulatinamente de distintas formas, mediante los recursos disponibles y las voluntades de toda la comunidad educativa. Todo ambiente formativo se tiñe de los valores e historias de vida de los docentes y, en vinculación con la familia, promueve el desarrollo y socialización de las experiencias de sus estudiantes (Vergel Ortega *et al.*, 2016).

Cabe destacar que implementar un sistema educativo a distancia representa desafíos en todos los niveles, en parte debido a que generalmente la educación virtual ha sido más trabajada en el contexto universitario. Es por esto que han cobrado relevancia los posgrados y el ámbito de la educación no formal (por ejemplo, a través de capacitaciones o cursos en línea para docentes, enseñanza de idiomas, cursos de actualización profesional, entre otros). Sin embargo, al momento del cierre de las instituciones por aislamiento social preventivo, el resto de los niveles prácticamente —y en muchos casos, totalmente— carecía de entornos virtuales de aprendizaje operativos. Además, las necesidades educativas son diferentes para cada nivel, la autonomía de los estudiantes varía y, consecuentemente, también divergen las estrategias pedagógico-didácticas (Sánchez Mendiola *et al.*, 2020).

En esta situación marcada por el miedo y la incertidumbre frente a los acontecimientos sanitarios y sus consecuencias sociales, laborales y económicas, el rol fundamental del docente ha ido mucho más allá de los aspectos pedagógicos. Transformó su enseñanza presencial en remota desde su hogar y mediatizó materiales didácticos a fin de favorecer el aprendizaje de sus estudiantes (García, 2020). Sin embargo, pese al esfuerzo colaborativo realizado por la comunidad académica para mantener en funcionamiento la educación, las instituciones han sido incapaces de garantizar la igualdad y la justicia social. La situación actual ha puesto en evidencia la desigualdad de oportunidades y condiciones (Tarabini, 2020). En otros términos, la educación virtual ha sido útil para mitigar las consecuencias de la pandemia, pero solo en parte, ya que al recluir el sistema educativo a esta modalidad, y sin una preparación previa a causa de la vertiginosidad con que se dio la crisis, solo algunos han podido acceder y sacar provecho de ella.

La brecha virtual es una de las problemáticas que más repercute en esta situación, por las diferencias en el acceso a los recursos tecnológicos, a la conexión y a la conectividad a Internet, especialmente para los países latinoamericanos. Si a esto se le suma la falta de previsión de un sistema de tal importancia, la implementación carece de la debida planificación, adaptación de las asignaturas y capacitación de docentes y estudiantes (García Peñalvo *et al.*, 2020). Estos tropiezos han venido a profundizar la desigualdad socioeducativa y la brecha digital, ya que la educación ha quedado bajo el dominio de la virtualidad, donde los recursos tecnológicos y el acceso a Internet son imprescindibles (Cabrera, 2020).

Debido a la pandemia generada por el covid-19, los estudiantes de las comunidades del municipio de San Joaquín han tenido que enfrentarse a las dificultades tecnológicas que implican las clases virtuales y, dadas las condiciones de desigualdad económica de la zona, se ha malogrado el cumplimiento de los temas previstos en las diversas materias. Por dicho motivo, durante la implementación de este proyecto se planteó brindar una regularización en temas de índole matemático a los alumnos que así lo desearan.

Objetivo general

Regularizar por medio de actividades o ejercicios a los estudiantes de cualquier grado de secundaria del municipio de San Joaquín en los temas referentes a matemáticas.

MARCO TEÓRICO

El proyecto se basa en un estudio de caso planteado en regularización matemática bajo diferentes enfoques debido a la variedad de los temas y los grados abordados. Como su nombre lo indica, en un análisis de este tipo, se espera abarcar la complejidad de un caso particular buscando el detalle de la interacción con sus contextos, sobre todo cuando este despierta un interés muy especial. Se refiere a un tratado de la particularidad y complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. El investigador cualitativo destaca las diferencias sutiles, la secuencia de los acontecimientos en su contexto y la globalidad de las situaciones personales.

METODOLOGÍA

Muestra

El establecimiento de la muestra se realizó de manera intencional y por conveniencia debido a la cantidad de tutores y alumnos que participaron durante el examen diagnóstico y las clases virtuales. Por lo tanto, el proyecto contiene una muestra no probabilística.

- 6 prestadores de servicio social (alumnos de las licenciaturas en Ingeniería, Microbiología y Química de la Universidad Autónoma de Querétaro).
- 90 alumnos de la secundaria general Jaime Torres Bodet, del municipio de San Joaquín en el estado de Querétaro.

El trabajo realizado con los alumnos de secundaria duró aproximadamente cuatro meses, del 24 de marzo con los exámenes diagnósticos al 9 de julio según lo establecido en el calendario propuesto por la Secretaría de Educación Pública.

El proyecto se realizó de manera conjunta con el personal académico de la secundaria y gracias al apoyo del municipio de San Joaquín, en el estado de Querétaro, por lo que todos los padres de familia estaban enterados de las actividades. Participaron aquellos alumnos que así lo decidieron, y dado que era una labor extracurricular, no hubo repercusión en las materias que tomaban.

Instrumentos y fuentes de recolección de datos

Para el diseño de esta propuesta se utilizaron los siguientes recursos:

- Plataforma Zoom para realizar videollamadas entre profesor y alumnos, las cuales tendrían una duración de 1.5 horas, dos veces a la semana.
- Medios tecnológicos y audiovisuales varios para el apoyo de la clase (presentaciones en PowerPoint, archivos de trabajo en Word, videos de apoyo en YouTube, entre otros), a criterio de cada profesor.
- Grupo de WhatsApp entre cada prestador y su grupo, destinado a una comunicación constante.

Diseño y presentación del material

Las clases fueron impartidas durante hora y media dos días a la semana para los distintos grados y grupos asignados; estas se llevaron a cabo por medio de la plataforma Zoom, a la cual los alumnos tenían acceso por medio de sus propios dispositivos electrónicos (computadora, tableta o celular).

Las actividades realizadas eran divididas por secciones: al inicio de la clase, el profesor resolvía dudas de la sesión anterior (aproximadamente 30 minutos); posteriormente, se utilizaban herramientas de acuerdo al tema o avance del alumno; estas constaban del uso de presentaciones en PowerPoint donde se desglosaban los temas de lo general a lo particular, incluyendo ejemplos con procedimientos paso a paso (aproximadamente 40 minutos); para finalizar, los últimos 20 minutos se destinaban a resolver ejercicios de variados grados de dificultad acorde al tema visto. En caso de que los alumnos dejaran inconclusos dichos ejercicios, se los llevaban de tarea para poder despejar dudas en la siguiente clase.

Las tareas y ejercicios se realizaban en un archivo de Word que posteriormente era convertido a PDF. Las presentaciones utilizadas durante la clase se elaboraban en PowerPoint y algunos videos que servían de apoyo para reforzar el tema (realizados por los profesores u obtenidos de plataformas didácticas como Khan Academy o incluso de YouTube) se cargaban a la plataforma de Classroom. Los alumnos que participaron en el proyecto estaban dados de alta en dicho sitio con la finalidad de que pudieran acceder a los recursos en el momento que ellos lo necesitaran.

A continuación, se enlista una serie de actividades realizadas antes y durante el trabajo con los alumnos; se describe a detalle cada una de las actividades para su mayor comprensión (Tabla 1).

Tabla 1. Reporte metodológico de actividades.

Actividad	Descripción de la actividad
1. Reunión de contextualización	• Recopilación de detalles sobre la cantidad de alumnos, el temario y organización del proyecto con el personal de Coordinación de Enlace e Intervención Social UAQ.
2. Junta informativa	• Reunión con alumnos de licenciatura (Ingeniería, Química y Microbiología de la UAQ), para organizar los grupos y designar los horarios de asesorías.
3. Diseño de instrumentos diagnósticos para el proyecto	• Diseño de exámenes diagnósticos para los diversos grados de secundaria en la plataforma Google Forms. • Entrega del enlace URL a los padres de familia a través del personal de la institución con la finalidad de distribuirlo a los alumnos y que estos pudieran contestarlo para observar su nivel académico. • Seguimiento del avance en el examen diagnóstico de los diferentes grupos, el cual estaría disponible a partir del miércoles 24 de marzo hasta el jueves 14 de abril.
4. Elaboración de organigrama del proyecto	• Reunión con la institución para pactar acuerdos de tiempos, formas de trabajo y horarios de atención. • Búsqueda de estrategias para trabajar a través de la virtualidad.
5. Diseño de material educativo para el proyecto	• Creación y diseño de material a utilizar de acuerdo con el temario proporcionado por la institución. • Búsqueda de estrategias para impactar en el alumno y generarle interés en su aprendizaje. • Conformación de un grupo con los estudiantes de licenciatura para dar seguimiento a dudas e inquietudes sobre el proyecto y el trabajo a seguir.
6. Análisis diagnóstico del contexto e implicaciones	• Análisis de los resultados obtenidos de acuerdo con el examen para realizar la división de alumnos por grupos de aproximadamente 15 integrantes. • Asignación de grupos a los alumnos de licenciatura que apoyarían en el proyecto; se les explicó la manera en la que daríamos seguimiento a través del uso de diferentes recursos tecnológicos. • Visita programada a San Joaquín para conocer a los alumnos con los que se trabajaría; se dio a conocer el proyecto a padres de familia con ayuda de Vinculación Social y las autoridades del municipio. • Aclaración de dudas a padres de familia, captura de datos adicionales faltantes (conocer si el alumno cuenta con Internet en casa y dispositivos tecnológicos para asistir a las clases virtuales).
7. Desarrollo del proyecto	• Seguimiento de actividades de acuerdo con el cronograma que se estableció con los alumnos de licenciatura; aquí se hizo un seguimiento semanal en donde se revisaba la metodología que habían seguido, la participación del grupo, así como la forma en que se sentían durante la clase, ya que se consideró que era de vital importancia mantener motivado y alerta al profesor, para que se sintiera con la confianza de pedir apoyo cuando lo necesitara. • Organización y revisión de actividades; durante este periodo se revisaron las plataformas para dar las clases y se comprobaron los datos que se estaban manejando, para que fueran adecuados al nivel requerido. • Socialización semanal con el personal de Coordinación de Enlace e Intervención Social UAQ para dar seguimiento al proyecto.

ANÁLISIS DE DATOS

Durante la Actividad 3, *Diseño de instrumentos diagnósticos para el proyecto*, se procedió a crear un examen diagnóstico en la plataforma de Google Forms para saber cómo abordar los temas y observar cuáles eran las áreas de oportunidad y así darles prioridad. El cuestionario constó de cinco reactivos por examen y fue diseñado de acuerdo con los temas y el nivel del grado cursado; su distribución se realizó con el apoyo de la institución, con la finalidad de que los alumnos participantes en el proyecto tuvieran oportunidad de contestarlo. A continuación, se observan los resultados del examen. El análisis de la participación de los alumnos (recordando que esta era de mínimo 15 alumnos por grupo), debe tener en cuenta la existencia de dos a tres grupos por cada grado y la correlación con sus calificaciones.

En el primer grado, la participación fue de la mitad de los alumnos (quince alumnos en total) y las calificaciones obtenidas oscilan entre el uno y el ocho. Existe un empate entre las calificaciones de tres y cuatro; es decir, cuatro alumnos (27 %) para cada una. Lo mismo ocurre con las calificaciones de 6 y 7 : dos alumnos (13 %) para cada una. Por último, con un triple empate, tenemos calificaciones de uno, dos y ocho, lo cual corresponde a un alumno (7 %) para cada una. Queda claro que las calificaciones reprobatorias predominan en nuestra gráfica (Figura 1).

Para el segundo grado se contó con la participación de quince pupilos. Aunque aprobatorias, la mayoría de las calificaciones fueron bajas: seis alumnos (40 %) obtuvieron un puntaje de 6; cuatro (27 %), una calificación de cuatro; tres más (20 %) recibieron una calificación de ocho, y para finalizar, hubo un empate de cero y dos, que corresponde a un alumno (7 %) por cada una de estas respuestas (Figura 2).

Para tercer grado, la participación fue de catorce alumnos (el hecho de contar con un único grupo propició una mayor participación). Las calificaciones variaron desde cero hasta ocho; 7 alumnos (50 %) lograron una calificación de dos; tres participantes (21.43 %) no obtuvieron ningún acierto; posteriormente, dos alumnos (14.29 %) alcanzaron una nota de cuatro. Por último, un solo alumno recibió un ocho; otro más, seis (Figura 3).

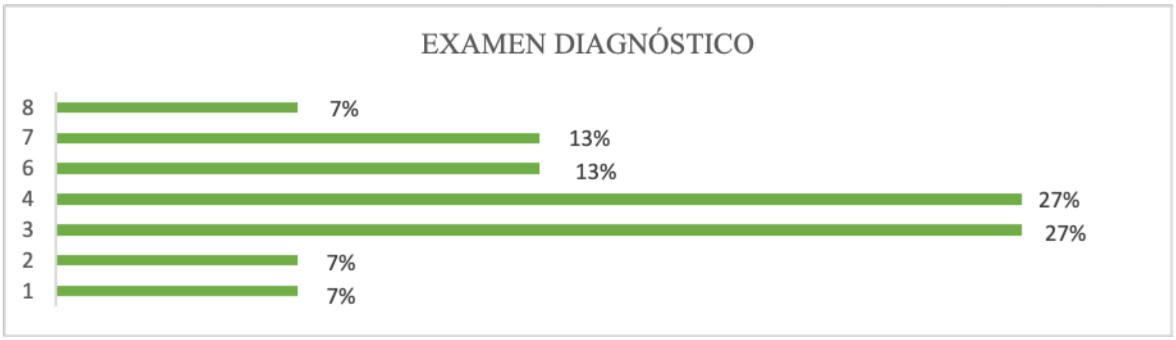


Figura 1. Resultados del primer grado.

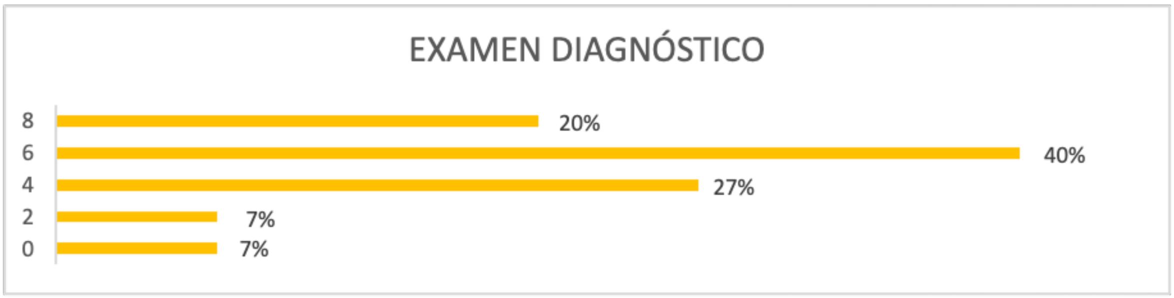


Figura 2. Resultados del segundo grado.

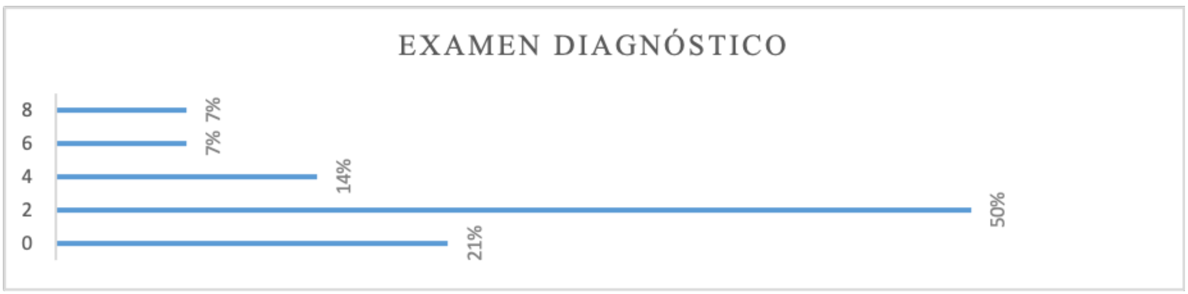


Figura 3. Resultados del tercer grado.

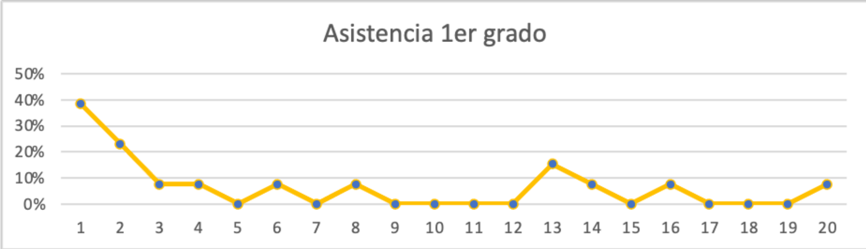


Figura 4. Asistencia de los alumnos primer grado.

Figura 5. Asistencia de los alumnos segundo grado.

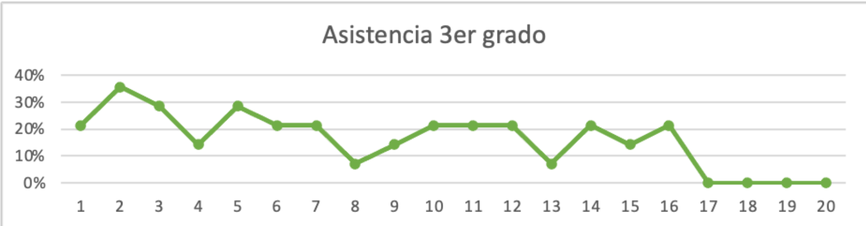


Figura 6. Asistencia de los alumnos tercer grado.

Todos estos resultados demuestran que la participación fue baja en relación a lo esperado y que, en primera instancia en dos de los tres grupos, las calificaciones están por debajo de un nivel aprobatorio. En consecuencia, se infiere que los temas a desarrollar debían dar al alumnado oportunidad de reforzar aquellos tópicos de los cuales tienen conocimiento y apoyarlos con aquellos que aún se dificulten.

RESULTADOS

Durante el curso se pudo observar que, con el tiempo, la participación de los alumnos fue disminuyendo. En la mayoría de los casos se desconocen las razones; en otros fue por trabajo, falta constante de Internet en las zonas que habitan y, en otras ocasiones, porque los mismos alumnos expresaban que carecían del material necesario para participar (p. ej. un celular con la capacidad de descargar Zoom debido a la memoria del dispositivo).

Dadas las razones mencionadas, se realizó un gráfico de líneas para representar la asistencia del grupo durante el proyecto para cada grado, estos se muestran en la Figura 4.

Gráfica de asistencia por grado

Al inicio del proyecto (Sesión 1), la participación en los alumnos de primer grado fue de casi 40 %, pero comenzó a haber una tendencia a la baja a partir de la sesión dos. De esta manera fue oscilando su participación con tendencia solamente al 10 % de los participantes. También se puede ver un despunte en la sesión doce, donde la participación aumenta pero es inconstante; de igual forma, se observa que hay días seguidos en que la participación es nula (Figura 4).

Para el caso de segundo grado, la participación empezó con un 27 %; a partir de ahí se observa un aumento hasta el 30-33 % durante las siguientes dos sesiones; no obstante, después la participación nuevamente desciende, aunque se mantiene entre el 20 y 11 % hasta la sesión nueve. A partir de entonces, se comienza a ver que la participación decae abruptamente por debajo del 10 %. Si comparamos este comportamiento con el del grado anterior, la participación es similar a partir de la sesión 10 y hasta el término del proyecto (Figura 5).

En el caso de tercer grado, existió al inicio de la primera sesión una participación del 21 % de los alumnos. Posteriormente, aunque oscila entre el 7 y 36 %, existió una tendencia promedio del 21 % durante todo el curso; la cifra es superior comparada con las de los otros dos grados (debe tomarse en cuenta que las últimas cuatro clases el tutor se ausentó debido a que fue internado por covid-19). Probablemente hubo mayor participación porque se trataba de alumnos que estaban por terminar su educación secundaria y les interesaba su ingreso a la preparatoria (Figura 6).

CONCLUSIONES

Al terminar el curso, se le aplicó una encuesta a cada tutor para conocer su experiencia, las principales dificultades y su opinión acerca de la educación virtual (desde los puntos de vista de profesor y de alumno). Las respuestas se transcriben a continuación (Tabla 2).

Tabla 2. Compendio de resultados emitidos por los tutores.

¿Cómo te sentiste como profesor durante el curso, qué problemas enfrentaste y cómo los resolviste?

- Al iniciar el proyecto me sentí muy motivada y entusiasmada, pero conforme avanzó el proyecto fue muy desilusionante. Los principales problemas radican en el desinterés y falta de compromiso del estudiante hacia con el proyecto. Si bien una limitante para algunos es la falta de servicio de Internet o las fallas del mismo, se les hacía mención del Internet que se ofrece en la plaza central y de notificarnos esas fallas. Sin embargo, más de 50 % del grupo no notificó ninguna complicación con Internet o con alguna de las plataformas que se manejaron. Lamentablemente no fue posible resolver esos problemas, a pesar de que en mi planeación incluso dediqué las últimas sesiones para poder dar un repaso y una nueva oportunidad para que aquellos que no entraron a las clases del curso pudieran tener los conocimientos de los temas y entregar las actividades, pero solo un alumno aprovechó esta oportunidad. Además de que por medio de Whatsapp les recordaba entrar a sus clases, en las mismas se les indicó cómo usar las plataformas, pero la falta de compromiso no permitió llegar a una solución.
- Fue satisfactorio poder ayudar a algunos alumnos, el mayor problema fue la inasistencia de los alumnos y eso fue algo que nunca pude corregir.
- Me sentí bien. Yo siempre he sentido que no soy muy buena explicando, pero en el curso pude darme cuenta que no soy tan mala, los chicos me entendían y había un progreso bueno en su entendimiento.
- Me sentí en su mayoría cómodo. El principal problema fue la inasistencia, la cual se trató de disminuir avisando con tiempo el horario de la clase, sin embargo, no se mostró mejorías.
- Fue un poco complicado debido a la baja participación de los alumnos. Pocos alumnos asistieron a clases y los que llegaban a asistir les costaba participar. Intenté hacer la clase más personalizada pidiéndoles a cada uno que participara en ciertos ejercicios, funcionó al inicio, pero después dejaron de asistir a clases.

¿Cuál es tu opinión de la educación en línea como alumno?

- Es poco pedagógica. Estar demasiadas horas frente a la computadora ya sea tomando clases sincrónicas o realizando actividades es cansado física y mentalmente. Además de que los profesores dejan demasiadas actividades.
- En mi caso ya estoy muy familiarizado, y me agrada la modalidad. Creo que tanto alumnos como maestros ya estamos adaptados a esta dinámica, es en cuestión nivel superior, el nivel básico creo que aún está mal el nivel.
- Considero que es igual de buena como la presencial, la explicación y el entendimiento de los temas es el mismo en línea que presencial, siempre y cuando pues uno esté poniendo atención. Claro que tiene ciertas limitaciones en el tipo de herramientas que usamos para explicarnos mejor; no es lo mismo prestar atención a un pizarrón donde se pueda explicar mejor, a una pantalla donde hay limitaciones de mal pulso, no se puede dibujar bien, etc.
- La verdad es que es bastante complicado porque puede haber factores que desvíen tu atención de la clase. Además de que el confinamiento pasa factura y empiezas a sentir agotamiento y cansancio.
- Pienso que al inicio del confinamiento fue muy difícil para todos por ser algo nuevo. Sin embargo, creo que la educación en línea tiene gran potencial. Es algo arriesgado, debido a que se requiere gran compromiso de ambas partes, pero creo puliendo las herramientas de trabajo (Internet, pizarras digitales, audio, etc.) pueden lograrse muchas cosas.

PädiUAQ | Vol. 6 Núm. 11 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

¿Cuál es tu opinión de la educación en línea como profesor?
• Es desgastante, debido a que a pesar de que se prepara el material y se buscan diversos recursos para que el alumno logre comprender los temas, no hay participación por parte de los alumnos. Considero que estos problemas son principalmente en educación básica. • Me sentí decepcionado del grupo de alumnos que me tocó, ya que nunca mostró interés en aprender y asistir a las clases. No lo tomaron con seriedad, aun sabiendo que era una oportunidad para ellos de regularizarse en una materia básica para su formación. • Las limitaciones de herramientas como lo dije en la respuesta anterior. • La verdad es que prefiero la presencial. En la educación en línea se puede tener mayor acceso a la información en cualquier momento, tienes a la mano cualquier cantidad de herramientas y aplicaciones; sin embargo, también creo que, en especial en niños, es difícil mantener la concentración, ya que no ven su casa como un espacio de trabajo, sino más bien como un espacio de descanso. • Es difícil cuando las clases se vuelven impersonales, cuando los alumnos no participan, no activan su cámara, etc. Por otro lado, también es una limitante las herramientas digitales y que no todos poseemos tabletas con lápices electrónicos para poder hacer anotaciones durante la clase.
¿Cuál crees que es el principal problema de la educación rural a distancia basado en tu opinión y vivencia?
• Frecuentemente se presentan problemas de Internet por la zona. • Podría ser la falta de Internet, sin embargo la mayoría de los alumnos contaba con un *smartphone* y aun así no se conectaba. Igual y tienen actividades aparte de la escuela como trabajo y sus clases dejan de ser su prioridad. • La poca disponibilidad o alcance a las herramientas electrónicas. • A veces es difícil porque los servicios como electricidad e Internet se ven afectados por la distancia y son poco eficientes, además de que fallan a menudo. • El acceso a Internet y espacios de estudio.
¿Por qué crees que existió una falta de compromiso/asistencia por parte de los alumnos?
• Porque las autoridades de su institución no tomaban cartas en el asunto; esto se ve reflejado en que no se tomó en cuenta nuestro curso para la entrega de calificaciones. • Porque sabían que no iban a reprobar aunque no asistieran a clases. • Por la misma falta de herramientas electrónicas y de red. • Puedo hacer hincapié en la falla de servicios como Internet y electricidad; sin embargo, también creo que es un papel fundamental que los padres tengan cierto interés hacia nosotros y confíen en nuestro trabajo para el bien de sus hijos. Por último, creo que el programa se vio más como una carga extra de trabajo que como un apoyo, creo que para los alumnos representaron más clases de las que toman en el día y pudo parecerles agotador. • La mayoría de los alumnos enlistados nunca se presentó, pienso que quizás algunos de ellos tuvieron limitantes con el acceso a Internet. Por parte de los que sí asistieron pienso que les resultaba difícil concentrarse al no encontrarse en un aula de clases y con el tiempo desistían.
¿Cuál crees que es la mejor forma de abordar los temas en matemáticas estando a distancia?
• Por medio de ejemplos, ejercicios y sobre todo en apoyo con videos. • Practicando mucho, haciendo repeticiones y repeticiones de ejercicios. • La verdad no se me hizo difícil abordar los temas con diapositivas y/o videos. • La verdad es difícil, pero creo que teniendo un material interactivo adecuado y fomentando la participación de los alumnos, se puede sobrellevar la materia. • Pienso que pueden obtenerse buenos resultados pidiéndoles a los alumnos que participen en clase, resolviendo ejercicios y opinando sobre las respuestas que consiguieron. Pedirles a aquellos que lograron el resultado correcto que expliquen a los demás cómo lo resolvieron.

¿Cuáles fueron los principales avances que pudiste observar en tus alumnos al finalizar el proyecto?
• Debido a la falta de participación solo puedo hablar de una niña, la cual al inicio era muy tímida, no participaba y en sus primeras actividades le fue mal, pero es alguien que fue constante y gracias a ella a final del curso se le notaba más segura en clase y una gran mejoría en las calificaciones de sus actividades. • Desgraciadamente mis alumnos dejaron de asistir semanas antes de concluir el ciclo escolar. • En la rápida solución de problemas de matemáticas, al principio les costaba un poco entender o razonar las ecuaciones; al finalizar el curso pude darme cuenta que el entendimiento fue mejorando. • Aunque fueron pocos los que medianamente asistieron, pude notar mejoras tanto en rapidez como en comprensión de los problemas a tratar, más en el tema de áreas y perímetros, donde básicamente se aprendió a guiarnos de fórmulas dependiendo de la figura a tratar. • Con los alumnos que se mantuvieron constantes pude ver un progreso considerable. Iniciaron el curso arrastrando problemas de cursos anteriores, los cuales pudieron ir corrigiendo durante el transcurso.
Si pudieras volver a empezar este proyecto, ¿qué cambios harías en tu planeación, desempeño y participación?
• Buscaría más apoyo por parte de las autoridades escolares, para incentivar la participación de los alumnos en el proyecto. • Primero que nada, me gustaría asegurarme de que cada uno de ellos tiene realmente la posibilidad de conectarse a una clase en línea. • Mi limitación fue mi situación laboral, tal vez no le di la participación que yo esperaba en un principio ya que mi trabajo absorbe casi el 70 % de mi día. Si volviera a empezar el proyecto planearía mejor mi tiempo. • Cambiar un poco el tiempo destinado a cada uno de los temas. Al tener el tiempo, ya habría más facilidad de fomentar la participación de los alumnos. • Incluiría en las clases algunas preguntas teóricas.
¿Cuál fue tu experiencia en el proyecto?, ¿qué fue lo que más te gustó?
• Honestamente la experiencia fue inferior a lo que imagine que sería, fue un poco mala. Sin embargo, volvería a realizar este servicio social porque puede apoyar a una niña y eso me fue muy grato. Me gustó enfrentarme a conocer los desafíos que los profesores también tienen a la hora de preparar el material y buscar opciones más dinámicas para poder captar la atención del estudiante durante la clase. También me gustó la convivencia que se llevó a cabo al inicio del proyecto. • Fue un poco frustrante el que casi nadie se conectara, o que me dejarán esperando a que se conectaran y no lo hicieran; sin embargo, el par de alumnos que se conectó hicieron la diferencia. • Los alumnos que conocí, o bueno al menos los que pudieron entrar a mis clases, conocerlos fue lo mejor, son niños que les gusta aprender. • La experiencia fue agradable, jamás había dado clases así que me pareció emocionante. Supongo que al ser matemáticas la materia, fue más fácil para mí transmitir algo que en teoría domino. • Me dio satisfacción saber que (aunque fueran muy pocos) algunos de los alumnos lograron un gran avance en sus conocimientos matemáticos.

Gracias a este proyecto, fue posible realizar un acercamiento a la escuela secundaria Jaime Torres Bodet del municipio de San Joaquín, Querétaro. Desde el inicio, la tarea representaba un reto, ya que la educación en zonas rurales difiere de la de áreas urbanas por las diversas condiciones, tanto del personal como del alumnado, sin mencionar la crisis mundial por covid-19. Originalmente, este proyecto se lleva a cabo de manera presencial; sin embargo, dadas las limitantes mencionadas, se implementó de manera virtual; quizás eso ocasionó la baja participación de los alumnos, pues algunos echan en falta el material necesario para involucrarse en el programa (además, la institución les comunicó que la participación no tenía validez curricular, y que la asistencia era opcional). Tales factores causaron un conflicto de intereses desde un inicio, ya que ni la institución ni los alumnos mostraron un interés genuino. Como líderes del proyecto, intentamos mantener comunicación vía WhatsApp con los directivos, y aunque hubo apoyo por parte de Coordinación de Enlace e Intervención Social UAQ, nuestra labor no pudo concretarse debido a la falta de exigencia por parte de la institución para con los alumnos y padres de familia. Los factores de tecnología, interés, desesperanza aprendida, complicaciones personales y laborales se convirtieron en una barrera infranqueable desde una computadora.

La labor del docente siempre se trata de hacer el mejor esfuerzo por buscar las diversas herramientas que faciliten el aprendizaje, motivar e intentar que el alumno desarrolle el gusto por la materia que uno imparte (matemáticas en este caso), pero eso es sólo una parte de la clase; la otra depende del interés, compromiso y disposición del alumno. Trabajar como educador en zonas rurales no debería suponer una batalla perdida; debería prestarse mayor atención para brindar a las poblaciones rurales la calidad educativa que se merecen y para que rehúsen alternativas como la deserción escolar porque es más viable salir a trabajar al campo por la necesidad de mejorar las condiciones económicas.

Proceso de mejora continua

Con la finalidad de obtener el mayor éxito posible en futuros proyectos en modalidad a distancia, se recomienda que:

- Las partes involucradas estén en constante comunicación.
- Los profesores que den el servicio y los que corresponden a la institución se involucren en el proyecto para compartir experiencias o actividades que ayuden al alumno a generar aprendizaje significativo.
- Los alumnos que participen tengan un lugar idóneo para tomar clases (contar con una computadora o tableta que les permita ver la pantalla completa del profesor), así como que cuenten con Internet en todo momento.
- Los alumnos se comprometan y participen durante la clase.
- Los padres de familia se aseguren de que el alumno asista a clases para así darles el mejor apoyo posible.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las siguientes instituciones su apoyo y colaboración, ya que posibilitaron el desarrollo de este proyecto:

- Coordinación de enlace e intervención social UAQ
- Escuela secundaria general Jaime Torres Bodet
- Coordinación de educación del municipio de San Joaquín, Querétaro

FINANCIAMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por los recursos otorgados para la realización de este proyecto.

REFERENCIAS

Aguado, E. (1995). *La equidad, una asignatura pendiente: Acceso y resultados educativos en cuatro zonas del Estado de México. Educación y pobreza: de la desigualdad social a la equidad. México.* UNICEF/E1 Colegio Mexiquense.

Almirón, E. y Porro, S. (2014). Los docentes en la Sociedad de la Información: reconfiguración de roles y nuevas problemáticas. *IE Comunicaciones: Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, (19), 17-31. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4794547

Bonilla Guachamín, J. (2020). Las dos caras de la educación en el COVID-19. *CienciAmérica*, 9(2), 89-98. http://dx.doi.org/10.33210/ca.v9i2.294

Bonilla, L. (2016). Deliberación en torno a la Educación Virtual. *Interconectando Saberes*, (1), 77-89. http://is.uv.mx/index.php/IS/article/view/1112

Bracho, T. (1995). Distribución y desigualdad educativa en México. *Estudios Sociológicos*, 13(31).

Bravo García, E. y Magis Rodríguez, C. (2020). La respuesta mundial a la epidemia del COVID-19: los primeros tres meses. *Boletín sobre* COVID-19 *Salud Pública y Epidemiología*, 1(1), 3-8. http://dsp.facmed.unam.mx/wpcontent/uploads/2013/12/COVID-19-No.1-03-La-respuesta-mundial-a-la-epidemiadel-COVID-19-los-primeros-tres-meses.pdf

Cabrera, L. (2020) Efectos del coronavirus en el sistema de enseñanza: aumenta la desigualdad de oportunidades educativas en España. *Revista de Sociología de la Educación*-RASE, 13(2), 114-139. https://doi.org/10.7203/RASE.13.2.17125

Ezpeleta, J. y Weiss, E. (1996). Las escuelas rurales en zonas de pobreza y sus maestros: tramas preexistentes y políticas innovadoras. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14000105

García Peñalvo, F., Abella García, V., Corell, A. y Grande, M. (2020). La evaluación online en la educación superior en tiempos de la COVID-19. *Education in the Knowledge Society (EKS)*, (21), 1-26. http://dx.doi.org/10.14201/eks.23086

García, M. D. (2020). La docencia desde el hogar. Una alternativa necesaria en tiempos del COVID 19. *Polo del Conocimiento: Revista científico-Académica Multidisciplinaria*, 5(4), 304-324. https://doi.org/10.23857/pc.v5i4.1386

Gutiérrez Rodríguez, C. A. (2018). Fortalecimiento de las competencias de interpretación y solución de problemas mediante un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 8(2), 279-293. http://132.248.161.133:8080/jspui/handle/123456789/4249

Juárez, D. (2017). Educación básica rural en Iberoamérica. *Sinéctica*, (49). Recuperado el 18 de mayo de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-109X2017000200001&lng=es&tlng=es.

Londoño, J. (1996). *Pobreza, desigualdad y formación de capital humano en América Latina 1950-2025*. Washington. Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento/Banco Mundial.

López Acevedo, G. (2004). Mexico: Evolution of earnings inequality and rates of returns to education (1988-2002). *Estudios Económicos*, 19(2), 211-284.

Marciniak, R. y Gairín Sallán, J. (2018). Dimensiones de evaluación de calidad de educación virtual: revisión de modelos referentes. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 21(1), 217-238. https://doi.org/10.5944/ried.21.1.16182

Ordaz, J. (2007). México: capital humano e ingresos. Retornos a la educación, 1994-2005. *Serie Estudios y Perspectivas N° 90*, Sede Subregional de la CEPAL en México, México, Publicación de las Naciones Unidas, N° de venta: S.07.II.G.143.

Ordaz, J. (2009). México: impacto de la pobreza en la educación rural. CEPAL - *Serie Estudios y Perspectivas. México. No.* 105. p 40.

Parker, S. y Pederzini, V. C. (2000). Género y educación en México. *Estudios Demográficos y Urbanos*, 15(43), 97-122. http://www.jstor.org/stable/40315023

Robles, C. y Sato, A. (2020). *Grupalidades virtuales. El impacto de la pandemia en los procesos grupales. En La intervención en lo social en tiempos de pandemia*. https://www.margen.org/pandemia/textos/robles.pdf

Sánchez Mendiola, M., Martínez Hernández, M., Torres Carrasco, R., Agüero Servín, M., Hernández Romo, A., Benavides Lara, M., Jaimes Vergara, C. y Rendón Cazales, V. (2020). Retos educativos durante la pandemia de COVID-19: una encuesta a profesores de la UNAM. *Revista Digital Universitaria, Aheadofprint*, (2020), 1-23. https://www.revista.unam.mx/wp-content/uploads/AOP.pdf

Tarabini, A. (2020) ¿Para qué sirve la escuela? Reflexiones sociológicas en tiempos de pandemia global. *Revista de Sociología de la Educación-RASE*, 13(2), 145-155. https://doi.org/10.7203/RASE.13.2.17135

Vaillant, D. (2017). Directivos y comunidades de aprendizaje docente: un campo en construcción. En Weinsteins y Muñoz (Eds.), *Mejoramiento y Liderazgo en la escuela* (pp. 263-291). Once miradas. http://dx.doi.org/10.14244/198271993073

Vergel Ortega, M., Rincón Leal, O. y Cardoza Herrera, C. (2016). Comunidades de aprendizaje y prácticas pedagógicas. *Boletín Redipe*, 5(9), 137-145. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6064925

DISEÑO DE SECUENCIA DIDÁCTICA BASADA EN PROBLEMAS: APLICACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

DIDACTIC SEQUENCE DESIGN BASED ON PROBLEMS: DIFFERENTIAL CALCULUS APPLICATION

LA CONCEPTION DU SÉQUENCE DIDACTIQUE BASÉE SUR DES PROBLÈMES: APPLICATION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Julisa Elizabeth Anaya López
Universidad Autónoma de Querétaro, México
julisaanaya97@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9898-6888

Yennitzzia Sanjuanita Ibarra Molina
Universidad de Tamaulipas, México
y.ibarramolina@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6204-391

Recibido el 15 de noviembre de 2021, aceptado el 8 de marzo de 2022.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es el diseño de una secuencia didáctica cimentada en la teoría del aprendizaje basado en problemas (ABP) que incluye problemáticas contextualizadas en el ámbito administrativo; para ello se tomó como referencia la planeación de la materia de Matemáticas Aplicadas a la Administración, de la carrera Administración y Gestión de Empresas de la Universidad Politécnica de Victoria del estado de Tamaulipas, analizando específicamente el bloque II: Aplicación del cálculo diferencial, específicamente, el tema II del mismo: Derivadas de Funciones. La metodología de esta investigación es de enfoque cualitativo con aproximación descriptiva. El diseño de la secuencia didáctica se ceñirá a la teoría del Aprendizaje Basada en Problemas (ABP), respecto a la construcción de conocimiento; se espera que tal construcción se produzca al contextualizar problemas de índole económico-administrativos y así construir ecuaciones que permitan su solución.

Palabras clave: administración, aprendizaje basado en problemas, cálculo diferencial, constructivismo, didáctica, ecuaciones.

El ABP, metodología constructivista usada para diseñar una secuencia didáctica, incluyendo problemáticas contextualizadas en el ámbito administrativo, se enfoca en la construcción de conocimiento para contextualizar problemas económico-administrativos.

ABSTRACT

The objective of this research is the design of a didactic sequence based on the theory of problem-based learning (PBL), which includes contextualized problems in the administrative field; for this purpose, reference was made to the planning of the subject of Mathematics Applied to Administration, of the Administration and Business Management career of the Polytechnic University of Victoria in the state of Tamaulipas, specifically analyzing block II: Application of Differential Calculus, and topic II: Derivatives of Functions. The methodology that guides this research is of qualitative focus with descriptive approach. The design of the didactic sequence will follow the process of the Problem-Based Learning Theory (PBLT), in reference to the construction of knowledge; this is expected to be produced by contextualizing economic-administrative problems and thus constructing equations that allow their solution.

Keywords: administrative field,problem based learning, differential calculus, constructivism, equations.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche est la conception d'une séquence didactique basée sur la théorie de l'apprentissage par problèmes (APP), qui comprend des problèmes contextualisés au domaine administratif; Pour laquelle la planification du sujet Mathématiques appliquées à l'administration de la carrière Administration et gestion des affaires de l'Université polytechnique de Victoria de l'État de Tamaulipas a été prise comme référence, analysant spécifiquement le bloc II: Application du calcul différentiel, et le sujet II de la idem : Dérivées de fonctions. La méthodologie qui guide cette recherche est d'une approche qualitative avec une approche descriptive. La conception de la séquence didactique suivra le processus de la théorie de l'apprentissage par problème (APP), en référence à la construction de la connaissance, cela devrait se produire lors de la

contextualisation des problèmes économiques et administratifs et de la construction d'équations permettant leur solution.

Mots-clés: domaine administratif, l'apprentissage basé sur des problèmes, le calcul différentiel, le constructivisme, l'équation.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los alumnos de nivel universitario necesitan contar con una adecuada preparación para enfrentar los acelerados cambios en la sociedad debido a que están a solo un paso de salir al mundo laboral. La adaptación a nuevos paradigmas es vital para que el egresado comprenda los fenómenos a su alrededor; por tal motivo, debe ser capacitado y preparado para sobrellevar de la mejor manera problemas diversos y resolverlos tanto de manera individual como en equipo desde el inicio en su licenciatura; además, necesita entender que los planteamientos de un problema pueden ser diversos, así como las maneras de encontrar sus posibles soluciones. Por otra parte, las matemáticas son abordadas de forma general y descontextualizada en diversas áreas disciplinares como la administración y sus ramas, lo que deriva en que los estudiantes no perciban el potencial del cálculo infinitesimal para la ciencias administrativas. Entonces, es imperativo que a los alumnos se les prepare para identificar problemas administrativos como, por ejemplo, la determinación de costos marginales, puntos de equilibrio, oferta y demanda, entre otras cuestiones, no solo desde la perspectiva financiera, sino también desde el razonamiento crítico-matemático. Es por tal motivo que el objetivo del presente artículo consiste en diseñar una secuencia didáctica a través de las derivadas de funciones para la contextualización de problemas del ámbito administrativo. Dicha secuencia debe fomentar la lógica matemática y el cálculo diferencial para resolver cuestiones administrativas que se pueden encontrar a menudo en cualquier empresa.

Esta investigación tomó como referencia el programa de estudio de la licenciatura en Administración y Gestión Empresarial de la Universidad Politécnica de Victoria, debido a que se detectó que la materia de Cálculo Diferencial está planeada para la enseñanza enfocada en la resolución de problemas comunes. Urge atender dicha problemática dado que, desde su paso por la universidad, el alumno administrador debe ser capaz de identificar contextos de la empresa donde el cálculo diferencial resulte de gran utilidad. Por tal motivo se eligió una metodología ABP, la cual desarrolla un problema de aplicación en el contexto requerido y además fomenta el uso de habilidades de comunicación y razonamiento en el alumno.

Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica a través del uso de las derivadas de funciones para la contextualización de problemas de ámbito administrativo.

Objetivos específicos

- Investigar antecedentes históricos de las matemáticas aplicadas en la administración.
- Investigar antecedentes de cálculo diferencial en el ámbito administrativo.
- Analizar la planeación de la materia *Matemáticas Aplicadas a la Administración* del tema: Aplicación del cálculo diferencial, de la licenciatura en Administración y Gestión Empresarial.
- Diseñar una secuencia didáctica tomando como base la teoría del aprendizaje basado en problemas (ABP).

MARCO TEÓRICO

Las matemáticas están estrechamente relacionadas con las ciencias económicas; más aún, distintos autores sostienen que “no puede existir una ciencia administrativa moderna sin teorías, modelos y técnicas matemáticas” (Puig, Diéguez y Torrecilla, 2015, p. 410-416). Particularmente, el cálculo diferencial es fundamental dado que apoya a la economía como una herramienta técnico-científica, especialmente en las problemáticas donde existe un panorama de constante cambio, como es el ámbito económico-administrativo. Esto sucede en el análisis y explicación de variaciones, por lo que el cálculo diferencial es una herramienta por demás útil, por ejemplo, en el cálculo de inventarios óptimos, puntos de equilibrio, variaciones en los resultados financieros de la empresa, oferta y demanda, entre otros importantes rubros:

> El elemento central para su aplicación son las funciones, las derivadas, los sistemas de ecuaciones, la pendiente, máximos y mínimos, etc. Que al unir varios de ellos se pueden llegar a realizar grandes cálculos según las necesidades de la persona, empresa, comunidad, etc. (Guerrero *et al.* 2018, p. 1-16)

El *análisis marginal* es como se le llama al cálculo diferencial en el campo económico-administrativo y este concepto se refiere a cómo cambian los valores de una variable dentro de un margen o contexto frente a cambios de otra variable.

Por ejemplo:

> Al hablar sobre demanda, pero no solo tomar el concepto de bienes y servicios que un grupo de consumidores puede y quiere comprar, sino también de la necesidad que un consumidor tiene de un bien o servicio y los diversos factores que influyen en su comportamiento real. Por lo que, para simplificar este proceso, se mantienen los factores en niveles constantes, manteniendo la relación de la cantidad demandada de un producto o servicio y su precio, obteniendo así, la función o curva de demanda, caso similar al hablar de la función de la oferta. (García *et al*. 2011, p. 137-171)

Por otra parte, generar un servicio o producto tiene un costo inicial, por lo que es vital el uso del cálculo para la creación de funciones que faciliten la identificación de variaciones del costo total y las distintas clasificaciones del costo. De igual modo, hace falta una función de beneficios que permita conocer el ingreso, sus variaciones y las modificaciones con base en los costos o factores que influyen en los resultados finales:

> Para cualquier empresa con fines lucrativos su principal interés es el maximizar utilidades y minimizar costos, es en este caso en el que el cálculo diferencial ayuda para crear funciones optimizadas que incrementen las utilidades o reduzcan los costos productivos. (Gaviria, 1999, p. 27-59)

Como se ha mencionado, el uso del cálculo diferencial en las ciencias administrativas es fundamental, ya que, según Rendón (2009), "ayuda a clasificar las operaciones según su naturaleza en el campo cuantitativo al unir la perspectiva matemática para la resolución y la administrativa para el análisis y comprensión de los resultados, teniendo una visión más amplia".

Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Una metodología basada en problemas permite desarrollar habilidades de aprendizaje, las cuales ayudan a adaptarse a los cambios y exigencias de la sociedad en la actualidad. Con el uso de la metodología ABP, "los estudiantes podrán obtener las aptitudes idóneas para desempeñar cualquier tipo de trabajo lógico" (Rodríguez, Mones y Escobar, 2013, p. 543).

Se busca que el alumno genere su propio conocimiento y que por sí solo contextualice y dé solución a los problemas administrativos planteados en la secuencia didáctica mediante el razonamiento matemático. Por tanto, a continuación, se mencionan las definiciones de ABP según los distintos autores que determinan el marco metodológico de la investigación: el ABP es "un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos" (Barrows, 1986, p. 241- 486).

> El ABP es un método didáctico, que cae en el dominio de las pedagogías activas y más particularmente en el de la estrategia de enseñanza denominada *aprendizaje por descubrimiento y construcción*, que se contrapone a la estrategia expositiva o magistral. Si en la estrategia expositiva el docente es el gran protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje, en la de aprendizaje por descubrimiento y construcción es el estudiante quien se apropia del proceso, busca la información, selecciona, organiza e intenta resolver con ella los problemas enfrentados. (Restrepo, 2005, p.481-486)

"El ABP es un método centrado en el estudiante, basado en el principio de usar problemas como el punto de partida para la adquisición de nuevos conocimientos" (Lambros, 2008, p.10).

Barrows (1986) indica dos variables principales que determinan distintos tipos de ABP:

- El grado de estructuración del problema. Es decir, se pueden encontrar desde problemas rígidamente estructurados y con alto grado de detalles, hasta problemas abiertos o mal definidos que no presentan datos y en los que queda en manos del estudiante la investigación del problema.
- El grado de dirección del profesor. Es él quien controla el flujo de información y se encarga desde comentar los problemas en clase hasta reflexionar acerca de las dificultades que los alumnos han encontrado en el proceso de resolución (p. 241- 486).

Características del aprendizaje basado en problemas

El ABP es una metodología con enfoque constructivista, pues permite al alumno resolver problemas desde su propia perspectiva, dándole autonomía en el proceso de resolución. Las principales características de este enfoque podrían resumirse en (Granado, 2018):

- El grupo de trabajo no debe exceder 10 alumnos y alumnas.
- El trabajo debe ser colaborativo.
- El papel del docente en el ABP es el de facilitador del aprendizaje (tutor).
- El foco no es resolver el problema sino que este sea utilizado como base para identificar los temas u objetivos de aprendizaje en relación con la materia.
- El proceso se centra en el estudiante, quien asume el control del propio aprendizaje.

Por su parte, Guevara (2010) menciona las siguientes características del ABP:

- Promueve la participación activa de los alumnos en la adquisición de su propio conocimiento.
- Se orienta hacia la solución de problemas que son seleccionados o diseñados para lograr ciertos objetivos de conocimiento.
- Centra el aprendizaje en el alumno y no en el profesor ni los contenidos.
- Estimula el trabajo colaborativo en diferentes disciplinas; se trabaja en grupos pequeños.
- Convierte al profesor en un facilitador o tutor del aprendizaje.

Fases del aprendizaje basado en problemas

El desarrollo de la metodología ABP conlleva una serie de fases para el cumplimiento de la enseñanza-aprendizaje que se quiera lograr. Moreno y Sierra (2011) mencionan un proceso llamado *los siete saltos*, que se define a continuación:

1. Esclarecer las frases y los conceptos confusos de la formación del problema.
2. Definir el problema: describir exactamente qué fenómenos se deben explicar o entender.
3. Tormenta de ideas: conocimientos previos y sentido común.
4. Detallar explicaciones propuestas.
5. Formular temas para el aprendizaje autodirigido.
6. Intentar llenar lagunas de los conocimientos propios mediante el estudio personal.
7. Compartir las conclusiones propias e integrar conocimientos.

Se presentan 8 pasos para la elaboración de un aprendizaje basado en problemas:

1. Asignación del problema
2. Clarificación de términos
3. Análisis del problema
4. Explicaciones tentativas
5. Objetivos de aprendizaje
6. Estudio independiente
7. Reporte de hallazgos
8. Conclusiones

METODOLOGÍA

La metodología de este trabajo es la del aprendizaje basado en problemas (ABP), la cual tiene un enfoque constructivista, ya que promueve el aprendizaje autónomo del alumno y pone al docente como facilitador, fomentando el trabajo en equipo y la búsqueda de la resolución de problemas. Por tal motivo, a lo largo del desarrollo metodológico, se seguirán las fases que plantea Restrepo (2005). El problema expuesto en la secuencia didáctica se eligió porque es el más adecuado conforme al cuatrimestre y al resto de materias que se imparten en el mismo y, a su vez, funciona como premisa para las materias de los cuatrimestres posteriores en las que se podrían aplicar bases matemáticas.

El enfoque fundamentado del presente es de tipo cualitativo, de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2014), quienes indican que "El enfoque cualitativo se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados". El objetivo es diseñar una propuesta didáctica con base en el análisis de la currícula de la materia de *Matemáticas Aplicadas a la Administración* impartida en el segundo cuatrimestre del plan de estudios de la licenciatura en Administración y Gestión Empresarial de la Universidad Politécnica de Victoria, Tamaulipas. Al analizar la currícula, el instrumento de recolección de datos y de análisis será el plan de estudios activo a la fecha de la materia mencionada.

Para este estudio, el alcance es descriptivo según Hernández *et al.* (2014), quienes mencionan que un estudio descriptivo "busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis".

SECUENCIA DIDÁCTICA

A continuación, se desarrollan los pasos de la metodología ABP para el diseño y aplicación de la secuencia didáctica. Se tomó en cuenta el contexto del problema referenciado en Cubillos (2002).

Asignatura: Matemáticas Aplicadas a la Administración

Tema: Bloque II: Derivadas de funciones

Contenido: Problemáticas administrativas resueltas mediante cálculo diferencial.

Duración: 2 *horas*

Número de sesiones: 2

Propósito: Fomentar el desarrollo del pensamiento matemático aplicado al área administrativa mediante el aprendizaje basado en problemas.

Secuencia:

- Discusión inicial: Comentar sobre conceptos generales, explicación breve por parte del docente para reforzar nociones y aclarar dudas.
- Actividad de apertura: Realizar una dinámica de inicio con el fin de que los alumnos recuerden conocimientos adquiridos en nivel medio superior, para facilitar el entendimiento al desarrollar el problema central.
- Desarrollo: Exponer las problemáticas planteadas mediante el cálculo diferencial.
- Conclusiones grupales: Comentar sobre los resultados obtenidos, metodología de solución de cada grupo, conclusiones y aprendizajes finales.
- Evidencias: Secuencia didáctica desarrollada por los alumnos como parte del portafolio de evidencias del bloque.
- Recursos: Cuaderno, bolígrafo, calculadora, Internet y plataformas digitales.

Actividad de apertura

Duración: 15 minutos

Instrucciones: Resuelva individualmente y de manera rápida las ecuaciones (1) a la (5).

$$y = x^4 + 3x^2 - 6 \tag{1}$$

$$y = 6x^3 - x^2 \tag{2}$$

$$y = \tfrac{x^3 - x^2 + 1}{5} \tag{3}$$

$$y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c \tag{4}$$

$$y = x(2x-1)(3x+2) \tag{5}$$

Desarrollo: Solución del problema según los pasos de la Teoría de aprendizaje basado en problemas.

Paso 1. Asignación del problema

El problema planteado a continuación se eligió debido a que se puede resolver por el medio matemático a través de derivadas. El alumno puede interpretar las funciones en desarrollo, de modo tal que al final de cada problema sea capaz de plantear la relación del cálculo diferencial con el ámbito administrativo:

Un vendedor de lavadoras ha hecho un análisis de costos, creando una función para calcular el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del número de unidades de cada pedido que recibe.

Nota: Se deja al alumno elaborar la ecuación y dar pie al desarrollo del problema.

Paso 2. Clarificación de conceptos

El alumno plantea su propia ecuación definiendo las incógnitas según la información dada en el planteamiento del problema.

Incógnitas sugeridas para el estudiante:

- f'(q) = costo anual
- q = mínimo o valor crítico

El docente cumple el rol de facilitador que se menciona en la metodología, por lo que, en caso de presentarse, se sugiere aclarar dudas respecto a:

- Función
- Primera y segunda derivada
- Máximos y mínimos

Paso 3. Análisis del Problema

A menudo las organizaciones necesitan determinar la cantidad de un artículo que deberá conservarse en almacén. Para los vendedores, el problema se relaciona con el número de unidades de cada producto que ha de mantenerse en *stock*. Para los productores, consiste en decidir qué cantidad de materia prima debe estar disponible. Este tipo de problemas se identifican como control o administración de inventario. Por lo que respecta a la pregunta de cuánto inventario ha de conservarse, se debe ponderar el hecho de que tener muy poco o demasiado inventario puede derivar en costos excesivos o no contemplados. Por ello existe un valor crítico de inventario que se debe tener previsto para evitar el exceso de costos al área. Este tipo de problemas comunes en el ámbito administrativo no solo pueden solucionarse mediante fórmulas financieras, calculando el punto de equilibrio o usando un método como PEPS y UEPS.

En el caso planteado se buscará la solución mediante la derivada aplicada a máximos y mínimos. Para este tema existen dos conceptos fundamentales: la primera y segunda derivada, que se puede analizar en la clasificación de conceptos del paso 2.

A continuación, se presenta una propuesta de resolución al problema:

Sea la Ecuación (1) la sugerida para iniciar con la resolución, tomemos:

$$C = f(q) = \frac{4860}{q} + 15q + 750000 \qquad (1)$$

Donde C es el costo anual del inventario expresado en pesos y q denota el número de lavadoras ordenadas.

Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario

¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?

Solución:

La Ecuación (2) que corresponde a la primera derivada es

$$f'(q) = -4860q^{-2} + 15 \qquad (2)$$

La Ecuación (3) que corresponde a f' se iguala a cero

$$-4860q^{-2} + 15 = 0 \qquad (3)$$

Cuando la Ecuación (4) se resuelve, se determina el valor de q

$$\frac{4860}{15} = q^2 \qquad (4)$$

De donde existe un valor crítico en 18 = q

La naturaleza del punto crítico se comprueba al obtener la Ecuación (5), que corresponde a la segunda derivada f''

$$f''(q) = 9720q^{-3} = \frac{9720}{q^3} \qquad (5)$$

En la Ecuación (6) al evaluar el valor crítico se obtiene:

$$f''(18) = \frac{9720}{(18)^3} = 1.667 > 0 \qquad (6)$$

Los costos anuales del inventario se minimizarán cuando se pidan 18 lavadoras cada que el vendedor reponga existencias.

Los costos anuales mínimos del inventario se determinan en la Ecuación (7) calculando f(18). Es decir:

$$f(18) = \frac{4860}{18} 15(18) + 750000 = 270 + 270 + 750000 = 750540 \qquad (7)$$

Para la resolución del problema, el paso principal es establecer la función *f(x)* que será el costo anual del inventario. Se plantearon dos preguntas, y para encontrar los extremos relativos de una función, es necesario evaluar las primeras y segundas derivadas a través del dominio de la función en donde esta es caracterizada por cumbres y hondonadas. La regla para encontrar el mínimo es la misma que para encontrar el máximo, excepto que la segunda derivada sería positiva cuando la función se encuentra en el punto mínimo.

Paso 4. Explicaciones tentativas

Una vez que el alumno tiene una ecuación planteada, explica las razones por las que llegó a esa ecuación como método para la solución del problema.

Conceptos complementarios de derivada (en caso de que el alumno no cuente con el conocimiento previo requerido): máximos y mínimos, proceso de resolución de la primera y segunda derivada, punto de inflexión y concavidad.

Paso 5. Objetivos de aprendizaje

- Fomentar el aprendizaje colaborativo a través de la resolución de problemas.
- Desarrollar el concepto de derivada de funciones y que el alumno pueda asociarlo a problemas administrativos.
- Lograr que el alumno identifique la incógnita del problema planteado, así como la fórmula o procedimiento a seguir para resolverlo.
- Lograr que el alumno contextualice problemas matemáticos de ámbito administrativo mediante el tema de derivadas y reconozca las ventajas de la aplicación del cálculo en la administración.

Paso 6. Estudio independiente

- Buscar información en diversos medios (Internet, biblioteca, libros digitales, etc.) para obtener la fórmula requerida y así resolver su ecuación.
- Plantear dudas, formas de resolución y conclusiones para discusión en clase.

Paso 7. Reporte de hallazgos

- El alumno resuelve el problema en equipo potenciando las habilidades de cada integrante.
- Recopilación de datos de la aplicación al problema *(pendiente de aplicación).*

Paso 8. Conclusiones

- El alumno identifica el contexto administrativo del problema.
- El alumno identifica más de un procedimiento para resolver los problemas, ya sea desde la perspectiva administrativa o la matemática.
- Se pretende promover el uso del razonamiento matemático de los alumnos con el fin de que sean capaces de construir sus propios métodos de resolución de problemas.

CONCLUSIONES Y RESULTADOS ESPERADOS

Debido a que esta secuencia didáctica no ha sido aplicada, se tienen los siguientes resultados esperados, con el fin de que en el siguiente periodo en el que la materia sea ofertada se concluya el proceso.

En la aplicación de las etapas antes mencionadas de la secuencia didáctica diseñada se esperan los siguientes resultados:

- Al desarrollar el paso 7 los alumnos podrán resolver el problema usando conocimiento previo y siguiendo los pasos anteriores.
- Los grupos colaborativos obtendrán cambios significativos en su aprendizaje, en la habilidad de comunicarse (de forma oral y escrita) y se integrarán en equipos multidisciplinarios en materias relacionadas.
- La metodología ABP se integrará como herramienta útil para el desarrollo del conocimiento y dominio de la materia.
- Al redactar las conclusiones (paso 8), el alumno comprenderá la función de cada parte de la ecuación y cómo se representan en la práctica.
- Aparte de la solución del problema, el alumno obtendrá una perspectiva más amplia sobre la solución de problemas.

REFERENCIAS

Barrows, H. (1986). A Taxonomy of problem based learning methods. *Medical Education*, (20), 481-486.

Cubillos, J. (2002). *Matemáticas I.* ESAP Publicaciones.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Heckien, M. (2019). *Funciones.* Ediciones UNL.

García, L., Moreno, M., Badillo, E., y Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía*, (31), 137-171. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=195621325006

Gavira, N. (1999). Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones a la Economía, Demografía y Seguros. *Revista electrónica de contenido matemático*, 9(2), 27-59.

Granado, L. (2018). El aprendizaje basado en problemas como estrategia didáctica en educación superior. *Voces de la Educación*, 3(6), 155-167. https://www.revista.vocesdelaeducacion.com.mx/index.php/voces/article/view/127/149

Guerrero, L., Hernández, A., Martínez, O., y Segura, J. (2018). Cálculo diferencial y el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista en Línea Atlante Cuadernos de Educación y Desarrollo.* p. 1-16

Guevara, G. (2010). Aprendizaje Basado en Problemas como técnica didáctica para la enseñanza del tema de la recursividad. *Revista de las Sedes Nacionales*, 11(20), 142-167. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=66619992009

Hernández, S., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* McGraw. Hill.

Lambros, A. (2008). *Problem based learning in middle and high school classrooms. A teacher's guide to implementation.* Corwin Pass.

Moreno, M. y Sierra, A. (2011). *Uso del Aprendizaje Basado en Problemas en Administración.* (Tesis de Maestría). Chía.

Rendón, H. (2009). *Cálculo para administración y Turismo.* Ediciones de la Noche.

Restrepo, B. (2005). Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): Una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y Educadores*, (8), 9-19. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83400803

Rodríguez, E., Montes, J. y Escobar, R. (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia et Technica*, 18(3), 543. https://www.redalyc.org/pdf/849/84929154015.pdf

Puig, Osmany, Diéguez, Raquel, y Torrecilla, Raudel (2015). Regularidades de la formación matemática en carreras universitarias de Ciencias Económicas. *Multiciencias*, 15(4), 410-416. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90448465007

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO