PädiUAQ 10

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

VOLUMEN 5, NÚMERO 10

JULIO - DICIEMBRE 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

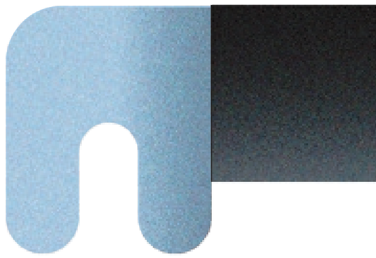
PädiUAQ, vol. 5, No. 10, Julio-diciembre 2022, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, Querétaro Qro., C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00 ext. 6023, https://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padiuaq@uaq.mx Editor responsable: Victor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-040413274400-102, ISSN: en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Victor Larios Osorio, Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, Querétaro Qro., C.P. 76010, fecha de última modificación 7 de julio de 2022.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

COMITÉ EDITORIAL

CONTENIDO



ARTÍCULOS

EDITORIAL

NÚMERO TEMÁTICO SOBRE *LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO*

Rosa Elvira Páez Murillo,
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
rosa.paez@uacm.edu.mx,
*ORCID https://orcid.org/*0000-0001-7825-9686
Editora invitada

PRESENTACIÓN

Este ejemplar corresponde al primer número temático que se propone en la Revista PädiUAQ. Es de gran satisfacción que se dedique a la *Teoría de Espacios de Trabajo Matemático* (ETM), la cual tuvo sus orígenes hace ya más de 20 años dentro del dominio de la geometría, y actualmente se extiende a los del análisis matemático, la probabilidad y la física, entre otros. Tal como lo expresa uno de sus fundadores, "el propósito de la teoría de los ETM es el estudio específico del trabajo matemático en el que los alumnos y los profesores se dedican realmente a la enseñanza de las matemáticas" (Kuzniak, 2019, p. 46). En otras palabras, es "describir, comprender y (trans)formar el trabajo matemático dentro del contexto escolar" (Kuzniak, Nechache y Richard, 2022). Así que, para comprender a cabalidad su propósito, a continuación, precisamos la noción de trabajo matemático:

> *El trabajo matemático debe entenderse como un proceso humano intelectual de producción en curso, cuya orientación y finalidad están definidas y apoyadas por las matemáticas y, en general, por la cultura matemática. [...] tiene por objeto realizar una tarea, resolver un problema o superar un obstáculo en relación con las matemáticas. Requiere la movilización y el desarrollo sostenidos de recursos materiales o intelectuales derivados de la cultura matemática. (Kuzniak, Nechache y Richard, 2022, cap. 3)*

El trabajo matemático que realiza el individuo cuando se enfrenta a la tarea matemática dentro de la Teoría se organiza en un espacio abstracto, que vincula un plano epistemológico (que tiene que ver con el contenido matemático) con un plano cognitivo que nos permite la identificación de los procesos que el individuo utiliza para la resolución de la misma. De esta manera, con ayuda del diagrama plasmado en un prisma triangular que veremos en cada uno de los artículos que se presentan dentro de este número, podremos reconocer logros, bloqueos y malentendidos en el desarrollo de las tareas. Esta herramienta metodológica es uno de los elementos que principalmente me ha enamorado de la Teoría, ya que direcciona el trabajo de docencia y de diseño de tareas dentro del rol que desarrollamos como profesores-investigadores. El contraste del análisis cognitivo de la tarea con el trabajo matemático que realiza el estudiante vislumbra caminos a seguir en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Páez Murillo, Pluvinage y Vivier, 2019).

En el tenor del diseño de tareas y, más específicamente, las de evaluación en línea, el artículo de Gaona presenta tres casos; concebidos para ser implementados con la plataforma Moodle/Wiris, se caracterizan principalmente porque cada tarea es única para cada estudiante. Es decir, hay variantes que permiten dar cuenta de un trabajo matemático personal único, y no hay preocupación de que exista comunicación entre ellos mismos; además, la retroalimentación juega un papel fundamental, tal y como se evidencia en los resultados de su experimentación con estudiantes del nivel superior en una modalidad no presencial.

En el artículo de Martínez, Pluvinage† y Montaño, se presenta una tarea específicamente de modelización del movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Con un Espacio de Trabajo Matemático extendido a la Física, y de acuerdo a la "plasticidad abierta e integradora" (Artigue, 2016) del uso de esta Teoría, los autores presentan el modelo ETFM en concordancia con las necesidades que implica el trabajo físico y matemático de la tarea propuesta. Su labor permite identificar y explicar los procesos de carácter cognitivo, semiótico, experimental y discursivo que despliegan los estudiantes en el desarrollo de dicha tarea. La implementación se realiza con estudiantes de un curso de cálculo integral de una licenciatura de ingeniería, bajo el direccionamiento de la metodología de enseñanza ACODESA.

Nechache y Parzysz, en su artículo, utilizan la Teoría ETM para analizar las tareas en relación con experimentos aleatorios, así como el uso y el rol de la simulación informática (aquella realizada con ayuda de un artefacto tecnológico: calculadora, *software*, aplicación móvil, etc.), que proponen cinco libros utilizados en la clase de segundo en Francia (el primer año de liceo en Francia, corresponde al primero de bachillerato para México). El análisis realizado evidencia una necesidad en las tareas propuestas y en las que se diseñen a futuro: que se propicie una articulación entre los dominios de la probabilidad, la estadística y el que estos autores proponen, el de la simulación.

Finalmente, expreso mis agradecimientos a Víctor Larios por la invitación a la edición de este número. Los invito a disfrutar de su lectura y a fomentar el uso de la Teoría ETM en el trabajo teórico-práctico en el aula de clase y en la investigación. Y del mismo modo, los exhorto a formar parte de la comunidad de investigadores cuyo encuentro es cada dos años en el *Simposio Internacional de Estudio sobre el Trabajo Matemático* (*https://etm7.sciencesconf.org/*).

Referencias

Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. ZDM-*Mathematics education*, 48(6), 935-939. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0810-z

Kuzniak, A. (2019). La théorie des Espaces de Travail Mathématique – Développement et perspectives. En L. Vivier y E. Montoya-Delgadillo (eds.). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp. 21-60). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Richard, P. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces in brief. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. Richard (eds.), Mathematical work in educational context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Páez Murillo, R. E., Pluvinage, F. y Vivier. L. (2019). Analyse cognitive d'une tâche d'évaluation dans le cadre de la théorie des espaces de travail mathématique. Actes du séminaire de didactique des mathématiques (pp. 160-162). París, Francia. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140/document

ARTÍCULOS TEMÁTICOS

01

DISEÑO DE TAREAS EN UN SISTEMA DE EVALUACIÓN EN LÍNEA, UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA DE ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

TASK DESIGN IN AN ONLINE ASSESSMENT SYSTEM, A VIEW FROM THE THEORY OF MATHEMATICAL WORKING SPACES

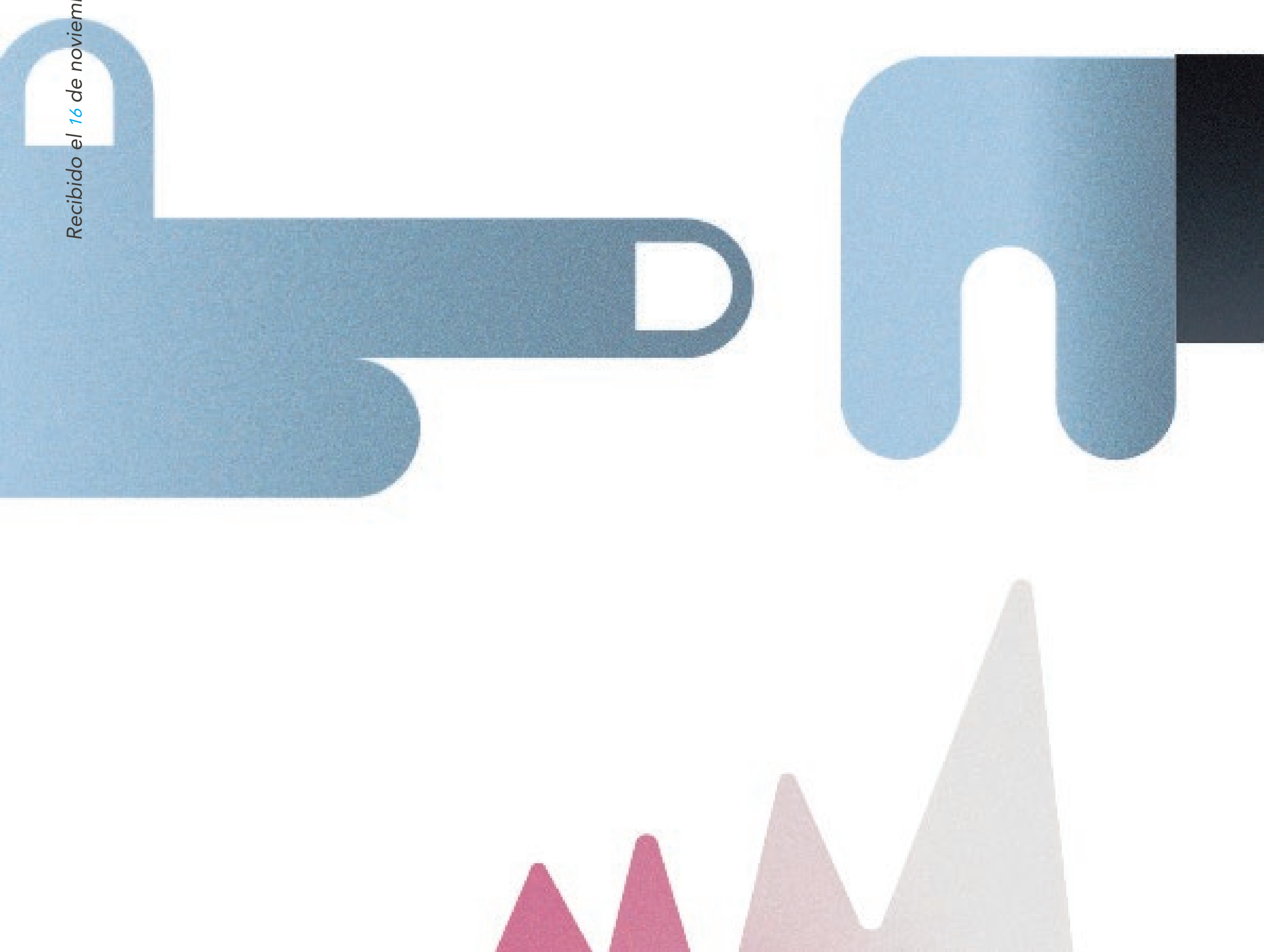
CONCEPTION DE TÂCHES DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE, UNE APPROCHE À PARTIR DE LA THÉORIE DES ESPACES DU TRAVAIL MATHÉMATIQUES

Jorge Gaona[1]

[1] *Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile*

[1]*Correo: jorge.gaona@upla.cl*

Recibido el 16 de noviembre de 2021, aceptado el 7 de marzo de 2022. Artículo por invitación.



RESUMEN

En esta contribución se presentan los resultados de tres casos de diseño de tareas en sistemas de evaluación en línea y el trabajo matemático que despliegan estudiantes de pedagogía en matemática y de ingeniería, todos en contextos virtuales debido a la pandemia. Se estudió el trabajo matemático a partir de algunas variables didácticas de las tareas que se proponen como pautas de diseño. Se muestra cómo los registros de representación semiótica y los números que los definen, los objetos matemáticos, la apertura de las tareas y el ciclo de retroalimentación afectan el trabajo matemático y provocan la activación de distintas génesis y planos.

Palabras clave: educación matemática, diseño de tareas, evaluación en línea, Espacio de Trabajo Matemático.

ABSTRACT

This contribution presents the results of three cases of task design in online assessment systems and the mathematical work deployed by mathematics and engineering pedagogy students, all in virtual contexts due to the pandemic. The mathematical work was studied from some didactic variables of the tasks, which are proposed as design guidelines. It is shown how the semiotic representation registers and the numbers that define them, the mathematical objects, the opening of the tasks and the feedback cycle affect the mathematical work and provoke the activation of different genesis and plans.

Las tareas de matemáticas que los estudiantes realizan en casa son un importante apoyo a las clases, ya sea en línea o presenciales. Aquí se muestra el proceso de diseño para 3 ejemplos que van desde los números complejos hasta la geometría analítica.

Keywords: mathematics education, task design, online assessment, Mathematical Working Space.

RÉSUMÉ

Dans cette contribution, nous présenterons quelques résultats de trois cas sur la conception de tâches dans une base d'exercices en ligne et le travail mathématique effectué par des étudiants en formation de professeur de mathématiques et des étudiants en formation d'ingénieur, tous dans des contextes virtuels en raison de la pandémie. Le travail mathématique a été étudié à partir de la variation de certaines variables didactiques des tâches et sont proposés comme guides leur conception. Nous montrons comment les registres de représentation sémiotique et les nombres qui définissent les objets mathématiques, l'ouverture des tâches et le retour d'information affectent le travail mathématique, en activant différentes genèses et niveaux.

Mots-clés: didactique des mathématiques, conception des tâches, évaluation en ligne, Espace de Travail Mathématique.

PROBLEMÁTICA

Las tareas son un elemento indispensable en los procesos de enseñanza que busca promover el aprendizaje en los estudiantes (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 24). Esto no es solo aplicable para los procesos educativos, las tareas también son importantes para que nuevos aprendices entren en un paradigma científico (Kuhn, 1971) o en prácticas comunitarias (Radford, 2014).

Hay diferentes definiciones de lo que es una tarea matemática. Sierpinska (2014) la define como cualquier tipo de problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formulados, que se sabe que los alumnos pueden resolver en un tiempo predecible. Por otra parte, Chevallard (1999, p. 224) la precisa como una acción que se puede establecer mediante un verbo y está asociada a un objeto específico. En ambos casos, quien resuelve esa tarea está llamado a realizar una actividad matemática (Vandebrouck, 2013). En el marco de la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se han definido algunos tipos específicos de tareas como las tareas emblemáticas, que son aquellas que están disponibles en el ETM de referencia; deben estar activas en el ETM idóneo y ser potencialmente conducentes a un trabajo matemático completo (Kuzniak *et al.*, 2022).

En la literatura, el diseño de tareas ha sido ampliamente abordado. Ainley *et al.* (2006) habla de la paradoja de la planificación: si los profesores planifican muy centrados en los objetivos de aprendizaje, es probable que las tareas que establezcan sean poco gratificantes para los alumnos y se empobrezcan matemáticamente. Si la enseñanza se planifica en torno a tareas atractivas, la actividad de los alumnos puede ser mucho más rica, pero es probable que el foco esté menos claro y que el aprendizaje sea difícil de evaluar. De una forma u otra, se confrontan objetivos pedagógicos con objetivos didáctico-matemáticos. Los autores plantean el diseño de tareas con propósito y utilidad mediante la creación de un producto explícito: construir algo para otros y proponer oportunidades para que los estudiantes tomen decisiones.

Por otro lado, desde un punto de vista epistemológico, Zaslavsky (2005) plantea diseñar tareas que generen incertidumbre para así concebir discusión, mientras que Francisco y Maher (2005) concluyen que resulta más provechoso plantear una tarea compleja en vez de una secuencia de tareas simples. Al enfocarnos en el diseño de tareas con tecnología, podemos destacar el trabajo de Simon *et al.* (2016) quienes muestran cómo elementos específicos del diseño en una tarea sobre fracciones en un ambiente tecnológico influyen en las estrategias de los estudiantes. Sangwin *et al.* (2010, p. 234) discuten sobre el potencial de las tareas en ambientes de evaluación en línea con corrección y *feedback* automático, tomando en cuenta las características técnicas de estos sistemas. Por ejemplo, presentan una tarea abierta, es decir, donde piden la respuesta de un objeto matemático que cumpla ciertas condiciones, sin embargo, no muestran resultados con estudiantes donde se estudie la diferencia entre el potencial y el trabajo matemático efectivo. En Stacey y Wiliam (2013), se proponen algunos principios que deberían guiar el diseño de tareas de evaluación: valorar lo matemáticamente importante, evaluar para mejorar el aprendizaje y apoyar a cada estudiante a aprender y demostrar esta formación.

En 2015, se realizó un estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática sobre el diseño de tareas para las clases de matemáticas (Watson & Ohtani, 2015) donde se analizan distintos aspectos del proceso. En el capítulo de Kieran *et al.* (2015) se muestra cómo se establece de forma intencional una relación directa entre un marco teórico y el diseño de tareas. Se exponen múltiples ejemplos de cómo se han explicitado principios desde una teoría didáctica para diseñar tareas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Teoría de la Variación, Teoría de Cambios Conceptuales, Aprendizaje Conceptual a través de la Abstracción Reflexiva y Matemática Realista. En contrapartida, se muestra la tensión que existe entre este diseño como ciencia (a partir de un marco teórico) y el diseño como arte dando espacio a la creatividad. Mientras que, en el capítulo de Leung y Bolite-Frant (2015), se discute el rol de las herramientas en el diseño de las tareas, tanto digitales como de otra naturaleza y en la interacción de la tarea como medio para resolverlas (Leung & Bolite-Frant, 2015). En este capítulo también se muestra la estrecha relación que puede existir entre el diseño de tareas con herramientas y teorías didácticas, entre las cuales destacan, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998) en la cual el concepto de *medio* o *milieu*[1] es esencial, la Aproximación Instrumental (Rabardel, 1995) donde se pone un énfasis en la transformación de un artefacto a un instrumento mediante esquemas de uso y el Marco Semiótico Cultural (Bartolini Bussi & Mariotti, 2015) que considera el papel crucial de la mediación humana bajo perspectivas semióticas y educativas. Otros trabajos desarrollados en Latinoamérica también dan cuenta de la estrecha relación entre el diseño de tareas y otros marcos teóricos, tales como el enfoque enactivista (Lozano, 2017), el MTSK (Martínez *et al.*, 2020), el enfoque Onto-Semiótico (Bastias, 1980; Pochulu *et al.*,

1 Brousseau (1998) describe el *milieu* como un espacio físico donde actúa el estudiante y aprende por adaptación a él.

2016), la Modelación Matemática (Guerrero-Ortiz & Mena-Lorca, 2017) o APOE (Trigueros & Oktaç, 2019). En todas estas contribuciones se observa que se priorizan los criterios para diseñar que dependen de los principios en los que se fundamentan los marcos teóricos.

En la comunidad de investigadores que trabajan con ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.*, 2016, 2022; Kuzniak & Richard, 2014), el diseño de tareas se ha abordado desde el análisis del trabajo matemático efectivo a partir de tareas específicas (Coutat & Richard, 2011; J. V. Flores & Carrillo, 2019; Henríquez-Rivas *et al.*, 2021; Kuzniak *et al.*, 2018; Menares, 2018; Montoya-Delgadillo *et al.*, 2016). Con respecto al uso de herramientas, en el trabajo de Flores *et al.* (2022) se adopta una perspectiva instrumental, tomando en cuenta al mismo tiempo elementos semióticos y discursivos, pensándolos como un sistema y extendiendo la idea de *máquinas matemáticas* de Bartolini y Maschietto (2006).

Por otra parte, el diseño de tareas es un tema que se está comenzando a trabajar. En el Sexto Simposio del Espacio de Trabajo Matemático, Gómez-Chacón *et al.* (2019, p. 524) se plantearon algunas preguntas respecto al diseño y en este artículo queremos retomar algunas de ellas: ¿Cómo abordar los cambios de dominio (o de disciplina) desde la perspectiva del diseño de tareas en el ETM? ¿Cómo se adaptan los diferentes componentes y génesis del ETM en función de las tareas diseñadas? Sin embargo, intentar responder estas preguntas de manera general parece una tarea que excede las posibilidades de este artículo, por lo que se tratará de contestarlas enfocándose al diseño de tareas en sistemas de evaluación en línea, prestando particular atención al rol del *feedback* y a partir de los resultados de trabajos recientes sobre el tema (Gaona, 2021; Gaona, Hernández *et al.*, 2021; Gaona, López *et al.*, 2021; Gaona & Menares, 2021).

MARCO TEÓRICO

Espacios de Trabajo Matemático y artefactos digitales

El objetivo de la teoría ETM es describir, analizar, diseñar y comprender el trabajo matemático propuesto a un individuo en una institución y realizado por éste (Kuzniak *et al.*, 2016). Para caracterizar el trabajo matemático, la teoría considera aspectos epistemológicos y cognitivos.

En el plano epistemológico se encuentran los objetos y/o herramientas que permiten desarrollar el trabajo matemático y se definen tres polos: el *representamen*, los artefactos y el referencial teórico. De acuerdo con Kuzniak *et al.* (2016), en el modelo de los ETM, los objetos matemáticos pueden convertirse en herramientas y viceversa. Por otra parte, en el plano cognitivo, se encuentran tres procesos a través de los cuales se intenta dar cuenta de la actividad matemática: visualización, construcción y prueba.

Cabe observar que, para poder identificar las génesis que se activan en la resolución de una tarea, necesitamos identificar en cuál de los tres polos del plano epistemológico se encuentra un objeto matemático en particular. El estatus de un objeto o herramienta, en relación con el polo en el cual se encuentra, estará dado más bien por su utilización que por una característica intrínseca. A saber, diremos que un objeto o herramienta matemática está en el polo del *representamen* cuando se utiliza como una herramienta semiótica, en otros términos, cuando se trabaja a partir de su visualización y se toman en cuenta las relaciones entre sus unidades figurales en el sentido de Duval (2005) y no solo la percepción visual que el acceso directo al objeto provee.

Los objetos del polo de los artefactos materiales o simbólicos se identificarán cuando se trabaje con herramientas materiales (como regla y compás), herramientas informáticas (como una calculadora CAS) o artefactos simbólicos (como un algoritmo). Los dos primeros casos, dada su naturaleza, son fácilmente identificables; en cambio, el artefacto simbólico lo identificaremos cuando un objeto matemático o un algoritmo se utilice como una herramienta para obtener un resultado y no se tomen en cuenta sus propiedades, vale decir, cuando su uso no esté apoyado en el referencial teórico. Así, asociaremos el estatus de simbólico a un uso totalmente naturalizado y rutinario, en el que no se discutan ni cuestionen su validez ni justificación. Los artefactos digitales, que son uno de los focos de este trabajo, se definen a partir de la extensión de la idea de *máquinas matemáticas* como un conjunto de proposiciones que ejecuta una máquina electrónica que cuentan con una *inteligencia histórica* y una *validez epistemológica relativa* (J. Flores *et al.*, 2022).

La *inteligencia histórica* está relacionada con los significados que se plasman en los artefactos surgidos del desarrollo de la matemática a lo largo de la historia y que los informáticos buscan ejecutar a través de comandos en un programa de computadora.

Por el contrario, la validez epistemológica relativa tiene que ver con la dificultad o imposibilidad que tienen los artefactos digitales para plasmar con fidelidad algunas ideas abstractas. Lo interesante de esta noción de *máquina matemática* es que, al igual que el medio de Brousseau (1998), esta transmite un conocimiento que se revela cuando el usuario la utiliza y se cuestiona el saber matemático suscitado en la interacción con la máquina. Pero, a diferencia del entorno más general, la máquina matemática es distinta de los recursos digitales generales, y engloba a los dispositivos informáticos como entornos capaces de producir nuevos conocimientos con cierta autonomía respecto al usuario. Los artefactos digitales actuales son máquinas sofisticadas, por lo que es muy probable que del trabajo matemático se active inicialmente una génesis instrumental, pero prontamente se activen las otras génesis, por ejemplo, al generar un gráfico y trabajar sobre la génesis semiótica o intentar comprender algún resultado y justificarlo mediante propiedades, activando así la génesis discursiva.

Finalmente, en el polo del referencial teórico están las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático. Este polo no debe pensarse solo como una colección de propiedades, porque al dar soporte a las justificaciones deductivas, debe estar organizado de forma coherente y bien adaptado a las tareas que se les pide a los estudiantes que resuelvan (Kuzniak *et al.*, 2016).

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva (**Figura** 1). La génesis semiótica conecta el proceso de visualización en el plano cognitivo con el *representamen* en el epistemológico. Esta génesis puede partir por el signo en el *representamen*, que es interpretado por el sujeto mediante la visualización. También puede partir por el sujeto que codifica y produce un signo.

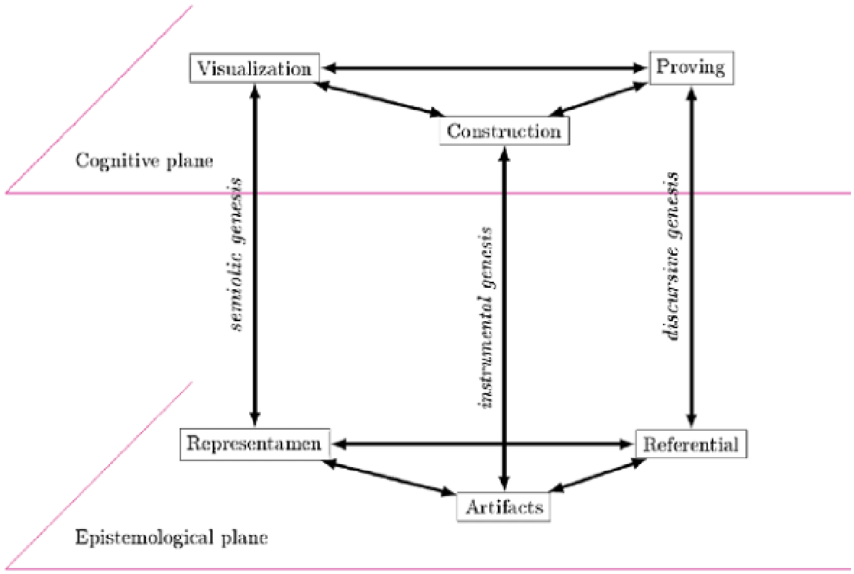


Figura 1. El modelo de los ETM (Kuzniak *et al.*, 2016, p. 725).

La génesis instrumental conecta el proceso de construcción en el plano cognitivo con el polo de los artefactos. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, la génesis involucra dos procesos: el de instrumentalización y el de instrumentación (Coutat & Richard, 2011). El primero comprende la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto por parte del sujeto. El segundo parte desde el objeto y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. El trabajo matemático podría ser considerado rutinario si es que no se conecta con la validación y justificación de los artefactos.

Finalmente, la génesis discursiva conecta el proceso de prueba con el polo del referencial teórico en el plano epistemológico y está asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades. En este último caso, el foco está puesto en las propiedades y teoremas, por lo que se toman en cuenta razonamientos que van más allá de los visuales o instrumentales, pero que pueden ser desencadenadas por estos.

Diseño de tareas

La tarea no es parte del ETM, pero lo activa y su análisis permite estudiar las circulaciones que se pueden desplegar a partir de ellas. Habiendo definido el ETM, el diseño de tareas se esquematiza en la **Figura** 2. El ETM, por una parte, puede guiar el diseño de las tareas una vez definidos los objetivos, específicamente, quien diseña se puede preguntar si su tarea fomenta alguna o varias génesis o planos verticales, lo que permite hablar de ETM potencial de la tarea.

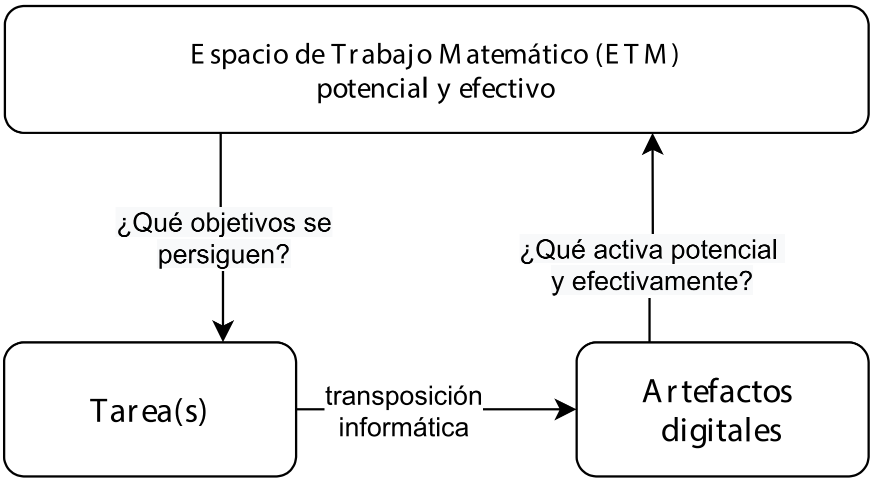


Figura 2. Diseño de tareas a partir del ETM

Una tarea puede ser diseñada en distintos soportes, y uno de estos es un artefacto digital. El diseño de una tarea en un artefacto digital produce una transposición informática (Balacheff, 1994) que potencia o limita el valor epistémico de la tarea según las características del artefacto. Al ser implementada, se puede contrastar el trabajo matemático potencial con el ETM efectivo.

En el diseño se da un proceso de idoneidad (J. Flores *et al.*, 2022): un ciclo de diseño-implementación-rediseño-implementación... que busca ajustar el potencial de la tarea con la actividad efectiva de quien la resuelve y que depende, entre otros elementos de la tarea, del contexto educativo y los sujetos que trabajan en la tarea. Estos objetivos, en este caso, se pueden ajustar teniendo en cuenta los elementos del ETM.

Tareas en un sistema de evaluación en línea

En Gaona (2018, p. 85), se consideran tres componentes didácticas de una tarea para conceptualizarla: tipo de tarea, objetos o herramientas matemáticas involucradas y contexto (**Figura** 3). El tipo de tarea se distingue por un verbo y una acción precisa (Chevallard, 1999), por ejemplo: encontrar las raíces de una ecuación o modelar el fenómeno mediante una función. Los objetos o herramientas matemáticas involucradas son las que permiten precisar la tarea. Del ejemplo anterior, la ecuación podría ser de distinta naturaleza: polinomial o trigonométrica, y contener una serie de variables que se pueden definir. Este objeto es observable gracias a su representación semiótica (Duval, 1995). Por ejemplo, si tenemos una ecuación polinomial de grado 2, los coeficientes podrían ser enteros, racionales o irracionales, entre otros. La ecuación podría ser representada de forma gráfica, en lenguaje natural, algebraicamente o incluso en una representación dinámica a partir de un *applet* de geometría dinámica. Cada una de esas elecciones puede influir en la naturaleza de las soluciones, en la dificultad de la tarea y, en general, en el trabajo matemático que se activará en los estudiantes.

Finalmente, el contexto aparece conectado con una línea punteada, ya que no siempre se utiliza en una tarea, pero en caso de que exista, este puede influir en el tipo de tarea o en el objeto/herramienta matemática puesto en juego. A modo de ejemplo, si una de las incógnitas de la ecuación representa una distancia, entonces solo serán válidas las soluciones positivas.

En relación a los sistemas de evaluación en línea, al mirar el artefacto-tarea desde un punto de vista técnico, en Gaona (2020) y Gaona, Hernández *et al.* (2021) se hace una descomposición en cuatro partes (**Figura** 4): enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback*, que están ligados al artefacto digital involucrado.

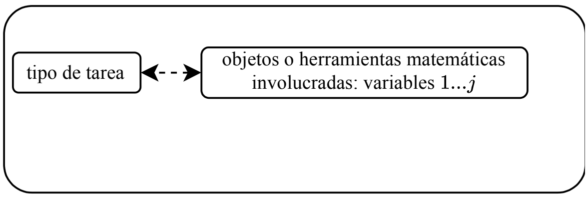


Figura 3. Componentes de la tarea. Extraído y adaptado de Gaona (2018, *p*. 85).

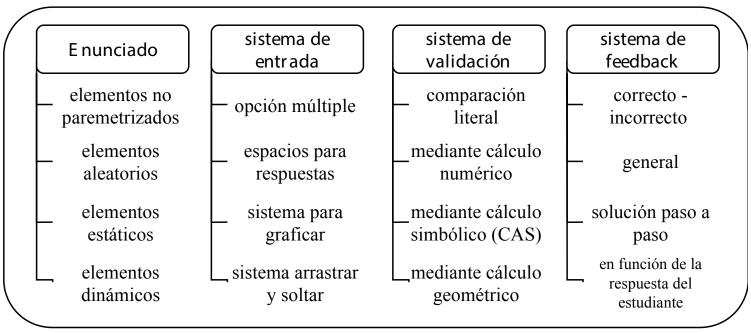


Figura 4. Componentes del artefacto tarea. Extraído y adaptado de Gaona, Hernández *et al.* (2021).

En el *enunciado* se muestra la tarea propuesta. Puede contener elementos que estén o no parametrizados. Este último caso implica que cada estudiante se enfrente a una pregunta con una estructura similar, pero con valores diferentes. El enunciado también puede contener elementos estáticos (como imágenes) o dinámicos (ej: *applets* como los de Geogebra).

El *sistema de entrada* es el que permite ingresar una respuesta. Hay varios formatos, puede ser mediante texto plano[2], editor de ecuaciones, sistema de reconocimiento de escritura a mano alzada, deslizadores u opción múltiple, entre otros. Para el *sistema de validación* consideramos las aplicaciones que cuentan con un procesador geométrico o un sistema de cálculo simbólico. Cierto grado de sofisticación para validar es fundamental cuando las preguntas permiten ingresar una respuesta y no son solo de opción múltiple. Por ejemplo, si la respuesta es una expresión algebraica o un número, el sistema debe reconocer si dos expresiones tales como: $2x + 2y$ o $2(x + y)$ son equivalentes o no. También, dada la tarea, podría ser necesario que el *sistema de validación* reconozca alguna característica de los objetos matemáticos involucrados, como que una expresión algebraica esté factorizada, que un valor se encuentre en un intervalo o que una matriz cumpla condiciones sobre sus coeficientes o que cumpla alguna propiedad. Finalmente, el *sistema de feedback* es el que entrega información una vez que el sistema valida la respuesta del estudiante. Dependiendo de las características del sistema, el *feedback* puede indicar si la respuesta es correcta o no, precisar la solución paso a paso en función del enunciado o de la respuesta del estudiante, entre otros.

La capacidad de los sistemas de evaluación en línea de corregir automáticamente es parte de su valor pragmático. No obstante, esta capacidad nada dice de su valor epistémico (Artigue, 2002). En cambio, este dependerá del tipo y contexto de la tarea y de cómo se representen los objetos matemáticos en el enunciado, en la respuesta y en el *feedback*, es decir, de las componentes didácticas. También dependerá del trabajo matemático efectivo desplegado por quienes resuelven.

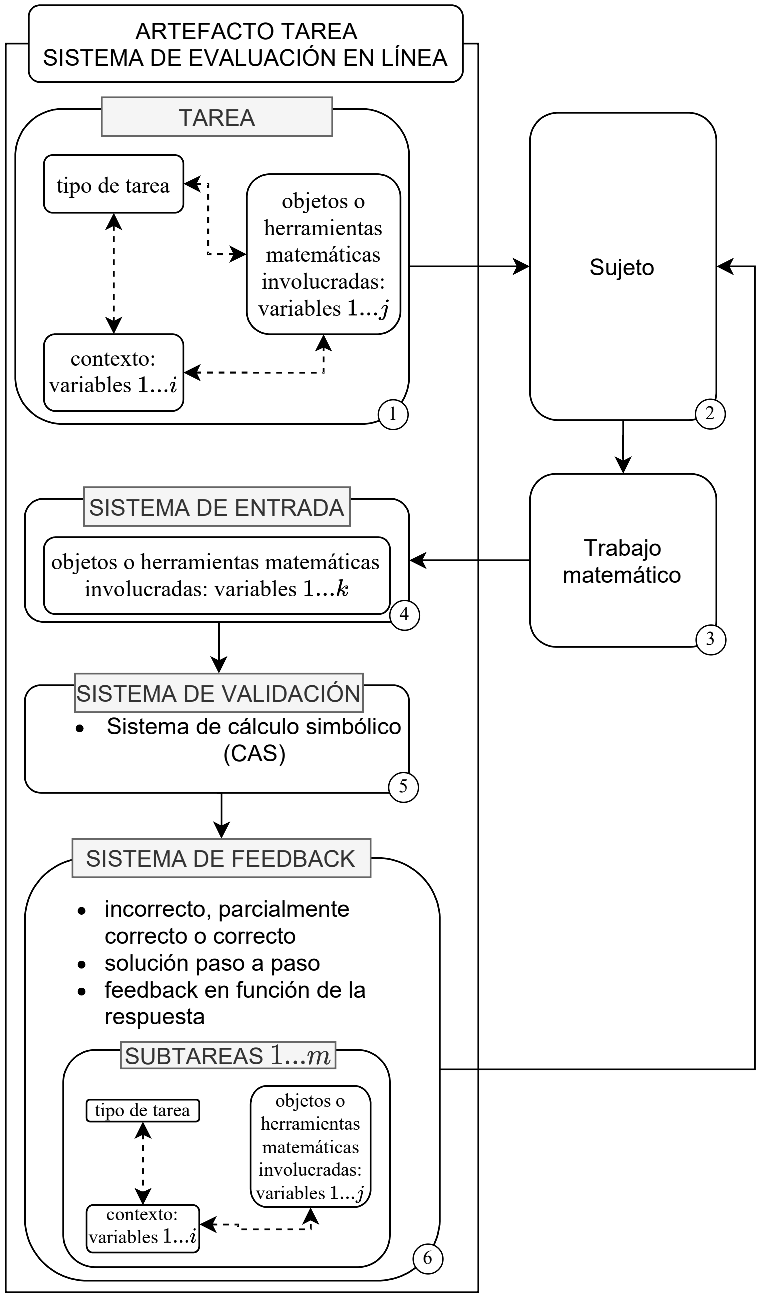


Figura 5. Relación entre los componentes didácticos de una tarea y los componentes técnicos de un artefacto en un sistema de evaluación en línea. Extraído de Gaona, López *et al.* (2021)

2 Una entrada de texto plano es un espacio o una caja en una pantalla donde solo se puede ingresar lo que está a disposición del teclado físico o virtual que viene por defecto en el dispositivo electrónico. Estos teclados generalmente no permiten, entre otros elementos, ingresar símbolos matemáticos.

Estas dos descomposiciones se pueden articular con el sujeto que responde una tarea a partir de un trabajo matemático específico (sección anterior), para estudiar cómo interactúan los componentes (**Figura** 5). El trabajo matemático específico puede realizarse en interacción con la tarea (por ejemplo, si en el enunciado hay un deslizador, el trabajo matemático se podría obtener interactuando con él), como también fuera de ella. Aquí un ejemplo: el enunciado entrega una tarea, digamos, "factorice $x^2 - 2x$" y el estudiante lo resuelve por su cuenta o con algún software. Luego, el sujeto ingresa una respuesta mediante el sistema entrada de la tarea. Posteriormente, el sistema realiza el proceso de validación. Salvo el caso de selección múltiple, los sistemas de evaluación en línea usados en matemáticas deben contar con sistemas de cálculo simbólico o geométrico. Estos sistemas, junto a la configuración propia de la plataforma permiten determinar si las respuestas son correctas, parcialmente correctas o incorrectas. Una vez que el sistema valida, puede entregar un *feedback* a los estudiantes que, según Hattie (2008), es variado, pero que según la revisión de Gaona (2020) en los sistemas de evaluación en línea se limita solo a algunos tipos.

METODOLOGÍA

Se proponen tres casos de análisis. Los dos primeros se implementaron en una universidad pública chilena de la Región Metropolitana. El Caso 1 es una tarea sobre números complejos que se trabajó con 15 estudiantes en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas durante el primer semestre del 2021. Los detalles de implementación se pueden leer en Gaona *et al.* (2022). El segundo caso involucra una tarea que se trabajó con 12 estudiantes en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas en el segundo semestre del 2020. Ambos grupos trabajaron de forma remota y sincrónica durante la pandemia. Los detalles de esta implementación se pueden leer en Gaona y Menares (2021). El tercer y último caso es una tarea de "estimar la imagen de un valor sobre una función afín". Se trabajó con 168 estudiantes de ingeniería, de los cuales 82 son de una universidad privada de la Región de Valparaíso y 86 de una universidad pública de la Región de Atacama. De los 168 participantes, solo se analizan 87 que, además de responder en la plataforma, indicaron cómo resolvieron la tarea. Los detalles de esta implementación se pueden leer en Gaona, Hernández *et al.* (2021).

Los datos se recolectaron mediante el registro de las clases virtuales para los casos 1 y 2, y de la información de la plataforma para el caso 3. El análisis fue cualitativo del contenido (Mayring, 2015), utilizando como categoría las génesis y planos del ETM. Se eligieron estos tres casos que muestran distintas características de las tareas en un sistema de evaluación en línea porque, además, se pueden apreciar diferencias en el trabajo matemático de los estudiantes y la influencia de los *feedback* diseñados en los datos recopilados.

Caso 1: Números complejos

Se presentaron 3 tareas con la misma estructura en el *enunciado*, pero parámetros distintos: escribir una de las raíces complejas de la ecuación $z^n = a$, donde a toma los valores -2 o 2 en la tarea 1 y los números enteros entre -9 y 9 en

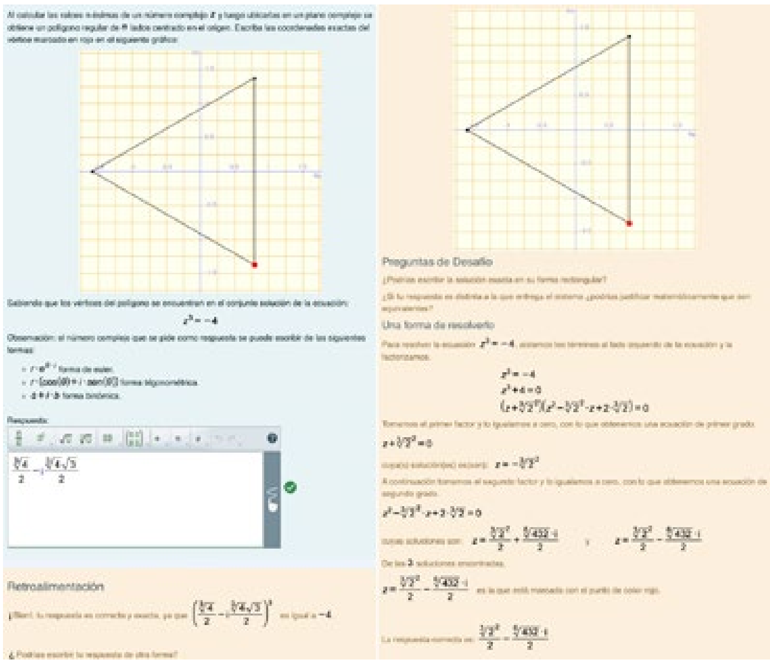


Figura 6. Capturas de pantalla de una de las tareas propuestas en plataforma de evaluación en línea sobre números complejos. En la parte de la izquierda, se pide la solución del cuarto cuadrante de la ecuación $z^3 = -4$. La estudiante ingresa una respuesta escrita en coordenadas rectangulares con las raíces factorizadas. El sistema le da varios tipos de *feedback*: 1) la evalúa como correcta, 2) indica por qué es correcta, 3) le pregunta si la podría escribir de otra forma[3] y da una solución paso a paso mediante factorización.

3 El feedback pide escribirla en forma rectangular, aunque la respuesta ya está en forma, este es un error de programación que se corrigió en las siguientes versiones de la pregunta.

las tareas 2 y 3. El exponente *n*, en cambio, en la pregunta 1 siempre vale 3 (ver **Figura** 6) y en las tarea 2 y 3 varía entre $n = 3$ o $n = 4$ (ver figura 7). Además de la ecuación, se presenta un plano complejo con las tres raíces marcadas en él. La unión entre las raíces forma un triángulo equilátero (**Figura** 6) o un cuadrado (**Figura** 7) dependiendo de la variante de la tarea a la que se enfrentan los estudiantes. La raíz que se pide está marcada en rojo y tiene un tamaño ligeramente mayor que el resto de las raíces de la ecuación marcadas en el plano cartesiano.

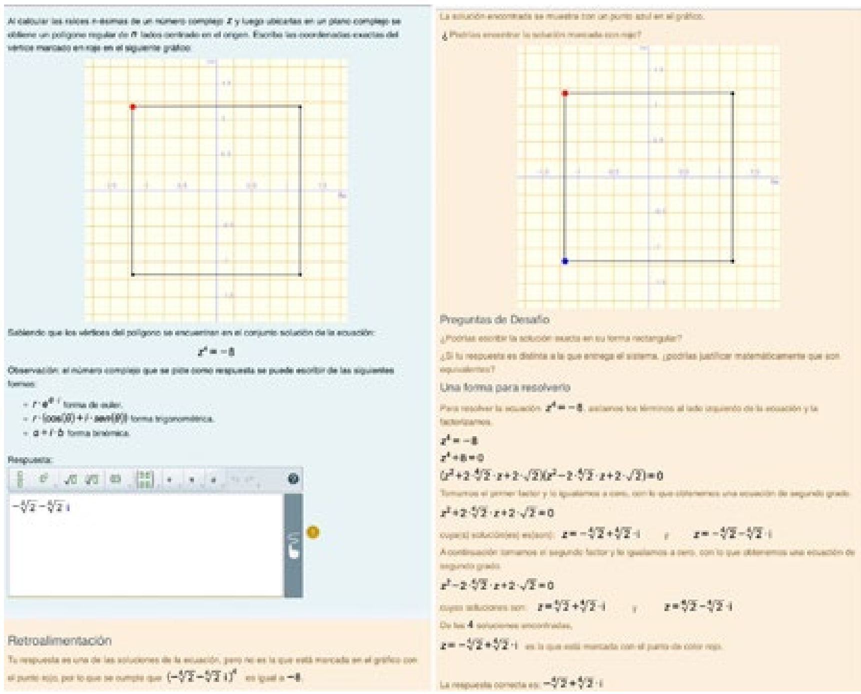


Figura 7. Pantallazos de una de las tareas propuestas en plataforma de evaluación en línea sobre números complejos. En el de la izquierda, se pide la solución del segundo cuadrante de la ecuación $z^4 = -8$. La estudiante ingresa una respuesta en coordenadas rectangulares. El sistema le da varios tipos de *feedback*: 1) la evalúa como parcialmente correcta, 2) indica por qué está parcialmente correcta, en particular, ubica lo que ingresó en el plano complejo y se lo marca en azul, mostrando que es solución de la ecuación, pero no es la que se pedía, 3) le pregunta si la podría escribir de otra forma y da una solución paso a paso mediante factorización.

El *sistema de entrada* es un editor de ecuaciones para escribir los números complejos de forma rectangular, polar o de Euler. El *sistema de validación* evalúa respuestas matemáticamente equivalentes, diferencia entre una respuesta aproximada y una exacta, y distingue entre las soluciones de la ecuación ingresadas. El *sistema de feedback* (**Figura** 6) entrega información en función de la respuesta y también un "paso a paso" en función de los parámetros.

Al consultarles si habían estudiado números complejos (en la escuela), la mayoría de los estudiantes lo negó; los que respondieron que sí solo tenían algunos recuerdos vagos y aislados, por ejemplo, indicaron que salían de la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. El propósito de la tarea es que los estudiantes utilicen diferentes artefactos digitales[4], tales como Photomath, Wolfram Alpha, Symbolab, Geogebra y Calcme, analicen y contrasten las distintas respuestas que estos entregan, es decir, los estudiantes tienen que elegir las soluciones más adecuadas para ingresar a la plataforma Moodle/Wiris. Luego se discutió en clases a partir de las exploraciones que realizaron en cada artefacto digital.

Caso 2: Fracciones

La tarea propuesta fue escribir una fracción que estuviera entre ¼ y ½. Además de las representaciones numéricas de tales fracciones, se presenta su representación en la recta numérica. Esta tarea se concibió para discutir sobre las estrategias que surgen, sus justificaciones y la posibilidad de generalizarlas y demostrarlas.

El *enunciado* de la tarea pide ingresar una fracción de la forma *a/b*, con *a* y *b* enteros, que esté entre ¼ y ½; se muestra parte de la recta real donde se ubican estos valores. El *sistema de entrada* es un editor de ecuaciones. El *sistema de validación* clasifica las respuestas entre incorrectas, parcialmente correctas o correctas. La respuesta ingresada en la **Figura** 8(a) califica como "parcialmente correcta" porque el estudiante ingresó un decimal en el numerador, y se pidió en las instrucciones que la fracción tuviera números enteros en el numerador y el denominador. La respuesta ingresada en la **Figura** 8(b) se considera correcta, pues cumple con todos los requisitos.

El *sistema de feedback* precisa si la respuesta ingresada es correcta, parcialmente correcta o incorrecta, y también muestra por qué. Esto lo hace ubicando en la recta numérica el valor ingresado e indicando si cumple con el

4 Los artefactos digitales propuestos fueron: photomath, que es una aplicación para dispositivos móviles; Calcme que es una aplicación disponible vía web: www.calcme.com y el resto, son aplicaciones disponibles, en aplicaciones móviles y vía web: https://www.wolframalpha.com/, https://es.symbolab.com/ y https://www.geogebra.org/graphing.

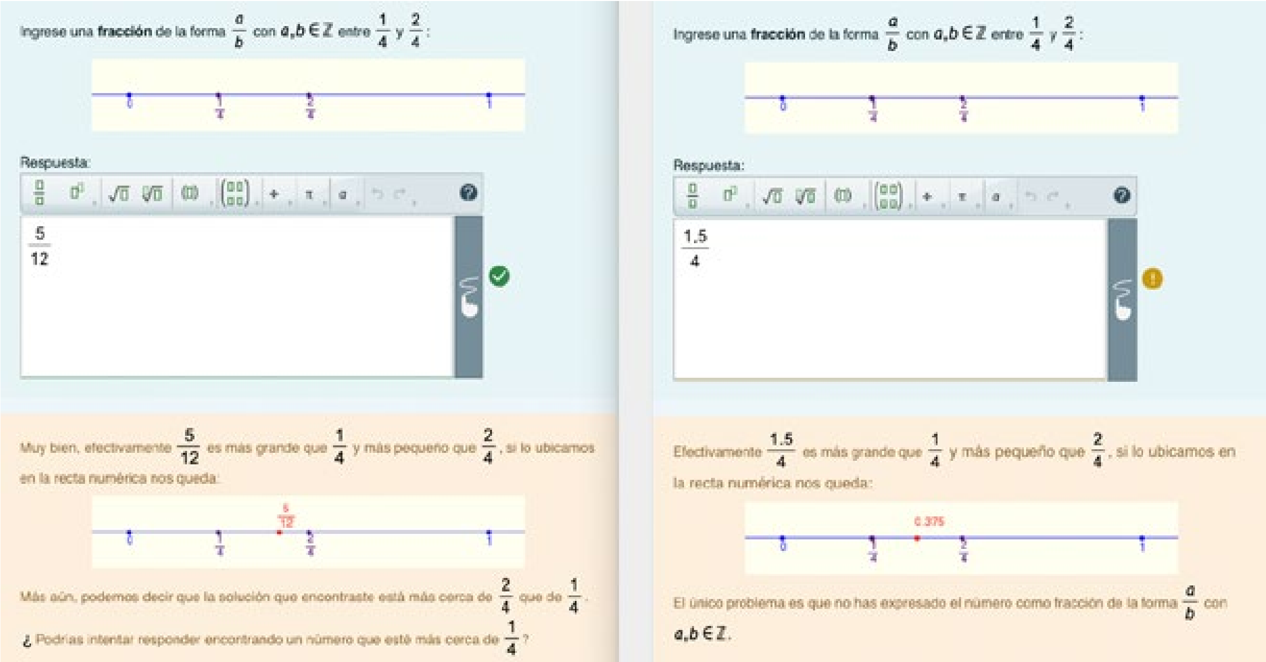


Figura 8. Tareas propuestas en la plataforma de evaluación en línea sobre fracciones. En (a) la respuesta ingresada es 5/12 y el sistema la considera correcta. En (b) el valor es correcto pero la forma en que se ingresó no es la solicitada en las indicaciones del enunciado.

resto de las condiciones; es decir, no brinda la respuesta ni sugiere ninguna estrategia de resolución. Además, para los aciertos, invita al usuario a buscar valorea alternativos al ingresado, por ejemplo, en la **Figura** 8(a), se pide ingresar un valor más cercano a 1/4.

Para implementar la tarea se hizo un trabajo individual en la plataforma de 10 minutos, donde debían encontrar una fracción entre ¼ y ½. Durante el resto de la sesión se discutió sobre las estrategias encontradas, su generalización y demostración.

Caso 3: Estimación de la imagen de una función en un gráfico

Se solicita estimar la imagen de un valor a partir del gráfico de una función. Hay dos versiones de la tarea: en la primera los coeficientes de la ecuación lineal son enteros y en la segunda son decimales.

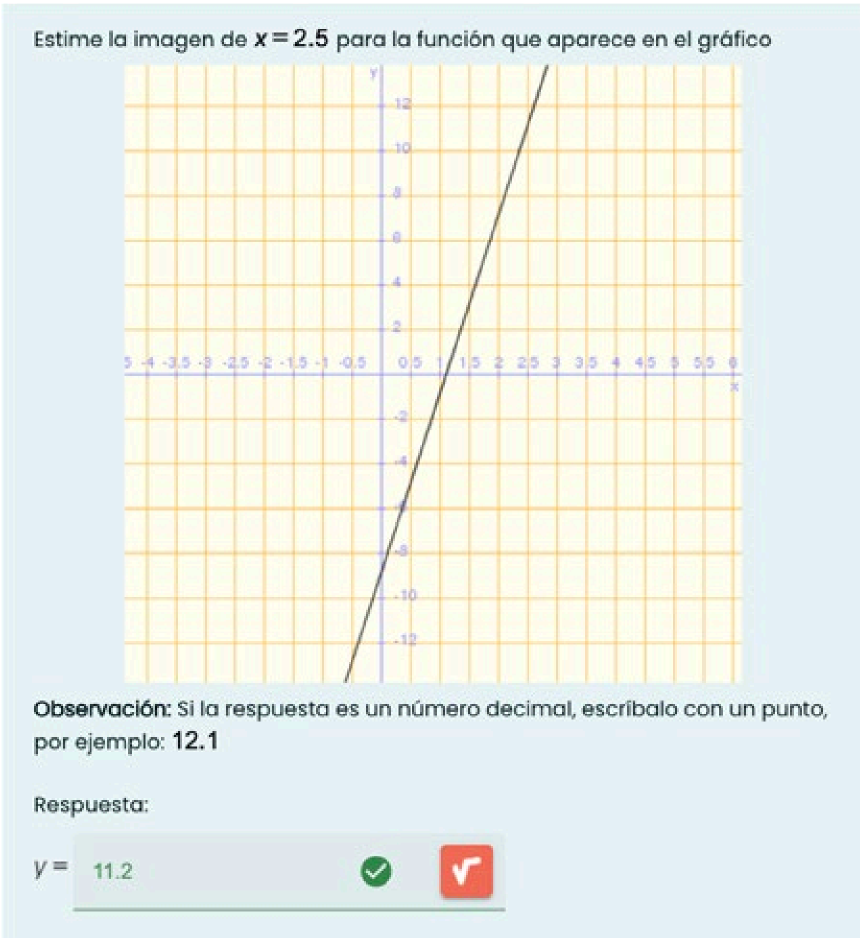


Figura 9. Una de las tareas propuestas en la plataforma de evaluación en línea sobre gráficos. Los coeficientes que definen a la recta son valores decimales, la cuadrícula es de 1 en 1 en el eje x y de 10 en 10 en el eje y. Estos elementos varían en cada pregunta. Extraído de Gaona, Hernández *et al.* (2021).

El *enunciado* de la tarea requiere "estimar la imagen de un valor", y como información se entregan el valor y la función representada de forma gráfica. En la pregunta hay elementos parametrizados (aleatorios) definidos por un algoritmo. Los parámetros aleatorios son: la imagen que pide evaluar (en este caso x = 2.5), la cual puede variar un número entre -8 y 8 con un paso de 0.5 (excluyendo el 0). Los coeficientes que definen a la función que se grafica en el plano cartesiano: pueden ser números enteros o decimales aleatorios. Es decir, si la ecuación de la recta, en ambos casos, es de la forma *y = mx+b*, entonces en una versión de la pregunta los parámetros *m* y *b* son números enteros y en la otra son números con un decimal. Los elementos del plano cartesiano: el alto está definido a partir de un algoritmo en función de los parámetros de la función afín. En cambio, el centro y ancho son fijos. Por ejemplo, en las figuras 9 y 10, el centro es el punto (0,0), el ancho es 20 (10 unidades hacia la derecha e izquierda desde el centro). Por otra parte, el alto de la **Figura** 9 es un poco más de 70 (35 unidades hacia arriba y hacia abajo desde el centro).

En el *sistema de entrada*, el estudiante tiene un espacio para ingresar la respuesta que es de texto plano, pero también hay un editor para ingresar fracciones u otro tipo de símbolos matemáticos. En el *sistema de validación*, la plataforma cuenta con un sistema de cálculo simbólico que permite determinar si una respuesta está en el rango correcto definido en un algoritmo diseñado para esto. El *sistema de feedback* indica si la respuesta es correcta o no. Además, muestra una solución paso a paso donde la estrategia propuesta es trazar una línea vertical y luego horizontal para luego estimar el valor de la imagen (**Figura** 10).

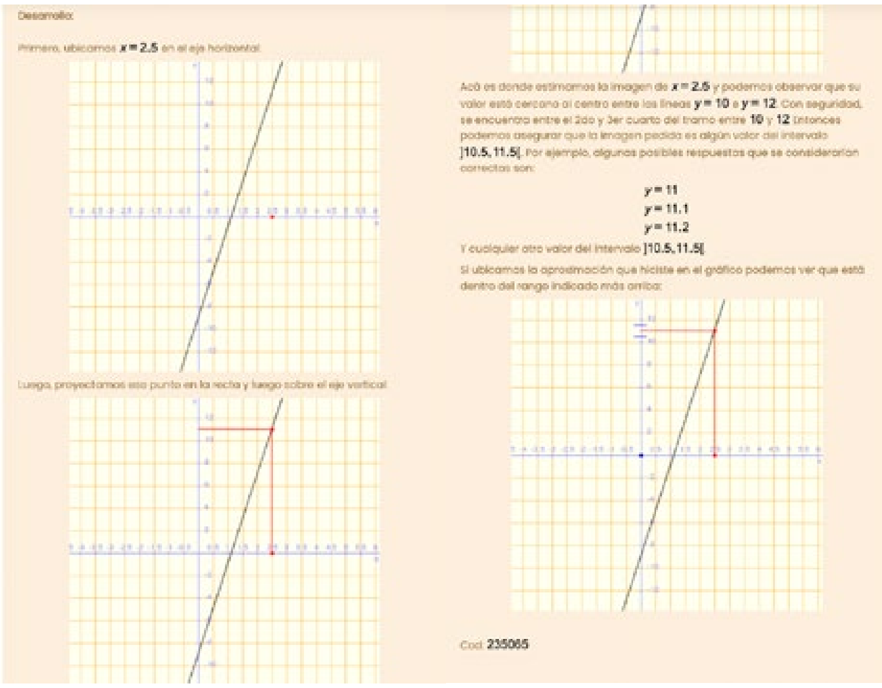


Figura 10. *Feedback* de la pregunta mostrada en la **Figura** 9. Extraído de Gaona, Hernández *et al*. (2021).

RESULTADOS

Los resultados se dividen en tres partes. En la primera, se analiza el rol de los registros de representación, los números que componen estas representaciones y su influencia en el trabajo matemático de los estudiantes. En la segunda parte, se analiza un tipo de pregunta: la pregunta abierta y su influencia en el trabajo matemático. En la tercera y final, se analiza el rol del *feedback* en el trabajo matemático.

Los registros de representación semiótica y los números utilizados en las representaciones de los objetos matemáticos

Las representaciones de los objetos en el enunciado pueden activar la visualización. Tomemos una de las tareas del Caso 1 sobre números complejos; hay dos registros, el algebraico de la ecuación y el gráfico de las soluciones de ésta. Como con ninguno de los registros por sí solo se puede resolver la tarea, puesto que con el algebraico se pueden obtener las soluciones, pero el gráfico indica cuál de ellas se está solicitando, los estudiantes necesitan visualizar las soluciones para saber cuál elegir.

Por otra parte, al utilizar distintos artefactos digitales, se ve que las soluciones que muestran son distintas. Por ejemplo, Symbolab entrega cuatro soluciones simbólicas expresadas con raíces, en cambio en GeoGebra, con el comando *Resuelve(z^4=-5)* aparece solución vacía y con el comando *RaízCompleja(z^4+5)* se obtienen cuatro soluciones complejas aproximadas.

Frente a este resultado, Scarlet, una de las estudiantes que trabajó en estas tareas, indica que no comprende la tarea ni lo que debe hacer. El profesor le pide que comparta pantalla y, acto seguido, que ingrese alguna de las soluciones obtenidas con Symbolab (**Figura** 11). Al comienzo, hay problemas para ingresar los símbolos (episodio que no se analiza acá y que ocurre entre los 49:46 min y 55:10, pero que es analizado en Gaona, López *et al.* (2021)). Superado lo anterior se produce una interacción entre la estudiante y los artefactos junto con un diálogo que da cuenta del tránsito de una génesis instrumental a un plano semiótico-instrumental que le ayuda a comprender los objetos involucrados.

Figura 11. Al ingresar $z^4=-5$ a Symbolab, esta aplicación entrega cuatro soluciones expresadas con raíces. Las cuatro son complejas.

Tabla 1.Transcripción del episodio de Scarlet.

Scarlet: 46:26 Profe, ¿sabe qué? Sinceramente, no sé cómo hacerlo. Como que me explota el cerebro. O sea, estoy ocupando Symbolab, pero… o sea, como que no… no entiendo en sí el ejercicio. No, no logro entender que por qué da eso.
P: 46:46 Ya, comparte pantalla para ver qué es lo que se entiende y qué es lo que no
Scarlet: 46:51 No entiendo nada, pero ya voy a compartir pantalla. Es que me frustra no entender…
Scarlet: 47:03 Ya, mire. Eso es lo que sale, pero no sé qué es lo que me sirve y qué es lo que no, y por qué da eso.
P: 47:17 Mira, ¿puedes abrir otra pestaña donde abras la calculadora de GeoGebra e ingresar las soluciones obtenidas en Symbolab?
P: 49:31 Entonces, en la primera… dice raíz cuarta de 4 por raíz de 2, partido por 2, más la raíz cuarta de 5/4 por i. ¿Cierto?
P: 49:46 Ingrésala ahí al GeoGebra.
Scarlet: 55:10 Entonces, ese es un punto que está… que sería… sería el de acá, ¿o no? No.
Scarlet: 55:25 No sé qué punto es.
P: 55:27 Ubica los otros puntos para que sepas cuál es.
Scarlet: 55:32 Ya me di cuenta.
P: 55:36 ¿Cuál es?
Scarlet: 55:38 O no sé si… a ver déjeme seguir analizando. Es el punto rojo, ¿o no? Este de acá.
EH: 55:48 Era el otro. Ah, depende la pregunta.
P: 55:52 ¿Y cómo puede saber si el punto rojo?
Scarlet: 55:56 Porque aquí están los reales y los imaginarios están acá y aquí está el 1 en positivo y aquí también [refiriéndose a los ejes del plano complejo]. No sé cómo fundamentar mi respuesta, profe, la verdad.
P: 56:15 No, pero está bien. Está bien lo que estás diciendo. O sea…
Scarlet: 56:18 O sea, los relaciono más que nada.
P: 56:21 Ya, mira. De hecho si tú haces un zoom al z_1 en el GeoGebra.
Scarlet: 56:26 ¿Aquí?
P: 56:29 Para ver… el gráfico. Ahí sale un signo +, una lupita.
Scarlet: 56:34 ¿Y cómo corro esto? Ah, ya.
Scarlet: 56:51 Ahí está la lupita.
P: 56:54 ¿Ahora estás entendiendo lo que estás buscando? ¿no?
Scarlet: 56:57 Sí, profe, ahora me queda completamente claro. ¿Y qué es lo que te pide acá? Ahora hay que entender lo que te pide.
P: 57:13 Y, de hecho, ahora leamos el *feedback* que te aparece acá.
Scarlet: 57:19 Ajá.
P: 57:20 Ya, ¿y qué dice en el *feedback*? Que es la parte como media cafecita amarillenta. Léela.
Scarlet: 57:26 Es como roja.
P: 57:28 O como roja, no sé.

Scarlet: 57:30 No sé leer, profe. No sé cómo pasé a la U. Dice "Tu respuesta es una de las soluciones de las ecuaciones, pero no es la que está marcada en el gráfico con el punto rojo, por lo que se cumple que la cuarta raíz de 5 por la raíz de dos, partido en 2, menos la cuarta raíz de 5/4 por i, elevado a 4, es igual a -5. La solución encontrada se muestra con un punto azul en el gráfico. ¿Podrías encontrar la solución marcada con rojo?" Hay que buscar este punto de acá. Pero ahí está lo encontré en GeoGebra.
P: 58:10 Claro, pero ¿cuál fue la que tú ingresaste?
Scarlet: 58:12 Había… esa.
P: 58:16 En el gráfico, ¿cuál sería?
Scarlet: 58:20 Ah, la de acá, concha la lora. Era esa, esta de acá.
P: 58:35 ¿ Y en qué se diferencia esa con la otra?
Scarlet: 58:39 No sé, ahora lo veo.
Scarlet: 58:44 Ah, es que esta es una suma, profe.
P: 45:46 ¿Y la otra?
Scarlet: 58:47 Y la otra… No sé si mi respuesta estaba bien. O sea, era lo mismo solamente que esta era una resta. Si le cambio a suma.

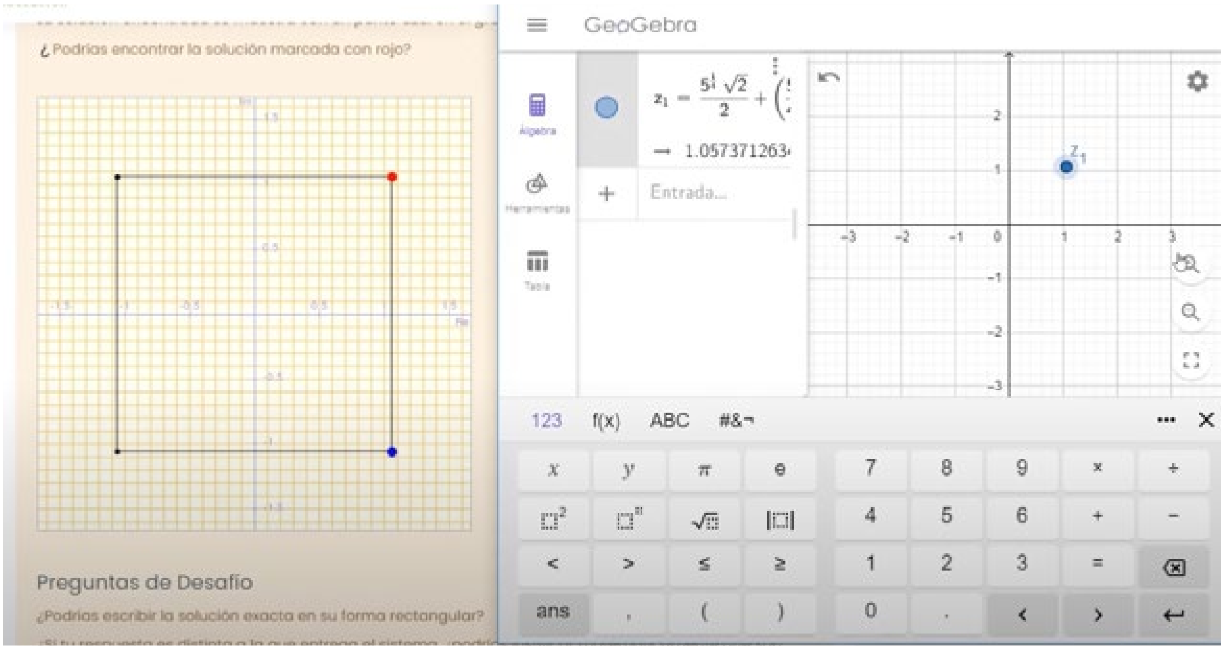


Figura 12. Captura de pantalla del trabajo de Scarlet donde compara la información que entrega la tarea en Moodle/Wiris y el punto que graficó en GeoGebra.

Al analizar el trabajo de Scarlet se constata que logra darle significado a los objetos cuando triangula lo que pide la plataforma Moodle/Wiris, con lo que entrega Symbolab y con la representación gráfica que se obtiene en GeoGebra. Se concluye que un trabajo exclusivamente *instrumental* (por ejemplo, uso de Symbolab) no es suficiente para interpretar las soluciones: es necesario conectarla con la *génesis semiótica* para que pueda comprender qué tipo de objeto es, saber elegir la solución que le sirve y darle sentido a los objetos involucrados. Este trabajo está motivado por la articulación de distintos artefactos digitales y por la presencia de dos registros en el enunciado.

Por otra parte, si tomamos la tarea sobre "estimar la imagen de un valor" a partir de una función representada de forma gráfica del Caso 3 (ver **Figuras** 9 y 10), podemos ver que se utiliza un solo registro para ambas versiones de la tarea. La diferencia entre estas versiones radica en que los coeficientes de una de ellas son números enteros y los de la otra son decimales. La Tabla 2 y la **Figura** 13 muestran la estrategia utilizada según la versión.

Tabla 2. Estrategias utilizadas por los estudiantes.

	Decimales (n)	Enteros (n)	Decimales (%)	Enteros (%)
1. Estima	40	26	63.49 %	46.43 %
2. Calc. ec. de la recta	13	25	20.63 %	44.64 %
3. Estima y calc. ec. de la recta	1	0	1.59 %	0.00 %
4. No recuerda	1	1	1.59 %	1.79 %
5. Otra	1	0	1.59 %	0.00 %
6. No identificable	7	4	11.11 %	7.14 %
Total	63	56	100.00 %	100.00 %

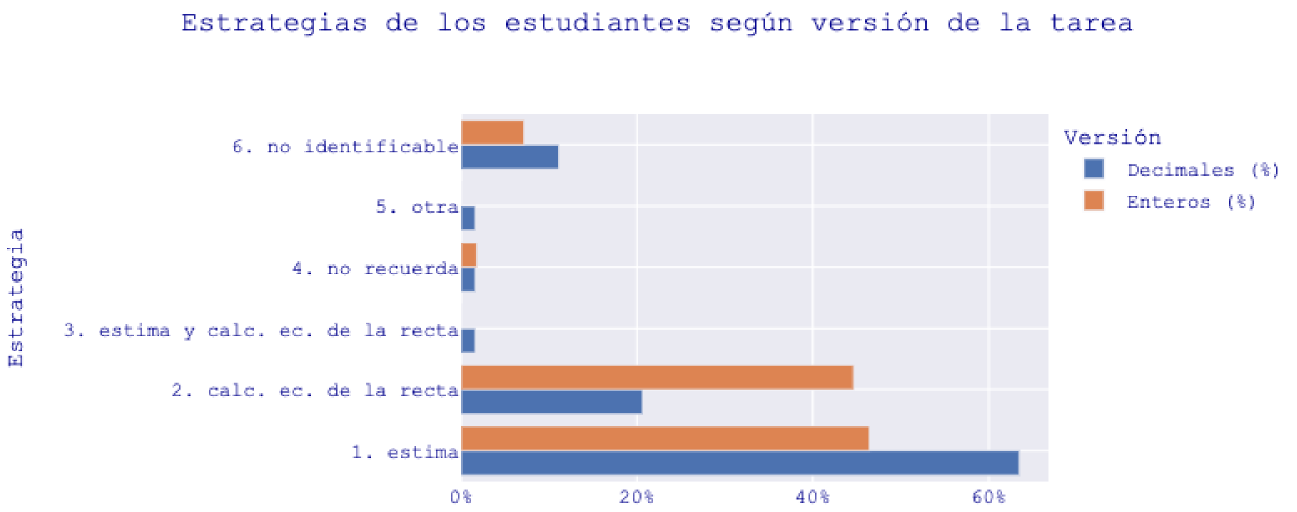


Figura 13. Estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver una tarea de estimación donde los coeficientes eran enteros o decimales.

En los datos se observa que, cuando los estudiantes resuelven la tarea con coeficientes enteros, las estrategias que eligen son la estimación y el cálculo de la ecuación de la recta en proporciones prácticamente idénticas. En cambio, en la versión con decimales, la estrategia de estimación es elegida tres veces más que aquella donde calculan la ecuación de la recta. Sobre la base de estos datos se puede concluir que la naturaleza de los coeficientes influye en la forma que los estudiantes visualizan y resuelven la tarea.

Las otras estrategias aparecen de forma marginal. En particular, llama la atención que las estrategias "estima" y "calcula la ecuación de la recta" prácticamente no se utilicen de forma conjunta, es decir; si un estudiante usa la ecuación de la recta, no recurre a la estimación para confirmar o controlar la solución.

Desde el ETM, la estrategia "calcula la ecuación de la recta" se interpreta como un trabajo que está en el plano semiótico-instrumental, porque se despliega una visualización pero orientada al uso de la fórmula de la ecuación de la recta como artefacto simbólico. En este encargo es tan fuerte el trabajo instrumental que la visualización directa prácticamente no es usada para controlar esta solución algebraica, puesto que una cantidad marginal de estudiantes usan ambas estrategias de forma conjunta.

En ambos casos se observa que los registros semióticos y los números que lo definen (los cuales en este caso no son explícitos) influyen en el trabajo matemático de los estudiantes.

Las preguntas abiertas

Las preguntas abiertas son las de los Casos 2 y 3. En el 2, los estudiantes deben encontrar una fracción entre otras dos. Como la pregunta tiene infinitas soluciones, aparecen de forma natural diferentes estrategias. En la información recogida sobre el trabajo de los estudiantes, se identificaron 3 estrategias: ensayo y error mediante decimales, por amplificación de las fracciones y mediante

Tabla 3. Transcripción de la demostración de la conjetura: si se amplifica el numerador y denominador de ¼ y $^{2}/_{4}$ por n, obtengo n-1 fracciones entre ellas. Extraído de Gaona y Menares (2021)

170. P: E2 nos dijo que había demostrado la otra conjetura. Que si tenemos ¼ y ½ y lo amplifico por n entonces hay n-1 fracciones entre ambos números y E2 dijo que lo había demostrado. ¿Lo quieres mostrar?
171. E2: Profe lo hice en Paint.
172. [...] P: Explícanos lo que estamos viendo (E2 está demostrando que al amplificar por n se obtienen n-1 fracciones entre ambas).
173. E2: definí cuantas fracciones… espere, me enredé \\ Puse las fracciones una por una entre n/4n y 2n/4n: n/4n, n+1/4n, …, (2n-1)/4n,2n/4n y conté todas las fracciones que había. Para contarlas resté el numerador de acá [refiriéndose 2n-1] y el de acá [refiriéndose a n] y se obtiene 2n-1-n y me dio n-1.
174. P: Está muy buena la demostración, ¿alguien tiene alguna observación?
175. E2: Puse todas las fracciones que hay entre n/4n y 2n/4n y luego las conté calculando 2n-1-n=n-1.

transformación a decimales. Estas estrategias, mediante un proceso de discusión, dieron paso a una serie de conjeturas de parte de los estudiantes. Una de ellas fue que, en una fracción, al amplificar el numerador y el denominador por *n*, se obtienen *n*-1 fracciones entre ambas fracciones.

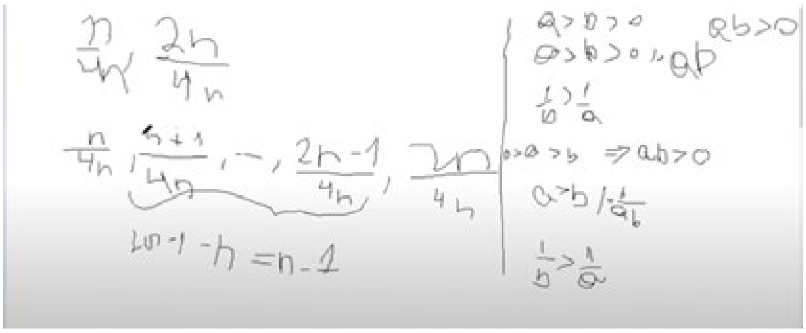


Figura 14. Captura de pantalla de un estudiante explicando la demostración a la conjetura planteada en la clase. Extraído de Gaona y Menares (2021).

La demostración fue realizada por uno de los estudiantes y compartió su resultado en pantalla.

El trabajo inicial de los estudiantes describió las estrategias y las justificaciones fueron principalmente instrumentales, pero en el diálogo, los estudiantes transitaron hacia una génesis discursiva dada por la justificación de las estrategias como las demostraciones de las conjeturas y apoyada en algunos artefactos simbólicos del álgebra.

El *feedback*

En el primer caso, en las tareas sobre números complejos, hay tres tipos de *feedback*, el primero indica si la respuesta es correcta o no. El segundo enseña algebraicamente (evalúa la solución en la ecuación y verifica si se cumple la igualdad) y gráficamente (marca en el plano la solución propuesta) por qué es correcta o incorrecta. Por ejemplo, si los estudiantes ingresan alguna de las soluciones de la ecuación, pero distinta a la marcada en rojo, la verificación algebraica indica que la igualdad se cumple, pero la representación gráfica muestra que lo ingresado no corresponde. Si, por ejemplo, se ingresa una respuesta aproximada, la verificación algebraica indica que la solución es cercana pero no exacta y la gráfica no muestra esa diferencia. El tercer y último tipo de *feedback* da una solución paso a paso de una estrategia mediante factorización algebraica.

El *feedback* aparentemente menos útil para los estudiantes fue el último, porque los estudiantes no lograron comprenderla; generó más dudas que certezas. Esta incomprensión del *feedback* permitió que el profesor pudiera indagar cuáles eran las dudas específicas respecto al proceso de solución paso a paso, pero pudo haber inhibido algunas estrategias distintas, por ejemplo, alguna con perspectiva geométrica.

De forma global, se observa un débil referencial teórico del álgebra: aunque recuerdan algunos elementos, no logran comprender la factorización propuesta en el *feedback* Moodle/Wiris. Hay cuatro procesos sobre los cuales los estudiantes tienen dificultades, uno es la factorización; el segundo es la utilización de las propiedades para descomponer la ecuación en dos ecuaciones más simples; el tercero es sobre la solución de la ecuación de segundo grado que queda al factorizar; el cuarto es convertir las soluciones con argumento negativo en la raíz en números complejos. Salvo lo último, el resto son elementos que están de forma superficial en su referencial teórico. También se observa que algunos estudiantes no pueden movilizar elementos de control para identificar que la solución entregada por algunos *softwares* (cuando ingresan mal los datos) no es adecuada. En cambio, el *feedback* en función de la respuesta ayuda a comprender el significado de los objetos involucrados, pero, por su naturaleza, no permite saber cómo resolver las tareas.

En el segundo caso sobre fracciones, el *feedback* no especifica cómo resolver la tarea, solo indica por qué la respuesta es correcta o parcial. Al ser una pregunta abierta, no condiciona las estrategias de los estudiantes. En el tercer caso sobre estimación de la imagen de una función en un gráfico, el *feedback* sí indica cómo hacerla paso a paso. Se propone cómo estimar un gráfico y en la programación de esta retroalimentación hay un grado de ambigüedad por la naturaleza misma de la estimación. En los resultados se observa que este paso a paso logra modificar el trabajo matemático de algunos estudiantes y hace que la estimación sea la estrategia más utilizada en ambas versiones, aunque no modifica la estrategia de todos los estudiantes y hay algunos que incluso pasan de estimar a calcular la ecuación de la recta.

CONCLUSIONES

En estos tres casos se puede observar el impacto de algunas de las variables didácticas en el trabajo matemático, tales como los objetos matemáticos involucrados, las representaciones semióticas utilizadas y otras componentes, como los números que definen los objetos, las preguntas abiertas y el *feedback*. Cada uno de estos elementos afecta de forma diferente el trabajo matemático y da muestras de lo complejo que puede ser el diseño de una tarea. Se observó que el uso específico de distintas representaciones o distintos tipos de números puede activar la génesis semiótica. En cambio, en los datos observados, la génesis discursiva se activó principalmente a través del trabajo con el profesor. El rol del profesor es fundamental, porque permite, mediante la discusión, que los estudiantes circulen por distintas génesis y planos, enriqueciendo su trabajo matemático.

Este trabajo no aborda todos los aspectos del diseño de tareas, pero busca dar algunas pistas y principios que permitan orientar el diseño teniendo en cuenta elementos epistemológicos, instrumentales y didácticos en sistemas de evaluación en línea.

REFERENCIAS

Ainley, J., Pratt, D. & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, 32(1), 23–38. https://doi.org/10.1080/01411920500401971

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In A. Michèle, G. Régis, L. Colette, T. Patricia, & B. Nicolas (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 364–370). La Pensée Sauvage Éditions.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2015). Semiotic mediation in the mathematics classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Issue 10872). https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28

Bartolini, M. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola* (Vol. 51, Issue 1). Springer-Verlag Mailand. https://doi.org/10.1007/88-470-0403-9

Bastias, D. A. (1980). *Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function Criterios Epistémicos para el Diseño de Tareas sobre Límite de una función en una variable Real*. 179–205.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 97–126.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.

Flores, J., Gaona, J. & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Flores, J. V. & Carrillo, F. I. (2019). Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. *Uni-Pluriversidad*, 19(2). https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.08

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 361–372. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.001

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas*. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946/

Gaona, J. (2021). Trabajo matemático instrumentado ¿qué matemática trabajar cuando hay programas que resuelven tareas mediante una foto? *Simposio* ETM 6.1 *Sobre El Trabajo Matemático*, 1–6. http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2021/03/Escrito_Jorge_Gaona_ETM6.1.pdf

Gaona, J., Hernández, R. & Bravo, F. G. y V. (2021). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. *Arxiv*. https://arxiv.org/pdf/2107.11448.pdf

Gaona, J., López, S. & Montoya-Delgadillo, E. (2021). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *Arxiv*.

Gaona, J., López, S. & Montoya-Delgadillo, E. (2022). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *Arxiv*, 1–27. http://arxiv.org/abs/2201.00407

Gaona, J. & Menares, R. (2021). Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17. https://doi.org/10.29333/ejmste/11425

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P., Tanguay, D. & Vivier, L. (2019). Actas sexto simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018). In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Guerrero-Ortiz, C. & Mena-Lorca, J. (2017). Modelling Task Design: Science Teachers' View. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 389–398. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_32

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carillo Yáñez, J., Climent, N. & Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 39(2), 123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas (A. Contin, Trans)* (8va Ed.). Fondo de cultura económica.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). *Mathematical Work in Educational Context*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2018). La visualización en análisis. In C. A. Cuevas Vallejo, M. Martínez Reyes, & R. G. Cruz Flores (Eds.), *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (pp. 1–18). Pearson Educación de México.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(4), 1–8. https://doi.org/https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. ZDM - *Mathematics Education*, 48(6), 721–737. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education. An* ICMI *Study*, 22 (pp.

191–225). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_6
Lozano, M. D. (2017). Investigating task design, classroom culture and mathematics learning: an enactivist approach. ZDM - *Mathematics Education*, 49(6), 895–907. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0890-4
Martínez, S., Guíñez, F., Zamora, R., Bustos, S. & Rodríguez, B. (2020). On the instructional model of a blended learning program for developing mathematical knowledge for teaching. ZDM - *Mathematics Education*, 52(5), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01152-y
Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.
Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
Menares, R. (2018). Planos dirigidos en el ETM personal de profesores en formación: una herramienta metodológica. In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp. 245–256). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf
Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J. & Mena-Lorca, A. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 188–203. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a09
Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2016). Development of the competence in didactic analysis of training of future mathematics teachers through task design. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 19(1), 71–98. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.1913
Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 405–422. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x
Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A. & Wong, K. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 227–250). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_10
Sierpinska, A. (2014). Research in mathematics keyhole: education through a task. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 7–15.
Simon, M. A., Placa, N. & Avitzur, A. (2016). Participatory and anticipatory stages of mathematical concept learning: Further empirical and theoretical development. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 63–93. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0063
Stacey, K. & Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 721–751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23
Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigacion En Educacion Matematica*, 15, 43–55. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256
Vandebrouck, F. (2013). *Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5
Watson, A. & Ohtani, M. (2015). Task Design in Mathematics Classrooms. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), ICMI *Study* 22. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2
Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 297–321. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0606-5

02

Recibido el 23 de julio de 2021, aceptado el 15 de octubre de 2021.

EL ESPACIO DE TRABAJO FÍSICO MATEMÁTICO COMO PROPUESTA TEÓRICA PARA ANALIZAR LOS PROCESOS SEMIÓTICOS, EXPERIMENTALES Y DISCURSIVOS QUE SE LLEVAN A CABO DURANTE LA MODELIZACIÓN DE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

THE PHYSICAL-MATHEMATICAL WORKING SPACE AS A THEORETICAL PROPOSAL TO ANALYSE THE SEMIOTIC, EXPERIMENTAL AND DISCURSIVE PROCESSES THAT ARE CARRIED OUT DURING THE MODELLING OF A DAMPENED HARMONIC MOTION

L'ESPACE DE TRAVAIL PHYSIQUE-MATHÉMATIQUE EN TANT QUE PROPOSITION THÉORIQUE D'ANALYSE DES PROCESSUS SÉMIOTIQUES, EXPÉRIMENTAUX ET DISCURSIFS QUI SONT EFFECTUÉS PENDANT LA MODÉLISATION D'UN MOUVEMENT HARMONIQUE AMORTI

Alfredo Martínez Uribe[1]
François Pluvinage [2]
Luis Manuel Montaño Zetina [3]

[1, 2, 3] *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*
[1] *Correo: alfymago@hotmail.com*
[1] *ORCID https://orcid.org/0000-0001-8583-9451*

[2] *Correo: fpluvinage@cinvestav.mx*
[2] *ORCID https://orcid.org/0000-0002-5117-5850*

[3] *Correo: lmontano@fis.cinvestav.mx*
[3] *ORCID https://orcid.org/0000-0003-4123-7322*

RESUMEN

El proceso de modelización matemática es fundamental para el estudio de las ciencias como la física. Del mismo modo, es relevante para la enseñanza y el aprendizaje tanto de la física como de las matemáticas, pues establece la interacción entre ambas disciplinas. Aquí proponemos el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM) como un aporte al constructo teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Afirmamos que su estructura permite explicar los procesos que surgen cuando se llevan a cabo este tipo de tareas. Consideramos que la labor de modelización del movimiento de un oscilador armónico amortiguado permite a los estudiantes reflexionar sobre sus representaciones y promueve el desarrollo de procesos semióticos, experimentales y discursivos. Presentamos los resultados de una implementación didáctica cuyo enfoque pedagógico de investigación requiere construir representaciones y afirmaciones, interpretarlas y desarrollar habilidades. Se utilizó la metodología ACODESA para organizar a los estudiantes en equipos de trabajo y motivar el debate científico y la autorreflexión. Damos cuenta de las génesis semiótica, experimental y discursiva dentro del ETFM y discutimos la relación entre ETFM y ETM^{F}.

Se trata de un estudio cualitativo sobre la forma en que un estudiante transita de la comprensión de un fenómeno físico a su descripción matemática. Participó un grupo de 14 estudiantes pertenecientes a un curso de cálculo integral de segundo semestre de ingeniería de la Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas del IPN (UPIITA), Ciudad de México.

Se presentan los progresos en la investigación llevada a cabo para ayudar a los estudiantes a comprender los aspectos matemáticos de los fenómenos físicos. Establecer la correspondencia entre los ámbitos de la física y las matemáticas es esencial para el desarrollo de la competencia en ingeniería.

Palabras clave: modelización, enseñanza, aprendizaje, análisis de vídeo digital, representaciones.

ABSTRACT

The process of mathematical modeling is fundamental to the study of sciences, such as physics. In the same way, it is relevant for the teaching and learning of both physics and mathematics, because it establishes their interplay. Here we propose the Mathematical Physical Working Space (MPWS) as a contribution to the theoretical construct of Mathematical Working Spaces (MWS). We affirm that its structure allows to explain the processes that arise when this type of tasks is carried out. We believe that the task of modeling the motion of a damped harmonic oscillator allows students to reflect on its representations and promotes the development of semiotic, experimental, and discursive processes. We present the results of a didactic implementation based on the construction of a representation. It is a directed pedagogical approach that requires constructing representations and affirmations, interpreting them, and developing skills. The ACODESA methodology was used to organize the students into work teams, motivating scientific debate and self-reflection. We account for how semiotic, experimental, and discursive genesis were activated within the MPWS. The relationship between MPWS and MWSP is discussed. It is a qualitative study of the way in which a student moves from the understanding of a physical phenomenon to its mathematical description. A group of 14 students belonging to a calculus course of the second semester of engineering of the Interdisciplinary Professional Unit in Engineering and Advanced Technologies of the IPN (UPIITA), Mexico City participated.

Keywords: modelling, teaching, learning, digital video analysis, representations.

RÉSUMÉ

Le processus de modélisation mathématique est essentiel à l'étude des sciences telles que la physique. Il est également pertinent pour l'enseignement et l'apprentissage de la physique et des mathématiques, en établissant leur interaction. Nous proposons ici l'Espace de Travail Physique Mathématique (ETFM) comme contribution à la construction théorique des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Nous affirmons que sa structure permet d'expliquer les processus qui se présentent lorsque ce type de tâche est effectué. Nous considérons que la tâche de modélisation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti permet aux étudiants de réfléchir sur leurs représentations et favorise le développement de processus sémiotiques, expérimentaux et discursifs. Nous présentons les résultats d'une mise en œuvre didactique basée sur la construction d'une représentation, une approche pédagogique de la recherche ciblée qui nécessite de construire des représentations et des affirmations, de les interpréter et de développer des compétences. La méthodologie ACODESA a été utilisée pour organiser les étudiants en équipes de travail, ce qui a suscité un débat scientifique et une autoréflexion. Nous rendons compte comment la genèse sémiotique, expérimentale et discursive au sein de l'ETFM a été activée. La relation entre ETFM et ETM[F] est discutée. Il s'agit d'une étude qualitative portant sur la façon dont un étudiant passe de la compréhension d'un phénomène physique à sa description mathématique. Un groupe de 14 étudiants appartenant à un cours complet de calcul du second semestre d'ingénierie de l'Unité Professionnelle Interdisciplinaire en Ingéniere et Technologies Avancées de l'IPN (UPIITA), Mexico, a participé.

Mots-clés : modélisation, enseignement, apprentissage, analyse vidéo numérique, représentations.

INTRODUCCIÓN

La descripción del movimiento y sus causas requiere la consideración de las leyes de Newton, incluidas en el corazón de los cursos de física introductoria en diferentes niveles académicos. En esta investigación, nos centramos en discutir algunos aspectos del movimiento y sus causas. Por ejemplo, Galili y Tseitlin (2003) subrayan que la importancia de la primera ley radica en el hecho de que es la única enunciada en forma textual: "Un objeto permanecerá en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme en tanto no sea alterado por la acción de una fuerza externa". Aquí quedan implícitas las condiciones necesarias para que la velocidad sea constante o la aceleración sea considerada una componente esencial de la fuerza, y la masa se puede interpretar como la resistencia que opone un cuerpo al movimiento. Todo esto, aunado a las distintas traducciones e interpretaciones hechas a través del tiempo, contribuye a la dificultad de esclarecer su significado. Por tanto, para describir y explicar el comportamiento de un fenómeno físico en el lenguaje de la ciencia, es necesario aplicar y comprender las leyes de la física y los signos matemáticos asociados. ¿Qué procesos de trabajo fisicomatemático se desencadenan cuando alguien se enfrenta a una modelización matemática? Nuestro propósito es presentar un desafío que promueva el trabajo físicomatemático asociado con el fenómeno de estudio, y reconocer los procesos cognitivos, semióticos y discursivos, así como las capacidades procedimentales y actitudinales que se activan cuando se realiza una tarea de modelización. Por otra parte, aspiramos a identificar elementos del discurso científico escolar que evidencian la aplicación de signos y símbolos en la construcción de representaciones y significados.

MARCO TEÓRICO

Consideramos que aplicar adecuadamente las leyes de Newton para estudiar las causas del movimiento de un cuerpo representa un problema de semiótica cuando se establece un proceso de comunicación. En la enseñanza de la física, parece necesario realizar las traducciones no sólo de un lenguaje verbal a uno matemático, sino de un lenguaje verbal cotidiano al científico y, finalmente, al matemático. Otros autores también rescatan el estudio de los signos, la mediación semiótica, la semiótica social, las teorías de representación, las relaciones entre los sistemas de signos y las teorías sobre la corporeización (*embodyment*) como modos de significación relevantes en la investigación educativa (Presmeg *et al.*, 2018).

Recientemente ha surgido mayor interés por promover que la enseñanza de las ciencias tome como base las formas en que se construye el conocimiento científico (Prain y Tytler, 2012; Redish y Kuo, 2015; Duit y Treagust, 2012). Asimismo, se ha proporcionado información sobre cómo el trabajo de representación es fundamental para llevar a cabo procesos de descubrimiento, así como en la generación y comunicación del conocimiento (Elkins, 2011; Machado y Braga; Hitt y Quiroz Rivera, 2017; Malafosse, Lerouge y Dusseau, 2000; Halloun, 2007). Entonces, el conocimiento científico se construye a través de procesos complejos de razonamiento aplicados a la generación y verificación de hipótesis.

El descubrimiento científico implica procesos imaginativos y socializados que permiten la creación de modelos y representaciones que servirán como herramientas para mediar nuestra comprensión del mundo (Kelly, Druker y Chen, 1998). De este modo, las inscripciones como gráficos, diagramas, modelos 3D, imágenes digitales y simulaciones creadas por computadora sirven en sí mismos como mediadores que transforman los datos recogidos de una situación determinada en nuevas herramientas conceptuales de interpretación (Hubber, Tyler y Chittleborough, 2018).

El análisis de estos procesos de relación entre el significado y el significante no es sencillo, menos aun cuando otro campo de conocimiento está interrelacionado. Consideramos que el enfoque de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) es útil para centrar la atención en las génesis semiótica, instrumental y discursiva, porque permite analizar cómo se produce significado matemático. Houdement y Kuzniak (2006) propusieron inicialmente esta teoría para describir los procesos cognitivos que se llevan a cabo cuando se enseña y aprende la geometría. Los elementos que entran en juego en el *plano epistemológico* son el *representamen*, los *artefactos* y el *referencial*. En el *plano cognitivo* se encuentran la *visualización*, la *construcción* y la *prueba*.

Lagrange y colaboradores (2017) señalan que la activación de estas génesis depende del campo de estudio, la profundidad del análisis y los enfoques de otras teorías. Debido a la flexibilidad y plasticidad del modelo (Artigue, 2016), algunos investigadores como Moutet (2019) han impulsado la idea de extender el ETM a otros dominios del conocimiento; proponen vínculos matemáticos con la física en el contexto de las simulaciones de la relatividad especial, enfocándose en la resolución de problemas. Introducen dos planos epistemológicos (uno para la matemática y otro para la física) y un solo plano cognitivo. También han planteado vínculos con la química (Moutet, 2021).

Nuestra propuesta se enfoca en el trabajo fisicomatemático que surge al realizar la modelización matemática experimental como aspecto cotidiano en las ciencias para la búsqueda y análisis de modelos que describan y predigan el comportamiento de un fenómeno. En el *plano epistemológico*, se propone un *referencial* que integra el marco de racionalidad de la física y la matemática (Malafosse, Lerouge y Dusseau, 2000). Por otra parte, la *génesis experimental* implica una apropiación acelerada de *instrumentos* (programas informáticos, medición, videos, simulaciones, animaciones, aparatos) para el registro de datos y la interpretación inductiva o deductiva de un fenómeno físico. Se introduce en el *plano cognitivo* la *simulación* como una componente que proviene de la física (ETM^F) y permite la conexión con el ETM sin la necesidad de agregar otros planos.

En la perspectiva de trabajo de la física, la *génesis experimental* se activa cuando un practicante realiza observaciones con la ayuda de *instrumentos* que permiten la recolección de datos sobre un fenómeno físico. En este modelo, *instrumento* es una construcción psicológica que combina el artefacto (objeto material) y los esquemas de comportamiento que el usuario desarrolla para utilizarlo en tareas específicas (Drijvers *et al.*, 2010). Los datos permitirán esbozar un modelo matemático (o este podrá ser deducido a través de procesos de simulación digital). Los procesos descritos implican la consideración de componentes específicas que no se encuentran definidas inicialmente en el ETM, por lo que este ha de modificarse para tener en cuenta las especificidades de la matemática y la física dentro de un espacio de trabajo propio: el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM).

La modelización matemática surge como un proceso operativo dentro del ETFM que coincide con el ciclo de modelización propuesto por Touma (2009): la experimentación se reconoce como un primer paso, luego un objeto matemático resulta de la interpretación inductiva de los datos experimentales a través de un ajuste de curva. El objeto identificado se traducirá en un modelo algebraico. A su vez, los tratamientos de este modelo permitirán una reinterpretación deductiva del fenómeno físico. Este ciclo se ubica en la perspectiva cognitiva identificada por Kaiser y Sriraman (2006).

Se ha identificado que los procesos de interpretación inductiva y deductiva permiten establecer relaciones entre las distintas componentes del ETFM. Tales procesos surgen, sobre todo, en la circulación que se da sobre la pared de descubrimiento, pero dependerá de la dirección en que se lleve a cabo el proceso. No es lo mismo ir de la visualización a la experimentación (proceso inductivo), que de la experimentación a la visualización (deductivo).

Al tiempo que el practicante transita por las distintas componentes del ETFM propuesto, construye un modelo matemático del fenómeno de estudio que le permite describirlo a partir de sus distintas representaciones. En tanto que el alumno reconoce las propiedades matemáticas del modelo asociadas a dicho fenómeno, estará en posibilidad de abstraerlo (proceso de *simulación mental*[1]), para luego adentrarse en el análisis del modelo como objeto matemático, dentro del ETM^{F}. El modelo matemático propuesto se analizará con distintos artefactos, que se convertirán en *instrumentos*, activando la *génesis instrumental* del ETM^{F}. El espacio de trabajo no está aislado, puesto que debe realizarse un trabajo fisicomatemático previo para entrar en él (Figura 1).

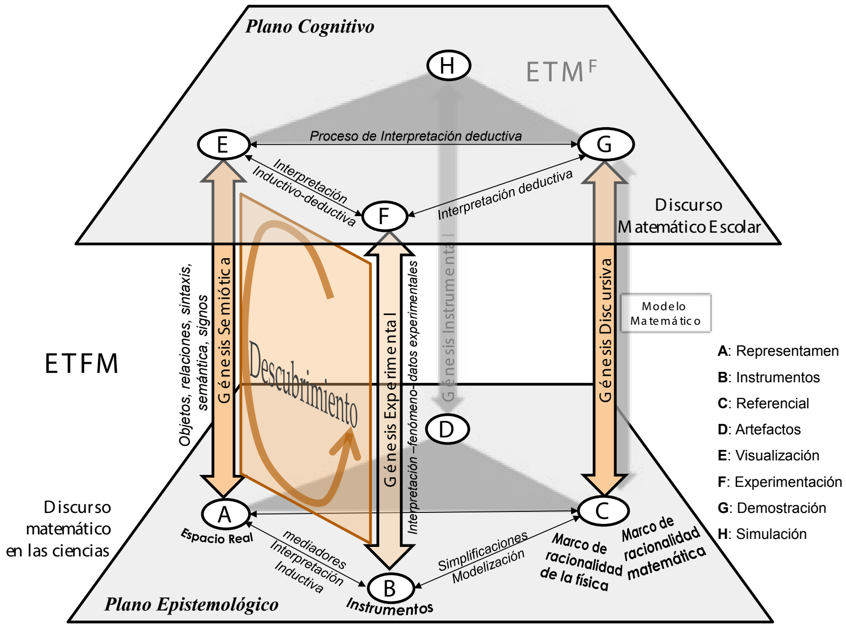


Figura 1. Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM) y ETM proveniente de la Física (ETM^{F}).

El proceso de modelización puede interpretarse como un ETFM en el sentido de Kuzniak y Richard (2014): ese paradigma guía y estructura la organización de sus componentes, que han sido instituidos por una comunidad de físicos que han acordado la formulación de problemas y organizado sus soluciones mediante instrumentos de ajuste de curva con la intención de construir un modelo matemático. Esta praxis muestra una forma de pensar acorde al *referencial* propuesto en el ETFM.

El diseño de tareas apropiadas para la enseñanza requiere del profesor un ETFM personal cuyo *referencial* sea amplio, en el que se establezcan relaciones apropiadas entre sus componentes para activar sus génesis y revelar los dominios de conocimiento del profesor de física (Asikainen y Hirvonen, 2010). La resolución adecuada de la tarea propuesta dependerá de cuán libres de obstáculos se puedan establecer las relaciones entre las distintas componentes y génesis del ETFM personal del estudiante. Las diferencias entre las nociones del ETFM personal del profesor y las del estudiante revelan la movilidad del plano cognitivo.

METODOLOGÍA

El estudio que aquí se presenta es de tipo cualitativo sobre el diseño de una tarea centrada en la actividad implementada para trabajar durante tres sesiones con un grupo de 14 estudiantes de ingeniería de segundo semestre que cursaban la asignatura de Cálculo diferencial e integral. Se han utilizado nombres falsos para identificarlos. El diseño de la actividad didáctica fue validado previamente con un grupo piloto de 8 estudiantes de bachillerato tecnológico y 6 estudiantes de olimpiada de física. Previo a la actividad, se aplicó una pequeña prueba diagnóstica cuyos resultados se exponen más adelante.

En este experimento se aplicó el enfoque sociocultural ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión). Con este método, se espera que

1 Este término se puede asociar con la concepción de Clement (2009) denominada *schema-driven imagistic simulation* (simulación imaginaria guiada por esquemas). El sujeto atraviesa un proceso en el que un esquema de acción general (intuición física) asimila la imagen de un objeto particular y produce expectativas sobre su comportamiento en una imagen dinámica posterior, de modo que se puede considerar que el conocimiento ha sido corporizado.

un concepto construido por un alumno a partir de sus representaciones espontáneas evolucione hasta convertirse en una representación institucional (como las utilizadas por los profesores o los libros de texto) a través del trabajo individual, en equipo, el debate en el aula, la autorreflexión y la institucionalización (González Martín, Hitt y Morasse, 2008). En un primer momento, el profesor actúa como guía y los alumnos tienen el deber de argumentar y validar sus producciones; posteriormente, en el proceso de institucionalización, el profesor destaca las diferentes representaciones propuestas y las confronta con las institucionales (Hitt y Cortés, 2009).

Se utilizaron las hojas de trabajo de los estudiantes y las videograbaciones de las sesiones como instrumentos para la recolección de datos. Se realizó un análisis previo del diseño y un análisis posterior de la actividad al finalizar la experimentación.

DIAGNÓSTICO

Se asume que los participantes de este estudio acreditaron un curso de física en la secundaria (a los 13 años de edad) en el que se introdujeron los conceptos de velocidad, aceleración, fuerza y energía, entre otros. En preparatoria, dependiendo del subsistema público o privado de educación, debieron haber acreditado de dos a cuatro cursos de física, donde se vuelven a tratar estos conceptos con mayor profundidad; sin embargo, se decidió aplicar una prueba diagnóstica que constó de dos secciones, una correspondiente a física y otra a matemáticas.

La sección de física planteó 4 preguntas con la intención de recuperar las ideas previas asociadas a las leyes de Newton y la fuerza de arrastre, por considerarse conceptos relacionados con el problema que los estudiantes tendrían que describir. En la sección de matemáticas se plantearon dos preguntas con la intención de reconocer si los estudiantes podrían relacionar la gráfica de una función sinusoidal con sus respectivos parámetros y significados, así como las ecuaciones de otras funciones de uso común con sus respectivas representaciones gráficas.

El diagnóstico evidenció que 14 estudiantes reconocieron parcialmente el efecto de la inercia en el movimiento y 13 la presencia de la fuerza de fricción. Todos lograron identificar que la magnitud de una fuerza se puede calcular como el producto de la magnitud de la aceleración por la masa de un objeto. Por otra parte, 6 alumnos hicieron referencia a la fricción como fuerza de reacción. Sobre la fuerza de arrastre, 8 consideraron algún tipo de resistencia del medio durante el movimiento de los cuerpos.

En cuanto a matemáticas, 8 estudiantes identificaron correctamente una gráfica sinusoidal con sus representaciones gráficas y su significado. Por otra parte, entre un grupo de gráficas de ecuaciones como la del seno, cuadrática, racional cuadrática, recta, exponencial, cúbica, cuarta y logaritmo natural, la ecuación que resultó más difícil de relacionar con su gráfica fue la del logaritmo natural, seguida en orden de menor dificultad por la exponencial de base *e*, la racional cuadrática, luego la de cuarto grado y finalmente la cúbica. Las ecuaciones de la línea recta con ordenada al origen, la sinusoidal y la cuadrática fueron identificadas correctamente por todos los estudiantes, tal vez debido a que son ecuaciones de uso más común en el contexto escolar.

ANÁLISIS A PRIORI DE LA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN CON UN OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Para adentrarse en los procesos cognitivos presentes al llevar a cabo una tarea de modelización, los estudiantes debían explorar un aparato experimental con movimiento armónico amortiguado con una aplicación móvil de captura de video llamada VidAnalysis. Con los datos obtenidos, los estudiantes debían producir una primera curva de ajuste a mano alzada y luego una más fina, con la ayuda de un *applet* hecho en GeoGebra que permite modificar algunos parámetros de la curva.

El diseño de la actividad propuesta se basó en la construcción de una representación a través de cinco secciones de trabajo que tomaron en cuenta la observación de un fenómeno físico, interpretación individual y entre pares, recopilación de datos del fenómeno de estudio por medio del celular, modelización con ajuste de curva para reinterpretar los datos con un *applet* de GeoGebra e interpretación final.

Sección 1. Observación de artefactos

Las observaciones generales sin acceso a los datos requieren que el estudiante realice una exploración del funcionamiento del aparato y configure el *representamen* en el *plano epistemológico* del ETFM; después, debe describir con sus propias palabras (*génesis semiótica*) el movimiento, incluyendo sus observaciones sobre los cambios en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas. Se espera que el pupilo ofrezca una descripción puramente cualitativa del movimiento, declarándolo como oscilatorio con decaimiento, con desplazamiento, velocidad y aceleración variables, e identificando que cuando la caja se detiene, la velocidad es cero y la aceleración es máxima; que la inercia anula la aceleración y maximiza la velocidad cuando el cuerpo pasa por el punto de equilibrio, y que la fuerza restitutiva resulta de la acción del muelle unido al cuerpo en movimiento; el amortiguamiento, de la acción del medio o fuerza de arrastre sobre el cuerpo y que la fricción es causada por el contacto de los rodamientos con los ejes engrasados por los que se desliza el cuerpo. Se establece un vínculo entre el *representamen* y el *referencial*.

Sección 2. Visión general basada en la nube de puntos

Las observaciones generales de los datos están destinadas a recuperar mediciones del desplazamiento. Se espera que el estudiante videograbe el movimiento del oscilador armónico amortiguado con la aplicación VidAnalysis y recupere los pares ordenados correspondientes a la posición de la caja con respecto al tiempo. La aplicación ofrece la visualización de la gráfica de dispersión y una tabla de valores. A continuación, debe trazar la gráfica en hojas de trabajo con los datos proporcionados por la aplicación. Se pide al estudiante que agregue sus observaciones sobre los cambios en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas, pero además se le pregunta qué información puede adicionar o cambiar respecto a su descripción anterior. Se espera que incorpore información a su primera descripción tomando en cuenta la tendencia de los puntos correspondientes al desplazamiento, la pendiente de la gráfica y los puntos de inflexión. En esta sección se asume que la utilización de los *instrumentos* promueve la activación de la *génesis experimental* en el ETFM, relacionando la componente de *experimentación* con la de *visualización* al esbozar una primera aproximación al modelo matemático que describirá el fenómeno de estudio.

Sección 3. Consideraciones hipotéticas

En las consideraciones hipotéticas se pretende que el estudiante reconozca que el comportamiento de la situación observada podría ajustarse al modelo de una curva suave y continua utilizando algún proceso de interpolación o extrapolación entre los datos. Entonces, a manera de una primera aproximación, se le solicita que dibuje a mano alzada una curva continua guiada por la tendencia de los puntos. Esta sección evidencia un vínculo de la componente de *visualización* del ETFM con el *referencial* asociando el comportamiento del fenómeno a un objeto matemático.

Sección 4. Curva de ajuste. Trabajo de institucionalización

En esta sección se propone hacer un ajuste de curva más fino a través de un *applet* diseñado con GeoGebra. El educando debe exportar los datos obtenidos por VidAnalysis a una hoja de cálculo de GeoGebra, donde se puede proponer una función que se aproxime al comportamiento del sistema. En un primer momento se sugieren algunos modelos de ajuste comúnmente utilizados en el campo experimental, tales como: $y = mx + b$; $y = x^a$; $y = ae^{bx}$; $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Posteriormente, se le requiere que, según considere, proponga un modelo matemático del comportamiento del sistema. Se espera una curva sinusoidal en función del tiempo más su desfase, modulada por un factor de decaimiento exponencial, y que se descarten otros tipos de curvas, como las del seno y coseno natural o algún polinomio. Se busca la activación de la *génesis experimental* del ETFM, apoyada en los *instrumentos* como mediadores de la interpretación inductiva para la formación de un modelo matemático del comportamiento del fenómeno físico. También se establece una relación entre el *referencial* y el *representamen* al buscar un modelo de ajuste apropiado. Otros aspectos que contribuyen a la interpretación inductiva son la activación de la *génesis semiótica* y la *experimentación*, ambas relacionadas con la visualización.

Una vez que el estudiante ha propuesto un ajuste a la función, se podrá auxiliar del *applet* de GeoGebra para manipular los parámetros de la función de amortiguamiento. A continuación, se inspecciona la función con un comando propio del *software* y se le solicita al alumno que la escriba en las hojas de trabajo, especificando el significado de cada parámetro utilizado. Se espera que la función encontrada, así como sus parámetros, sean reconocidos como $f(t)=Ae^{-qt}\cos(\omega t + \varphi)$, donde *A* representa la amplitud de la oscilación, *e* corresponde al decaimiento de los puntos máximos y mínimos de la función coseno de un ángulo definido por ωt más un desfase con respecto al origen. El exponente de *e* es negativo, según la forma del decaimiento, y *q* corresponde a la relación entre la masa que se desplaza y la constante de restitución del resorte. Se requiere que el pupilo sea capaz de establecer un vínculo con el *referencial* del ETFM donde los *marcos de racionalidad de la matemática y de la física* deben articularse para interpretar el modelo como objeto matemático que describe apropiadamente los momentos en que las fuerzas de restitución y arrastre actúan sobre la masa, oponiéndose al movimiento del oscilador armónico y amortiguándolo en el tiempo. Si la comunidad acepta el modelo obtenido, este puede ser interiorizado, relacionando las componentes de *prueba* y *visualización* con la de *simulación*. El trabajo matemático subsecuente se llevará a cabo a partir de este momento sólo del lado del ETM^F^, donde el marco de racionalidad es sólo matemático y las génesis que se han de activar son la *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*.

Para evaluar la calidad del modelo propuesto, se introdujo el concepto de proximidad entre dos funciones en un intervalo. Calculando la distancia entre dos funciones mediante una norma: Si tenemos una norma definida para funciones $\|f(x)\|$, se define la distancia entre dos funciones *f(x)* y *g(x)* como d(f(x), g(x)) = ‖f(x) - g(x)‖

Sabiendo que:

$$||f(x)-g(x)||_2 = \sum_{i=1}^{n}(f(x)-g(x))^2$$

sobre un conjunto discreto de puntos, entonces la norma L_2 se define como:

$$||f(x)-g(x)||_2 = \int_a^b (f(x)-g(x))$$

conocida como norma de mínimos cuadrados o convergencia media cuadrática.

Esta operación utiliza el comando *Ajustar* de GeoGebra para definir una función de error cuadrado mínimo a los puntos de una lista. El estudiante calcula la convergencia media cuadrática con la intención de comparar la función de ajuste que propuso con la generada por GeoGebra, escribiendo el comando: Ajusta (<Lista de puntos>, <Función>), que calcula una función utilizando el método de mínimos cuadrados para ajustarse a los puntos indicados; luego escribe el comando: Integral (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>), pero en vez de función se escribe $(f-g)^2$. Los extremos pueden elegirse arbitrariamente. Se les pregunta: ¿Cuál es el valor de la convergencia a la que aspiramos? y se espera que cada uno sea capaz de inferir que la distancia entre las funciones es un error de aproximación que se busca minimizar.

El *representamen* dentro del ETM^F^ es la función sinusoidal amortiguada con la que se ha de trabajar. Al calcular la convergencia media cuadrática, GeoGebra es el artefacto que ha de convertirse en instrumento, activando la *génesis instrumental*; por otra parte, los tratamientos correspondientes activan la *génesis semiótica*. La convergencia media cuadrática es un tema que puede ser aprovechado para ampliar el *referencial* del ETM^F^ de los estudiantes.

Sección 5. Interpretación final

Aquí el alumnado debe describir una vez más el movimiento con sus propias palabras, incluyendo sus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas y auxiliándose del modelo encontrado. Se espera que las relaciones establecidas entre las componentes del ETFM personal de los estudiantes les permitan hacer una interpretación deductiva del fenómeno. La descripción del *representamen* con ayuda de las distintas representaciones encontradas habrán de vincularse con el *referencial* y sus marcos, activando la *génesis discursiva* que permitirá a todos aproximarse a la demostración.

ANÁLISIS A POSTERIORI BASADO EN LA METODOLOGÍA ACODESA Y LA PROPUESTA DEL ETFM

Dado que el objetivo es analizar los procesos cognitivos con el modelo ETFM, y que la metodología ACODESA involucra el trabajo individual y en equipo, el debate en el aula y la autorreflexión, el análisis de la experimentación se basa en ambos marcos (Hitt y González Martín, 2015). Las fases son: trabajo individual, trabajo en equipo sobre la misma situación, debate, retorno a la situación e institucionalización. Para llevar a cabo las actividades, se organizó el grupo libremente en equipos de trabajo; sin embargo, cada alumno respondió individualmente.

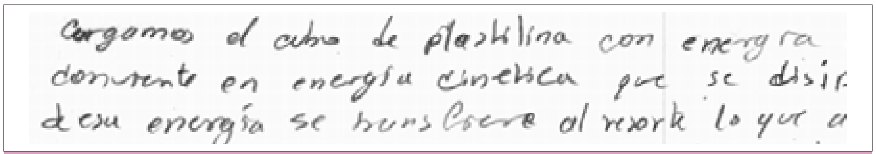
Sección 1. Observación de artefactos

Los equipos comenzaron por la exploración del aparato para elaborar una descripción verbal de lo observado (el *representamen* en el ETFM), considerando los cambios en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas, e hicieron sus observaciones por turnos. Para su primera descripción, entraron en un debate científico a partir de sus propios *referenciales*; según el ETFM, la *génesis semiótica* se activa cuando interpretan la representación del movimiento, y la *discursiva* cuando lo explican. A raíz del intercambio de ideas, los estudiantes desarrollaron sus respuestas individuales: diez alumnos se refieren al decaimiento de la amplitud expresando que la caja se va deteniendo progresivamente, que la distancia disminuye en cada oscilación y que el tiempo del movimiento oscilatorio va en aumento. Estas afirmaciones revelan cómo los estudiantes comienzan a construir sus propias justificaciones.

Respecto a la velocidad, seis estudiantes se refieren al desplazamiento del cuerpo enunciando que la distancia con respecto a la posición inicial cambia; el origen del sistema de referencia permanece indefinido. Por otro lado, aunque no mencionan explícitamente la palabra *aceleración*, cuatro estudiantes afirman que la velocidad varía de modo que, cuanto mayor sea el desplazamiento, mayor será la velocidad. Otro estudiante se refiere a algo que denominó "velocidad de reacción", todo ello sin determinar las causas del movimiento.

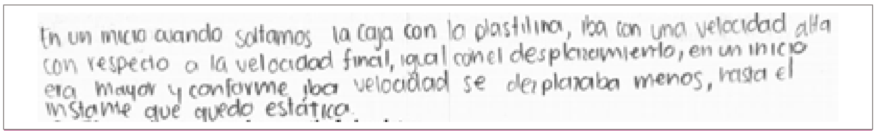
En lo que concierne a la fuerza, cuatro estudiantes identifican la presencia de la fuerza de restitución brindada por el resorte, la de la mano que inicia el movimiento y la de fricción. Mencionan explícitamente que la fuerza se añade cuando se estira el resorte, y que la fuerza opuesta detiene progresivamente el movimiento. Entre otras expresiones, mencionan algo como "acción del resorte", "tensión" y "resistencia del resorte", pero no identifican los principios a los que estas fuerzas obedecen, revelando que el *referencial* en el *plano epistemológico* del ETFM personal del estudiante requiere ser ampliado.

Los alumnos usan oraciones completas para el tipo de movimiento y sus características y parecen hacer referencia a la inercia como la propiedad de la masa que se opone al movimiento. Sus descripciones también incluyen su ponderación y las transformaciones energéticas durante el desplazamiento (Figuras 2 a 4).



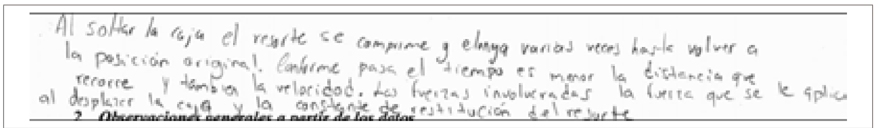
Cargamos el cubo de plastilina con energía potencial que se convierte en energía cinética, esa energía se disipa poco a poco y más tarde se transfiere al resorte que alarga el tiempo y el movimiento oscilatorio.

Figura 2. Primera descripción de David. Fuente: Elaboración propia.



En un inicio, cuando soltamos la caja con plastilina, iba con una velocidad alta con respecto a la velocidad final, igual con el desplazamiento, en un inicio era mayor y conforme iba velocidad se desplazaba menos, hasta el instante que quedó estática.

Figura 3. Primera descripción de Luisa. Fuente: Elaboración propia.



Al soltar la caja, el resorte se comprime y se elonga varias veces hasta que vuelve a la posición original. Conforme pasa el tiempo, es menor la distancia que recorre y también la velocidad. Las fuerzas involucradas, la fuerza que se le aplica al desplazar la caja y la constante de restitución del resorte.

Figura 4. Primera descripción de Efrén. Fuente: Elaboración propia.

Esta primera actividad muestra cómo se construye el ETFM activando la *génesis semiótica* que proviene del *representamen* en el plano epistemológico. Al exigir la inclusión de ciertas consideraciones espaciotemporales, el aparato presentado permitió que el fenómeno fuera observable. La *visualización* en este caso se convierte en un verdadero *esquema* (Vergnaud, 1992): una organización invariante de comportamiento para alguna clase de situaciones que requiere no sólo de la curiosidad, sino también de atención al detalle en el diseño de un sistema espaciotemporal de referencia que considera condiciones iniciales y finales.

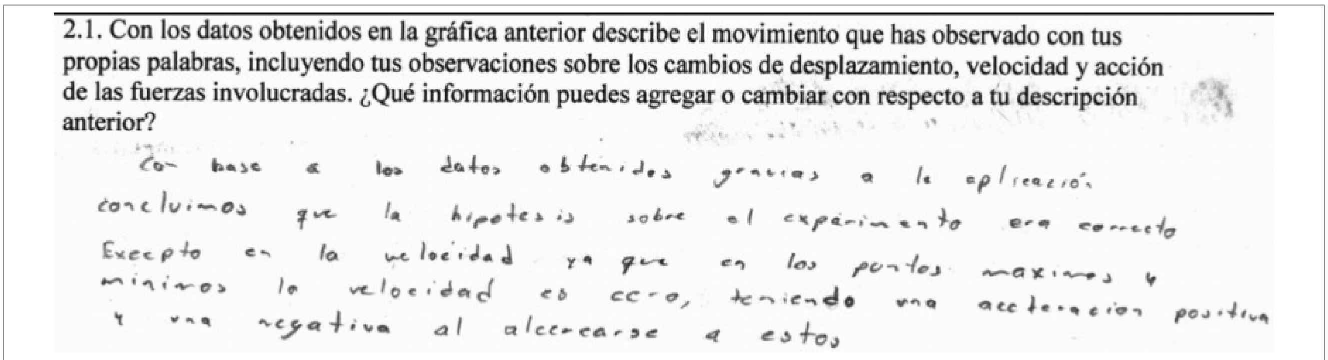
Sección 2. Visión general basada en la nube de puntos

Esta sección activó la *génesis experimental* al recolectar los datos experimentales utilizando VidAnalysis, el celular y el oscilador como *instrumentos*, videograbando el suceso y realizando un seguimiento del desplazamiento del objeto de estudio cuadro por cuadro. La tabla de datos obtenida sería exportada a otra aplicación (otro *instrumento*) para un análisis más preciso. La apropiación de la aplicación informática como una herramienta se hizo sobre la marcha, ya que el *software* es sencillo de utilizar. Se requirió de un proceso acelerado de instrumentación para llevar a cabo la experimentación.

Aunque la aplicación permite recuperar información sobre el movimiento, se solicitó a los estudiantes que transcribieran algunos puntos al plano cartesiano de su hoja de trabajo, con la intención de centrar su atención en los datos y la tendencia de su comportamiento (Figura 5).

Figura 5. Coordenadas y nube de puntos. Equipo: "Indeterminados". Fuente: Elaboración propia.

Después, se les solicitó que redescribieran el movimiento observado considerando los datos obtenidos. Se les requirió que hicieran estas continuas descripciones con la intención de ampliar el significado del *representamen* a partir de la nueva información encontraada a raíz de las distintas representaciones. Esto permitió a los estudiantes someter a un rigoroso entorno de prubea de sus hipótesis, resignificar la aceleración a partir de su signo, e incorporar las palabras que resultaron más específicas para describir el fenómeno como la disminución del movimiento ondulatorio (Figura 6).



2.1. Con los datos obtenidos en la gráfica anterior describe el movimiento que has observado con tus propias palabras, incluyendo tus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, velocidad y acción de las fuerzas involucradas. ¿Qué información puedes agregar o cambiar con respecto a tu descripción anterior?

Con base a los datos obtenidos gracias a la aplicación concluimos que la hipotesis sobre el experimento era correcto Excepto en la velocidad ya que en los puntos maximos y minimos la velocidad es cero, teniendo una aceleracion positiva y una negativa al alcercarse a estos

2.1 Con la información de los datos del gráfico anterior, ¿qué cambió en su descripción anterior?
Basándonos en los datos obtenidos gracias a la aplicación, llegamos a la conclusión de que la hipótesis sobre el experimento era correcta. Excepto en la velocidad, ya que en los puntos máximo y mínimo la velocidad es cero con aceleración positiva y negativa al acercarse a estos puntos.

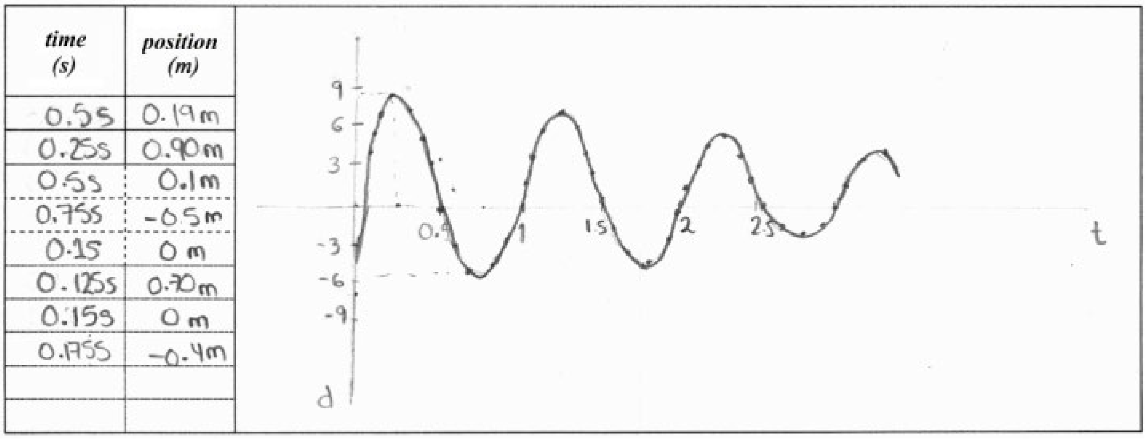
Figura 6. Respuesta de Eduardo. Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad fue imprescindible la comunicación entre pares, tanto para reconocer el funcionamiento de la aplicación VidAnalysis en el dispositivo móvil, como para interpretar las representaciones obtenidas. La instrumentación de las herramientas (el dispositivo mecánico y la aplicación en el celular) activó la *génesis experimental*, y propició la interpretación del fenómeno a partir de los datos experimentales, dando lugar al proceso de modelización experimental.

Este proceso de *experimentación* promovió una *visualización* nueva, el modelo mental construido en la actividad anterior se enriqueció con la interpretación deductiva del fenómeno a partir de los datos obtenidos, de modo que el estudiante debió interpretar el *representamen* a través de otras representaciones. Además, la discusión de los participantes acerca del origen del sistema de referencia y el comportamiento del fenómeno de estudio enriqueció la componente de *visualización* en el plano cognitivo del ETFM. Las interacciones descritas en las líneas anteriores evidencian las relaciones que se establecen entre el *representamen* y los *instrumentos*, los componentes del *plano epistemológico*; las acciones que estimulan la activación de las *génesis experimental* y *semiótica* que recaen en la *experimentación* y *visualización* respectivamente se relacionan a través del proceso de interpretación inductiva, completando un proceso de circulación en la pared de descubrimiento en el ETFM personal del estudiante.

Sección 3. Consideraciones hipotéticas

Consistió en dibujar una curva de la nube de puntos para sugerir a los estudiantes la posibilidad de realizar visualmente procesos de interpolación y extrapolación, discriminar errores de observación y aproximarse a un modelo matemático. De once estudiantes que respondieron esta parte, ocho trazaron curvas a través de los puntos, como una primera aproximación al modelo matemático buscado (Figura 7). Cuando los estudiantes entran en el debate para discutir la naturaleza del modelo obtenido y su relación con el fenómeno estudiado, se establecen relaciones con el *referencial* del ETFM personal del estudiante, activando la *génesis experimental* y la *génesis discursiva*, que a su vez se relacionan con el *representamen*. El *referencial* se amplía cuando los estudiantes proponen modelos de aproximación con los que defenderán sus argumentos.



time (s)	position (m)
0.5s	0.19m
0.25s	0.90m
0.5s	0.1m
0.75s	-0.5m
0.15	0 m
0.125s	0.70m
0.15s	0 m
0.175s	-0.4m

Figura 7. Ajuste de curva a mano alzada. Equipo: “Indeterminado”. Fuente: Elaboración propia.

Sección 4. Curva de ajuste. Trabajo de institucionalización

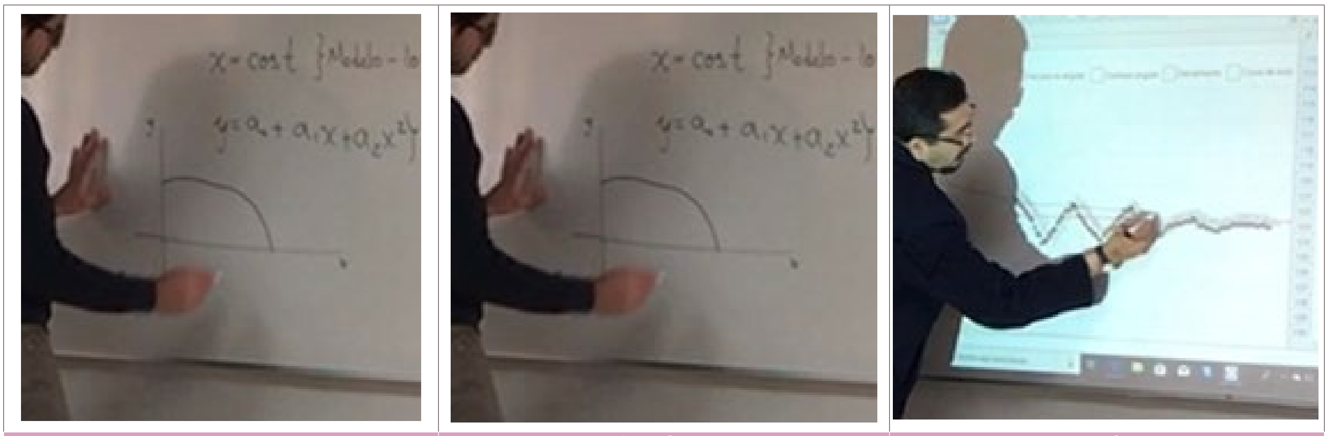
Para relacionar el comportamiento de un sistema con una curva que se le aproxima se propusieron algunos modelos que podrían ser útiles porque son comunes, aunque la posibilidad de proponer otro quedó abierta. La Tabla 1 muestra las propuestas de los estudiantes.

Para contrastar los modelos propuestos con el modelo científicamente aceptado, el profesor instó a que los estudiantes enviaran por correo los datos de su experimentación; más tarde en sesión plenaria, exportó a GeoGebra los datos obtenidos por un equipo, para que los alumnos realizaran un ajuste de curva. Antes de comenzar, solicitó el modelo propuesto por un equipo con la intención de guiar la observación de la nube de puntos y ayudar a identificar los parámetros relacionados (amplitud, frecuencia y decaimiento). Los estudiantes presentaron sus propuestas y las compararon con la tendencia de los puntos. Los parámetros relacionados con la amplitud y la frecuencia fueron los más fáciles de identificar, probablemente porque había una propensión a elegir un modelo sinusoidal. En cambio, el decaimiento fue más difícil, tal vez, como se evidenció en los resultados del diagnóstico, debido a la dificultad para reconocer esta gráfica.

Tabla 1. Funciones propuestas por los estudiantes para el ajuste. Fuente: Elaboración propia.

Propuestas Estudiantes	Conteo
$y = sen\ x$	2
$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	2
$y = a\ cos\ (t)$	1
$x = cos\ (t)$	3

El profesor dedicó unos minutos de la clase para identificar la curva, suponiendo que la tendencia de la nube de puntos les daría a los estudiantes una pista de su forma. Juan trazó una línea recta inclinada de pendiente negativa siguiendo los máximos o crestas de la curva (Figura 8a). Efrén, a partir de su percepción, dibujó algo parecido a un cuarto de elipse (Figura 8b).



a) Juan | b) Efrén | c) Profesor

Figura 8. Ajuste de curva y nube de puntos. Plenaria. Fuente: Elaboración propia.

El profesor intervino posteriormente con la intención de resaltar los máximos de la curva proyectada en el pizarrón (Figura 8c), entonces algunos estudiantes sugirieron que se podría usar la función exponencial.

Luisa esbozó la gráfica; por su parte, el profesor solicitó la aprobación de los demás estudiantes para confirmar que, en efecto, estuvieran de acuerdo con la forma propuesta (mostrada en la Figura 9).

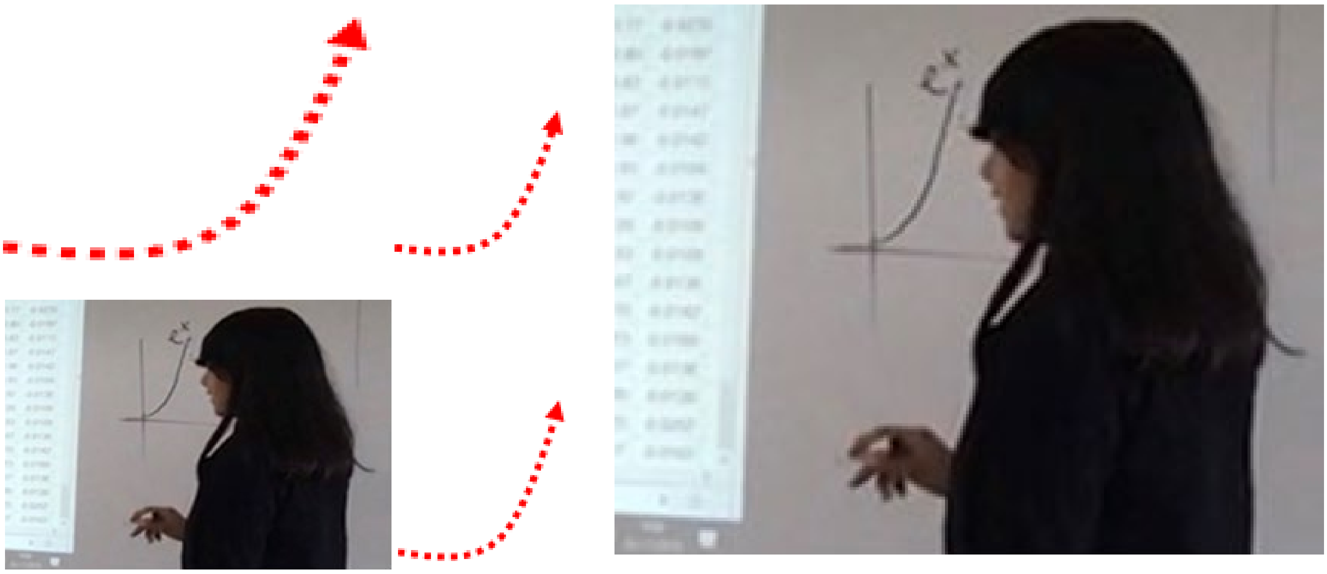


Figura 9. Gestos de e^x y su representación gráfica. Fuente: Elaboración propia.

El catedrático decidió seguir adelante y esperar a que Efrén hiciera el primer ajuste con los datos correspondientes a su equipo para poder observar la ecuación obtenida. La adaptación lograda se muestra en la Figura 10.

$$y = (0.08)\, e^{(-0.45x)} \cos(8.41x + 2.9)$$

Figura 10. Adaptación recuperada por Rodrigo en sus hojas de trabajo. Fuente: Elaboración propia.

En plenaria se llegó al acuerdo de que la forma del gráfico buscado para la descomposición debía ser e^{-x}, como se muestra en la curva de ajuste trazada con la ayuda del *applet* de GeoGebra (Figura 11). Se mencionó que la función exponencial buscada debía proporcionar una tendencia de valores que disminuyeran en el eje *de las ordenadas*, a medida que se incrementaban en el eje *de las abscisas*. Los otros equipos elaboraron sus ajustes, y alcanzaron sus propias aproximaciones, las cuales, a su vez, fueron aceptadas por todos los estudiantes; sin embargo, se consideró desde el diseño de la actividad que estos enfoques debían validarse con respecto a una tendencia central.

El educador explicó que en todos los experimentos hay una validación del modelo matemático, una revisión de cuánto se alejan los datos de una tendencia central, y la ejemplificó con el método de paralelogramo para el cálculo de incertidumbres (Baird, 1991). Una vez alcanzado un modelo matemático ajustado a los datos, se hizo una comparación entre el modelo aproximado de los alumnos y el modelo general encontrado por GeoGebra.

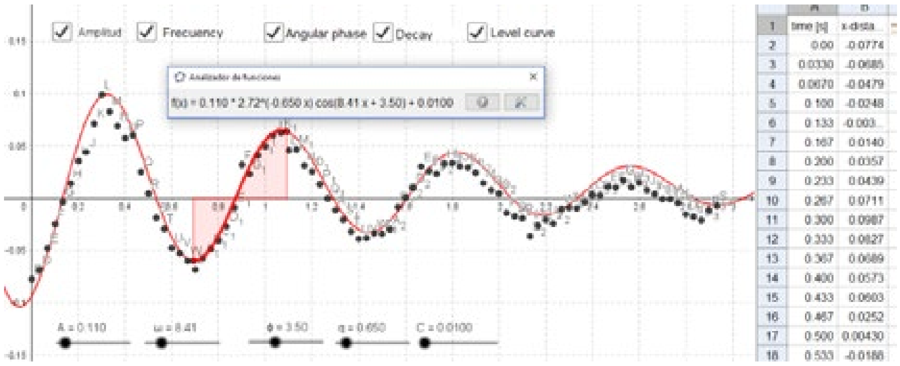
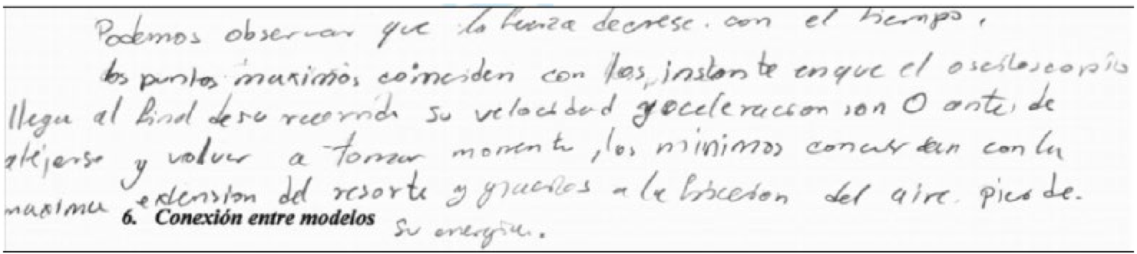


Figura 11. Aplicación de ajuste (Reconstrucción). Fuente: Elaboración propia.

La comparación se realizó utilizando la convergencia media cuadrática, también denominada aproximación entre funciones. Debido al contexto académico de los estudiantes, se consideró necesario proporcionar más información y aprovechar las herramientas que ofrece el *software*. El valor calculado de la convergencia media cuadrática fue considerado, en consenso por los estudiantes y el profesor, como un error de ajuste aceptado sin intervalos de incertidumbre.

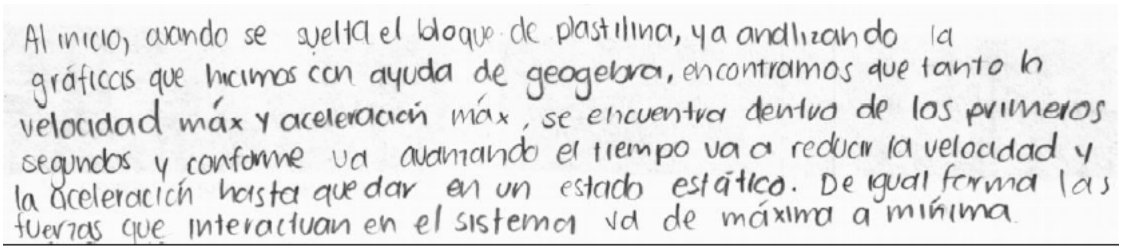
Sección 5. Interpretación final

Consideramos que la observación del amortiguamiento de la oscilación permitió a cuatro estudiantes hacer descripciones en las que lograron relacionar conceptos de energía, a pesar de que dos de ellas fueron incompletas; otro par se reservó sus respuestas (Figuras 12 a 14). Los estudiantes mencionan las fuerzas que intervienen, pero no logran relacionar cabalmente el movimiento del oscilador armónico con sus causas y los principios a los que obedece, evidenciando que el referencial en el *plano epistemológico* del ETFM personal del estudiante requiere ser fortalecido, tal vez con mayor énfasis en el *marco de racionalidad de la física* que en el de *racionalidad matemática*.



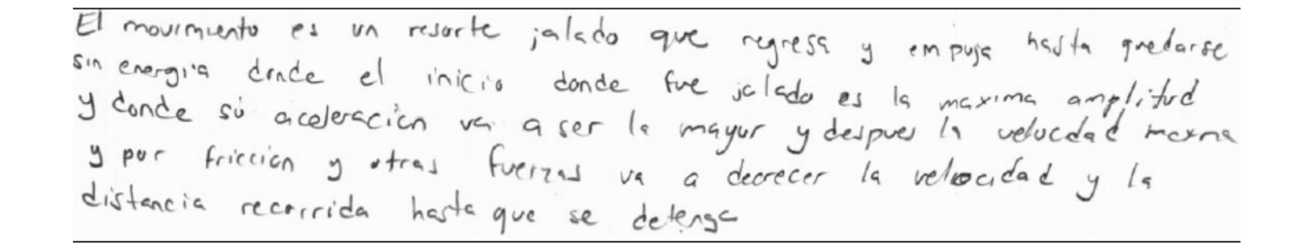
Podemos observar que la fuerza disminuye con el tiempo. Los puntos máximos coinciden con los momentos en los que el oscilador llega al final de su camino. Su velocidad y aceleración son cero antes de alejarse y moverse de nuevo. Las mínimas coinciden con la máxima extensión del manantial y gracias a la fricción, pico de su energía.

Figura 12. Interpretación de David. Equipo "Indeterminado". Fuente: Elaboración propia.



Al principio, cuando se libera el bloque de plastilina, una vez que ya hemos analizado los gráficos realizados con la ayuda de GeoGebra, encontramos que tanto la velocidad máxima como la máxima aceleración es en los primeros segundos. Entonces como el tiempo aumenta la velocidad y la aceleración se reducen, hasta que el bloque alcanza un estado estático. Del mismo modo, las fuerzas que interactúan en el sistema van de un máximo a un mínimo.

Figura 13. Interpretación final de Luisa. Equipo "Indeterminado". Fuente: Elaboración propia.


El movimiento es un resorte jalado que regresa y empuja hasta quedarse sin energia donde el inicio donde fue jalado es la maxima amplitud y donde sú aceleracion va a ser la mayor y despues la velocidad maxima y por friccion y otras fuerzas va a decrecer la velocidad y la distancia recorrida hasta que se detenga

El movimiento es un resorte tirado que regresa y empuja hasta que se queda sin energía. Al principio donde se tiró es la amplitud máxima y donde su aceleración será la mayor. A continuación, la velocidad máxima y la fricción y otras fuerzas disminuirán la velocidad y la distancia recorrida hasta que se detenga.

Figura 14. Interpretación final de Efrén. Equipo "Lo que nunca". Fuente: Elaboración propia.

DISCUSIÓN

Las explicaciones dadas por David, Luisa y Efrén al finalizar la actividad fueron más contundentes que las introducidas en la primera etapa de la experimentación. Consideramos que la tarea de modelización motivó el debate científico entre los estudiantes, la socialización de la información y la generación de argumentos. Las diferentes representaciones ofrecidas les permitieron adquirir un lenguaje más rico para su expresión escrita que se puede apreciar en sus últimas explicaciones (Figuras 12 a 14).

Desafortunadamente, el trabajo fisicomatemático no llegó más allá de una comprensión conceptual. Se reconoce la necesidad de dar continuidad a este tipo de actividades con el fin de obtener evidencia de un trabajo fisicomatemático más completo. En cuanto a las expresiones de los estudiantes, hace falta claridad para referirse a la aceleración dado que algunos se apoyaron en el gráfico para interpretarla, pero al parecer ignoraron que la representación sólo ofrece información directa del desplazamiento con respecto al tiempo; para la velocidad, habría que obtener la pendiente de la curva. Ningún participante advirtió que se requiere hacer un gráfico de velocidad contra tiempo para apreciar el comportamiento de la aceleración. Por otra parte, hacen referencia a una relación entre los máximos, mínimos y las fuerzas, sin explicar sus causas.

Se reconoce que, para comprender plenamente el comportamiento del fenómeno observado, será necesario realizar otras actividades que permitan a los sujetos relacionar el primer orden de variación del desplazamiento con la velocidad y el segundo orden con la aceleración. Nadie hizo referencia a las fuerzas involucradas como causas del movimiento, ni a alguna de las leyes de Newton como principios aceptados para explicar el comportamiento del suceso presentado, lo que evidencia lo parcelado que se presenta el contenido a los estudiantes, a pesar de tratarse de un área de ingeniería.

CONCLUSIONES

El análisis de la forma en que un alumno pasa de la comprensión de un fenómeno físico a su descripción matemática permitió hacer una contribución al constructo teórico de los ETM, el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM). Con base en esta propuesta teórica, se puede responder a la pregunta de investigación afirmando que la tarea de modelización matemática de un fenómeno físico experimental desencadena en el estudiante los procesos de trabajo fisicomatemático siguientes:

Cognitivos: cuando el estudiante pone en práctica su comprensión de los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración, así como la relación con los principios que rigen las causas del movimiento. Los obstáculos epistemológicos que surgen en un caso como ideas previas para la física, o en otro como errores en la interpretación de propiedades y objetos matemáticos, limitan significativamente las relaciones entre los diferentes componentes y desarrollo de procesos en el ETFM y en el ETM^{F}.

Semióticos de distinta índole y profundidad: porque en principio, el estudiante tiene que reconocer el plano cartesiano como sistema de referencia posicional, dominar sus reglas de significado como registro gráfico, y ubicar un origen que sea útil y práctico para realizar las mediciones y estimaciones necesarias que permitan explicar eficientemente los desplazamientos del oscilador armónico amortiguado. Luego, debe distinguir las curvas continuas, no sólo como representaciones gráficas, sino como objetos matemáticos que sirven para aproximar los comportamientos de los fenómenos naturales. Estas representaciones han de ser traducibles como cambios de posición y velocidad con respecto al tiempo, reconociendo los caracteres escalar y vectorial de estas magnitudes, asociándolas al movimiento, pero atendiendo a sus causas.

Experimentales: dado que los estudiantes deben llevar a cabo instrumentaciones diversas de forma acelerada para hacer mediciones apropiadas que permitan recuperar información suficiente de los fenómenos naturales de estudio a través de distintas representaciones como tablas o gráficas, que servirán para explicar y predecir su comportamiento.

Discursivos: cuando se promueve una práctica colaborativa entre los estudiantes, motivando la discusión basada en justificaciones que provienen de la interpretación del comportamiento de un fenómeno a partir de sus distintas representaciones y principios que los rigen. El intercambio de ideas entre los estudiantes fue limitado, quizá por la falta de dominio de un lenguaje apropiado, común o incluso institucionalizado, o quizá por la falta de esta práctica en las aulas, lo que revela la necesidad fomentar el debate y la discusión para explotar el discurso científico escolar.

Se confirma que la tarea resultó desafiante para los estudiantes, pero al mismo tiempo les permitió hacer distintos acercamientos a la comprensión del comportamiento del oscilador armónico. El profesor es quien debe reconocer estos avances para motivar el desarrollo del discurso científico escolar que se ha propiciado.

El ETFM está presente cuando un estudiante se enfrenta a la tarea de describir matemáticamente un fenómeno físico. En la modelización, los componentes físicos y matemáticos deben tenerse en cuenta al diseñar tareas que impliquen trabajo matemático en física. Sin embargo, es deseable la expansión de este estudio para entrar en más tareas de modelización y apreciar el resurgimiento de las relaciones dadas entre los componentes del ETFM descrito y otras que pudieran surgir.

Los resultados del presente estudio permiten asumir que un proceso de *simulación* se inserta en un ETM^F (que forma parte del ETFM) mediante la sustitución de las condiciones reales por condiciones controladas. En otras palabras, el ETM^F utiliza objetos que obedecen las reglas de la física, para luego sumergirse en el trabajo con los objetos matemáticos, adquiriendo un funcionamiento autónomo.

Finalmente, las actividades de trabajo realizadas entre compañeros generaron espacios para hacer afirmaciones y construir argumentos entre los estudiantes. Esta dinámica les permitió hacer una construcción más completa del modelo que representa el fenómeno observado.

REFERENCIAS

Asikainen, M. A., y Hirvonen, P. E. (2010). Finnish cooperating physics teachers' conceptions of physics teachers' teacher knowledge. *Journal of Science Teacher Education*, 21(4), 431-450. DOI 10.1007/s10972-010-9187-y

Artigue, M. (2016). Mathematical Working Spaces through networking lens. ZDM, 48*(6)*, 935-939. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0810-z

Baird, D. C. (1991). *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice Hall.

Clement, J. J. (2009). The role of imagistic simulation in scientific thought experiments. *Topics in Cognitive Science*, 1(4), 686-710. DOI: 10.1111/j.1756-8765.2009.01031.x

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75(2), 213-234. DOI 10.1007/s10649-010-9254-5

Duit, R. y Treagust, D. F. (2012). How can conceptual change contribute to theory and practice in science education? In Fraser, B., Tobin, K., y McRobbie, C. J. (Eds.), *Second International Handbook of Science Education*. Vol. 24. 107-118. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9041-7_9

Elkins, J. (2011). Visual practices across the University: A report. In Oliver Grau with Thomas Veigl, M. A. (Eds.), *Imagery in the 21st Century*. (pp. 159-161). The MIT Press. DOI:10.7551/mitpress/9780262015721.003.0009

Galili, I., y Tseitlin, M. (2003). Newton's First Law: Text, translations, interpretations, and physics education. *Science & Education*, 12*(1)*, 45-73. https://doi.org/10.1023/A:1022632600805

González Martín, A. S., Hitt, F., y Morasse, C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of covariation and spontaneous representations. A case study. *Proceedings of* PME *32 and* PME-NA 30*(3)*, 89-97.

Halloun, I. A. (2007). Mediated modeling in science education. *Science & Education*, 16*(7)*, 653-697. https://doi.org/10.1007/s11191-006-9004-3

Hitt, F., y Cortés, J. C. (2014). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 10(1). https://doi.org/10.18845/rdmei.v10i1.1977

Hitt, F. y González Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate, and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*. 88, 201–219. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7

Hitt, F.; Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de Educación*, 38 (73), 153-177. DOI: 10.17227/01203916.73rce151.175

Houdement, C. Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Hubber, P., Tytler R. y Chittleborough G. (2018) Representation Construction: A Guided Inquiry Approach for Science Education. In: Jorgensen R., Larkin K. (Eds.), STEM *Education in the Junior Secondary*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5448-8_5

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kelly, G. J., Druker, S. y Chen, C. (1998). Students' reasoning about electricity: Combining performance assessments with argumentation analysis. *International Journal of Science Education*, 20(7), 849-871. https://doi.org/10.1080/0950069980200707

Kuzniak, A. y Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work: Viewpoints and Perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME 17 (4-I), 17-27. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Lagrange, J. B., Recio, T., Richard, P. R., Vivier, L. (2017). Specificities of tools and signs in the mathematical work. In I. M. Gómez Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard and L. Vivier (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Mathematical Working Space. Espace de Travail Mathématique. Actas, Quinto Simposio Internacional.* ETM *Proceedings Fifth* ETM *Symposium. Actes Cinquième Symposium* ETM. (pp. 207-217). University of Western Macedonia.

Machado, J., Braga, M. (2019). A proposta da Redescrição Representacional como referencial para a conceitualização de modelos na educação científica. *Ciência y Educação*, 25 (3), 589-606. https://doi.org/10.1590/1516-731320190030013

Malafosse, D.; Lerouge, A.; Dusseau, J. M. (2000). Étude, en inter-didactique des mathématiques et de la physique, de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité. *Didaskalia*, 16, 81-106. https://doi.org/10.4267/2042/23903

Moutet, L. (2018) Analyse d'une séquence d'enseignement de la relativité restreinte: l'apport du modèle de l'ETM étendu. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 23, 107–136.

Moutet L. (2021) The extended theoretical framework of mathematical working space (Extended MWS): Potentialities in Chemistry. In: Leung F.K.S., Stillman G.A., Kaiser G., Wong K.L. (Eds), Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_53

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., y Kadunz, G. (Eds.). (2018). *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research*. Springer. DOI 10.1007/978-3-319-70287-2

Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, 24 (5), 561-590. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7

Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14, 79–101.

Prain, V. y Tytler R. (2012) Learning Through Constructing Representations in Science: A framework of representational construction affordances, *International Journal of Science Education*, (34) 17, 2751-2773, DOI: 10.1080/09500693.2011.626462

Vergnaud, G. (1992). Conceptual Fields, Problem Solving and Intelligent Computer Tools. In L. M. De Corte E. (Eds.), *Computer-Based Learning Environments and Problem Solving*. 84, 287-308. Springer.

03

EL PAPEL DE LA SIMULACIÓN INFORMÁTICA EN LA ARTICULACIÓN DE LOS CAMPOS PROBABILÍSTICO Y ESTADÍSTICO

Recibido el 23 de septiembre de 2021, aceptado el 7 de marzo de 2022

THE ROLE OF COMPUTER-AIDED SIMULATION IN ARTICULATING THE DOMAINS OF PROBABILY AND STATISTICS

LE RÔLE DE LA SIMULATION INFORMATIQUE DANS L'ARTICULATION DES DOMAINES PROBABILISTE ET STATISTIQUE

Assia Nechache[1]
Bernard Parzysz[2]

[1, 2]CY Cergy Paris Université - LDAR (Francia)
[1]Correo: assia.nechache@cyu.fr
[1]ORCID https://orcid.org/0000-0001-9650-1261

[2]Correo: parzysz.bernard@wanadoo.fr
[2]ORCID https://orcid.org/0000-0002-5340-4418

RESUMEN

Este artículo se centra en el uso y el papel de la simulación informática de experimentos aleatorios en la enseñanza secundaria, tomando el caso de la Francia como ejemplo. De hecho, uno de los aspectos esenciales de la enseñanza de la probabilidad en los centros de secundaria es el lugar que se otorga a la modelización. Vincular un experimento aleatorio real con la teoría de la probabilidad lleva a cuestionar la modelización en términos de proceso. Además, el uso de herramientas tecnológicas (ordenador, calculadora), cada vez más presentes en la enseñanza de las matemáticas, lleva a plantear la cuestión de la modelización de la realidad mediante la simulación de experimentos aleatorios. La transición de los experimentos aleatorios a su simulación es una cuestión fundamental en la enseñanza de la estadística, ya que permite a los estudiantes acceder al "pensamiento estadístico".
Los retos de la programación de simulaciones en la enseñanza de la probabilidad están de primera importancia. La aplicación de simulación informática recurre a dos campos diferentes: probabilidad y tambien estadística, que intervienen a su vez en el proceso de resolución de problemas. Es probable que esta ambigüedad, inherente al enfoque, cree confusión en los alumnos entre lo que es observacional y lo que es teórico. Además, el uso de tecnología necesita el uso de la programación algorítmica, cuyo estatuto arriesga en consecuencia de ser tambien une fuente de ambigüedad. Pero una vez explicada con claridad puede utilizarse para introducir conceptos probabilísticos, basándose en su analogía con conceptos estadísticos ya conocidos.

Palabras clave: Simulación; Informática; Probabilidad; Estadística; Espacio de trabajo matemático.

ABSTRACT

This article focuses on the use and role of computer simulation of random experiments in secondary education, taking the case of France as an example. Indeed, one of the essential aspects of the teaching of probability in secondary schools is the place given to modelling. Linking a real random experiment with probability theory leads to questioning the modelling in terms of process. Moreover, the use of technological tools (computer, calculator), which are increasingly present in mathematics teaching, leads to the question of modelling reality via the simulation of random experiments. The transition from random experiments to their simulation is a fundamental issue in the teaching of statistics, as it allows students to access "statistical thinking". Thus the stakes of programming simulations in the teaching of probability are most important. The ilmplementaztion of a computrer-aided simulation requires making use of two domains: probability, of course, but also statistics, which intervene in turn in the problem-solving process. This co-existence of two domains conceals an ambiguity, inherent in the approach, is likely to create confusion in students between what is observational and what is theoretical. Moreover, the use of technology requires also the use of algorithmics-programming, the status of which is at risk to be a source of confusion as well.

Keywords: Simulation; Computer science; Probability; Statistics; Mathematical Work Space.

RÉSUMÉ

Le propos de cet article porte sur l'usage et le rôle de la simulation informatique d'expériences aléatoires dans l'enseignement secondaire, en prenant comme exemple le cas de la France. En effet, l'un des aspects essentiels de l'enseignement des probabilités dans le secondaire est la place donnée à la modélisation. La mise en lien d'une expérience aléatoire réelle avec la théorie des probabilités conduit à interroger la modélisation en termes de processus. En outre, le recours aux outils technologiques (ordinateur, calculatrice), de plus en plus présents dans l'enseignement des mathématiques, conduit à aborder la question de la modélisation du réel *via* la simulation d'expériences aléatoires. Or le passage de l'expérience aléatoire à sa simulation est une question fondamentale de l'enseignement de la statistique, car il est une voie d'accès des élèves à la «pensée statistique». Les enjeux de la programmation de simulations dans l'enseignement des probabilités sont donc de première importance. La mise en oeuvre de la simulation informatique fait appel aux deux domaines: probabilités, bien sûr, mais aussi statistique, qui interviennent tour à tour dans la démarche de résolution de problème. Cette coexistence des deux domaines recèle une ambiguïté fondamentale. Celle-ci est inhérente à la démarche, est susceptible de créer chez les élèves une confusion entre ce qui relève de l'observation et ce qui relève de la théorie. En outre, le recours à la technologie requiert également, l'usage de l'algorithmique-programmation, dont le statut risque aussi en conséquence d'être source de confusion.

Mots-clés: Simulation; Informatique; Probabilités; Statistique; Espace de Travail Mathématique.

INTRODUCTION

Cet article s'intéresse à la simulation informatique dans l'enseignement des probabilités de façon générale, en s'appuyant en particulier sur le cas de la France. Le type de tâches lié à la simulation met en jeu la co-occurrence et l'articulation de trois domaines distincts: les probabilités, la statistique et l'informatique[1]. Cependant, si la zone d'intervention de la programmation y est clairement visible en raison de sa nature même, il s'avère que l'articulation entre les deux autres domaines mathématiques reste le plus souvent totalement implicite. Ce sont plus précisément les enjeux didactiques de la simulation informatique de situations aléatoires par les élèves que l'on se propose d'étudier ici, en en mettant en évidence à la fois l'intérêt et les difficultés.

Du point de vue des programmes scolaires en France, avec le développement du calcul informatique, il y a une forte insistance sur les traitements des situations aléatoires faisant appel aux modèles numériques avec l'usage des simulations informatiques d'expériences aléatoires; en particulier lorsque les modèles probabilistes théoriques (lois de probabilités) ne sont pas encore disponibles pour les élèves. L'utilisation d'un ordinateur ou d'une calculatrice permet d'expérimenter une expérience aléatoire par simulation, en la répétant un grand nombre de fois, de façon beaucoup plus aisée et rapide que par une expérimentation réelle. La simulation est donc un outil intéressant pour établir des conjectures, résoudre des problèmes trop difficiles ou impossibles à traiter directement dans un modèle probabiliste de type analytique. La justification des résultats (de l'expérience simulée) obtenus est alors fondée sur la loi des grands nombres qui permet d'affirmer qu'en réalisant une expérience aléatoire un grand nombre de fois, de manière indépendante, les fréquences observées — qui relèvent donc du domaine de la statistique — se rapprochent des probabilités à évaluer. Par conséquent, deux domaines mathématiques, la statistique et les probabilités, sont en constantes et étroites interactions. Ces interactions sont traduites par des changement de domaine (Montoya et Viver, 2014) et par conséquent des changements d'espace de travail mathématique entre celui des probabilités et de la statistique. Mais ces interactions ne sont pas clairement explicitées dans l'enseignement. Cette situation implique alors une ambiguïté fondamentale causée par la coexistence de deux domaines différents. Elle est susceptible de créer chez les élèves une confusion entre ce qui relève de l'observation et ce qui relève de la théorie. Cependant, nous pensons qu'une fois clairement explicitées elles peuvent être utilisées pour l'introduction de certains concepts probabilistes, en s'appuyant justement sur leur analogie avec des concepts statistiques déjà connus.

1 Sous ce vocable nous incluons à la fois l'algorithmique – ensemble de connaissances permettant la transformation d'une tâche mathématique en une suite ordonnée d'opérations élémentaires, en vue de sa réalisation par une machine (ordinateur, calculatrice) – et la programmation, permettant de coder cette suite d'opérations en une liste d'instructions rédigée dans un langage compréhensible par une machine donnée.

Cet article, qui se réfère au cadre théorique des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016) et à la notion de paradigmes probabilistes P1 et P2 (Nechache & Parzysz, 2019) étudie le rôle de la simulation informatique des expériences aléatoires dans l'enseignement secondaire, et plus précisément son rôle dans l'articulation des deux domaines mathématiques que constituent la statistique et les probabilités et dans la connexion des deux ETM associés respectivement à ces deux domaines. Pour ce faire, nous commençons par préciser la nature épistémologique de la simulation et les outils informatiques utilisés dans l'enseignement pour explorer des expériences aléatoires. Cela permet de préciser la manière dont les deux domaines, probabilités et statistique, sont articulés. Ensuite, nous expliquons les enjeux didactiques de la simulation dans l'enseignement. Enfin, à partir de l'étude de quelques manuels scolaires nous expliciterons le travail mathématique de simulation attendu des élèves dans cet espace idoine potentiel[2].

NATURE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA SIMULATION D'EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

La simulation est une manière de représenter une situation de façon analogique en utilisant des outils mathématiques. Une définition plus précise de la simulation serait alors:

La méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude. (Dodge, 1993)

Il est donc nécessaire d'élaborer, préalablement à la simulation, un modèle théorique de l'expérience étudiée. C'est en effet ce modèle qui va être simulé, et non pas l'expérience elle-même. Il en résulte qu'on se trouve ici en présence d'un schéma ternaire, et non binaire (Figure 1).

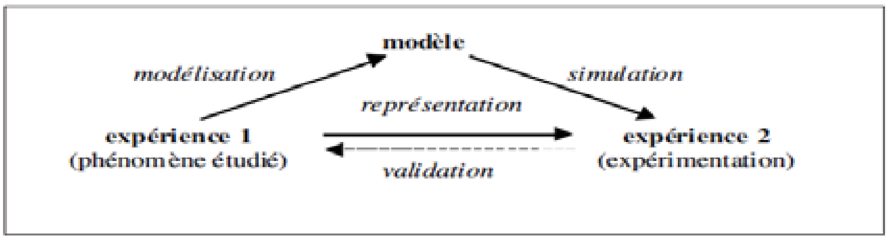


Figure 1. Schéma ternaire de la simulation (Parzysz, 2009).

Dans ce schéma, l'expérience 1 est celle qu'il s'agit de reproduire sous une autre forme, celle de l'expérience 2. Pour ce faire on commence par définir un modèle mathématique de l'expérience 1, puis on recherche une autre expérience répondant au même modèle. Dans le cas qui nous occupe ici, les expériences en jeu sont des expériences aléatoires et le modèle de référence est pris dans la théorie des probabilités.

Par conséquent, avant de simuler une expérience aléatoire, il est nécessaire de concevoir – ou de choisir parmi plusieurs disponibles – un modèle théorique de cette expérience. Comme nous l'avons indiqué plus haut, la simulation consiste à remplacer l'expérience aléatoire initiale par une autre expérience qu'on considère comme « équivalente », ce qualificatif signifiant ici que la seconde expérience relève du même modèle probabiliste. C'est donc la pertinence du modèle probabiliste déterminant la simulation qui assure l'adéquation entre les deux expériences. En d'autres termes et *par définition*, c'est le fait que l'expérience aléatoire réelle (expérience 1 de la figure 1) et l'expérience aléatoire simulée (expérience 2 de la figure 1) ressortissent au même modèle, qui assure leur équivalence.

Pour prendre un exemple très simple, supposons qu'on veuille jouer à pile ou face. Pour être équitable, le jeu suppose que chacun des deux côtés de la pièce a une chance sur deux d'être obtenu. Pour s'en assurer, on peut procéder à une série nombreuse de lancers de la pièce, selon un même protocole expérimental, et si le nombre d'apparitions de chaque côté est sensiblement le même on dira que la pièce est bien équilibrée et on acceptera le modèle. Cette phase de test du modèle, toute qualitative qu'elle soit, est importante avec les débutants en probabilités, car non seulement elle valide le modèle, mais elle met en œuvre la loi des grands nombres en faisant apparaître la convergence de la fréquence observée vers la probabilité supposée, constituant ainsi une première confrontation entre réalité et modèle, c'est-à-dire entre le domaine de la statistique et celui des probabilités. On aborde de ce fait, même si c'est de façon tout à fait marginale, la statistique intérentielle.

2 ETM idoine potentiel correspond à ce que les auteurs ou un enseignant prévoit a priori, qui montre un travail mathématique attendu a priori

Supposons maintenant qu'on veuille jouer à pile ou face mais qu'on soit dépourvu de pièce de monnaie. Si on dispose d'un dé ordinaire à six faces, on peut l'utiliser pour *simuler* le jeu, en décidant par exemple qu'obtenir un point pair correspondra à pile et un point impair à face. C'est en effet le même modèle probabiliste, celui de l'équiprobabilité de deux éventualités, qui régit les deux expériences. Le modèle associé au dé – supposé non pipé – est celui de l'équiprobabilité d'obtenir chacune des six faces. Ce modèle implique celui dans lequel on a la même probabilité d'obtenir un nombre pair ou un nombre impair, et finalement le même modèle correspond aux deux expériences aléatoires.

Si on dispose d'une calculatrice, on pourra utiliser la touche « random » pour simuler le jeu, en décidant par exemple qu'obtenir un nombre inférieur à 0,5 correspondra à pile et que sinon ce sera face. Dans ce cas, on pourra même aller plus vite et plus loin en programmant un nombre élevé de lancers de la pièce, et ainsi obtenir immédiatement ce qu'on n'aurait obtenu qu'au bout d'un temps beaucoup plus long à l'aide d'une pièce ou d'un dé. La simulation informatique apparaît ainsi comme un *substitut* de l'expérience aléatoire étudiée.

Comme nous allons le voir, la simulation informatique *d'expériences aléatoires* peut jouer un rôle important dans l'acquisition de la notion de modèle probabiliste. En effet, la comparaison des procédures de simulation associées à diverses expériences aléatoires, ainsi que celle des tableaux qu'elles produisent dans un tableur, peuvent faire apparaître des similitudes conduisant à considérer comme légitime la substitution d'une expérience à une autre, et à dégager l'idée d'un schéma d'expérience commun, sur lequel pourra ensuite s'élaborer la notion de modèle (Parzysz, 2011).

OUTILS INFORMATIQUES POUR EXPLORER DES EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

En France, dès le début de l'enseignement secondaire (dès l'âge de 11 ans), les élèves sont amenés à utiliser des outils informatiques tels que la calculatrice et l'ordinateur. Ces outils, et plus particulièrement le tableur-grapheur, sont mobilisés dans un premier temps dans l'Espace de Travail Mathématique de la Statistique (ETMS) visant à traiter des données statistiques résultant d'enquêtes réelles ou fictives: classement des données, regroupement en classes, calcul d'effectifs et de fréquences, calcul de paramètres : moyenne, médiane, quartiles, écart-type, etc.), représentations graphiques (representamen) de types variés (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, etc.). Outre les éléments de logique élémentaire nécessaires pour la programmation, cet espace de travail se limite à la statistique descriptive: les données sont des faits certains, observés, et il en résulte que les paramètres associés ne sont sujets à aucune fluctuation.

Par la suite, ordinateur ou calculatrice (artefacts technologiques) sont utilisés pour produire un échantillon résultant de la simulation (dite informatique) de répétitions d'une même expérience aléatoire. On conçoit aisément l'intérêt premier, pour l'enseignant, du recours à cet outil, qui permet d'obtenir rapidement à l'aide d'artefacts technologiques, et à peu de frais un très grand nombre de données qu'on pourra ensuite utiliser pour étudier des situations aléatoires. Cependant, ces données ne sont pas obtenues de façon "naturelle", c'est-à-dire comme résultats d'une expérimentation physique; elles sont générées artificiellement par un artefact technologique. Il importe donc que l'enseignement des probabilités prenne en compte les rapports entre l'expérience aléatoire réelle et l'expérience simulée, afin que le recours à la technologie apparaisse légitime, et non comme un tour de passe-passe. Cette situation nécessite alors de concevoir un Espace de Travail Mathématique probabiliste (ETMP) idoine explicitant l'intérêt de l'usage d'un artefact technologique pour faciliter le passage entre les deux expériences aléatoires.

Commençons par détailler la démarche de programmation intervenant dans le processus de simulation. Il s'agit d'utiliser le générateur pseudo-aléatoire de l'artefact technologique à l'intérieur d'un programme ayant pour objet de fournir une suite de résultats dont on pense qu'elle aurait pu être obtenue avec l'expérience réelle. Le programme doit donc comprendre une liste d'issues, une instruction indiquant la probabilité associée à chacune d'elles, ainsi qu'une instruction d'itération de la procédure. Cette opération nécessite donc la donnée d'un *modèle probabiliste* de l'expérience simulée, et l'artefact technologique ne fera qu'appliquer ce modèle. L'établissement de celui-ci constitue par conséquent un élément crucial de la démarche, et cette première partie du processus se situe tout entière dans L'ETMP.

Comme avec l'expérience réelle, la réponse donnée par l'artefact technologique est une suite d'issues, autrement dit un échantillon, qu'il s'agira ensuite d'étudier en vue de la résolution du problème posé. On est donc à présent passé dans l'ETMS. Mais, dans la pratique, le passage entre l'ETMP et l'ETMS est-il si apparent? De fait, en observant une feuille de données statistiques, réalisée par exemple sous tableur, on ne peut pas savoir si ces données ont été introduites manuellement, à la suite d'une expérimentation réelle (cf. Figure 2 à gauche), ou si elles ont été générées par l'artefact technologique lui-même (cf. Figure 2 à droite). En effet, les deux procédures, quoique distinctes, sont visualisées de façon identique, puisqu'elles utilisent les mêmes representamens (le tableau, les données affichées). La seule différence entre ces deux procédures réside dans la façon dont les données ont été obtenues. En outre, le prestige accordé à l'artefact technologique par les élèves tend à renforcer l'aspect "absolu" du résultat.

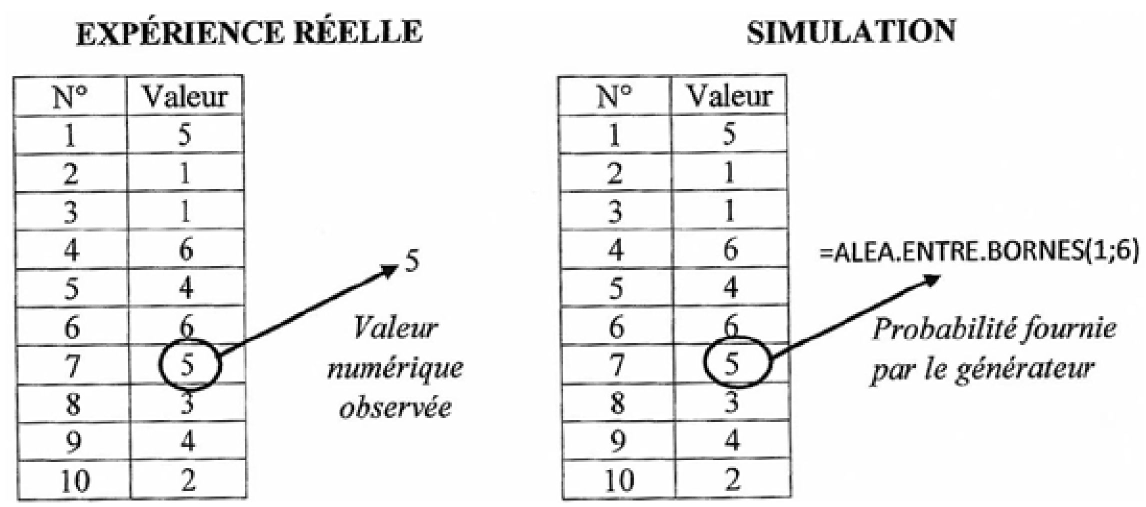
Pour contrecarrer cette tendance on peut par exemple:

— soit provoquer un recalcul de la feuille.
— soit aller rechercher la source d'une donnée dans sa cellule.

Cette différence, si elle n'est pas clairement explicitée aux élèves, peut représenter un obstacle pour l'interprétation des données. En effet, le nombre "5" (cf. Figure 2 à gauche), obtenu par une expérimentation réelle d'une expérience aléatoire, n'a pas la même signification que le nombre "5" (Figure 2 à droite) obtenu par la simulation de cette même expérience. Un moyen de rendre explicite le fait qu'on se trouve maintenant dans l'ETMS et non plus dans l'ETMP consiste à faire produire plusieurs échantillons, et non un seul. En outre, le travail au sein d'une classe permet de faire comparer les échantillons obtenus par les élèves ou les groupes d'élèves. Ainsi, le fait qu'ils soient différents "relativisera" le résultat obtenu. Cette différence portant sur la signification des données ne se limite donc pas au seul domaine de la statistique, mais necessite *de facto* celui des probabilités. Par ailleurs, la recherche de stratégies de simulation pour résoudre des problèmes de probabilités (et de statistique) constitue une véritable alternative à la résolution "classique" et peut offrir une ouverture pour des élèves peu à l'aise avec la formalisation mathématique. On voit ainsi que le recours à la simulation informatique permet une présentation dynamique du fonctionnement et de l'interaction des deux espaces de travail ETMS et ETMP.

Le recours à la simulation implique pour les élèves des difficultés que l'on doit prendre en compte. L'une d'entre elles – voir ci-dessus – porte sur le fait de distinguer clairement ce qui est observé (qui est sujet à variations) et ce qui appartient à la théorie (qui est fixe). Avec une "vraie" simulation (*i.e.* manuelle), la distinction est plus évidente car on travaille avec du concret (lancer de pièces tirage de boules…). De plus, par la suite le traitement des données issues de la simulation mettra en jeu des paramètres statistiques qui sont formellement très voisins de paramètres probabilistes (fréquence ? probabilité, moyenne ? espérance, variance ? variance, etc.).

Un lien raisonné entre les deux notions de *fréquence* et de *probabilité* s'établira ainsi selon deux modalités possibles: l'une en constatant "matériellement" le phénomène de stabilisation de fréquences; l'autre en utilisant un tableur pour simuler l'expérience aléatoire. Ces modalités relèvent toutes deux d'une approche fréquentiste, et elles visent à établir



N°	Valeur
1	5
2	1
3	1
4	6
5	4
6	6
7	5
8	3
9	4
10	2

N°	Valeur
1	5
2	1
3	1
4	6
5	4
6	6
7	5
8	3
9	4
10	2

Figure 2. Série de 10 lancers d'un dé ordinaire non pipé.

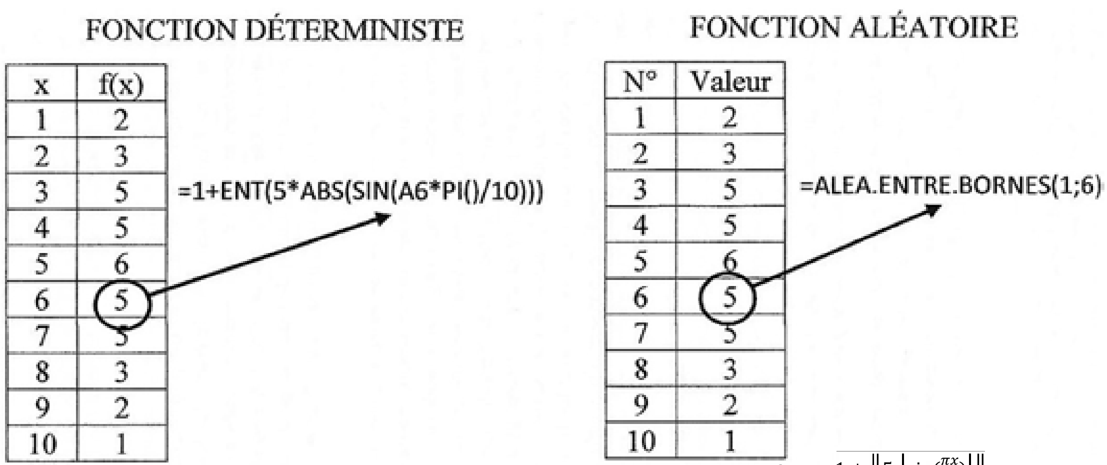
un lien entre les deux paradigmes SD et P1 (Nechache & Parzysz, 2019) au moyen de la gestion du saut conceptuel entre l'observé et le théorique. Mais elles sont cependant fort différentes, car dans l'étude de la répétition de l'expérience réelle la probabilité est le point d'aboutissement de la démarche, tandis que dans la simulation informatique elle se situe au contraire au départ, sous la forme du modèle mis en oeuvre. Pour cette raison, il nous semble préférable que la simulation informatique n'intervienne que dans un second temps, lorsque la notion de *modèle* d'expérience aléatoire a préalablement été dégagée au moyen d'expérimentations *réelles* (ibid.). La simulation informatique pourra ensuite permettre, par comparaison avec les résultats de l'expérience originale, de tester la validité du modèle introduit dans l'artefact technologique.

Par ailleurs, lorsqu'on réalise une simulation informatique, le modèle probabiliste implémenté peut fort bien ne pas être perçu comme tel, particulièrement dans les débuts de l'enseignement des probabilités, lorsqu'on travaille en ne disposant que du paradigme P1 dans lequel l'expérience est définie par un protocole expérimental, une liste d'issues possibles et une valeur de probabilité affectée à chacune d'entre elles (Henry, 1999, Parzysz, 2009). Par exemple, pour le lancer d'un dé ordinaire à six faces, non pipé, le point marqué s'obtiendra à l'aide d'une fonction pseudo-aléatoire donnant la même chance d'apparition à toute valeur entière comprise entre 1 et 6. Cette fonction est censée correspondre à une distribution de probabilité équiprobable, mais formellement sa programmation est quasi identique à celle d'une fonction mathématique déterministe, à ceci près que la valeur prise ne dépend pas d'une autre valeur du tableau mais du générateur pseudo-aléatoire (Figure. 3)

Même si, dans son fonctionnement réel, l'ordinateur se limite à exhiber les effets sur les fréquences affichées du principe d'équirépartition des nombres pseudo-aléatoires qu'il génère, l'usage qui en est fait dans la classe en tant que (pseudo-)générateur de hasard permet de faire comprendre en acte les notions de fréquence, de fluctuation d'échantillonnage et de probabilité (Henry, 2011), à condition toutefois de prendre certaines précautions.

Ce qui précède montre qu'on ne saurait se satisfaire de la seule exploitation de la puissance et de la rapidité des moyens informatiques pour exhiber des nombres aléatoires et permettre de présenter aux élèves une grande variété d'expériences aléatoires, ce qui n'aurait qu'un intérêt limité. En tant qu'outils de simulation, l'intérêt didactique des outils informatiques – comme nous l'avons vu sur l'exemple étudié plus haut – tient plus fondamentalement à ce qu'ils contraignent à analyser la situation aléatoire en jeu, à émettre sur celle-ci des hypothèses de modèle, notamment sur la loi de probabilité adéquate pour représenter l'intervention du hasard dans l'expérience réelle (par exemple, pour la simulation d'un sondage sociologique à deux éventualités, sur le choix de la valeur de la probabilité *p* de la variable de Bernoulli à introduire dans le programme), et à traduire ces hypothèses en instructions informatiques pour que l'ordinateur permette de résoudre des problèmes difficilement accessibles par le calcul au niveau où se situent les élèves (Henry, 2011).

Comme on vient de le voir, la mise en oeuvre de la simulation informatique fait appel à deux domaines mathématiques: probabilités, bien sûr, mais aussi celui de la statistique, qui interviennent tour à tour dans la démarche de résolution de problème. Cette



FONCTION DÉTERMINISTE

x	f(x)
1	2
2	3
3	5
4	5
5	6
6	5
7	5
8	3
9	2
10	1

=1+ENT(5*ABS(SIN(A6*PI()/10)))

FONCTION ALÉATOIRE

N°	Valeur
1	2
2	3
3	5
4	5
5	6
6	5
7	5
8	3
9	2
10	1

=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

Figure 3. Programmation d'une fonction déterministe: $x \rightarrow f(x) = \overline{1 + \left\| 5.\left|\sin(\frac{\pi x}{10})\right| \right\|}$
et d'une fonction aléatoire équiprobable sur [1;6].

coexistence des deux domaines recèle une ambiguïté fondamentale. Celle-ci est susceptible de créer chez les élèves une confusion entre ce qui relève de l'observation et ce qui relève de la théorie, mais une fois clairement explicitée elle peut être utilisée pour l'introduction de concepts probabilistes, en s'appuyant justement sur leur analogie avec des concepts statistiques déjà connus.

RÔLE DE LA SIMULATION D'EXPÉRIENCE ALÉATOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT

Comme nous l'avons dit plus haut, la simulation d'expérience aléatoire fait appel à la notion de modèle probabiliste, et par conséquent à un processus de modélisation permettant d'y parvenir. Ceci suppose la compréhension de ce processus et aussi la disponibilité de connaissances théoriques relatives aux deux domaines mathématiques cités précédemment. Un problème se pose ici, car l'artefact technologique ne fait que produire un échantillon d'issues correspondant au modèle qu'on y a introduit au départ, et on ne peut donc tester que la qualité du générateur. Illustrons-le avec un exemple simple, observé dans des classes de lycée. Soit à simuler le lancer de deux dés pour étudier la distribution de la somme des points obtenus. Si l'élève pense que les 11 issues ont la même chance d'apparaître, c'est ce modèle qu'il entrera dans son programme informatique …et bien sûr la simulation produira un résultat compatible avec l'équiprobabilité des issues. Le choix du modèle est donc une étape essentielle de la démarche de simulation, qu'on ne saurait sous-estimer.

On pourrait alors penser que la simultation informatique ne présente que peu d'intérêt, en ce sens qu'elle se contente de produire les effets du modèle qu'on lui a fourni[3]. Cependant, selon Henry, elle presente un intérêt didactique majeur pour la compréhension de la notion de modèle probabiliste, et constitue également un outil de résolution de problèmes. Pour lui, en effet, la pratique de la simulation d'expérience aléatoire "permet *aux élèves de consolider leur appréhension de la nature fréquentiste de la notion de probabilité, qu'ils ont naïvement éprouvée dès le plus jeune âge avec des jeux de hasard*" (Henry, 2011, p. 536). La pratique de la simulation informatique en classe rend possible un travail sur de grandes séries statistiques, donnant véritablement du sens aux résumés statistiques (paramètres de position et de dispersion, diagrammes et histogrammes) et montrant ainsi leur pertinence. Ce qui n'interdit pas de travailler *ensuite* sur de petits échantillons dans le but d'étudier et d'établir les propriétés des paramètres. Elle permet aussi de répéter une expérience aléatoire un nombre de fois suffisamment élevé pour induire une bonne compréhension de la loi des grands nombres et mettre en œuvre un processus de modélisation (plus ou moins explicite). Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, cette pratique aide à une présentation dynamique de l'interaction entre les notions de fréquence et de probabilité. Un intérêt supplémentaire non négligeable est qu'elle offre l'occasion aux élèves de résoudre des problèmes *a priori* trop difficiles pour eux, ou impossibles à traiter directement "à la main". En outre, le recours à la technologie est l'occasion d'initier ou de poursuivre la familiarisation des élèves avec l'algorithmique et la programmation.

LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ATTENDU EN LIEN AVEC LA SIMULATION INFORMATIQUE

Pour rendre compte du travail mathématique attendu lorsque les élèves sont confrontés à des tâches faisant intervenir la simulation informatique dans l'enseignement secondaire, on étudie dans cette partie les activités[4] proposées par cinq manuels français de la classe de seconde (grade 10), traitant le programme de 2019 actuellement en vigueur. Sous la rubrique "*Échantillonnage*", ce programme de cette classe stipule que "*l'objectif est de faire percevoir, sous une forme expérimentale, la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon*" (Programme de la classe de seconde, 2019, p.14). Il s'agit ici, plus précisément, de simuler une expérience aléatoire en s'aidant de l'ordinateur (avec le logiciel Python ou le tableur).

1- Un modèle prototypique d'exercice

Une première constatation est l'existence d'un schéma emblématique d'exercice sur la simulation d'expérience aléatoire, qui est réalisé plus ou moins complètement selon les manuels et le type d'activité considéré (TD, exercices). Ce schéma est organisé selon cinq parties:

3 Elle ne fait que tester la qualité du générateur implanté.

4 Par ce terme nous entendons ici les travaux dirigés, exercices et problèmes.

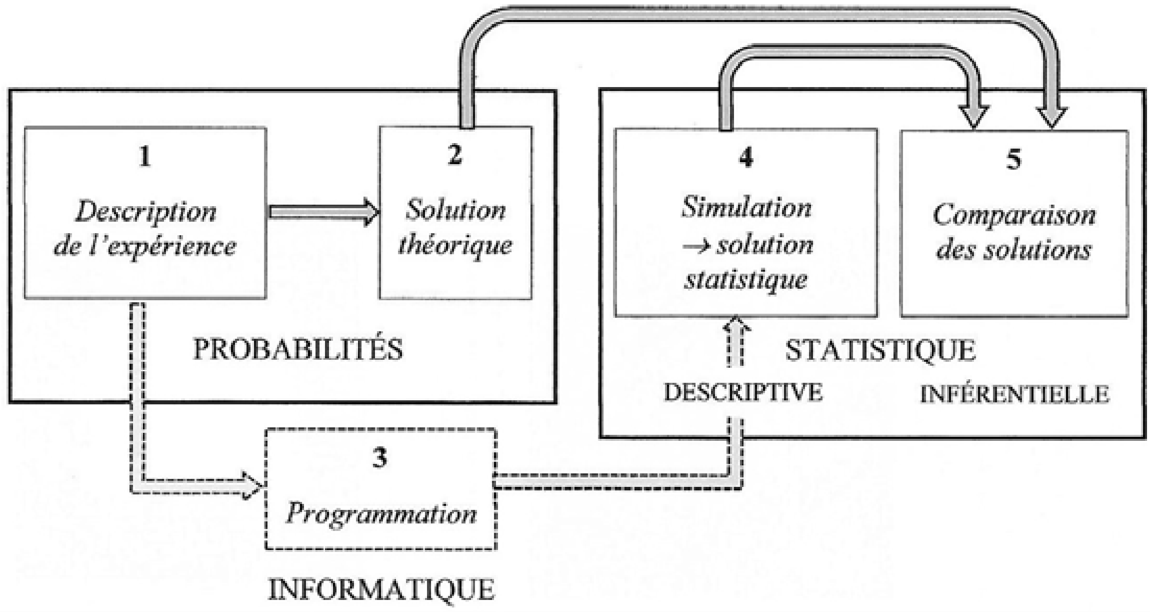


Figure 4. Changements de domaines dans le schéma prototypique d'exercice.

1. Description sommaire de l'expérience aléatoire (dans le paradigme P1) et question sur un événement associé.
2. Résolution théorique (dans le paradigme P2)
3. Programmation (avec le logiciel Python ou Excel)
4. Simulation de *n* épreuves et fréquence de l'événement considéré.
5. Comparaison des résultats du 2° et du 4°.

(N.B. Le qualificatif « sommaire » appliqué à la description de l'expérience aléatoire se justifie notamment par le fait que les conditions de l'expérience ne sont que rarement précisées.)

Les deux premières parties[5] correspondent à un exercice-type de probabilités. La troisième constitue souvent une aide à la prise en main du logiciel, car la mise en forme est détaillée et s'accompagne de questions intermédiaires destinées à guider et à contrôler le travail de l'élève. Une fois ce travail effectué, le programme est mis en œuvre pour réaliser un certain nombre de simulations de l'expérience aléatoire et observer la fréquence obtenue pour l'événement considéré. Enfin, une dernière question demande de comparer ce résultat avec la probabilité théorique calculée au 2°.

Du point de vue des domaines mathématiques abordés, les deux premières parties se situent clairement dans celui des probabilités, la troisième dans celui de l'algorithmique-programmation et la quatrième dans celui de la statistique descriptive. La dernière partie, quant à elle, esquisse un pas en direction de la statistique inférentielle (estimation). Elle doit normalement être l'occasion d'une prise de conscience et d'une reflexión sur la simulation, en montrant:

qu'une simulation produit une distribution voisine de la distribution théorique, quoique différente ;

que des simulations répétées fournissent des résultats différents, quoique voisins.

Ainsi, la mise en œuvre de ce schéma d'exercice suppose des changements de domaines mathématiques, partant d'abord de celui des probabilités pour se diriger vers la statistique inférentielle, en transitant au passage par la statistique descriptive (Figure 4).

En réalité, l'intérêt des auteurs se focalise au premier chef sur l'activité de programmation, car la maîtrise de ce type de programme permettra ensuite à l'élève de simuler d'autres expériences aléatoires. Ceci est clair dans certains intitulés d'activités: "*Comprendre un programme*" (Hyperbole, p. 316), "*Comprendre une fonction en langage Python simulant une expérience à deux issues*" (Transmath, p. 334). Qui plus est, la confrontation du résultat de la simulation avec le modèle théorique n'est même pas toujours demandée.

Ainsi, l'objectif principal de ces activités semble être d'apprendre aux élèves à programmer une expérience aléatoire (avec le tableur qu'ils connaissent déjà, mais aussi et surtout avec le logiciel Python qui est nouveau). On pourrait

5 La deuxième partie est parfois repoussée après la simulation.

presque dire que la simulation n'est là que pour s'assurer que le programme fonctionne convenablement. Par rapport à un programme classique, la seule différence est le fait que la fonction qu'on introduit fait intervenir le générateur pseudo-aléatoire du logiciel et ne se réfère pas à une autre colonne du tableau; il n'y a donc pas de raison justifiant une étude particulière de la construction d'un tel programme. C'est en fait au niveau de son utilisation, c'est-à-dire de la mise en œuvre de *n* itérations, que se situe la spécificité, et c'est plutôt sur ce point que devrait se porter l'attention, de façon à engager une réflexion. Mais on a souvent affaire à un *glissement* (au sens de Carranza) dans lequel le domaine des probabilités n'a comme fonction effective que d'introduire la situation conduisant à la rédaction du programme, sa mise en œuvre servant plutôt de moyen de contrôle de la correction de sa syntaxe que de résolution du problème posé.

2- Une variante

Dans un certain nombre de cas, la première étape du schéma précédent est précédée par une donnée statistique servant à introduire l'expérience aléatoire. Exemple (Sésamath, p. 324): " *D'après un rapport de l'ONU, 16,6% de la population mondiale vit en en Afrique*". On considère ensuite "le *tirage au sort d'un individu dans la population mondiale selon qu'il vit ou non en Afrique*" (ibid.)

Il s'opère ici un passage subreptice du domaine de la statistique descriptive (fréquence d'un caractère) à celui des probabilités (tirage au hasard). Qui plus est, on peut même se demander si certains auteurs ne jouent pas, de façon plus ou moins inconsciente, sur

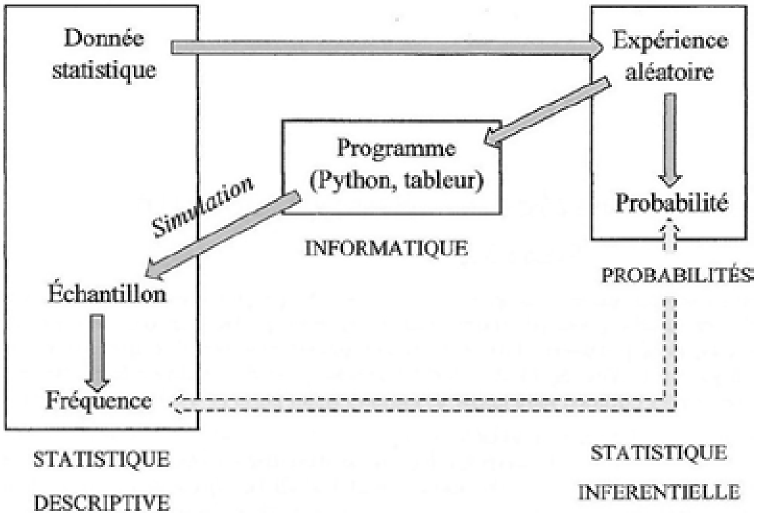


Figure 5. Schéma général des activités de simulation informatique.

l'ambiguïté du vocabulaire et de la notation. Ils notent en effet *p* la *proportion* des individus présentant un certain caractère dans la population considérée, proportion qui est numériquement égale à la *probabilité p* d'obtenir un individu possédant cette propriété dans un tirage au hasard (supposé équiprobable); c'est en particulier le cas pour l'exercice cité ci-dessus. Ainsi, la même lettre *p* désigne un nombre réel qui correspond à deux objets appartenant à deux domaines distincts: une donnée statistique dans l'un (une proportion, c'est-à-dire une fréquence), et une probabilité dans l'autre. Le programme de Seconde lui-même contribue à cette ambiguïté, en utilisant les trois termes dans une même phrase: "*Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence observée dans un échantillon* [de taille *n*], *calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à* $\frac{1}{\sqrt{n}}$" (Programme de la classe de seconde, 2019, p. 14).

Le passage par le domaine de l'informatique est bien visible, à la fois sous la forme du programme lui-même et par son utilisation pour la simulation. En revanche, le passage initial du domaine de la statistique à celui des probabilités, ainsi que le passage en sens inverse lors de la simulation, peuvent faire croire qu'on reste en permanence dans le domaine statistique. En effet, le détour par le domaine des probabilités n'apparaît que sous la forme de l'utilisation d'une fonction aléatoire dans le programme. Au final, pour cette variante du schéma l'ensemble de la démarche peut être schématisé sous la forme du diagramme suivant, étant entendu que certaines parties peuvent éventuellement en être omises (à l'exception de la simulation, bien sûr).

3- La congruence sémantique (Duval, 1995)

Le passage de l'expérience aléatoire au programme informatique nécessite le plus souvent une adaptation de celle-ci, qui constitue de fait un changement de modèle probabiliste. Par exemple (Hyperbole, p. 316):

> " *L'alphabet grec compte 24 lettres dont 5 voyelles. On choisit au hasard une lettre de cet alphabet et on note s'il s'agit d'une voyelle ou d'une consonne.*
>
> *a) Quel est le rôle de la fonction ci-contre écrite en langage Python?*

```
from random import *

 def Alea():
n=randint(1,24)
if n<=5:
   A=1
else :
   A=0
return A (...)"
```

On s'aperçoit que les lettres de l'alphabet grec sont remplacées par les entiers de 1 à 24, les voyelles par les nombres de 1 à 5 et les consonnes par les nombres de 6 à 24. De façon générale, l'idée générale est de renommer les issues de l'expérience aléatoire de façon que leur distribution de probabilité soit identique à celle de l'expérience aléatoire étudiée. L'important est donc ici de construire une distribution rédigée sous une forme accessible à la machine – c'est-à-dire qu'elle sera capable de traiter –, qui soit *sémantiquement congruente* à la distribution originale. Ce type de transformation, rendu nécessaire pour pouvoir être compris par la machine, n'est pas forcément transparent pour l'élève, et mériterait lui aussi d'être interrogé. C'est bien sûr encore la notion de modèle probabiliste qui est sous-jacente à cette opération, et il est souhaitable que les élèves y aient été préparés plus tôt (voir plus haut).

4- La confrontation

Comme nous l'avons dit, parallèlement à la solution statistique fournie par l'ordinateur à la question posée, certains des exercices demandent une résolution probabiliste, soit au début, soit à la fin. C'est loin d'être toujours le cas, ce qui conforte l'idée que l'objectif de tels exercices n'est pas tant d'exploiter la situation probabiliste en confrontant la réponse statistique avec la réponse probabiliste, que de faire programmer une simulation de l'expérience aléatoire pour obtenir une estimation de la réponse théorique.

On peut cependant noter qu'il est parfois demandé, conformément au programme:

- de comparer le résultat statistique à la solution théorique : "*Comparer le résultat avec le résultat théorique*" (Transmath, p. 318), " *Comparer aux probabilités calculées dans le modèle* " (Métamaths, p. 297) ;
- d'estimer une probabilité à partir d'une simulation : « *quel modèle d'expérience aléatoire semble convenir ?* » (Hyperbole, ex. 53 p. 317)
- de produire plusieurs échantillons, afin d'observer la fluctuation d'échantillonnage : "*Si on exécute de nouveau la fonction N echantillons (N,n,p) on obtiendra d'autres échantillons et donc un résultat différent* " (Sésamath, p, 336), " *Appuyer sur la touche F9 (ou ctrl+maj+F9) pour réaliser plusieurs simulations et interpréter les résultats obtenus* " (Barbazo, p. 335) ;
- d'observer " *la conséquence de l'augmentation de la taille des échantillons* " (Barbazo, p. 344).

Certains auteurs indiquent parfois des mises en garde, comme: "*Il faut être conscient que le résultat d'une simulation dépend de l'échantillon. Par conséquent, si on change d'échantillon, on peut avoir un résultat bien différent*" (Transmath, p. 337) ou "*Il en faut pas se contenter de faire une unique simulation pour déterminer une probabilité*" (ibid.). Mais le fait que les deux résultats se situent dans des domaines différents n'est que rarement exposé clairement. Cependant, des procédés linguistiques tels que l'emploi du qualificatif "statistique" pour qualifier les échantillons pourraient sans doute contribuer à réduire la confusion.

5- Des formulations qui interrogent

Pour clore ce paragraphe, signalons que certaines formulations figurant dans les manuels posent problème, comme par exemple "*simuler un nombre aléatoire entre 0 et 1*" (Transmath, p. 331) ou "*on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lire le nombre renvoyé par cette fonction*" (Hyperbole, p. 316), ou encore "*Vérifier que l'on obtient des nombres qui semblent pris au hasard entre 1 et 6*" (Métamaths, p. 296). En effet, pour ce qui est de la première phrase le nombre n'est pas simulé, puisqu'il apparaît à l'écran; en revanche, ce qui l'est, c'est le caractère aléatoire de ce nombre. Dans le même ordre d'idées, pour la deuxième formulation ce n'est pas la *lecture* du nombre qui est aléatoire, mais sa *génération*. La troisième phrase, quant à elle, émet un doute sur le caractère aléatoire de la génération des nombres fournis par l'ordinateur. Dans les trois cas, une interrogation apparaît en filigrane, due au fait que – contrairement aux élèves – les auteurs sont conscients que ce qui est présenté comme un générateur aléatoire de nombres réels est en réalité un générateur déterministe de nombres décimaux calibrés. Fournir, même très sommairement, des éclaircissements sur le mode de génération des nombres par les fonctions *alea* et *random*, puis permettre aux élèves de vérifier que "tout se passe comme si" on avait affaire à de l'aléatoire véritable aurait sans doute été plus efficace. Notons au passage que ces formulations particulières pourraient témoigner d'un certain malaise des auteurs vis-à-vis de la "cohabitation", dans un même problème, des deux domaines, probabiliste et statistique.

On peut finalement retenir de cette incursion dans les manuels, d'une part que les tâches de simulation informatique y sont assez stéréotypées, et d'autre part que leur objectif premier se réduit souvent à l'apprentissage de la programmation d'une expérience aléatoire. En particulier, les changements de domaines entre les probabilités et la statistique – qui interviennent dans les deux sens – ne sont pas spécialement travaillés, contribuant ainsi à installer une confusion préjudiciable à une bonne compréhension de la nature de l'aléatoire. En outre, les éléments théoriques justifiant l'intérêt du recours à la simulation pour l'étude d'expériences aléatoires ne sont pas souvent explicités. On peut résumer la situation en disant que le glissement opéré vers la programmation s'accompagne en contrepartie d'une perte de sens sur la simulation, et au-delà sur la théorie des probabilités elle-même.

CONCLUSION

Il est incontestable que la simulation informatique d'expériences aléatoires est aujourd'hui un élément incontournable de l'enseignement-apprentissage des probabilités, son principal intérêt étant de donner très rapidement accès à un grand nombre de répétitions d'une même expérience aléatoire (ou tout au moins supposées telles), présentant ainsi une aproche fréquentiste, dynamique, de la probabilité. Mais nous avons pu constater que la richesse du sujet était insuffsamment exploitée dans les manuels. On pourrait en effet constater, bien plus systématiquement que ne le font les manuels, la proximité des distributions statistiques obtenues par simulation avec la distribution probabiliste théorique. On pourrait observer son évolution en fonction de la taille des échantillons et, lorsque la distribution théorique n'est pas disponible, utiliser cette convergence pour modéliser l'expérience en définissant une distribution empirique sur cette base. Ces points ne sont pas totalement absents des manuels consultés mais ils sont, à notre avis, largement sous-exploités.

Par rapport aux activités classiques de résolution de problèmes liés aux expériences aléatoires, une caractéristique de la simulation est de ne pas se cantonner au seul domaine des probabilités mais de faire également intervenir, dans l'exploitation de la situation, non seulement l'informatique mais aussi la statistique. Comme nous l'avons vu, cette "cohabitation" des domaines probabiliste et statistique intervient tout au début de la démarche de programmation, lorsqu'il s'agit d'introduire un modèle probabiliste *a priori* dans l'artefact technologique; elle peut aussi intervenir lors de la recherche d'un modèle *a posteriori* issu de la simulation. Or, dans les manuels, si la seconde occurrence est explicite, la première est totalement transparente. Comme en outre un certain nombre de concepts de la statistique descriptive présentent de fortes similitudes avec des concepts probabilistes, il en résulte un risque réel de confusion entre les deux domaines, c'est-à-dire entre les éléments observés et les éléments théoriques. Une telle confusion peut conduire à des erreurs d'interprétation, et il importe qu'elle soit travaillée de façon spécifique. Notons toutefois qu'une fois les domaines bien distingués, on pourra au contraire utiliser leurs similitudes pour transposer certaines notions de l'un à l'autre, comme par exemple les paramètres de position et de dispersion, ou les représentations graphiques.

Dans le cadre de cet article nous avons étudié le travail mathématique attendu dans des ETM idoines potentiel conçus par des auteurs de manuels. Nous avons pu constater que ces ETM ne permettent pas de mettre en évidence les différents domaines mathématiques en jeu et les distinguer de façon claire. Nous avons vu aussi que le souci de transparence sur les domaines de référence était loin d'être mis en application dans les manuels. Qu'en est il alors dans les classes? Au regard de ces considérations, il apparaît nécessaire de prendre connaissance du travail mathématique réellement produit dans les ETM idoines conçus et mis en oeuvre par des enseignants.

Enfin nous restreignant au seul domaine des probabilités, nous avons également vu que la programmation d'une expérience aléatoire nécessitait souvent une adaptation de celle-ci pour pouvoir être "comprise" par l'artefact technologique, adaptation qui, elle non plus, n'est pas toujours transparente. Ce remplacement d'une expérience aléatoire par une autre qui lui est equivalente, qui repose sur la notion de modèle probabiliste relevant du paradigme P_2, nécessite lui aussi un apprentissage, au centre duquel se trouve la notion de congruence sémantique.

En perspective, notre objectif sera donc de concevoir et de mettre en oeuvre des tâches faisant intervenir la simulation informatique d'expériences aléatoires. Ces tâches doivent être conçues de manière à articuler de façon claire et explicite les deux domaines mathématiques des probabilités et de la statistique avec celui de l'informatique, sans perdre de vue l'objectif principal qui est de donner du sens aux concepts probabilistes et statistiques dans l'apprentissage de ces deux domaines. La mise en oeuvre de ces tâches dans les classes au sein des ETM idoines devrait permettre aux élèves d'accéder à la pensé statistique et probabiliste.

RÉFÉRENCES

Dodge, Y. (1993). *Statistique. Dictionnaire encyclopédique*. Paris, Dunod: Paris.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, 36, 15-34. http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/36_article_245.pdf

Henry, M. (2011) Simulations d'expériences aléatoires en classe. Un enjeu didactique pour comprendre la notion de modèle probabiliste, un outil de résolution de problèmes. *Bulletin de l'APMEP*, 496, 536-550.

Kuzniak, A.; Tanguay, D.; & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM-Mathematics Education*, 48(6). 721-737.

Montoya-Delgadillo, E.; Vivier, L. (2014). Les changement de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 19, 73-101.

Nechache, A.; & Parzysz, B. (2019) Le jeu des paradigmes dans l'ETM probabiliste. *Actes du 6e Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique*, 179-191. Valparaiso: Pontificia Universidad Católica.

Parzysz, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, 74, 91-103.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. Strasbourg, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 16, 127-147. http://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_16/adsc16-2011_006.pdf

Programme de la classe de seconde, 2019. Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019.

https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901631A.htm

Manuels scolaires de la classe de seconde (programme 2019) consultés

Barbazo 2de. Baheux, M. *et al*. Ed. Hachette Education.

Hyperbole 2de. Bachimont, M. *et al*. Ed. Nathan.

Métamaths 2de. Alory, S. *et al*. Ed. Belin Eduction.

Sésamath 2de. Bau, D. *et al*.. Ed. Magnard.

Transmath 2de. Briset, A. *et al*. Ed. Nathan.

ARTÍCULOS

04

Recibido el 16 de noviembre de 2021, aceptado el 7 de marzo de 2022.

EVALUACIÓN Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE CON ENFOQUE EN COMPETENCIAS PROFESIONALES DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA INGENIERÍAS DEL TECNM

EVALUATION AND LEARNING OUTCOMES WITH A FOCUS ON PROFESSIONAL SKILLS OF DIFFERENTIAL CALCULUS FOR TECNM ENGINEERING

ÉVALUATION ET RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE EN METTANT L'ACCENT SUR LES COMPÉTENCES PROFESSIONNELLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR L'INGÉNIERIE TECNM

Sandra Luz Rodríguez Hernández[1]
Víctor Larios Osorio[2*]
Luisa Ramírez Granados[3*]

[1] *Tecnológico Nacional de México (campus Querétaro)*
[1]*Correo: sandralrh@hotmail.com,*
[1]ORCID https://orcid.org/0000-0002-0370-89821

[2*]*Universidad Autónoma de Querétaro**
[2]*Correo: vil@uaq.mx*
[2]ORCID https://orcid.org/0000-0002-4454-8516

[3]*Correo: luisa.ramirez@uaq.mx*
[3]ORCID https://orcid.org/0000-0001-9814-662

La implementación del modelo de enseñanza por competencias ha mostrado un mejor desempeño en los alumnos. En este artículo se describen los aspectos más importantes de este modelo educativo y sus repercusiones en un caso específico: la evaluación de tres grupos de cálculo diferencial a nivel licenciatura.

RESUMEN

La reciente implementación del sistema educativo por competencias ha replanteado las concepciones de formación, instrucción, docencia y evaluación de los aprendizajes. El rendimiento de una competencia profesional se evidencia en el desempeño académico de los estudiantes en cada asignatura: su capacidad de explorar, comprender, analizar, sintetizar y aplicar el conocimiento adquirido. En consecuencia, trabajar por competencias requiere que el alumno entienda el aprendizaje como un circuito multidireccional que debe gestionar de manera crítica, ética, creativa y sensible para favorecer su propia formación integral. De ahí emerge la importancia de adecuar instrumentos que evalúen de manera confiable las competencias adquiridas por los estudiantes. En este trabajo se dan a conocer los resultados de una evaluación con un enfoque por competencias en tres grupos de nivel licenciatura en la asignatura de Cálculo Diferencial. El aumento observado en el índice de aprobación refleja que el enfoque por competencias mejora la apropiación de los conocimientos.

Palabras clave: evaluación, competencias, enfoque por competencias, instrumentos de evaluación.

ABSTRACT

Keywords: Evaluation, Competences, Approach by competences, Evaluation instruments.

RÉSUMÉ

En raison de sa mise en œuvre récente, le sujet des compétences a généré des changements dans la conception de la formation, de l'instruction, de l'enseignement et dans l'evaluation des apprentissages, ce qui conduit à de nouvelles approaches dans la conception, le développement et l'évaluation de ces informations. L'évaluation d'une competence professionnelle se traduit par l'exploration, la connaissance, la compréhension, l'application, l'analyse, la synthèse et l'evaluation de la gestion du projet ou de l'activité académique que l'étudiant travaille, individuellement ou collectivement, dans chaque matière. Par conséquent, travailler par compétences signifie que l'étudiant doit comprendre l'apprentissage comme un circuit multidirectionnel où il doit prendre l'initiative et stimuler une capacité critique, éthique, créative et sensible dans la gestion de ses apprentissages à tous les niveaux pour favoriser sa formation complete. C'est pourquoi il est important de mettre en place des instruments appropriés qui permettent une évaluation fiable des compétences acquises par les étudiants. Dans ce travail, les résultats obtenus lors de la mise en œuvre dans divers groupes de premier cycle en calcul différentiel, une évaluation avec une "approche par compétences" sont présentés. Les résultats obtenus à la fin du cours reflètent la facon dont l'évaluation par compétences permet d'obtenir chez les étudiants une meilleure appropriation des connaissances acquises grâce à tout ce processus, en plus d'une augmentation du taux d'approbation.

Mots-clés : Compétences ; Approche par compétences ; Instruments d'évaluation.

INTRODUCCIÓN

El nuevo modelo educativo por competencias ha cambiado la manera de concebir el proceso enseñanza-aprendizaje. En los nuevos planes de estudio este hecho requiere partir del concepto *competencia* como generador de conocimiento. El enfoque por competencias pretende optimizar la significatividad y la funcionalidad de los aprendizajes. Este modelo convierte a la evaluación en motor del aprendizaje y de la innovación educativa.

Las respuestas a algunos problemas de la enseñanza pueden encontrarse en el análisis de los modos de evaluación. Evaluar mediante un enfoque por competencias no consiste en emitir un juicio al final del PEA, sino en monitorear el desarrollo de las competencias e informar al estudiante sobre la progresión de su aprendizaje (Scallon, 2004). En este sentido, se basa en el acceso a fuentes múltiples y variadas de información con el fin de determinar si las competencias, así como el dominio de los recursos vinculados a cada una, se han desarrollado satisfactoriamente.

Para llevar a cabo una evaluación de este tipo, se debe entender claramente la conceptualización de competencias y las implicaciones que este enfoque genera.

En la primera parte se mencionan algunas definiciones de competencias, cuáles son las implicaciones que trae el proceso enseñanza aprendizaje bajo este enfoque, las que se generan a los profesores en la docencia y la f o r m a en que deberían evaluarse. En la segunda parte, se menciona la metodología que se aplicó en la evaluación con enfoque por competencias, una descripción de los instrumentos utilizados; asimismo, se presentan algunos de los que se diseñaron y aplicaron en el proceso de evaluación. Finalmente, se hace un análisis y conclusión de los resultados obtenidos al evaluar con este enfoque, tomando en cuenta que se consideraron grupos de la misma asignatura, se aplicaron las mismas estrategias, los mismos criterios de evaluación y en general las mismas condiciones de trabajo.

EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS

Las competencias profesionales se desarrollan a través de la formación y son el conjunto de realizaciones, resultados, líneas de actuación y consecuciones que se atribuyen al titular de una profesión u ocupación determinada; es decir, la competencia profesional alude directamente a las capacidades y habilidades de una persona para cumplir con sus tareas y funciones. Es el resultado del proceso de cualificación que permite "ser capaz de" y "estar capacitado para".

Tardif (2006, p. 22) define la competencia como "un saber actuar complejo que se apoya en la movilización y la combinación eficaz de una variedad de recursos internos y externos dentro de una familia de situaciones". De esta forma, una evaluación por competencias no se limita a los conocimientos adquiridos.

Tres elementos que caracterizan a las competencias son:

Articulan conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal para seleccionar el que resulte pertinente en cada instancia.

Vinculan rasgos de personalidad que se aprenden; el hecho de poseer de forma innata cierta inteligencia no garantiza ser competente. Las competencias deben desarrollarse con formación inicial, permanente y con experiencia. Las competencias tienen un carácter recurrente y de crecimiento continuo.

La reflexión; no se puede actuar de manera mecánica y sin una reflexión de la misma.

Una competencia integra diversos recursos de naturaleza variada. Trabajar y evaluar por competencias obliga a realizar un cambio en la estructura de los instrumentos de evaluación que permita emitir un juicio final para determinar si los estudiantes han alcanzado el nivel esperado del desarrollo de competencias. Esto no puede efectuarse desde el paradigma de la evaluación tradicional por el hecho de que el enfoque por competencias exige un tipo de evaluación diferente: se trata de una evaluación dinámica que sitúa la acción en el contexto, e incluye el *saber*, el *saber hacer*, el *ser* y el *saber estar*. Asimismo, el diseño de la evaluación implica preguntas como *¿quién evalúa?*, *¿cómo evaluar?*, *¿cuándo evaluar?*, *¿qué evaluar?*, con la finalidad de centrar la evaluación en las competencias, darle coherencia y orientar su enfoque y desarrollo. Evaluar por competencias es buscar que las personas desarrollen capacidades amplias que les permitan movilizar sus conocimientos y combinarlos para responder a situaciones en diversos contextos. El aprendizaje por competencias busca qdesarrollar capacidades amplias que les permitan adecuarse a situaciones cambiantes, y que se logre una formación integral; es decir,

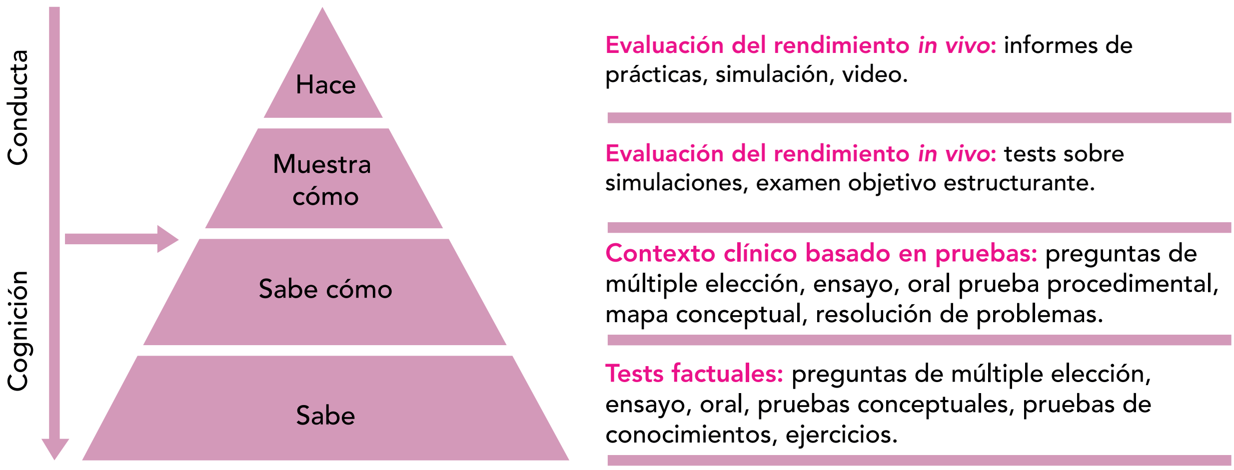


Figura 1. Pirámide de Millery los métodos de evaluación. Academic Medicine (1990).

que se adquieran competencias profesionales. Este proceso debe orientarse hacia la acción del participante profesional en situaciones de trabajo reales o simuladas que sirvan para diseñar tareas auténticas de evaluación (Del Pozo, 2013; Ashford-Rowe, Herrington & Brown, 2014). Son necesarios dispositivos y estrategias para recopilar información y valorar los resultados de acuerdo a la programación y el desarrollo.

Existe una relación muy estrecha entre aprendizaje de competencias y evaluación. Con el punto de vista puesto en la evaluación, Miller (1990) sitúa las competencias en una pirámide (Figura 1): cada una de las cuatro categorías se relaciona con un instrumento utilizado para su medida. La primera, que abarca lo que se *Sabe*, puede evaluarse a través de pruebas conceptuales, de conocimientos o ejercicios. La segunda hace referencia al *Sabe cómo* se ha de aplicar, y se puede valorar a partir de la resolución de problemas, de pruebas de procedimientos o mapas conceptuales. Estas dos categorías pueden medir la cognición, pero poco más. además Las siguientes dos pueden medir la conducta. La tercera comprende el *Muestra cómo* o situaciones similares a la realidad (rendimiento *in vivo*) que pueden ser evaluadas mediante simulaciones. La cuarta y última categoría, *Hace*, es la que se sitúa más cerca de la realidad y representa la forma más fiable de la evaluación de competencias (rendimiento *in vivo*), incluye informes de prácticas y simulaciones. La evaluación de las competencias es un proceso integral, permanente, sistemático y objetivo en el que son corresponsables quien aprende (estudiante) y quien enseña (profesor). Este último es quien debe demostrar sus habilidades, actitudes y conocimientos en el proceso de evaluar el aprendizaje de otra persona. Las competencias facilitan el desarrollo de una verdadera educación integral (Kincheloe, Steinberg y Villaverde, 2004), ya que engloban todas las dimensiones del ser humano (*saber*, *saber hacer*, *saber ser* y *estar*). Es imprescindible que el profesor diseñe un documento en el que debe realizar un análisis y organización de los contenidos educativos, determinando propósitos, intenciones y objetivos educativos, estableciendo y secuenciando actividades en el tiempo y el espacio, así como las estrategias de evaluación que incluyan un conjunto de métodos, técnicas, criterios e instrumentos (exámenes, rúbricas, listas de cotejo, guías de observación, esquema de ponderación, etc.). Posteriormente, se apliquen según la determinación de las evidencias para las competencias por desarrollar en cada asignatura para emitir la valoración final del desempeño alcanzado por cada aprendiz. En el desarrollo de la conducción de las sesiones para la evaluación, deberá demostrar que realiza actividades de encuadre del proceso de evaluación con las personas que guiará, especificando la forma de evaluación, su finalidad y el momento en que se aplica, clarificando la técnica o método, el producto o evidencia que se espera de la persona que aprende y el instrumento con que será evaluado el nivel de desempeño alcanzado de la competencia en la asignatura. Este documento utilizado en el Tecnológico, en donde se aplicó la evaluación por competencias, es denominado *Instrumentación didáctica*.

MÉTODOS DE EVALUACIÓN, DESCRIPCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS UTILIZADOS, ALGUNOS INSTRUMENTOS DISEÑADOS

Proceso de evaluación

La evaluación con un enfoque por competencias se implementó en tres grupos que cursaban la asignatura de Cálculo diferencial, de aproximadamente 35 estudiantes cada uno, de nivel licenciatura del Instituto Tecnológico de Querétaro. Los estudiantes tomaron previamente un curso propedéutico para ingreso al tecnológico. Para Lussier y Allaire (2004), la evaluación de las competencias exige instrumentar un sistema que identifique criterios e indicadores de desarrollo para evaluar las evidencias recogidas en una situación auténtica que comprometa a los estudiantes con la realización de una tarea completa, compleja y significativa. El reto de esto yace en informar de manera continua al estudiante de la progresión de sus competencias.

Tardif (2006) propone ver la evaluación por competencias como un planteamiento videográfico y no fotográfico. Las actividades de evaluación evolucionan y se modifican de acuerdo al grado de aprendizaje, de modo que las estrategias tienen como objetivo activar los conocimientos adquiridos con anterioridad, elaborar nuevos, facilitar la adquisición de la competencia y promover la integración. Las competencias son un *saber actuar* complejo que requiere de la movilización de los recursos sobre los que se apoyan; por tanto, su evaluación demanda una serie de actividades que expongan el progreso en la adquisición de conocimientos y habilidades en distintos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje. De este modo se tendrán herramientas que refuercen a tiempo las competencias según sea necesario. Por otra parte, tradicionalmente, es el docente titular quien evalúa a sus alumnos, pero puede suceder que, al conocerlos, sus criterios estén sesgados. Por ello, decidir quién debe llevar a cabo la evaluación es otro aspecto importante a considerar.

En síntesis, resulta primordial contar con los instrumentos de evaluación adecuados para valorar el *Saber*, *Saber ser* y *Saber estar*; es decir, las competencias específicas y genéricas, documentando su trayectoria a lo largo de la formación. Los indicadores ayudan en esta complejidad a determinar el desarrollo en un contexto de formación para dar cuenta en uno de evaluación.

Momentos de la evaluación

A continuación, se describe brevemente cada uno de ellos y cuál es la finalidad de aplicarlos (Figura 2).

El primer momento de la evaluación consiste en conocer el nivel de dominio de las competencias previas y se realiza al inicio de una asignatura. Una evaluación diagnóstica es el instrumento ideal para este fin. Este no influirá en la calificación de la asignatura, ya que es solo conocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes para el estudio de la asignatura y esta información es fundamental para el profesor, ya que con estos es posible realizar un cambio en la planeación establecida en la instrumentación con base en los requerimientos para abordar la asignatura en puerta o hacer ciertos cambios en el desarrollo del curso.

Un segundo momento es cerciorarse si los estudiantes están desarrollando las competencias de manera adecuada, identificando avances, logros y carencias; para ello se tienen las evaluaciones formativas. estas evaluaciones deben incluir las competencias específicas y genéricas, mismas que se detallan adelante y la forma en que se sugiere evaluar.

Un tercer momento que permite conocer y valorar el grado de ejecución alcanzado en la aplicación de las competencias establecidas en el curso, es la evaluación sumativa, cuyo propósito es asignar calificaciones y tomar decisiones de acreditación.

Quién evalúa

La evaluación tiene la posibilidad de ser aplicada por el mismo estudiante, por compañeros estudiantes o por diferentes profesores que impartan esta asignatura, con la finalidad de tener varios enfoques. Los tipos de evaluación pueden clasificarse como: autoevaluación, heteroevaluación y coevaluación (Figura 3), y se describen brevemente.

Autoevaluación; cuando la persona se evalúa a sí misma, donde la persona identifica las áreas de fortaleza y las áreas de mejora. En este caso el alumno se responsabiliza de su aprendizaje.

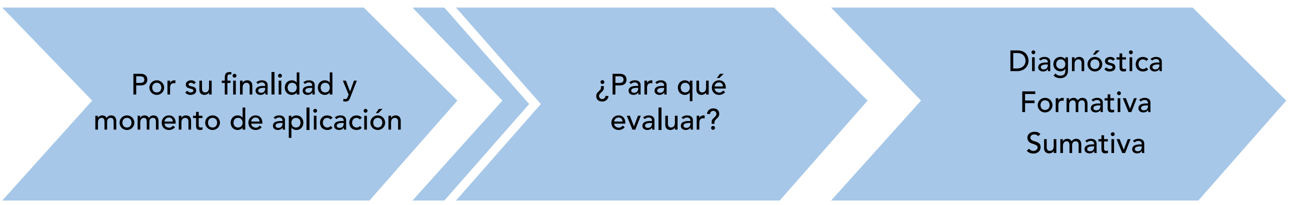


Figura 2. Momentos de la evaluación. Fuente: Elaboración propia.

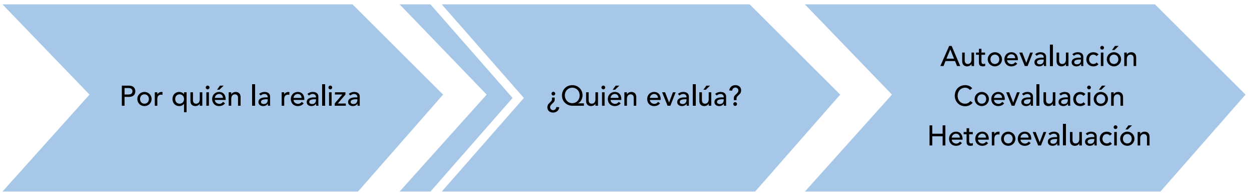


Figura 3. Tipos de evaluación Fuente: Elaboración propia.

Heteroevaluación, cuando el estudiante es evaluado por personas distintas o sus iguales (compañeros). Generalmente es el más común, es cuando el docente evalúa para estimar el rendimiento académico de los estudiantes. Este tipo de evaluación apunta a la detección de los errores y aciertos de los estudiantes.

Coevaluación, cuando la evaluación del desempeño de un estudiante se realiza a través de la observación y determinaciones de sus propios compañeros de estudio. Este tipo de evaluación es innovador, porque propone que sean los mismos compañeros los que tienen la misión de aprender oportunamente.

La autoevaluación (*self-assessment*) y la coevaluación (*peer-assessment*) no solo agudizan el aprendizaje de contenidos, sino que dan ocasión a que los estudiantes aprendan procesos metacognitivos de supervisión, que se pedirá que desarrollen en la vida profesional y académica Tal y como afirma (Biggs, 2005).

Evaluación de competencias específicas y genéricas

Cuando se habla de competencias específicas se refiere a la adquisición de conocimientos básicos propios del área; en cuanto a las competencias genéricas, se involucran las competencias instrumentales, interpersonales y sistémicas: las habilidades y actitudes (Figura 4). Las competencias instrumentales están relacionadas con la comprensión y la manipulación de ideas, metodologías, equipo y destrezas como las lingüísticas, de investigación, de análisis de información. En estas podemos mencionar la capacidad de análisis y síntesis, organizar y planificar, comunicación oral y escrita, habilidad en el manejo de la computadora, gestión de la información, conocimiento de una segunda lengua, solución de problemas y toma de decisiones. Las competencias interpersonales, por otra parte, involucran capacidades individuales relativas a la expresión de los propios sentimientos, habilidades, crítica y de autocrítica. Facilitan los procesos de interacción social y cooperación. Podemos mencionar como ejemplo el trabajo en equipo, comunicación con profesionales de otras áreas, trabajo en ambiente laboral y compromiso ético. Las competencias sistémicas se refieren a las destrezas y habilidades que conciernen a los sistemas como totalidad. Requiere como base a las anteriores. Por ejemplo, creatividad, liderazgo y capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica, investigar, adaptarse a nuevas situaciones, trabajar en forma autónoma, gestionar y diseñar proyectos.

Para evaluar estas competencias, se sugieren algunos instrumentos de evaluación que permiten verificar el proceso de formación, para corregir si es necesario, conduciéndolo al logro de las competencias propuestas. Estos instrumentos deben evaluar aspectos procedimentales, actitudinales y conceptuales, por lo que deben ser adecuados para recoger la información en función de las características del aprendizaje que se pretende evaluar, es decir, permite medir niveles de desempeño de las competencias. De esta forma se pueden mencionar instrumentos como el cuestionario, la lista de cotejo, la guía de observación y la rúbrica. Se mencionan brevemente características de los instrumentos de evaluación en seguida.

Cuestionario

Conocido generalmente como *examen*, permite valorar los conceptos, teorías, principios y hechos de acuerdo con los conocimientos requeridos en la competencia a evaluar. Debe incluir como mínimo tres tipos de reactivos (opción múltiple, complementación, falso-verdadero, relacionales o preguntas abiertas).

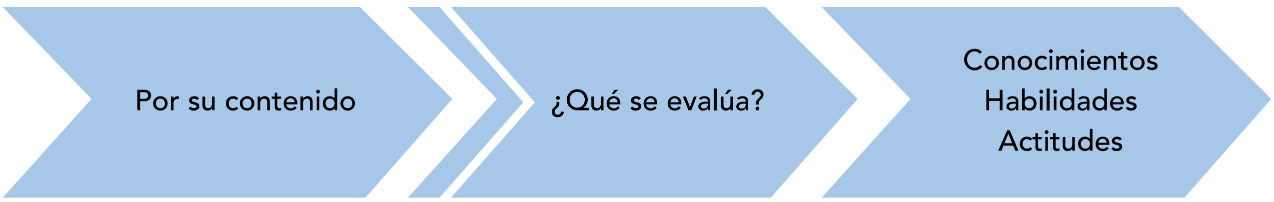


Figura 4. Qué se evalúa. Fuente: Elaboración propia.

Lista de cotejo

Permite registrar el desempeño de los alumnos, evaluado a través de la observación. Puede combinar la evaluación de procesos y productos finales.

Guía de observación

Se aplica para la observación del desempeño, habilidades, destrezas y actitudes de los estudiantes a través del diseño de situaciones de aprendizaje que permitan lograr las competencias.

Rúbrica

Se trata de guías de puntuación cuya función es la de describir las características específicas de un producto, proyecto o tarea en varios niveles de rendimiento. La finalidad consiste en esclarecer a detalle las cualidades que se esperan del trabajo del alumno, valorar su ejecución y facilitar la retroalimentación. Establece parámetros graduales de desempeño y favorece la autoevaluación de los estudiantes.

La evaluación por competencias también valúa productos, desempeños, actitudes/valores, y conocimientos. La Tabla 1 propone instrumentos para cada valoración.

Tabla 1. Instrumentos de evaluación. Fuente: elaboración propia

Aspecto	Instrumento sugerido
Procedimental	Guía de observación Lista de cotejo Rúbrica
Conceptual	Cuestionario Rúbrica
Actitudinal	Guía de observación Rúbrica

Instrumentos de evaluación

Los indicadores de alcance nos muestran los criterios de valoración por excelencia al precisar los conocimientos y habilidades que integran competencias; cada uno tiene su ponderación. En la Tabla 2 se detallan los indicadores establecidos en los programas del Tecnológico con la finalidad de que la evaluación sea fidedigna. Deberá especificarse en cada instrumento qué valor se le determinará de acuerdo a la competencia a evaluar.

Tabla 2. Descripción de indicadores.

Indicador	Descripción de indicadores	Valores
A	**Se adapta a situaciones y contextos complejos:** Puede trabajar en equipo, reflejar sus conocimientos en la interpretación de la realidad. Inferir comportamientos o consecuencias de los fenómenos o problemas de estudio. Incluir más variables en dichos casos de estudio.	
B	**Hace aportaciones a las actividades académicas desarrolladas:** Pregunta integrando conocimientos de otras asignaturas o de casos anteriores de la misma asignatura. Presenta otros puntos de vista que complementan al presentado en la clase. Presenta fuentes de información adicionales (Internet, documentales), utiliza más bibliografía, consulta fuentes en un segundo idioma.	
C	**Propone o explica soluciones o procedimientos no vistos en clase (creatividad):** Ante problemas o casos de estudio propone perspectivas diferentes para abordarlos y sustentarlos correctamente. Aplica procedimientos aprendidos en otra asignatura o contexto para el problema que se está resolviendo.	

Indicador	Descripción de indicadores	Valores
D	**Introduce recursos y experiencias que promueven un pensamiento crítico:** utiliza recursos de la tecnología de la comunicación e información (TIC), como las presentaciones electrónicas con diapositivas con transiciones, animaciones entre los elementos y la incorporación de audio o video.	
E	**Incorpora conocimientos y actividades interdisciplinarias en su aprendizaje:** En el desarrollo de los temas de la asignatura, incorpora conocimientos y actividades desarrollados en otras asignaturas para lograr la competencia.	
F	**Realiza su trabajo de manera autónoma y autorregulada:** Es capaz de organizar su tiempo y trabajar sin necesidad de una supervisión estrecha y/o coercitiva. Aprovecha la planeación de la asignatura presentada por el (la) profesor(a) y la instrumentación didáctica para presentar propuestas de mejora de la temática vista durante el curso. Realiza actividades de investigación para participar activamente en el curso.	

Retroalimentación

El docente plasma de forma breve y clara observaciones pertinentes en función de los resultados del estudiante. Esta retroalimentación es personal para cada estudiante, permitiéndole claridad en los errores que pudo haber cometido al contestar su evaluación. Adicional a esta retroalimentación, es deseable que el profesor, al entregar las evaluaciones a los estudiantes, tenga una breve charla siempre en la línea de su desempeño para motivarlo a seguir adelante y poner mayor atención a las competencias donde necesita atención. Todo instrumento de evaluación debe contar con un espacio para la firma de conformidad tanto del alumno como del profesor. Para el profesor representa un respaldo en caso alguna insatisfacción, y para el estudiante es un recordatorio de qué aspectos debe reforzar.

Instrumentos diseñados y aplicados

Se presentan ahora los instrumentos que se diseñaron y aplicaron a los estudiantes, junto con una breve explicación de las competencias evaluadas y los indicadores utilizados.

Cuestionario

El cuestionario del Anexo 1 constituye una evaluación diagnóstica que no impactará la calificación de los estudiantes; únicamente ayudará a indagar los conocimientos de los estudiantes para ajustar la instrumentación didáctica y la planeación del curso. Se espera que los estudiantes tengan los conocimientos suficientes para un buen desempeño a lo largo del curso. El cuestionario menciona la competencia a alcanzar, y registra los datos generales del estudiante.

Aunque deben mostrarse los indicadores de alcance para cada instrumento, en este cuestionario, no se ve reflejada ninguna ponderación en ellos, ya que se trata de una evaluación diagnóstica. También puntualiza qué tipo de evidencia es y el instrumento de evaluación utilizado.

Guía de observación

En el Anexo 2 se presenta una Guía de observación para el tema 1, *Números reales*, aplicada como evaluación formativa y donde se establece la competencia a alcanzar, la calificación, y las instrucciones. La evidencia planteada es un problema de aplicación, donde se valorarán aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales, además de los indicadores A, D y F (cada uno de ellos tiene una ponderación especificada al final del documento). Cuenta además con los apartados de retroalimentación y firma de conformidad.

Rúbrica

En el Anexo 3 se presenta una Rúbrica para el tema 1, *Números reales*, aplicada como evaluación formativa, donde se establece la competencia a alcanzar, la calificación, las instrucciones. La evidencia planteada es una serie de ejercicios que valoran aspectos conceptuales y procedimentales, además de los indicadores A, C y D (cada uno de ellos tiene una ponderación que se especifica al final del documento). Cuenta además con los apartados de retroalimentación y firma de conformidad.

Lista de cotejo y Cuestionario

Se presentan como ejemplo en el Anexo 4 una Lista de cotejo del tema 2, *Funciones*, y en el Anexo 5 un Cuestionario del tema 4, *Derivadas*, que fueron aplicados en distintos momentos del curso. En ambos se muestran los indicadores a evaluar, la retroalimentación y el valor del instrumento.

RESULTADOS

El curso de cálculo diferencial está compuesto por cinco temas, y en cada uno se evalúan competencias tanto específicas como genéricas; se aplicaron al menos dos instrumentos de evaluación, dependiendo de la extensión de cada tema. Se tuvieron resultados favorables que se vieron reflejados en los diferentes instrumentos de evaluación. se observó que los conocimientos adquiridos fueron utilizados de forma correcta, además la vinculación con otras materias para solucionar los problemas planteados. El incorporar acciones como la retroalimentación en cada evidencia realizada en los aspectos conceptuales, actitudinales y procedimentales que van desarrollando, ayudó a los estudiantes a tener un seguimiento preciso de aquellas competencias no alcanzadas y tener la oportunidad de obtenerlas.

Los índices de aprobación incrementaron en dos semestres consecutivos tras incorporar la evaluación por competencias, considerando una muestra equivalente en cada semestre al que se hace referencia. Estos son datos que el portal oficial del Tecnológico genera al término de cada semestre.

En el periodo de agosto-diciembre de 2018, la evaluación se realizó de manera tradicional, con un índice de aprobación del 20.66 %

En el lapso de enero-junio de 2019 se realizó la evaluación con un enfoque por competencias, con un índice de aprobación del 39.16 % (un aumento de 18.5 puntos porcentuales con respecto al semestre anterior).

En agosto-diciembre de 2019 se continuó con la evaluación con un enfoque por competencias, con un índice de aprobación del 40.33 % (19.67 puntos porcentuales más respecto al semestre de referencia).

Estos resultados positivos muestran una mejora notoria en los índices de aprobación en función de los mecanismos utilizados en los instrumentos de evaluación. Los indicadores integrados concedieron a los estudiantes mayor confianza en sí mismos a lo largo de su proceso de aprendizaje; implementando, adquiriendo o desarrollando actitudes y aptitudes de adaptación a situaciones complejas, trabajo en equipo, creatividad, pensamiento crítico, reflexivo y analítico, uso de tecnologías de la comunicación e información; además, los conminó a proponer diferentes perspectivas para resolver problemas, trabajar de manera autorregulada, usar conocimientos adquiridos en otras asignaturas, entre otras acciones.

Aunque escaso en apariencia, este aumento deja vislumbrar una oportunidad para expandir este trabajo y que cada vez más profesores se sumen a la tarea de implementar este modelo. Los instrumentos evolucionarán en beneficio de los estudiantes a medida que se adquiera experiencia.

COMENTARIOS FINALES

Ante el reto que representa mejorar el aprendizaje de las matemáticas, la formación por competencias y, en consecuencia, su evaluación ofrecen una forma práctica y real de mejorar la calidad de nuestra labor educativa. Una educación apoyada en el desarrollo de las capacidades cognitivas, afectivas, socioemocionales y físicas de los aprendices y los capacita para desenvolverse adecuadamente en diversos contextos, tanto profesionales como cotidianos.

Los instrumentos de evaluación dan seguimiento a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, buscan que los estudiantes se esfuercen, protagonicen su propio desempeño y consigan resultados positivos en su formación integral. Los resultados en los semestres evaluados con enfoque en competencias mostraron un aumento en el índice de aprobación; además, en el transcurso de las semanas, los alumnos presentaban una mayor confianza para preguntar, desarrollar y discutir posibles soluciones a problemas planteados; estas son actitudes que deben poseer los estudiantes cuando se enfrentan a problemas reales de trabajo.

La evaluación por competencias se sitúa en el centro del proceso educativo, ya que es una renovación metodológica que incorpora metodologías activas y cercanas a las realidades profesional y cotidiana. Estas estrategias influyen positivamente en el aprendizaje; como afirma Biggs (2005), se trata de alinear la evaluación con los resultados de aprendizaje y las actividades en aprendizaje-enseñanza a realizar.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las siguientes instituciones, sin su apoyo y colaboración este proyecto no habría sido posible:

Tecnológico Nacional de México campus Querétaro

Universidad Autónoma de Querétaro

REFERENCIAS

Ashford-Rowe, K.; Herrington, J. & Brown, Ch. (2014). Establishing the critical elements that determine authentic assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 39(2), 205-222. DOI:10.1080/02602938.2013.

Biggs, J. B. (2005). *Calidad del aprendizaje universitario*. Madrid: Nancea.

Del Pozo, J. A. (2013). *Competencias profesionales. Herramientas de evaluación: el portafolios, la rúbrica y las pruebas situacionales*. Madrid: Narcea.

Kincheloe, J.; Steinberg, S. H. y Villaverde, L. (2004). *Repensar la inteligencia*. Madrid: Morata.

Lussier, O. & Allaire, H. (2004). L'évaluation «authentique». *Pédagogie collégiale*, 17(3), 29-30.

Miller G. (1990). The assessment of clinical skills/competence/performance. *Acad. Med.*, 65, S63-7.

Tardif, J. (2006). *L'évaluation des compétences. Documenter le parcours de développement*. Montréal: Cheneliére Education.

Scallon, G. (2004). *La evaluación de aprendizajes con un enfoque por competencias*. Québec: Ed. Du Renouveau Pedadogique.

ANEXOS

Anexo 1. Cuestionario

Tecnológico Nacional de México

Cálculo Diferencial

C U E S T I O N A R I O — Tema 1 – Números reales

Competencias previas: Utiliza la aritmética para realizar operaciones. Emplea el álgebra para simplificar expresiones. Resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Utiliza la trigonometría para resolver problemas. Describe las ecuaciones de los principales lugares geométricos.

Programa: Ingeniería — Semestre: _______________

Evidencia: Evaluación Diagnóstica — Fecha de aplicación:____________

Nombre del Estudiante:_______________________ — Tiempo de realización: 25 min.

Instrucciones

Parte I. Para cada pregunta, selecciona la respuesta que consideres correcta, colocando en el paréntesis la letra seleccionada.

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la mejor aproximación de la operación ((7.21)(3.96))/1.02?

( ) a) ((7)(3))/10 b) ((7)(4))/10 c) ((7)(3))/11 d)((7)(4))/11

2. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra al número 72 como un producto de factores primos?

( ) a) 9 · 8 b) 3 · 3 · 8 c) 3· 3 · 4 · 2 d) 3· 3 · 2 · 2 · 2

3. ¿Cuánto resulta de sumar los ángulos interiores de un heptágono?

( ) a) 900° b) 720° c) 540° d) 640°

4. Si x es un número que se encuentra entre 10 y 16, entonces ¿entre qué números está x + 5?

( ) a) 10 y 12 b) 15 y 20 c) 0 y 5 d) 15 y 21

5. Si el volumen de un depósito para agua de forma cilíndrica es V = πr2h y el radio r = 2.5 ft, la altura h= 4 ft, ¿cuál es la máxima capacidad del depósito?

( ) a) 25π ft3 b) 10π ft3 c) 32.5π ft3 d) 20.5π ft3

6. ¿Qué expresión es equivalente a a(a2 + 3a − (6a2 − a))?

( ) a) − 5a2 + 4a b) 5a3 − 2a c) 5a3 − 4a2 d) −5a3 + 4a2

7. Al desarrollar el binomio (m − n)2 se obtiene:

( ) a) m2 − n2 b) b) m2 − mn − n2 c) m2 + 2mn − nd) m2 − 2mn + n2

8. Al racionalizar el numerador de la expresión 4a−√a resulta:

( )) $\frac{16a^2 + a}{a}$) $\frac{16a^2 - a}{4a - \sqrt{a}}$) $\frac{16a - 1}{4a + \sqrt{a}}$) 1 $\frac{16a -}{4a -}$ $\sqrt{a}$

9. La ecuación que corresponde a una recta es:

( ) a) $y = 6x^2 + 2$ b) $3x + 3$ c) $xy = 1$ d) 2

10. José se encuentra empacando latas de atún en una caja, cada caja tiene la capacidad para 14 latas. Si José tiene 1440, ¿Cuál es el menor número de cajas que José requiere para empacar todas las latas?

( ) a) 100 b) 140 c) 102 d) 103

Parte II. Indica si el enunciado es verdadero colocando una V, o falso una F, en el interior de los paréntesis.

( ) Circunferencia y círculo significan los mismo.

( ) Una circunferencia es el lugar geométrico descrito por los puntos P(x, y) tales que su distancia a un punto fijo llamado centro es constante.

( ) El área de una esfera de radio r está dada por A = 4πr2.

( ) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a π radianes.

( ) Para determinar la ecuación de una recta se requiere de conocer dos puntos.

Parte III. Relaciona la expresión de la columna de la izquierda con el resultado de la derecha, colocando la letra correspondiente en el paréntesis.

El área superficial de un cubo de arista dos	( )	a)	24
El perímetro de un triángulo equilátero de lado cuatro	( )	b)	12
El perímetro de una circunferencia de radio tres	( )	c)	6π
El volumen de un cono de radio uno y altura tres	( )	d)	3π
La magnitud del segmento que va de *A*(0,0) a *B*(3,4)	( )	e)	5

Evidencia de aprendizaje	Indicador de alcance							Método de evaluación			
	%	A	B	C	D	E	F	Instrumento	P	C	A
Evaluación diagnóstica	0							Cuestionario		X	

Anexo 2. Guía de observación

Tecnológico Nacional de México

Cálculo Diferencial

CUESTIONARIO

GUÍA DE OBSERVACIÓN

Tema 1 – Números reales

Competencias: Aplica las propiedades de los números reales, desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita, así como desigualdades con valor absoluto para representar las soluciones en forma gráfica y analítica.

Calificación: /20

Programa: Ingeniería

Semestre: _______________

Evidencia: Solución de un problema de aplicación

Fecha de aplicación: ___________

Nombre del Estudiante: ___________________________________

Tiempo de evaluación : 20 min

Instrucciones

1. El docente llenará la guía de observación en función de la calidad de desempeño de los estudiantes.
2. Se marca con una "x" si cumple o no con el criterio.
3. Se llenará el apartado "Puntos" con los puntos que considere corresponden con la calidad del desempeño.
4. El puntaje máximo de la evaluación es de 20 puntos.
5. Realizar la sumatoria.

No.	Ítem	Valor	Indicador	SI	NO	Puntos	Retroalimentación
1	Inicia con una introducción al tema para plantear la solución al problema	2					
2	Explica de manera correcta y precisa las leyes de los números reales utilizadas	2					
3	Plantea mediante un esquema el problema con	2					

No.	Ítem	Valor	Indicador	SI	NO	Puntos	Retroalimentación
4	Presenta la ecuación planteada para la resolución	2					
5	Desarrolla correctamente el procedimiento	2					
6	Presenta la solución al problema de manera correcta	4					
7	Manifiesta seguridad, muestra contacto visual hacia el público.	2	A				
8	Incluye en su desempeño imágenes ó gráficos	2	D				
9	Respeta el tiempo de exposicón establecido	2	F				
Puntaje Máximo: 20 Puntos			Puntaje Obtenido:				

Firma de conformidad:

Evidencia de aprendizaje		Indicador de alcance						Método de evaluación			
	%	A	B	C	D	E	F	Instrumento	P	C	A
Resolución de un problema	20	2			2		2	Guía de Observación	X	X	X

Anexo 3. Rúbrica

Tecnológico Nacional de México

Cálculo Diferencial

RÚBRICA Tema 1 – Números reales

Competencias: Aplica las propiedades de los números reales, desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita, así como desigualdades con valor absoluto para representar las soluciones en forma gráfica y analítica.

Calificación: /20

Programa: Ingeniería Semestre: ________

Evidencia: Ejercicios Fecha de aplicación:___________

Nombre del Estudiante:____Tiempo de evaluación: 20min

Instrucciones: El docente llenará la rúbrica en función de desempeño del estudiante.

Indicador	Excelente	Bueno	Suficiente	Insuficiente	Puntos
Comprensión del problema	Identifica e interpreta con claridad los datos planteados en la parte I, obteniendo los 10 ejercicios correctos	Identifica e interpreta los datos planteados en la parte I, obteniendo por lo menos 7 ejercicios correctos	Identifica datos planteados en la parte I, obteniendo por lo menos 4 de ejercicios correctos	No identifica ni interpreta con claridad los datos planteados en la parte I.	
Estrategia de solución	Analiza las expresiones planteadas y resuelve correctamente los 10 ejercicios de la parte II.	Analiza las expresiones planteadas y resuelve correctamente por lo menos 7 ejercicios.	Analiza las expresiones planteadas y resuelve correctamente por lo menos 4 ejercicios.	No analiza las expresiones planteadas.	
	10 puntos	7 puntos	4 puntos	0 puntos	
Solución al problema	Analiza correctamente las expresiones planteadas en la parte III y resuelve correctamente los 5 primeros ejercicios.	Analiza correctamente las expresiones planteadas en la parte III y resuelve por lo menos 3 ejercicios correctamente.	. Analiza las expresiones planteadas en la parte III y resuelve por lo menos 2 ejercicios correctamente.	No analiza correctamente las expresiones planteadas en la parte III.	
	8 puntos	5 puntos	3 puntos	0 puntos	
Análisis del resultado	Analiza los planteamientos de la parte III y contesta correctamente los 2 ejercicios. Indicador a y c	. Analiza los planteamientos de la parte III y contesta correctamente uno de los dos ejercicios. Indicador a y c		No responde ningún ejercicio correctamente.	
	4 puntos	2 puntos		0 puntos	
Presentación del resultado	Analiza los planteamientos de la parte IV y contesta correctamente los dos ejercicios. Indicador d y c	Analiza los planteamientos de la parte IV y contesta solo uno de los dos ejercicios correctamente. Indicador d y c		No responde ningún ejercicio correctamente	
	8 puntos	4 puntos		0 puntos	

Retroalimentación:	Firma de conformidad:

Evidencia de aprendizaje		Indicador de alcance						Método de evaluación			
	%	A	B	C	D	E	F	Instrumento	P	C	A
Ejercicios	40	2		6	4			Rúbrica	X	X	

ANEXO 4 LISTA DE COTEJO

Tecnológico Nacional de México

Cálculo Diferencial

LISTA DE COTEJO

Tema 2 – Funciones

Competencias: Analiza definición de función real e identifica tipos de funciones y sus representaciones gráficas para plantear modelos.

Calificación:	/20

Programa: Ingenierías

Semestre: _______________

Evidencia: Proyecto fase 1

Fecha de aplicación: ___________

Nombre del Estudiante: ______________________________________

Tiempo de realización: 25 min.

Instrucciones:

1. *El profesor llenará la lista de cotejo en correspondencia de la calidad del proyecto presentado por el equipo.*
2. *Marcar con una "X" en la celda que corresponda si cumple o no con el aspecto solicitado.*
3. *Colocar los puntos logrados en cada aspecto.*
4. *Realizar la suma y colocar el resultado en la celda correspondiente.*

No.	Aspecto a evaluar El proyecto "caja de cartón":	Valor (puntos)	Indicador de alcance	SI	NO	Puntos
1	Presenta el intervalo correcto de valores que puede tomar x para el largo de la caja.	3				
2	Presenta el intervalo correcto de valores que puede tomar x para el ancho de la caja.	3				
3	Describe la expresión correcta para el cálculo del volumen de la caja en términos de x.	2				
4	Presenta el intervalo de valores correcto para el volumen cuando x va de 2 a 6 *cm*.	3				
5	Se presenta a través de un documento con un máximo de dos faltas de ortografía.	1	e			
6	Se presenta con una portada que incluye al menos: nombre del instituto, título del proyecto y nombre de los integrantes.	1	f			
7	Se elabora en equipo de tres integrantes	1	a			
8	Incorpora conclusiones adecuadas con el tema.	3	a			
	Puntaje máximo	20	Puntaje obtenido			

Retroalimentación:	Firma de conformidad

Evidencia de aprendizaje		Indicador de alcance						Método de evaluación			
	%	a	b	c	d	e	f	Instrumento	P	C	A
Proyecto	20	4				1	1	Lista de cotejo	X	X	X

Anexo 5. Cuestionario

Tecnológico Nacional de México

Cálculo Diferencial

CUESTIONARIO

Tema 4 – Derivadas

Competencias: Utiliza la definición de derivada para el análisis de funciones y el cálculo de derivadas.

Programa: Ingenierías

Semestre:_______________

Evidencia: Ejercicios

Fecha de aplicación:______________

Nombre del Estudiante:________________________________

Tiempo de realización: 50 min.

Instrucciones.

Parte I *(valor 5 puntos)*

Señala si la proposición es verdadera colocando una (V) o falsa con una (F) dentro del paréntesis.

1. ( ) La pendiente m es una razón de cambio.
2. ( ) El $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se denomina razón de cambio media de la función.
3. ( ) Si una función es diferenciable en un punto *a* entonces es continua en *a*
4. ( ) Si una función es continua en un punto a entonces es diferenciable en *a*.
5. ( ) La derivada de un producto es el producto de sus derivadas.

Instrucciones.

Parte II *(Valor: 10 puntos)*

Completa la siguiente tabla, completándola con lo que se indica:

Para que tu respuesta sea considerada como válida, es necesario anexar el procedimiento.

y=f(x)	u	f(u)	y^´
y=1/(x+2)			
y=sen3x			

y=f(x)	u	f(u)	y^´
y=(3x^2+4x-1)^(1/2)			
y=tan^3 x			
y=e^(2x+3)			

Instrucciones.

Parte III *(Valor:* 10 *puntos)*

Completa la siguiente tabla, completándola con lo que se indica:

Para que tu respuesta sea considerada como válida, es necesario anexar el procedimiento.

Función	Derivada	Diferencial
f(x)=4x^2-2x+3		
y=5senx		
f(x)=xcosx		
y=(3cos3x)^2		
f(x)=tan6x		

Instrucciones.

Parte IV *(Valor:* 12 *puntos)*

Para que tu respuesta sea considerada como válida, es necesario anexar el procedimiento.

Una epidemia de gripe se está propagando en algún país. Con base a epidemias semejantes que se han presentado con anterioridad, los epidemiólogos han formulado una función matemática con la que se el número de personas que se contagiaran con la epidemia, y es la siguiente: *n*=*f*(*t*)=-.3*t*^3+10*t*^2+300*t*+250 donde: *n* representa el numero de personas afectadas *t* representa el tiempo ,medido en días ,desde la detección inicial.

Con dominio restringido de 0≤*t*≤30

Si se usa la función de estimación:

( ) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 10 días? Indicador A valor 4 puntos

a) 3950 personas b) 7850 personas c) 2500 personas

( ) ¿Cuál es la razón instantánea de cambio a la que se espera que la enfermedad se propague cuando t=11? Indicador B valor 4 puntos

a) 400 personas/día b) 410 personas/día c) 411 personas/día

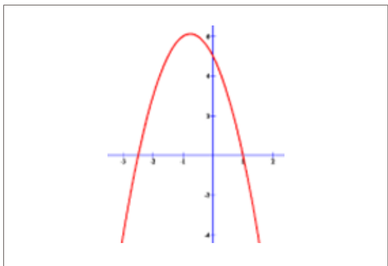
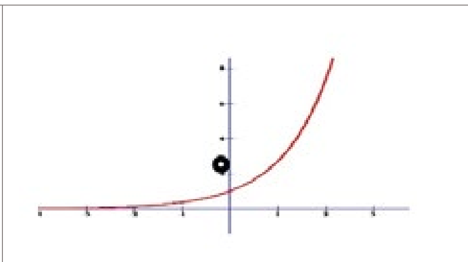
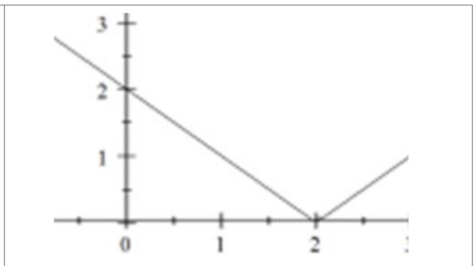
( ) ¿Y cuando t=12 ? la enfermedad: Indicador D valor 4 puntos

a) aumento b) disminuyo c) se mantuvo igual

Instrucciones.

Parte v (Valor: 3 puntos)

Encierra en un circulo la letra o letras que consideres que sean verdaderas a la siguiente pregunta: ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones es derivable para cualquier valor del dominio?

		
a)	b)	c)

Retroalimentación:	Firma de conformidad

Evidencia de aprendizaje		Indicador de alcance						Método de evaluación			
	%	A	B	C	D	E	F	Instrumento	P	C	A
Ejercicios	40	4	4		4			Cuestionario		X	

05

REFLEXIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LAS REPRESENTACIONES MOLECULARES EN QUÍMICA ORGÁNICA

REFLECTIONS ON THE DIDACTICS OF MOLECULAR REPRESENTATIONS IN ORGANIC CHEMISTRY

RÉFLEXIONS SUR LA DIDACTIQUE DES REPRÉSENTATIONS MOLÉCULAIRES EN CHIMIE ORGANIQUE

Recibido el 15 de noviembre de 2021, aceptado el 8 de marzo de 2022.

María Luz Núñez Morales[1]
Cecilia Hernández Garciadiego[2]

[1, 2]Universidad Autónoma de Querétaro
[1]Correo: mnunez19@alumnos.uaq.mx
[1]ORCID https://orcid.org/0000-0002-5346-2108

[2]Correo: qceciliahg@gmail.com
[2]ORCID https://orcid.org/0000-0002-7809-820X

RESUMEN

Existen al menos diez formas de representar una misma molécula; esta variedad dificulta el estudio de la química orgánica. ¿Por qué existen tantas maneras? ¿Qué problemas conlleva a la práctica docente? La complejidad de las moléculas orgánicas, así como sus reacciones, exige una variedad de modalidades de representación para comprender mejor los temas. La gama de representaciones es parte de la didáctica de química orgánica, y la finalidad de este artículo es ilustrarla utilizando moléculas comunes en la práctica didáctica e indicativas de las diferentes formas de representación semiótica.

Palabras clave: Didáctica de química, representación semiótica, moléculas.

ABSTRACT

One of the great difficulties when studying organic chemistry are the many different ways of representing the same molecule. There are at least 10 forms of molecular representation. Why are there so many ways? What problems does it bring to the teaching practice? The complexity of organic molecules as well as their reactions makes it necessary to have a variety of forms of representation to better understand the subjects. The range of representations is part of the didactics of organic chemistry, the purpose of this article is to show that range using molecules that are common in didactic practice and indicative of the different forms of semiotic representation

Keyword: Chemistry didactics, semiotic representation, molecules.

RÉSUMÉ

L'une des grandes difficultés lors de l'étude de la chimie organique réside dans les différentes manières de représenter une même molécule, au moins on peut dire qu'il existe 10 formes de représentation moléculaire. Mais pourquoi y a-t-il tant de façons ? Quels problèmes cela pose-t-il à la pratique de l'enseignement ? La complexité des molécules organiques ainsi que leurs réactions rendent nécessaire d'avoir des formes de représentation variées pour mieux comprendre les enjeux. L'éventail des représentations fait partie de la didactique de la chimie organique, le but de cet article est de montrer l'éventail des représentations utilisant des molécules courantes dans la pratique didactique et indicative des différentes formes de représentation sémiotique

Mots-clés : Didactique de la chimie; représentation sémiotique; molécules.

INTRODUCCIÓN

Marco teórico

Representación semiótica en la enseñanza de la química. Lenguaje en química.

La semiótica se ocupa del estudio de los signos (Eco, 2000). *Signo* es todo sustituto significante de cualquier cosa. Es resultado provisional de reglas de codificación que establecen correlaciones transitorias entre los elementos. Una función semiótica puede definirse en sí misma y en relación con las propias posibilidades combinatorias dentro de contextos diferentes. La producción de signos es posible gracias a las reglas previstas por el código y con frecuencia este se entiende no solo como regla de correlación, sino también como conjunto de reglas combinatorias. Así, al entrecruzamiento de las circunstancias y las presuposiciones se anuda el de los códigos y los subcódigos para convertir cada mensaje en una forma vacía a la que pueden atribuirse varios sentidos posibles; en otras palabras, la multiplicidad de los códigos y la indefinida variedad de los contextos hace que un mismo mensaje sea descifrable desde puntos de vista diferentes y por referencia a sistemas convencionales distintos.

Por su parte, Flamini (2012) menciona que el concepto de estructura molecular es central para la química, especialmente en los desarrollos de geometría molecular o estereoquímica. Las representaciones asociadas a describirla cobran un rol protagónico en la producción de aprendizajes significativos. Entre los obstáculos del aprendizaje de la química se encuentra el manejo del lenguaje altamente simbólico y formalizado; este incluye representaciones que ayudan a la comprensión de lo no observable, por ejemplo, la conectividad y distribución espacial de los átomos en una molécula.

La química resulta multimodal, ya que recurre de manera simultánea a diferentes lenguajes (Flamini, 2012):

- Verbal: descripción e interpretación de fenómenos.
- Visual: hechos macroscópicos observados y realizados en laboratorio.
- Gráfico: uso de modelos tridimensionales.
- Formal: uso de símbolos, fórmulas y reacciones.

A menudo se muestra una molécula a través de un dibujo o un modelo (a veces más de uno). Los núcleos atómicos se indican con letras o esferas de plástico; los electrones que los unen, con líneas, puntos o varillas. Sin embargo, estas aproximaciones son útiles solo si entendemos a qué corresponden (Flamini, 2012). Por añadidura, la combinación de la semiótica con la teoría estructural y la hibridación del carbono ocasiona las diferentes formas de representación de moléculas orgánicas. Pero no solo nos atañen estos conceptos, sino también su relación con la didáctica de la química orgánica.

Para Villaseñor (2013), la identidad y la comunicación son esenciales en los procesos de enseñanza-aprendizaje. La química orgánica utiliza representaciones químicas llamadas *fórmulas* para identificar las moléculas en un lenguaje escrito. Estas contemplan tres niveles básicos de la estructura molecular:

Composición: Se refiere a los elementos presentes en la molécula y el número de átomos de cada uno. La fórmula se constituye por los símbolos de los elementos en el compuesto ordenados alfabéticamente (con excepción del carbono e hidrógeno, que se colocan al principio también por alfabeto) y con un subíndice en cada símbolo que indica el número de átomos de cada elemento.

1. Constitución: El tipo y número de enlaces. Se representa por las fórmulas semidesarrolladas, desarrolladas o de enlace-línea. En los tres casos, además de la información que expresa la fórmula molecular (punto anterior), se explicita cuáles átomos están unidos entre sí.
2. Configuración: Expone la disposición espacial de los átomos o de los grupos unidos a un átomo estereogénico. Para expresarla, se utilizan las representaciones estereoquímicas como las de Newman, de Fischer, de caballete o de silla y bote.
3. Conformación: Exhibe los distintos arreglos de una molécula obtenidos por el giro en torno a los enlaces sencillos. El impedimento estérico restringe estos giros según el volumen que ocupan los grupos unidos al carbono.

Niveles de aprendizaje en la química

En apariencia, la química es la ciencia de los sentidos (Lorenzo, 2010). Más vinculados con la técnica que con lo científico, desde sus orígenes los químicos se han valido de la percepción a través de la experiencia directa. No obstante, para comprender los fenómenos a su alrededor, se vieron obligados a trascender esa información sensorial y desarrollar complejos sistemas de símbolos. En la química, tal como la conocemos hoy, existen tres niveles de visualización: macroscópico, submicroscópico y simbólico. Nakamatxu (2012) explica que parte de la dificultad del aprendizaje de la química radica en que requiere múltiples niveles (Figura 1).

- El nivel macroscópico es la química recibida a través de los sentidos, la realidad observable, aspectos, olores, texturas, etc.
- El nivel submicroscópico se basa en modelos teóricos y comprende la estructura de la materia, las partículas básicas, los átomos, las moléculas y los

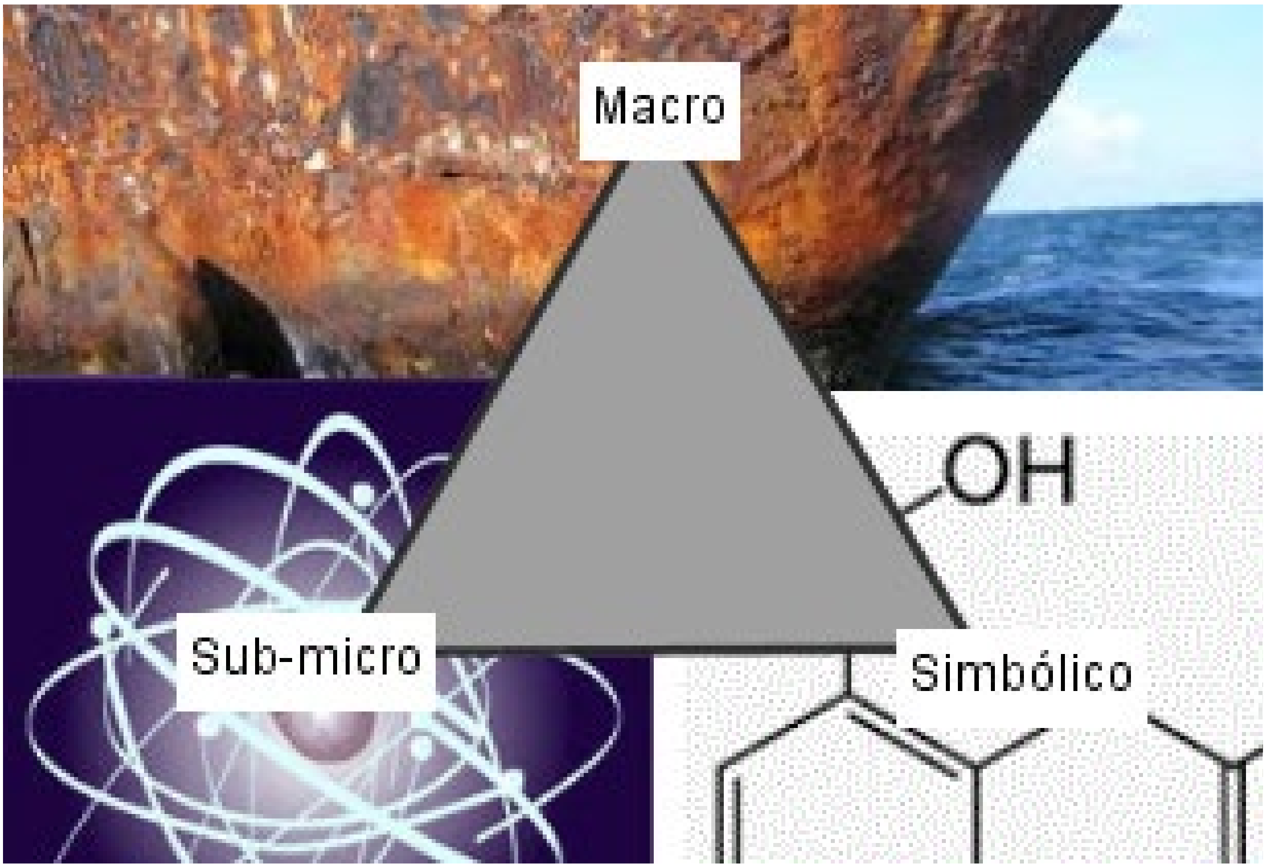


Figura 1. Niveles de aprendizaje de la química.

cristales. Es necesaria una gran capacidad de abstracción e imaginación.

- El nivel simbólico involucra la expresión de las sustancias, símbolos, fórmulas y ecuaciones mediante una nomenclatura que permita manifestar de forma clara los otros niveles.

Geometría tridimensional de moléculas orgánicas

La teoría estructural, base de la química orgánica, se ha formado por la reunión de millones de datos sobre los compuestos orgánicos para explicar y comprender sus propiedades. Describe cómo y en qué orden se unen los átomos para formar moléculas y el modo de distribución de los electrones a su alrededor; también clasifica las formas y tamaños moleculares. Desde este punto de vista, los símbolos de los compuestos nos permiten comprender las propiedades físicas y el comportamiento químico de un compuesto aun cuando no lo conozcamos (Morrison y Boyd 1998).

Tetravalencia del carbono

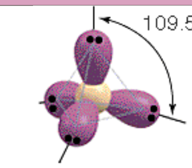
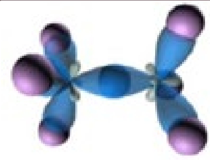
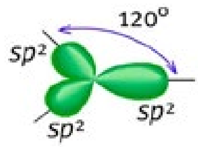
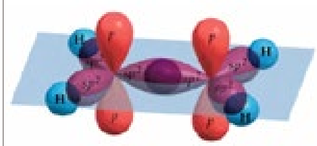
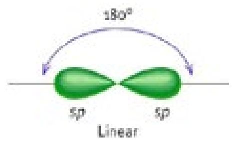
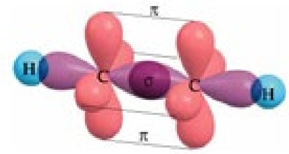
El carbono se localiza en el grupo 14 (IV A) de la tabla periódica y tiene una peculiaridad: la posibilidad de formar cadenas de longitudes variadas con otros átomos de carbono. Esto explica la multitud de compuestos orgánicos existentes (Hernández, 2017).

El átomo de C tiene 6 electrones distribuidos en dos niveles de energía; su configuración electrónica es: $1s_2$, $2s^2$, $2px^1$, $2py^1$. El primer nivel está completo con dos electrones y el segundo tiene exactamente la mitad de los electrones necesarios para completar su octeto, por lo tanto, es capaz de formar cuatro enlaces covalentes con los átomos vecinos para completar su octeto (Chang, 2021).

Hibridaciones del carbono

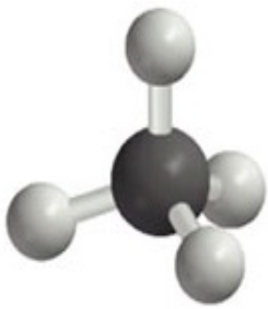
De acuerdo con evidencias experimentales, el carbono tiene una geometría espacial no plana (Chang, 2021), según el tipo de enlace con carbonos vecinos. Este hecho solo puede explicarse a través del concepto de hibridación (ver la Tabla 1).

Tabla 1. La hibridación y la geometría molecular

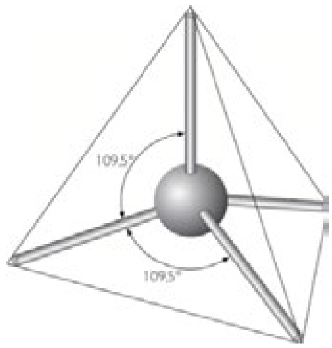
Hibridación	Orbitales atómicos que se hibridan	Orbitales obtenidos	Geometría y ángulo	Enlace y ejemplo
sp^3	1 orbital 2s 3 orbitales 2p: 2px, 2py, 2pz	4 orbitales híbridos sp^3		
sp^2	1 orbital 2s 2 orbitales 2p: 2px, 2py	3 orbitales híbridos sp^2 1 orbital atómico 2p: 2pz		
sp	1 orbital 2s 1 orbital 2p 2px	2 orbitales híbridos sp 2 orbitales atómicos 2p: 2py 2pz		

Geometría tridimensional

Como se puede ver en la tabla 1, los enlaces dobles y triples del carbono pueden plasmarse en un plano, sin embargo, la geometría tridimensional del enlace sencillo C-C con hibridación sp^3 es tetraédrica y su representación plana es complicada. El carbono se encuentra en el centro del tetraedro, y los 4 átomos vecinos en sus vértices. Esta geometría tridimensional dificulta dibujar los compuestos orgánicos en un plano y obliga a desarrollar las diferentes estrategias semióticas para graficar las moléculas orgánicas (Figura 2).



Modelo molecular del carbono sp3



Tetraedro

Figura 2. Geometría tridimensional del carbono con hibridación sp^3

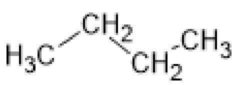
Isomería

Una molécula es un agregado de por lo menos dos átomos en una configuración definida, mantenidos juntos por fuerzas interatómicas llamadas enlaces químicos (Recio 2012). Cada compuesto se identifica por una fórmula, pero algunos la comparten; a estos se les llama isómeros (del griego ισο = igual y μεροσ = parte). Los isómeros contienen igual número de las mismas clases de átomos, pero sus enlaces son distintos. Son compuestos diferentes porque sus estructuras moleculares divergen (Morrison y Boyd 1998).

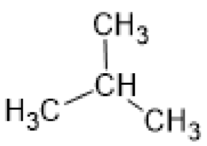
La isomería constituye uno de los temas más significativos en la química orgánica. Su importancia radica en la diversidad de las moléculas de este tipo en la naturaleza y cuán desiguales pueden llegar a ser para el metabolismo de los seres vivos o las desemejanzas que comparten en cuestión de propiedades fisicoquímicas de los materiales de uso común. Según lo anterior, los tipos de isomería se dividen en estructural y espacial:

Isomería estructural

- **Isomería de cadena / esqueleto.** Los isómeros de este tipo difieren entre sí en la longitud de la cadena. Uno de ellos es lineal y los demás tienen cadenas más cortas con sustituyentes en ellas; es decir, presentan diversos esqueletos o estructuras. Por ejemplo, el butano y el metilpropano, ambos C_4H_{10}, se distinguen por la longitud de la cadena principal (Figura 3).
- **Isomería de posición.** La presentan aquellos compuestos en los que alguna ramificación o grupo funcional está unido a la cadena principal en diferente posición. El 2-metilhexano y el 3-metilhexano, ambos C_7H_{16}, difieren solo en el número que indica la posición de la ramificación (Figura 4).
- **Isomería funcional.** La de aquellos compuestos que, al tener conectividades de átomos alternativas, generan sus propios grupos funcionales en la cadena. El butanal y la butanona son aldehído y cetona respectivamente, ambos C_4H_8O. El nombre de estos isómeros varía en la terminación; esta indica el grupo funcional de la molécula (Figura 5).

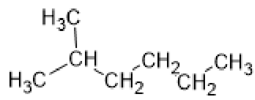


Butano

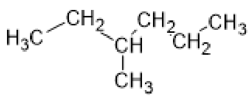


Metilpropano

Figura 3. Isomería de cadena.

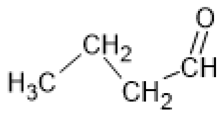


2-metilhexano

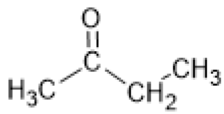


3-metilhexano

Figura 4. Isomería de posición.



Butanal

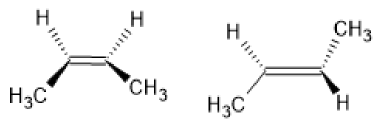


Butanona

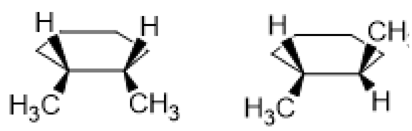
Figura 5. Isomería funcional.

Estereoisomería o isomería espacial

- **Isomería geométrica o cis-trans.** Se presenta cuando hay rotación impedida entre dos átomos de carbono, como en los dobles enlaces y los compuestos cíclicos. Se ejemplifica en el cis-2-buteno y el trans-2-buteno (C_4H_8), así como en el cis-1,2-dimetilciclohexano y el trans-1,2-dimetilciclohexano (C_8H_{16}). El prefijo que se agrega al nombre define estos compuestos (Figura 6).
- **Isómeros conformacionales.** Como los enlaces sencillos C—C tienen la libertad de rotar, dos isómeros conformacionales pueden interconvertirse sin ruptura de enlaces, solo por rotación. La energía de estos isómeros depende de si los sustituyentes están eclipsados o alternados. El nombre no cambia, es el mismo compuesto en dos estados energéticos ocasionados por la interacción de los grupos vecinos (Figura 7).
- **Enantiómeros o isómeros especulares.** Cuando la molécula contiene un carbono quiral, en el que los cuatro sustituyentes no son iguales. Los isómeros solo se distinguen por ser uno imagen especular del otro. A uno de ellos se le denomina R (*rectus*) y al otro S (*sinister*) siguiendo la jerarquía de los grupos unidos al carbono quiral. Las propiedades físicas y químicas son iguales para ambos, a excepción de aquellas que dependen de dicha geometría. Los enantiómeros no se pueden interconvertir sin romper enlaces. Un ejemplo de enantiómeros es el 2-butanol, que existe en sus formas R y S (Figura 8).

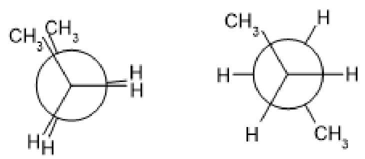


cis y *trans*-2-buteno



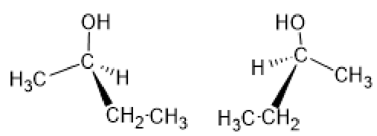
cis y *trans* 1,2-dimetilciclohexano

Figura 6. Isomería geométrica.



Forma eclipsada / Forma alternada

Figura 7. Confórmeros del butano



R-2-butanol / S-2-butanol

Figura 8. Enantiómeros.

METODOLOGÍA DIDÁCTICA

Para ilustrar la diversidad de formas de representación de una molécula, la composición y estructura de una sustancia, así como el tránsito de una forma a otra, se eligieron dos moléculas: la de serina y la de ciclohexano. La representación más favorable para el aprendizaje depende del tema a estudiar dentro de la química orgánica.

La serina es un aminoácido esencial en las cadenas de proteína de los organismos. El cuerpo humano debe sintetizarla porque mantiene en orden el sistema nervioso (Carey 2008). A pesar de su sencillez, esta molécula se seleccionó porque se adapta a casi todas las representaciones simbólicas. A continuación, se enlistan sus características.

- Cadena hidrocarbonada de solo tres carbonos;
- cuatro elementos: C, H, O y N;
- tres grupos funcionales: ácido carboxílico, amino y alcohol;
- un carbono quiral o asimétrico: cuatro grupos diferentes unidos al carbono.

El ciclohexano es una molécula cíclica. Sirve para explicar las diferentes conformaciones y la configuración geométrica *cis-trans* de un anillo de 6 átomos; este conocimiento es aprovechable cuando se estudian los carbohidratos que tienden a cerrarse en ciclos de 6 átomos, aunque uno de ellos no sea carbono sino oxígeno.

Diversidad de fórmulas y representación de moléculas orgánicas

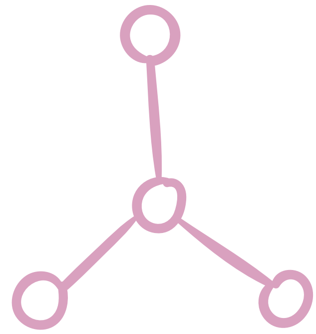
Fórmulas moleculares

Fórmula condensada o compacta

En esta representación se coloca el símbolo del elemento y la cantidad de átomos presentes en la molécula. En química orgánica se inicia con el átomo de carbono seguido del átomo de H, posteriormente O, N, y demás elementos en orden alfabético. Por ejemplo, la fórmula molecular de la serina es $C_3H_7O_3N$; dicho en lenguaje natural, la molécula de serina está formada por tres átomos de carbono, siete de hidrógeno, tres de oxígeno y uno de nitrógeno. Esta información es suficiente solo cuando se desea realizar cálculos de composición, masa molecular y estequiométricos.

Fórmulas mínima y molecular

Para determinar la fórmula molecular de una sustancia, se realizan operaciones analíticas que primero determinan cualitativamente los elementos presentes y posteriormente analizan cuantitativamente la proporción de cada uno. Se obtiene entonces la fórmula empírica o mínima de la molécula; es decir, indica qué elementos hay y la relación mínima de números enteros entre sus átomos, pero no necesariamente el número real de átomos presentes en la molécula. Una fórmula molecular sí precisa el número de átomos de cada ele-



mento. La fórmula mínima del ciclohexano es CH_2, pero esta información solo indica que por cada átomo de carbono hay dos átomos de hidrógeno; hasta no determinar la masa molecular, es imposible saber que la fórmula molecular corresponde a seis veces el número de átomos de cada uno C_6H_{12}.

Fórmulas estructurales

Fórmulas desarrolladas o estructurales planas

Indican en un plano la estructura de la molécula, se muestran todos los átomos y la forma de enlazarse mediante guiones sencillos, dobles o triples. Este tipo de fórmula no considera importantes los enlaces entre los átomos (Figura 9).

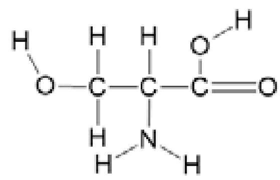
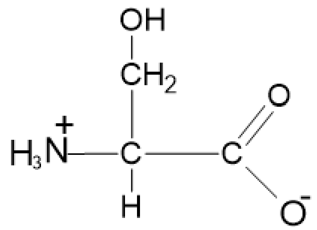


Figura 9. Fórmula desarrollada de la serina.

Fórmula semidesarrollada

Como su nombre lo indica, es en parte desarrollada y en parte compacta. Evita mostrar enlaces que no son de interés para resaltar los que sí, por ejemplo, cuando se estudian los grupos funcionales o mecanismos de reacción. Puede mostrar los pares electrónicos o cargas en los elementos que los tienen. A falta de un editor de moléculas, puede escribirse de manera lineal (Figura 10).

$OHCH_2\text{-}CH(NH_2)\text{-}COOH$



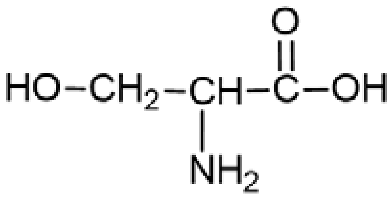


Figura 10. Fórmulas semidesarrolladas de la serina.

Esqueleto carbonado

El esqueleto carbonado de un compuesto se muestra en zigzag, se omiten los átomos de carbono e hidrógeno y se ilustran los enlaces. Cada pico de la cadena es un átomo de carbono y se sobrentiende que la molécula contiene los hidrógenos necesarios para cumplir con la tetravalencia del carbono. Cuando las moléculas contienen heteroátomos (átomos diferentes de carbono e hidrógeno), los vértices o los extremos de línea se reemplazan por el símbolo del heteroátomo, agregándole los hidrógenos que le corresponden. La rapidez de este modelo es útil cuando se requiere escribir la fórmula repetidas veces, aunque su uso exige una mayor abstracción (ver la Figura 11).

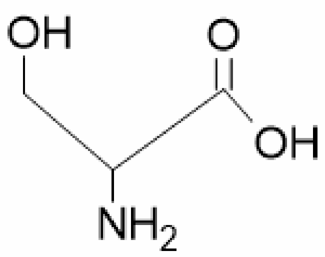


Figura 11. Fórmula de esqueleto carbonado de la serina.

Por otra parte, las fórmulas poligonales zigzagueantes destacan los segmentos que las constituyen; es decir, indican los carbonos que forman el compuesto. Esa herramienta pedagógica corresponde en cierta medida a la conformación más estable de algunos compuestos, pero se contrapone a la geometría de otros (Cerón, 2013).

Representación tridimensional utilizando cuñas y líneas punteadas

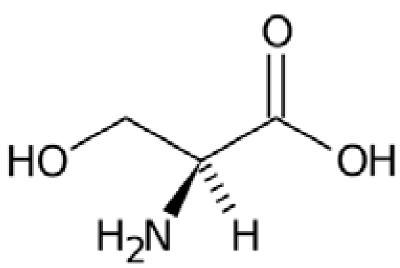
En este método, la orientación espacial de un átomo en el espacio se muestra usando tres tipos de líneas para denotar las uniones: simples, en forma de cuñas y punteadas.

Una línea simple representa una unión que está sobre el plano del papel.

Una cuña sólida representa una unión que sale hacia el frente del plano del papel.

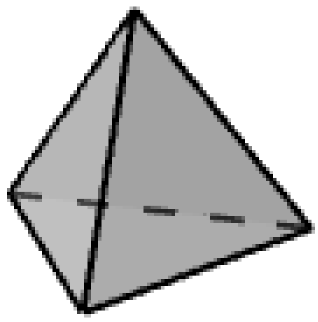
Una cuña punteada o intermitente representa una unión que va hacia atrás del plano del papel.

Esta representación se utiliza en el estudio de temas como la hibridación, la geometría molecular, los centros asimétricos, la estereoisomería, y la actividad óptica, entre otros (Figura 12).



Serina

Figura 12. Representación tridimensional utilizando cuñas y líneas punteadas.

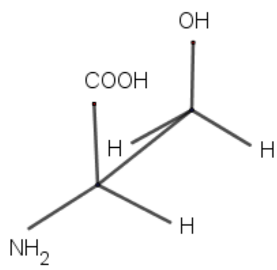


Vista del tetraedro

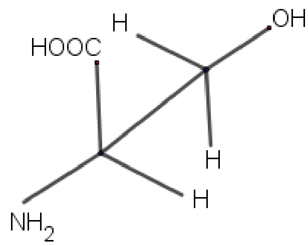
Figura 12. (Continuación) Representación tridimensional utilizando cuñas y líneas punteadas.

Proyección en caballete

La proyección de caballete consiste en observar un par de átomos de carbono en perspectiva desde un ángulo de 45°. El carbono más próximo al observador se encuentra abajo y a la derecha, mientras que el más alejado está arriba a la izquierda. Este modelo permite dibujar las moléculas en un plano bidimensional y comprender su disposición espacial tridimensional; es eficaz para el estudio de la estereoquímica y las diferentes conformaciones al girar libremente el enlace sencillo C—C, siempre y cuando se comprenda el impedimento estérico y la energía que tendrán las conformaciones eclipsada y alternada (ver la Figura 13).



Forma eclipsada

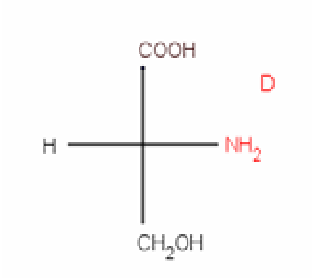


Forma alternada

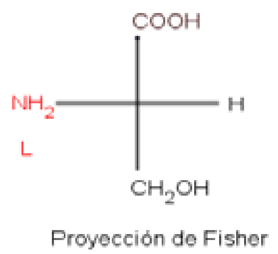
Figura 13. Proyección de caballete de la L-serina.

Proyecciones de Fischer

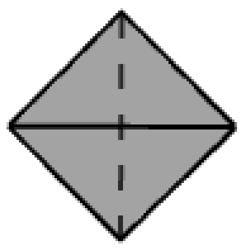
Fischer aplicó esta forma de representación para estudiar los múltiples isómeros de los carbohidratos; la proyección coloca la cadena hidrocarbonada verticalmente y toma la vista superior o de planta. La molécula se proyecta sobre el plano horizontal y los enlaces se muestran con líneas verticales y horizontales en forma de cruz: las horizontales representan los ángulos que se acercan al observador, o sea los que se levantan del papel; y las verticales representan los enlaces que se dirigen hacia atrás del papel; las letras D y L denotan la posición del grupo funcional del penúltimo carbono que se encuentra a la derecha o izquierda respectivamente (ver la Figura 14).



D-serina



L-serina



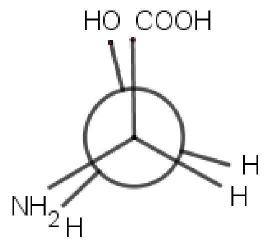
Tetraedro

Figura 14. Proyección de Fischer de la serina.

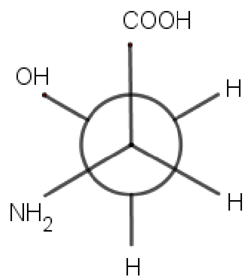
Proyecciones de Newman

Se trata de una forma de representación bidimensional útil para visualizar conformaciones en un enlace simple carbono-carbono. Consiste en observar la molécula de frente, a lo largo del enlace que une a dos átomos de carbono, y proyectarla sobre el plano de forma que los grupos unidos al átomo de carbono más próximo al observador se dibujan enlazados al punto central de un círculo que representa al átomo; los del más alejado se esquematizan como si partieran desde atrás del círculo y, por tanto, sus enlaces solo son visibles parcialmente.

La proyección de Newman, al igual que la de caballete, sirve en el estudio de la estereoquímica y las diversas conformaciones de una molécula (Figura 15).



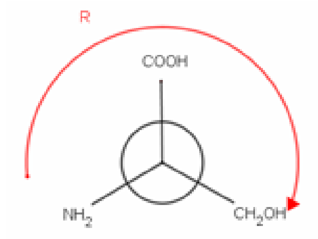
Forma eclipsada



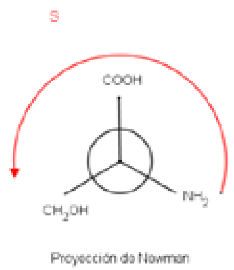
Forma alternada

Figura 15. Proyección de Newman de la L-serina

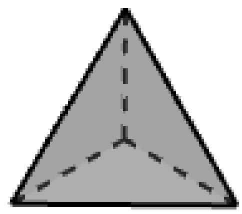
Cuando la molécula contiene un carbono quiral, su vista se hace directamente hacia dicho carbono. Se muestran únicamente los tres grupos de mayor jerarquía unidos al carbono quiral sobre una de las caras del tetraedro; el cuarto grupo (que va hacia atrás) queda oculto, y la asignación de los isómeros R o S se da de acuerdo a la jerarquía de los grupos unidos a dicho carbono. Es importante recalcar que la configuración R y S pertenece al centro quiral mas no a la molécula, ya que, si una molécula contiene más de un centro quiral, cada uno de ellos tendrá su propia configuración (Figura 16).



Isómero R



Isómero S



Tetraedro

Figura 16. Proyección de Newman de la serina mostrando las configuraciones S y R.

Conformaciones silla y bote de compuestos cíclicos

Las conformaciones de silla y bote se presentan en moléculas con estructuras cíclicas. Los enlaces C—C que forman el anillo tienen rotación total impedida, pero pueden rotar ligeramente sin romper la estructura cíclica. Estas conformaciones se obtienen para evitar tensiones angulares o torsionales entre los átomos del anillo.

Los isómeros conformacionales se conocen como *silla* y *bote* por su similitud con estos objetos. La silla tiene todos los enlaces que forman el anillo distribuidos en zigzag de arriba a abajo. Si la colocamos en un plano horizontal, veremos que 4 átomos del anillo se encuentran en él y dos no; de estos dos últimos, uno está arriba del plano y el otro debajo. Por otra parte, si se dobla hacia arriba el extremo izquierdo de la silla, se obtiene la conformación *bote*. En esta, los 4 átomos que se encontraban en el plano conservan su posición, pero los otros dos ahora se encuentran del mismo lado, es decir, arriba del plano.

Cuando el ciclohexano adquiere la forma de silla, se encuentra en un mínimo energético: se trata de la conformación más estable del ciclohexano y prácticamente todo derivado de él. Algo contrario ocurre con la forma de bote, ya que los enlaces eclipsados y la tensión torsional considerable (que aumenta la energía de la molécula) perjudican la estabilidad.

Los hidrógenos perpendiculares al plano de la molécula se denominan *axiales*, mientras que los orientados próximos al plano de la molécula reciben el nombre de *ecuatoriales*. Los hidrógenos axiales de dos carbonos adyacentes se orientan en sentidos contrarios, y lo mismo ocurre con los ecuatoriales. En cada carbono hay dos hidrógenos, uno axial y otro ecuatorial: si el axial se orienta hacia arriba, el ecuatorial lo hace hacia abajo y viceversa. En la figura 17, los hidrógenos axiales son de color azul y los ecuatoriales de color rojo.

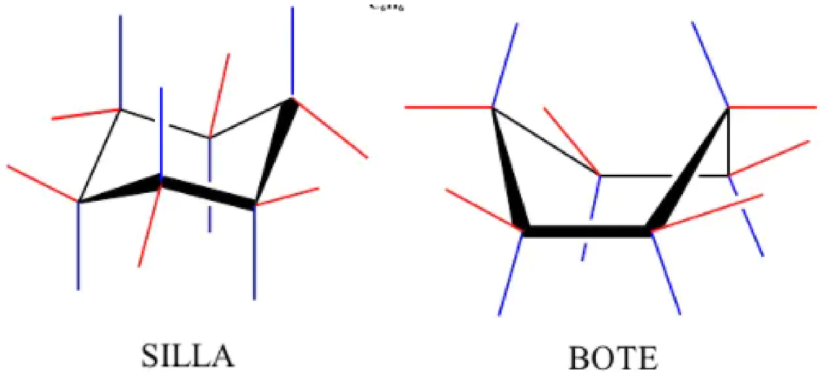


Figura 17. Conformaciones del ciclohexano. Silla y bote.

Modelos moleculares manipulativos físicos y utilizando software

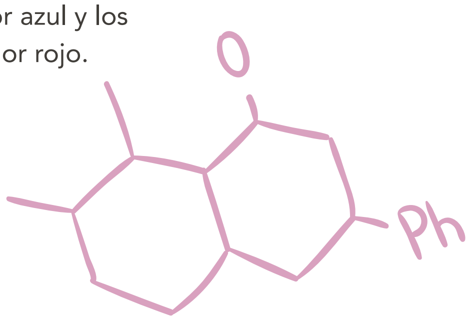
Modelo de bolas y varillas

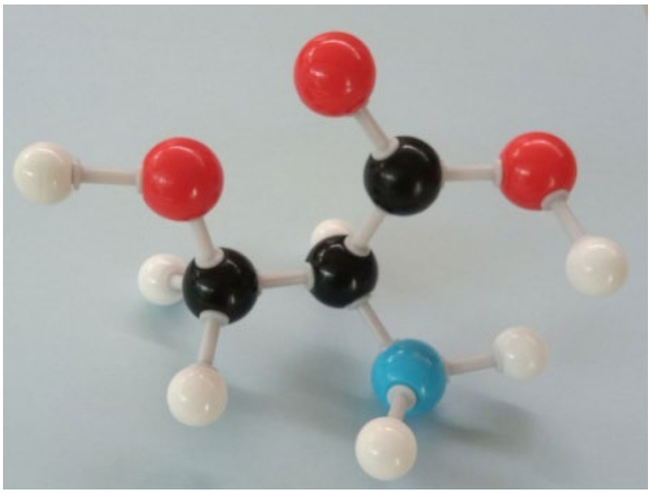
Muestra la posición tridimensional de los átomos y los enlaces entre ellos mediante esferas y barras. Son equivalentes a una fórmula desarrollada, pero con "bolitas y palitos". Los átomos son típicamente sustituidos por esferas conectadas por barras o varillas que hacen las veces de enlaces (Figura 18). Hay variantes de estos modelos que tienen solo varillas y disminuyen el tamaño de las bolas a simples conectores (Figura 19); otras aumentan el tamaño de las esferas hasta desaparecer las varillas (Figura 20), en estos últimos modelos se percibe el volumen que ocupa el átomo, no solo el núcleo sino junto con la nube electrónica.

Los modelos moleculares pueden ser físicos, ya sea que se construyan con un kit especializado o bien utilizando materiales como esferas de unicel o plastilina unidos con varas de madera o plástico. Para este artículo se utilizaron modelos físicos de *Molecular Model Kit*, MMK, de *Linktor* y *Framework of Molecular Model*, FMM, de *Prentice Hall*. Actualmente existen ya aplicaciones informáticas para este fin. El *software* utilizado en este artículo para mostrar las moléculas es ACD/ChemSketch, en el cual se pueden dibujar todas las representaciones anteriormente descritas y además generar las moléculas en 3D.

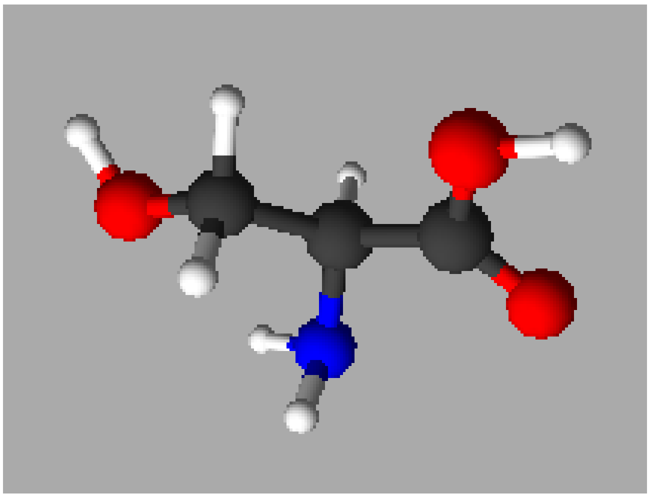
Los colores de las esferas siguen un código establecido: el color negro corresponde al carbono; el blanco al hidrogeno; el rojo al oxígeno, y el azul al nitrógeno. Los demás átomos tienen colores específicos. En el modelo de varillas, el color de cada una debe ser igual que el de los átomos que une: si el enlace es C—C, la varilla será negra, pero si es C—O la varilla será mitad negra y mitad roja.

El uso de estos artefactos contribuye a la comprensión de los isómeros y las interacciones entre los átomos, así como del volumen y la geometría molecular. Sus inconvenientes son el tiempo de construcción, el número limitado de esferas y enlaces de cada color y que las estructuras a menudo son frágiles.



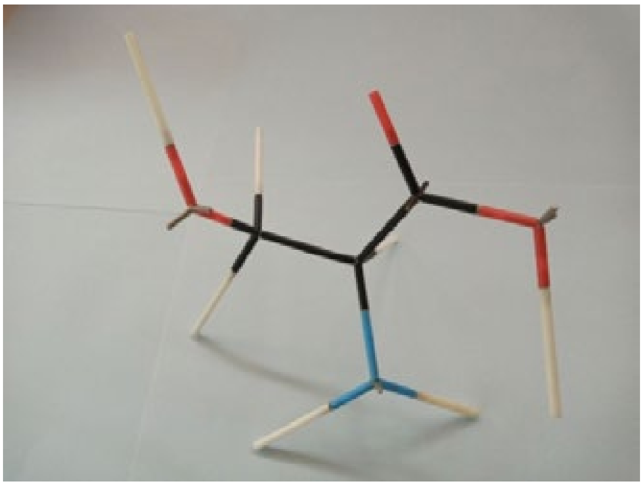


Modelo físico, *MMK*

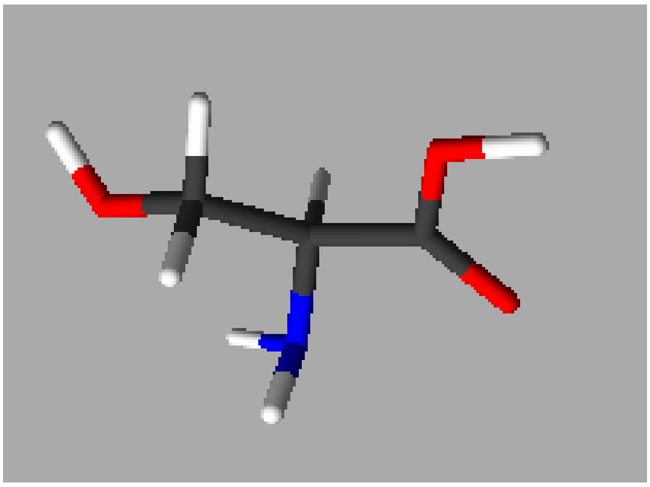


Modelo con software ACD/ChemSketch

Figura 18. Modelos de bolas y varillas.



Modelo físico, *MMK*



Modelo con software ChemSketch

Figura 19. Modelos de varillas.

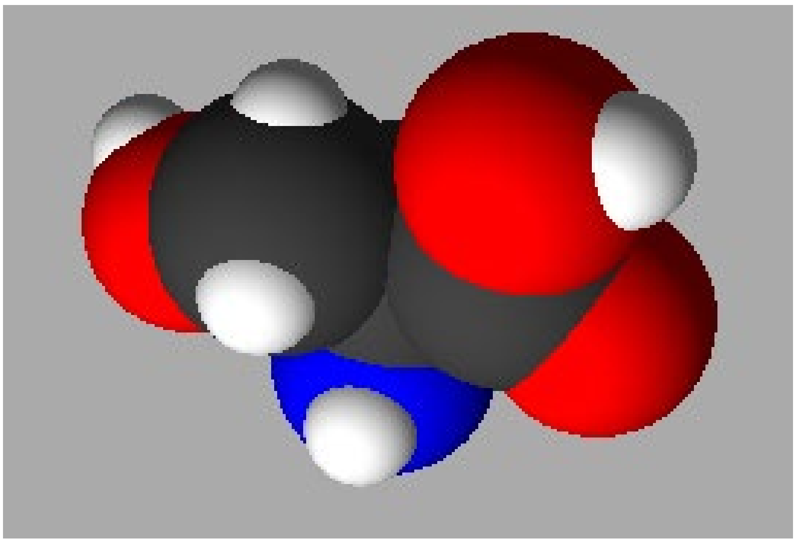


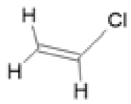
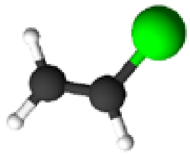
Figura 20. Modelo de bolas con ACD/ChemSketch

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA TRANSFORMACIÓN DE UN TIPO DE FÓRMULA EN OTRO

EJERCICIO 1.

a) Dibuja las fórmulas molecular, desarrollada y semidesarrollada del cloroeteno. Puedes utilizar cualquiera de las formas de representación.
b) Construye su estructura tridimensional con modelos de bolas y varillas.
c) Menciona si hay isómeros estructurales.

RESPUESTA:

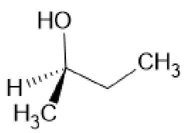
Fórmula molecular C_2H_3Cl	Fórmula desarrollada 	Fórmulas semidesarrolladas CH_2=CH-Cl 
Modelo de bolas y varillas 		Modelo de varillas 

EJERCICIO 2.

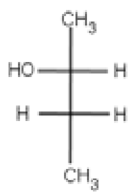
Traza las representaciones tridimensionales utilizando cuñas, proyección de Fischer, proyección de Newman y caballete del isómero R del 2-butanol.

RESPUESTA:

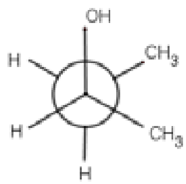
Cuña



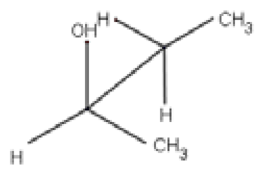
Fischer



Newman



Caballete

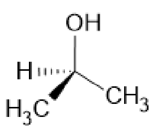


EJERCICIO 3.

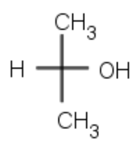
Traza las representaciones tridimensionales utilizando cuñas, proyección de Fischer, proyección de Newman y caballete del propanol. No tiene carbono asimétrico.

RESPUESTA:

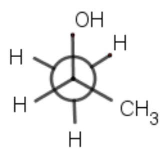
Cuña



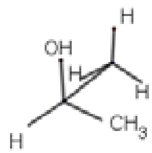
Fischer



Newman



Caballete



CONCLUSIONES

Las moléculas no son planas ni rígidas, tienen modos particulares de acomodarse en el espacio y permiten ciertos movimientos, giros alrededor de los ejes sencillos. Además, existen tantos temas por aprender de ellas que es imposible entenderlos si no usamos las diferentes representaciones. La semiótica de moléculas en química orgánica no se limita a simples dibujos, cada sistema representacional está sustentado en la teoría molecular y su aprendizaje va más allá de solo saber trazar. Reconocer las representaciones para elegir la más adecuada en el tema que se desea estudiar, al igual que transformarlas entre ellas son las habilidades fundamentales en esta disciplina y se perfeccionan con la práctica frecuente.

El docente de química conoce los esquemas de representación y usualmente se vale de ellos indistintamente: salta de una forma de representación a otra sin ponderar los conflictos que esto ocasiona en los alumnos. No obstante, es importante que, cuando cambie de un sistema a otro, explique y aclare el significado de la sustitución, pues es habitual que los estudiantes encuentren dificultades al hacer comparaciones entre estructuras, y más aún bajo sistemas representacionales disímiles.

Para alcanzar la comprensión de las fórmulas químicas es indispensable la posibilidad de manipularlas y operar con y sobre ellas. Esto se relaciona con la habilidad de crear una imagen mental, y con el procesamiento de un código de imágenes. Los modelos tridimensionales, los dibujos, las perspectivas, etc. facilitan el aprendizaje, sobre todo cuando el estudiante no está familiarizado con el tema.

El ser humano, desde edades tempranas, utiliza símbolos, figuras, geometrías y, por tal motivo, la inclusión de más de un solo tipo de representación posibilita que el docente transmita el conocimiento a sus alumnos de manera entendible, y que los estudiantes de química puedan comprender el mundo microscópio de las moléculas.

REFERENCIAS

Alzate, M., Caballero, C., Moreira, M. (2006). Multiplicidad funcional de la representación molecular: Implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la Química. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 1(2).

Carey, F. (2008). *Química Orgánica*. McGraw Hill.

Cerón J., Arroyo, R., Aguilar, R., González, E., Pérez A. (2013). Precisiones y comentarios sobre el artículo "Evaluación del aprendizaje en las representaciones moleculares 'enlace-línea' de los compuestos orgánicos. Un estudio de caso". *Educ. quími.*, 24(3), 270-277.

Chang, R. (2021). *Química*. McGraw Hill.

Eco U. (2000). *Tratado de Semiótica General*. Editorial Lumen.

Flamini, L., Wainmaier, C. O. (2012). Representaciones moleculares: Reflexiones sobre su enseñanza [en línea]. *III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 26, 27 y 28 de septiembre de 2012*, La Plata, Argentina. En Memoria Académica. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.3671/ev.3671.pdf

Hernández, M. (2017). *Química II*. Texto de educación media superior.

Lorenzo, M., Pozo, J. (2010). La representación gráfica de la estructura espacial de las moléculas: eligiendo entre múltiples sistemas de notación. *Cultura y Educación*, 22(2), 231-246

Morrison, R. y Boyd, R., (1998). *Química Orgánica*. Pearson Education.

Nakamatxu, J. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la química. *En Blanco & Negro*, 3(2).

Recio Del Bosque, F. (2012). *Química Orgánica*. McGraw Hill.

Villaseñor, E., Canchola, E., Salame, A. (2013). Evaluación del aprendizaje en las representaciones moleculares "enlace-línea" de los compuestos orgánicos. Un estudio de caso. *Educ. quím.*, 24 (núm. extraord. 1), 174-179.

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO