PädiUAQ 8

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

AÑO 4 NUMERO 8

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

CONACYT

DIRECTORIO

PädiUAQ. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 4, Núm. 8, enero - junio 2021. Es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Calle Cerro de las Campanas s/n, Cerro de las Campanas, CP 76010, Querétaro, Qro., México, Tel. 442 192-1200 ext. 6023, padiuaq@uaq.mx, Editor responsable: Víctor Larios Osorio, Reserva de Derechos al Uso Exclusivo en trámite, ISSN en trámite, Responsable de la última actualización de este número Diseño Editorial de la Facultad de Ingeniería, Calle Cerro de las Campanas s/n, Cerro de las Campanas, CP 76010, Querétaro, Qro., México, fecha de modificación el 21/06/2021.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

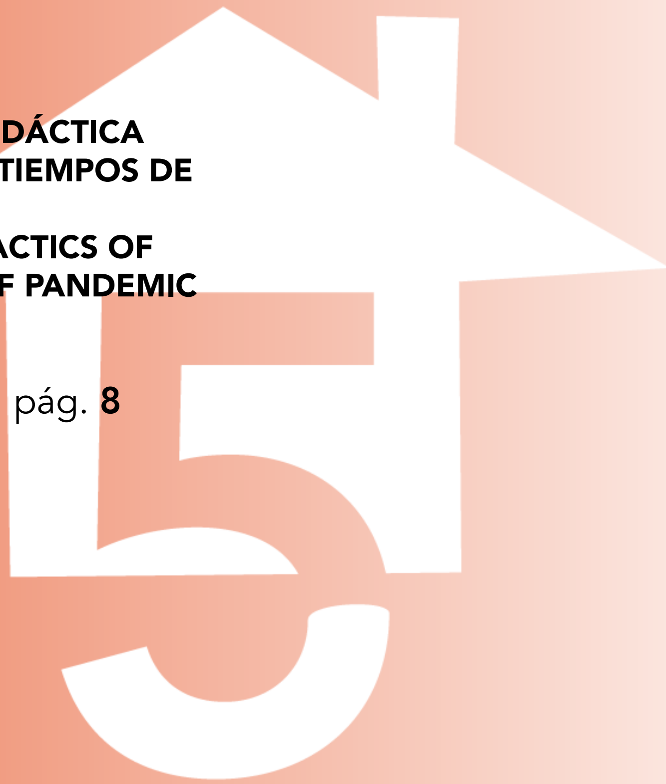
COMITÉ EDITORIAL

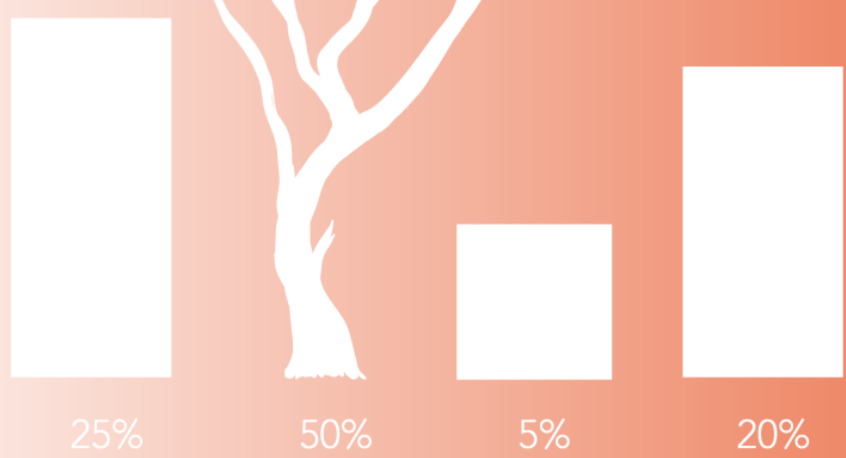
PädiUAQ

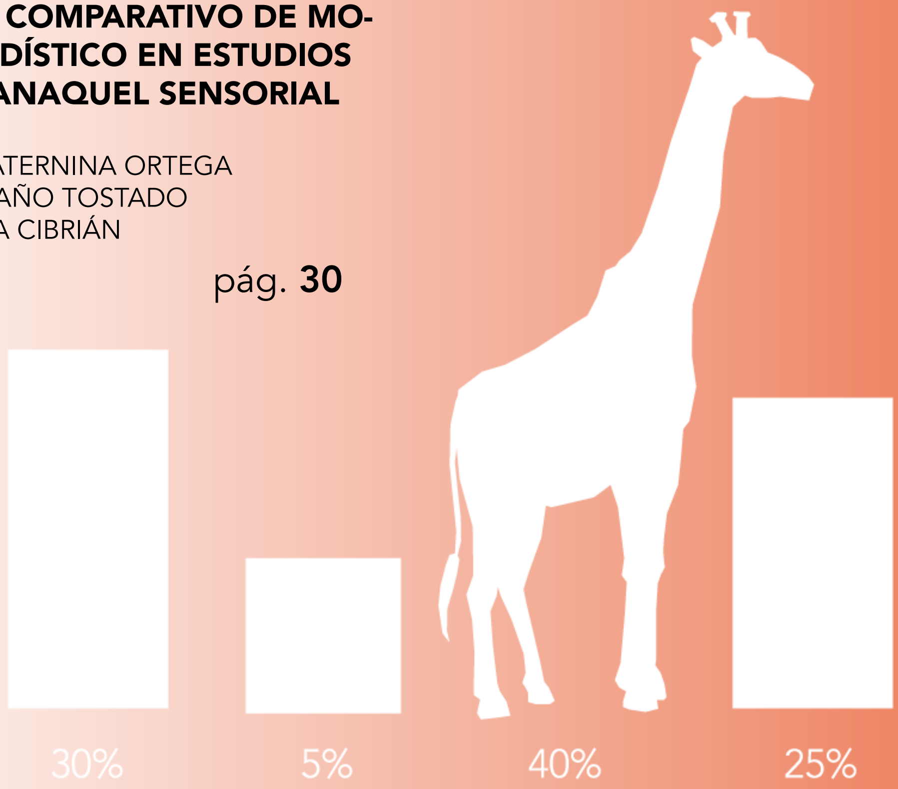
Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

ÍNDICE




25%
50%
5%
20%


30%
5%
40%
25%

VÍCTOR LARIOS OSORIO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

VIL@UAQ.MX

01

LA IMPORTANCIA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN TIEMPOS DE PANDEMIA

THE IMPORTANCE OF DIDACTICS OF MATHEMATICS IN TIMES OF PANDEMIC

Es inútil [–dijo el maestro vidriero de la abadía–], ya no tenemos la sabiduría de los antiguos, ¡se acabó la época de los gigantes!
– Somos enanos –admitió Guillermo–, pero enanos subidos sobre los hombros de aquellos gigantes, y, aunque pequeños, a veces logramos ver más allá de su horizonte.
Diálogo entre Nicola da Mormondo (maestro vidriero) y Guillermo de Baskerville en la novela El nombre de la rosa, *de Umberto Eco.*

RESUMEN

En este texto se presenta una reflexión sobre la importancia de la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina cuyos estudios sobre el aprendizaje permiten acrecentar el conocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas. Se plantea que parte de esa importancia reside en el hecho de que las acciones por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (y de las Ciencias) pueden impactar positivamente en el desarrollo de los alumnos como miembros de la sociedad, para la toma de decisiones que tienen consecuencias directas en sus vidas en ámbitos como su salud, su economía, su participación social, etcétera.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas, conocimiento científico, desarrollo individual, inclusión.

ABSTRACT

This text presents a reflection on the importance of Didactics of Mathematics as a discipline whose studies on learning allow to increase the knowledge on the practice of teaching Mathematics. Part of this importance lies in the fact that every action taken to improve the teaching and learning of Mathematics (and Science) can have a positive impact on the development of students, as members of society, to make decisions that have direct consequences in their lives in areas such as their health, economy, social participation, and so on.

Keywords: Didactics of mathematics, scientific knowledge, individual development, inclusion.

El año 2020 transcurrió con un cambio en la dinámica social debido al evento epidémico provocado por la propagación del virus SARS-CoV-2, el cual fue facilitado por la tecnología de movilidad y comunicación que el mismo ser humano ha desarrollado. Y algo que resulta interesante es que, en el mismo ambiente donde esa tecnología nos permite comunicarnos por medios electrónicos en cuestión de segundos o trasladarnos por medios mecánicos de un extremo del planeta al otro en cuestión de horas, se han emitido todo tipo de noticias sobre el origen, diseminación, tratamientos y cuidados preventivos para la Covid-19, enfermedad producida por el virus.

Cuando un individuo aprende algo nuevo, lo incorpora —idealmente— al bagaje de conocimientos y habilidades que desarrolla a lo largo de su vida; por desgracia, individuo y conocimiento perecen uno con otro, y la preservación del saber es posible sólo por medio de herramientas que se puedan constituir en "memorias duras", tales como la escritura. Es por ello que las fuentes documentales resguardadas resultan muy valiosas para el saber colectivo de la humanidad: la muerte de un individuo ya no supone comenzar desde el principio, sino retomar desde lo que nos ha dejado. De aquí viene el epígrafe de este texto: Somos como enanos subidos en hombros de gigantes, esta idea fue atribuida a Bernardo de Chartres (s. XII) por su discípulo Juan de Salisbury.

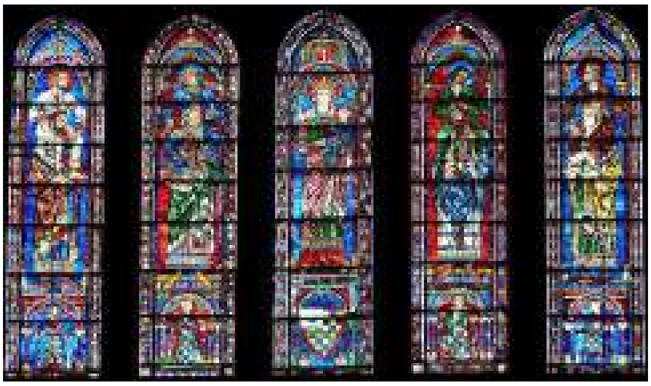


Figura 1. Vitrales bajo el rosetón sur de la Catedral de Chartres, Francia, donde se aprecian los evangelistas sentados en los hombros de los profetas del Antiguo Testamento.

Así ha sido que, gracias a un esfuerzo colectivo, se ha logrado desarrollar —en menos de un año— no una, sino varias vacunas que le permitan al cuerpo humano defenderse contra el virus SARS-CoV-2. No se trata de un fenómeno milagroso, sino de la consecuencia del aprendizaje colectivo llevado a cabo durante decenas de generaciones. Oleadas de estudiosos que se dedicaron a observar las enfermedades y el modo en que nuestro cuerpo las combate, a entender cómo se diseminaban los causantes de las enfermedades;

y aprendieron a prevenirlas, siempre subidos en los hombros de sus antecesores.

No obstante, no todo el conocimiento y las habilidades que los humanos hemos guardado, acumulado y ampliado nos han sido útiles. Por un lado, está el caso de lo mucho que se ha perdido por razones muy diversas, que van desde el olvido (ya sea que no hubo ocasión de registrar los hallazgos, o los registros simplemente se extraviaron), hasta la destrucción premeditada. Por otro lado, existe un gran cúmulo de conocimiento que la comunidad humana ha determinado inútil o hasta perjudicial.

Una parte de ese conocimiento acumulado, lo que hemos aprendido como comunidad humana para comprender el funcionamiento de lo que nos rodea y a nosotros mismos, es a lo que denominamos "Ciencia". La Ciencia, como tal, es un esfuerzo comunitario de aprendizaje y construcción del saber que no se queda en el mero cúmulo de conocimientos, sino que incluye habilidades para seguirlo desarrollando. Como dice el divulgador Pere Estupinyà [3], "la ciencia podría ser nuestro sexto sentido" porque va más allá de nuestros limitados sentidos físicos y expande nuestros alcances, al tiempo que desarrolla mecanismos que le permiten corregirse con la colaboración de la comunidad humana. Esta capacidad que tiene de aportar y realizar ajustes nos proporciona una herramienta poderosa para buscar mejoras y resolver problemas (a veces muy grandes) de una manera más fiable que otros medios".

Ahora bien, en nuestras sociedades hemos designado instituciones donde se les enseña y se les muestra este cúmulo de conocimientos y habilidades (entre otras cosas) a los miembros de la sociedad que están en desarrollo para que participen en la comunidad como miembros conocedores. Éstas son las instituciones educativas y se trata de las principales en las que hemos delegado la tarea de difundir conocimientos científicos, culturales, etcétera. En México, por ejemplo, se establece en el marco legal que desde la educación Primaria y hasta el Bachillerato —es decir, de los 6 a los 18 años— la educación tiene como una de sus bases el progreso científico, el desarrollo integral del individuo y la transformación de la sociedad. Este tipo de ideas se repiten en muchos países americanos y europeos.

De esta manera queda patente que las instituciones educativas han de convertirse en uno de los mecanismos principales para mostrarle a los niños y jóvenes la Ciencia, para que aprendan a considerarla parte del bagaje de conocimientos que han heredado como miembros de las sociedades, y como miembros de la humanidad.

Es paradójico que ese bagaje permita desarrollar tecnología y conocimiento que puede, a su vez, ampliar las diferencias entre las personas. Skovsmose y Valero [6] lo plantean como *la paradoja de la inclusión* de las sociedades de la información:

> La *paradoja de la inclusión* se refiere al hecho de que el modelo actual de globalización, que incluye el acceso universal y la inclusión como principio establecido, conduce también a una honda exclusión de ciertos sectores sociales [6].

Con esto se refiere a que las personas que tienen menos acceso a la tecnología y menos conocimientos en Ciencia (Matemáticas incluidas) pueden caer en una especie de círculo vicioso que los excluya a su vez de la posibilidad de incorporarse a la misma sociedad del conocimiento. En efecto, mientras que algunos tenemos la posibilidad de acceder a la tecnología desarrollada y a la educación que nos permite utilizarla, aplicarla o ampliarla, otros miembros de las sociedades humanas se van alejando de dicha tecnología y del desarrollo científico. Esta situación puede conducir a toda clase de serias desigualdades.

Banerjee y Duflo [1], quienes recibieron el premio Nobel de Economía en 2019 por sus estudios de la economía de la pobreza, exponen cinco lecciones al respecto, la primera de las cuales está vinculada directamente con el conocimiento de las personas:

> Los pobres muchas veces carecen de información fundamental y se creen cosas que no son ciertas. No están muy seguros de las ventajas de vacunar a los niños; piensan que lo que se aprende durante los primeros años de estudios no vale para nada; no saben cuánto fertilizante necesitan usar; desconocen cuál es la forma más fácil de contagiarse de VIH; no saben lo que hacen sus políticos una vez que gobiernan. (...) Incluso cuando saben que no saben, la incertidumbre resultante puede ser dañina. (Págs. 268-269)

Así, el grado de conocimiento científico y la consciencia sobre su utilización pueden estar vinculados al grado de pobreza de las personas. Esto no es una situación simple y, como tal, requiere un estudio más complejo que va más allá de los alcances de este escrito.

Por su parte Giménez, Díez-Palomar y Civil [5] consideran que en la sociedad actual el analfabetismo matemático, aunque sea más “aceptable” que el analfabetismo en la lectura y la escritura, es un factor de exclusión, puesto que esa falta de conocimiento no permite a la personas formar parte de un porcentaje privilegiado de la población. Sostienen que entonces se requiere romper con un gran mito excluyente:

Las matemáticas no están fuera del alcance de nadie. Lo que ocurre es que a veces el conocimiento no se valora en calidad de «matemáticas». Niss dijo hace años que en torno a las matemáticas había una situación paradójica que él llamó «paradoja de la relevancia»: aunque invisibles, las matemáticas existen, y las personas sabemos —y necesitamos— matemáticas. En un momento en que los avances tecnológicos están colonizando nuestras vidas día tras día y transformando nuestro «universo de actuación» (es decir, el tipo de trabajo al que podemos aspirar, el tipo de relaciones que podemos tener, nuestras tareas cotidianas y un sinfín de cosas más), las matemáticas (o más bien, el razonamiento matemático) son una puerta a la participación y a la inclusión en este mundo. Superar todos los mitos que giran en torno a las matemáticas significa también luchar por un mundo más justo, con más oportunidades para todos [5] .

Dejemos, por el momento, el comentario aventurado de que los proyectos orientados a estudiar procesos educativos para ampliarlos y mejorarlos podrían contribuir con el desarrollo de la sociedad, así como evitar la exclusión y la pobreza. Al plantearlo de esta manera, entonces resulta necesaria la enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas a los futuros ciudadanos de una sociedad para que tengan acceso a conocimientos y habilidades que les permitan un mejor desarrollo como miembros activos. Este proceso de enseñanza recae en buena medida en las instituciones escolares, aunque, como mencionan Skovsmose y Valero [6], no está exento de tropiezos.

Cuando se destaca la preocupación por la equidad y la justicia social, cobra importancia la pregunta sobre cómo las prácticas de enseñanza y aprendizaje abren o cierran oportunidades para que los estudiantes tengan acceso a los recursos de poder que están conectados con el conocimiento matemático y las competencias matemáticas [6].

Con esta observación en mente regresamos al título que habla sobre la importancia de la Didáctica de las Matemáticas (y de las Ciencias) en épocas de pandemia. Si la intención es lograr que los alumnos de cualquier nivel educativo cuenten con los recursos que les permitan tomar decisiones más apropiadas a lo largo de su vida (personal, familiar, social y laboral), entonces se requiere determinar el modo de promover esto desde la institución educativa.

Y así es como los estudios sobre la Didáctica de las Matemáticas (y de las Ciencias) adquieren una pertinencia y una mayor relevancia. Además, esto no es sólo en la concepción de hace varios siglos centrada en la enseñanza, sino en la concepción que plantea D’Amore [2] vinculada al estudio del aprendizaje de los alumnos, para ver cómo modificar la enseñanza; es decir, como una epistemología del aprendizaje matemático.

Al final de cuentas, no somos más que enanos subidos en los hombros de otros enanos.

REFERENCIAS

[1] A. V. Banerjee & E. Duflo, *Repensar la pobreza*. Barcelona, España: Penguin Random House, 2019.

[2] B. D'Amore, *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

[3] P. Estupinyà, *La ciencia podría ser nuestro sexto sentido*. 2020, Recuperado el 31 de enero de 2021, de BBVA Aprendemos Juntos: https://aprendemosjuntos.elpais.com/especial/la-ciencia-podria-ser-nuestro-sexto-sentido-pere-estupinya/

[4] P. Flores Crespo, *Nobel por una mejor educación*, 2019. Recuperado el 31 de enero de 2021, de Educación Futura: http://www.educacionfutura.org/nobel-por-una-mejor-educacion/

[5] J. Giménez Rodríguez, J. Díez-Palomar & M. Civil, "Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área", en *Educación matemática y exclusión* (págs. 9-44). Barcelona, España: Editorial Graó, 2007.

[6] O. Skovsmose & P. Valero, "Educación matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información", *En Educación matemática y exclusión* (págs. 45-62). Barcelona, España: Graó, 2007.

ALBA ESTRELLA VÁZQUEZ MONTAÑO
CECILIA HERNÁNDEZ GARCIADIEGO
LUISA RAMÍREZ GRANADOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

VA.MONT@HOTMAIL.COM

(a+b

02

DESARROLLO DE SENTIDO ESTRUCTURAL ALGEBRAICO EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC STRUCTURAL SENSE IN HIGH SCHOOL STUDENTS

RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados de una propuesta para desarrollar el sentido estructural algebraico, referido en adelante como "sentido estructural", en estudiantes de preparatoria en el manejo de diferencias de cuadrados y binomios al cuadrado. Los alumnos que presentan sentido estructural realizan actividades algebraicas de formas más eficientes y presentan menos tendencia a cometer errores; por tanto, fortalecer y promover el desarrollo de esta capacidad es una cuestión relevante en la didáctica del álgebra. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, tomando como referente teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y el sentido estructural algebraico. Las actividades fueron realizadas por 5 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para el desarrollo del sentido estructural.

Palabras clave: Sentido estructural algebraico, errores algebraicos, bachillerato.

ABSTRACT

This paper presents the results of a proposal to develop algebraic structural sense, abbreviated as structural sense, in high school students in the handling of difference of squares and square of a binomial. Students who have a structural sense perform algebraic tasks in more efficient ways and with fewer errors, therefore, strengthening and promoting the development of structural sense is a relevant issue in the didactics of algebra. The methodology was based on didactic engineering with the Theory of Didactical Situations as a theoretical reference. The activities were carried out by 5 students. The preliminary study suggests the pertinence of this content for the development of the structural sense.

Keywords: Algebraic structural sense, algebraic errors, high school.

INTRODUCCIÓN

La información y resultados mostrados en este artículo fueron obtenidos de una prueba piloto, y forman parte de una investigación más amplia que busca proponer una alternativa para generar un desarrollo de sentido estructural algebraico. Uno que sea aplicable en el aula, al concebir situaciones que favorezcan y fortalezcan el aprendizaje de los productos notables y factorización.

Se dice que un estudiante presenta sentido estructural si aborda tareas algebraicas de las formas más eficientes gracias a un manejo conceptual profundo, lo que permite una disminución de errores. Las dificultades que presentan los alumnos con el sentido estructural matemático en el álgebra han sido estudiadas desde antes que existiera el término; entre éstas, se encuentran los problemas para reconocer y generar expresiones algebraicas equivalentes y comprender su significado [13].

El sentido estructural en los alumnos es considerado importante por los profesores [12], sin embargo, son pocos los estudios centrados en su desarrollo. En la investigación "Desarrollo del sentido estructural de Katy", de Hoch y Dreyfus [9] se da seguimiento a una estudiante por una secuencia de tareas y entrevistas desarrolladas para mejorar el sentido estructural en la estudiante; aunque los resultados fueron positivos y se concluyó que existía evidencia de que el aprendizaje había tomado lugar, la investigación tiene como limitante que no es posible realizar entrevistas personalizadas en un salón de clases. En otro estudio realizado por las profesoras Ascencio y Eccius-Wellmann [1], se buscó el desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios y se comprobó que es posible fomentarlo al incluir contrastes en las actividades que realizan.

Visto que en los últimos años la enseñanza tradicional y los textos de estudio favorecen el registro de nociones algebraicas estudiadas como reglas, sin generar un aprendizaje significativo [16], queda claro que se debe seguir buscando alternativas para el desarrollo de sentido estructural en los estudiantes.

En lo que respecta a los temas de productos notables y factorización, es conveniente tener en cuenta la relación que existe entre ambos al trabajar en un aula de clases [7]. Los productos notables son multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas y cuyo resultado se puede obtener por inspección. Por otro lado, la factorización es la trasformación de una expresión en productos de factores. A cada producto notable corresponde un caso de factorización.

La investigación de Martos [15] habla sobre la importancia del conocimiento adecuado de los productos notables para utilizarlos como técnica para la resolución de distintos tipos de tareas matemáticas, además de detectar dos valores epistemológicos: el primero es que ayudan a los estudiantes a entender la factorización, y el segundo es un valor motivacional, ya que un buen manejo de productos notables da confianza al alumno y favorece su aprendizaje.

En diversos estudios [19], [2], [6], [17], se ha trabajado en la búsqueda de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la factorización y productos notables, y se ha indicado la existencia de una tendencia de enseñanza tradicional donde estos temas se trabajan de forma operacional. Entre las estrategias más utilizadas, se encuentra el uso de tecnología, adaptación de juegos y el empleo de la geometría como referencia visual.

Queda clara la importancia de la búsqueda de alternativas que contribuyan a la enseñanza de los productos notables y factorización, ya que un dominio deficiente en estos temas afecta el desempeño del estudiante en diversos tópicos matemáticos. Es así que el objetivo de este trabajo es propiciar y analizar el desarrollo del sentido estructural de los productos notables y la factorización en los estudiantes, específicamente en diferencia de cuadrados y binomios al cuadrado, los cuales se describen en la Tabla 1.

Tabla.1 Relación entre productos notables y factorización.

PRODUCTO NOTABLE		FACTORIZACIÓN	
Cuadrado de la suma o diferencia de un binomio	$(a+b)^2$ $(a-b)^2$	$a^2+2ab+b^2$ $a^2-2ab+b^2$	Trinomio cuadrado perfecto
Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades	$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2	Diferencia de cuadrados perfectos

Un binomio al cuadrado es una suma o diferencia algebraica que se multiplica por sí misma, al ser operada se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, mientras que un producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos.

Para la prueba descrita en el artículo se decidió utilizar el binomio al cuadrado porque es uno de los productos notables más importantes por su aplicación común en distintas ramas de las matemáticas. Por su parte, el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades fue seleccionada debido a que Cantoral [5] sugiere la diferencia de cuadrados como un articulador de saberes matemáticos; es decir, proponen esta expresión algebraica como mecanismo para propiciar un acercamiento coherente del saber matemático que sea atractivo para el estudiante.

Fundamentación teórica

Esta investigación tiene su fundamento en dos marcos teóricos: el Sentido Estructural Algebraico y la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau [4] los cuales se describen a continuación:

Sentido estructural

La introducción del término sentido estructural fue dada en 1999 por Linchevski y Livneh [14], quienes hacen alusión al conocimiento estructural de las expresiones y la capacidad de elegir entre las formas pertinentes de realizar una tarea.

Más adelante Hoch y Dreyfus [10] puntualizaron que las formas más eficientes de abordar una tarea implican un manejo conceptual más profundo y significativo, lo que se ve reflejado en procedimientos más cortos y menos propensos al error.

El sentido estructural es una forma de enfatizar la posesión del conocimiento, que se puede manifestar con el reconocimiento de expresiones equivalentes sin necesidad de operar [18]. Es por eso que el razonamiento estructural puede tener diferentes manifestaciones en la práctica matemática [8].

Vega-Castro [18] define sentido estructural como "una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas" (p.83). Simplificando, el sentido estructural permite que los alumnos hagan un mejor uso de las técnicas algebraicas.

En los últimos años, diversos autores han contribuido al estudio del sentido estructural y su caracterización, formulando sus propios descriptores para el sentido de estructura [18], [11].

Los descriptores del sentido estructural y la ponderación utilizados en este estudio se tomaron de lo sugerido por [1], seleccionando los primeros tres descriptores que ponderan el sentido estructural, según la complejidad de las estructuras y subestructuras, por ser adecuados a esta investigación.

A continuación, se enlistan y explican los descriptores acompañados de la ponderación asignada, expresada en puntos:

• SE1 Identifica una estructura familiar.
SE1a en su forma más simple (1 punto).

• SE2 Trata con un término compuesto como una entidad única y reconoce una estructura familiar en una forma más compleja.
SE2a donde el término compuesto contiene un producto, pero no una suma o resta (2 puntos).
SE2b donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (3 puntos).
• SE3 Elige manipulaciones adecuadas para hacer mejor uso de una estructura.
SE3a en su forma más simple (4 puntos).
SE3b donde el término compuesto contiene un producto, pero no una suma o resta (5 puntos).
SE3c donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (6 puntos).

Teoría de situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas tuvo sus orígenes en Francia y fue establecida por Guy Brousseau [4] aproximadamente a fines de la década de mil novecientos sesenta. Esta teoría propone un modelo para abordar la enseñanza de las matemáticas centrándose en los procesos de producción de los conocimientos.

En la actualidad, la Teoría de Situaciones Didácticas se considera un instrumento científico que integra los aportes de distintas disciplinas, lo cual propicia una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento en la enseñanza de las matemáticas [4].

La idea en la que se basa la Teoría de Situaciones Didácticas consiste en que el estudiante se encuentre en una situación que evolucione hacia la construcción del saber dependiendo de la interacción con el medio, donde intervienen tres elementos fundamentales: alumno, profesor y saber.

Estos tres elementos componen el sistema didáctico y dejan de lado modelos de enseñanza donde el profesor se encuentra en una posición privilegiada de enseñanza con respecto al alumno; ya que al final del proceso, el estudiante debe ser capaz de mantener una relación adecuada con el saber, prescindiendo del profesor.

En la Fig. 1 se muestra el esquema del triángulo del sistema didáctico entre profesor, alumno y saber, propuesto por Brousseau [4], contemplando la intervención del profesor al crear otro "medio" donde el alumno actúa de forma autónoma.

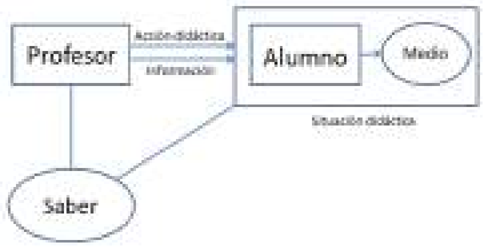


Figura 1. Triángulo del sistema didáctico.

Según Brousseau [4], una situación es una interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado.

Así, podemos decir que una situación didáctica es aquella que se desarrolla habitualmente dentro del contexto escolar, donde se produce la interacción entre el profesor y uno o varios estudiantes, en torno a un saber que se pretende que el alumno adquiera.

Entonces, se trata de situaciones que se diseñan y desarrollan con la clara intención de que el estudiante construya y adquiera, al mismo tiempo, un determinado conocimiento de manera significativa a través de la aparición del concepto como solución óptima del problema al que se enfrenta.

Para Brousseau, no todas las situaciones didácticas son iguales y por ello establece la siguiente clasificación:

• Situación a-didáctica: Designa a una situación que no puede ser denominada de forma conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos, se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema de forma autónoma.
• Situación de acción: El alumno actúa sobre el medio.
• Situaciones de formulación: Ocurre cuando el alumno se comunica con uno o varios interlocutores para intercambiar información sobre lo que ha descubierto o encontrado.
• Situaciones de validación: En esta situación el alumno debe someter a juicio a su interlocutor o a la formulación y los resultados obtenidos.
• Situación de institucionalización: Una vez finalizada la situación a-didáctica, cuando el estudiante aplica una estrategia óptima que le permita encontrar la solución al problema, el profesor debe continuar con el proceso de institucionalización, explicando las relaciones entre el conocimiento construido por el propio estudiante.

Brousseau [3] establece unas pautas para diseñar situaciones didácticas:
1. Plantear un problema cuya solución requiera al alumno ese único conocimiento.
2. Propiciar la aparición de variables de esta situación cuyo cambio provoque modificaciones cualitativas de las estrategias empleadas por los alumnos para resolver el problema.
3. Asegurarse que la situación diseñada abarca todos los problemas conocidos en los que interviene el conocimiento que se desea generar en el alumno.

En la Teoría de Situaciones Didácticas, el diseño de las situaciones para enseñar conceptos a estudiantes recibe el nombre de ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica permite que los alumnos construyan un determinado concepto matemático de acuerdo a una serie de pautas didácticas.

El término ingeniería didáctica se usa con una doble función: como metodología de investigación, y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Este término designa un conjunto de secuencias de clase para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático que evoluciona con las interacciones entre el profesor y los alumnos. Es por eso que la ingeniería didáctica es el producto resultante de un análisis a priori y un proceso de la aplicación de un producto o secuencia didáctica acorde a las condiciones de una clase.

Metodología

Para el diseño y selección de la estructura de las actividades de enseñanza-aprendizaje que se aplicaron a los alumnos se utilizó la ingeniería didáctica como metodología en el aula. Ésta se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas"; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, por el registro de los estudios de caso y la validación basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Se siguieron las cuatro fases de la ingeniería didáctica para la estructuración de actividades que se describen a continuación:

Análisis preliminares

Se realizó un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo del tema a tratar. Tanto los antecedentes de sentido estructural como la importancia y dificultades de los productos notables y factorización ya han sido descritos en la introducción.

Para la formulación de actividades se tuvo en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas, además de considerar que la población a la que fue dirigida la enseñanza eran alumnos de preparatoria. Por ello fueron consideradas las competencias matemáticas que, según el programa de la Dirección General del Bachillerato (DGB) vigente, deben tener los alumnos de preparatoria: interpretar modelos matemáticos algebraicos, así como formular y resolver problemas aplicando diferentes enfoques. En el programa de la DGB, también se especifica como aprendizaje esperado que el alumno sea capaz de proponer un proceso de solución óptimo e identificar errores posibles a cometer; dicho de otra manera, se espera que el alumno presente un sentido estructural. A pesar de encontrar estos aprendizajes esperados en el programa de estudios, como ya se ha mencionado, diversas investigaciones apuntan a que el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas tiende a ser puramente operacional.

Análisis *a priori*

En esta fase se realizó el diseño de la secuencia, y se decidió cómo actuar sobre las variables en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En líneas generales, la experiencia consistió en tres sesiones, donde se buscó que los alumnos reconocieran estructuras familiares, para subsecuentemente ser capaces de reconocer términos como una entidad singular y seleccionar manipulaciones apropiadas para hacer uso de esa estructura.

En la primera sesión se aplicó un pre-test, con el fin de identificar el nivel de sentido estructural que presentaban los estudiantes. Esta primera actividad se dividió en dos secciones, en la primera parte se solicitó simplificar una expresión algebraica compuesta por una diferencia de cuadrados y binomios al cuadrado, ver Ec. (1). En la segunda parte se pedía encontrar un método de solución alternativo a la misma expresión. La forma alternativa de solución se solicitó considerando la posibilidad de que los estudiantes mostraran mayor atención a la estructura algebraica, ya que en la primera estrategia de solución se suelen utilizar estrategias estándar [12].

$$(x-3)(x-3)-(x+3)(x+3) \qquad (1)$$

En la segunda sesión se diseñó una secuencia con ayuda de hojas de trabajo para generar los distintos tipos de situaciones según Brousseau y se consideraron las características de los descriptores de sentido estructural propuestas por Ascencio y Eccius-Wellmann [1]. Como el objetivo central de esta investigación era que el alumno desarrollara un sentido estructural, la secuencia se planeó con la intención de que el alumno alcanzara a reconocer una misma estructura en distintas expresiones y tratara un término compuesto como entidad singular.

Se empezó con una situación de acción pidiendo a los alumnos que trabajaran de forma individual, identificando en un par de listas de expresiones algebraicas, aquellas que tuvieran características en común y describieran las particularidades observadas para identificarlas como un mismo tipo de expresión algebraica. En la siguiente fase, la situación de formulación, se pidió que los alumnos se reunieran y discutieran sobre sus descubrimientos, dando paso a una elaboración en conjunto de las listas y descripciones de expresiones algebraicas finales en la fase de validación. Se pidió que dieran sus conclusiones finales y, para terminar, se dio la fase de institucionalización a partir de las conclusiones obtenidas por los alumnos. En la Tabla 2 se muestra las listas de expresiones algebraicas utilizadas:

Tabla 2. Relación entre productos notables y factorización.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS SELECCIONADAS PARA IDENTIFICAR UNA DIRERENCIA DE CUADRADOS	EXPRESIONES ALGEBRAICAS SELECCIONADAS PARA IDENTFICAR UN BINOMIO AL CUADRADO
x^2-16	$(x+2)^2$
w^2-100	$(x+2)(x+2)$
y^2-25	$(x+a)(x-a)$
x^2+16	$(x-5)^2$
$(x-4)(x+4)$	x^2+4x+4
a^2-9	$(x-4)(x-4)$
$(y+3)(y-1)$	x^2-y^2
$(a+5)(a-5)$	$x^2-10x+25$
$49-y^2$	$x^2-2x-30$
$(x+2)(x+2)$	$(x+a)^2$
$(a+2)^2-b^2$	$x^2+2ax+a^2$
$x-9$	
$(x-3)^2-(x+3)^2$	
x^2-30	
$(n+4)^2-(m-3)^2$	

Las listas propuestas para la actividad 2 fueron elaboradas con expresiones que permitieran a los alumnos identificar la estructura de un binomio al cuadrado y una diferencia de cuadrados.
Por último, en la tercera sesión se aplicó un *test* final que emulaba la primera prueba.

En esta ocasión se pidió simplificar una expresión algebraica distinta, Ec. (2), solicitando nuevamente una resolución alternativa.

$$(a+2)(a+2) - (a-2)(a-2) \qquad (2)$$

Las expresiones algebraicas seleccionadas en el test inicial y final fueron seleccionadas por ser sencillas de operar y útiles para medir diferentes niveles de sentido estructural.

Metodología

En esta fase se dio el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Se aplicó la ingeniería en los estudiantes durante las tres sesiones con la ayuda de hojas de trabajo y presentaciones electrónicas, los alumnos mostraron una buena disposición de trabajo y cooperación en las actividades.

Análisis *a posteriori*

Los análisis a posteriori se basaron en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación. A continuación, se presentan las observaciones realizadas de las actividades de enseñanza y las producciones de los estudiantes.

Los resultados obtenidos en la primera sesión fueron los esperados, se contemplaba como posible resultado que los estudiantes operaran la expresión sin mostrar sentido estructural.

Cabe resaltar que, aunque tres de los cinco alumnos mostraran indicios de un sentido estructural en el reconocimiento de expresiones, ninguno logró una manipulación apropiada.

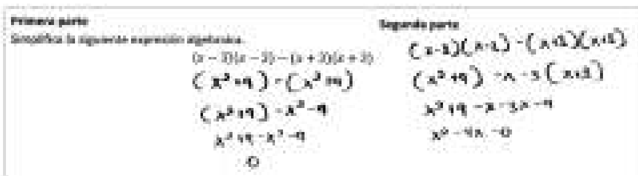


Figura 2. Ejemplo de solución de la actividad 1.

Los resultados en la primera parte de la actividad, a pesar de no llegar a una respuesta adecuada, se expresaron lógicos; sin embargo, en la segunda parte las operaciones mostraron menor sentido matemático, manifestando incluso operaciones carentes de noción estructural.

Durante la segunda actividad los participantes empezaron buscando de forma individual características compartidas entre las expresiones algebraicas dadas en las hojas de trabajo para relacionarlas en una sola categoría. Las características encontradas por los alumnos en las expresiones donde se pretendía que identificaran una diferencia de cuadrados incluyen:

- “Me basé en que las incógnitas están elevadas al cuadrado y se suma o resta algún número”.
- “Que son restas entre números al cuadrado”.
- “Son operaciones de multiplicaciones”.
- “Una de sus variantes está al cuadrado”.

Por otra parte, las características encontradas por los alumnos en la lista pensada para la identificación de binomios al cuadrado incluyen:

- “Suma o resta de unidades al cuadrado”.
- “En algunas expresiones se les da el mismo valor a las incógnitas (positivo o negativo), además están elevados al cuadrado”.
- “Que las variantes están al cuadrado”.
- “Son operaciones de trinomio cuadrado”.

Se puede identificar que desde la fase individual los alumnos reflexoinaron en la estructura de la expresión algebraica.

En la reflexión grupal se solicitó que compartieran su selección individual y sus opiniones de clasificación, después se les pidió que realizaran una lista final con consenso grupal. Así los participantes anotaron las ideas o acuerdos a los que iban llegando; se pudieron observar opiniones que se complementaban entre sí y participantes que trataban de convencer a los demás de que sus conclusiones eran las correctas. Sus anotaciones se muestran en la Fig. 3

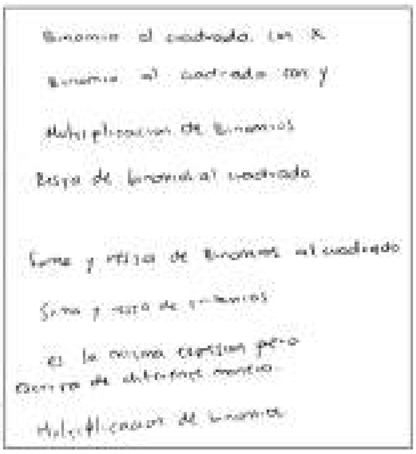


Figura 3. Anotaciones del intercambio de información grupal.

Como primer paso de la institucionalización, se solicitó a los alumnos que mencionaran las expresiones agrupadas, las características en común encontradas y se preguntó por el nombre de los tipos de expresión, incluso exhortando a conjeturar alguno. Se prosiguió con una presentación electrónica, donde se daba la información de los temas tratados en la prueba a partir de las conjeturas a las que llegaron los estudiantes para complementar sus descubrimientos.

Para la tercera actividad, los estudiantes mostraron una mayor labor matemática en las hojas de trabajo, reflejando una mejora en las respuestas de la segunda parte de la actividad en comparación con la aplicación de la actividad 1.

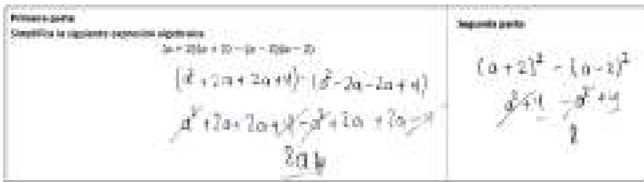


Figura 4. Ejemplo de solución de la actividad 3.

Al finalizar la intervención se preguntó a los estudiantes acerca de su experiencia en la secuencia de actividades, buscando áreas de oportunidad para futuras pruebas. Entre las opiniones resalta la falta de habilidad de manipulación adecuada de la expresión algebraica propuesta; por ejemplo, se encontraron comentarios como: “al principio de este test desconocía la manera en que se debía resolver las actividades” y “no comprendía mucho al principio”. En segunda instancia, mencionaron que no tuvieron dudas respecto al procedimiento a seguir una vez explicadas las instrucciones y, por último, hubo alumnos que señalaron haber obtenido un aumento de confianza y reconocieron su falta de práctica con estructuras algebraicas de este tipo, con comentarios como “me siento capaz de seguir mejorando entre más practique, ahora puedo comprender de qué manera puedo resolver un problema”, y “al final me di cuenta que eran problemas matemáticos que podía resolver fácilmente”.

Resultados y discusión

El trabajo de los alumnos en la primera sesión apunta a confusión entre expresión y ecuación, dificultades para reconocer una misma expresión en distintas estructuras y reconocer un término compuesto como entidad. La Tabla 3 muestra los descriptores de estructura obtenidos por los participantes en la primera actividad, según lo propuesto por Ascencio y Eccius-Wellmann [1].

Tabla 3. Descriptores del sentido estructural obtenidos en la actividad 1.

ESTUDIANTE	DESCRIPTOR PARA EL SENTIDO DE ESTRUCTURA
1	SE1a
2	-
3	-
4	SE1a
5	SE1a

En la segunda sesión se pudo observar cómo los estudiantes iban desarrollando un sentido estructural desde la fase individual, por el trabajo de reflexión y búsqueda de características en común, que les permitió mejorar su reconocimiento de estructuras. Los registros de las expresiones seleccionadas de forma individual indican que los participantes mostraron características distintas de sentido estructural, algunos no tenían problema en identificar un término compuesto como entidad, pero se les dificultaba reconocer diferentes estructuras para una sola expresión, mientras que otros participantes presentaban la situación contraria.

Durante la intervención grupal los participantes sugirieron las expresiones algebraicas correctas como alternativas para la selección final, sin embargo, no todas llegaron a las listas finales.

La lista final correspondiente a la diferencia de cuadrados careció de una identificación de términos compuestos como una sola identidad; ya que aunque se seleccionó la Ec. (3), las expresiones algebraicas correspondientes a las Ecs. (4) y (5) no fueron incluidas a pesar de que dos de los participantes sí las habían considerado.

$$(a+2)^2 - b^2 \tag{3}$$

$$(x-3)^2 - (x+3)^2 \tag{4}$$

$$(n+4)^2 - (m-3)^2 \tag{5}$$

Probablemente los estudiantes presentaron un conflicto al seleccionar expresiones con dos términos compuestos; en su lugar, las expresiones seleccionadas fueron las Ecs. (6) y (7), lo que sugiere que los participantes contaban con noción de qué tipo de estructura debían buscar.

$$x^2 - 30 \tag{6}$$

$$x^2 + 16 \tag{7}$$

Para la identificación de la segunda lista, los alumnos operaron las expresiones, así se percataron que varios incisos eran la misma expresión en una estructura distinta, permitiéndoles identificar las características que debían buscar para la clasificación de binomios al cuadrado.

Al término de la actividad 2 se vio reflejada una mejoría en el reconocimiento de estructuras en distintas formas, y se alcanzó un mejor desempeño en ese nivel de caracterización estructural. El tratar un término compuesto como una entidad singular casi se dejó de lado al momento del consenso grupal, esto podría deberse a las concepciones de los estudiantes por el tipo de enseñanza que se les ha brindado. Otra dificultad que se encontró fue la de verbalizar sus conjeturas: a pesar de encontrar un patrón entre las estructuras, expresarlo con palabras les supuso una dificultad.

La Tabla 4 muestra los descriptores de estructura obtenidos por los participantes en la tercera actividad, según lo propuesto en [1].

Tabla 4. Descriptores del sentido estructural obtenidos en la actividad 3.

ESTUDIANTE	DESCRIPTOR PARA EL SENTIDO DE ESTRUCTURA
1	SE1a, SE2a, SE3b
2	SE1a
3	SE1a, SE2a
4	SE1a, SE2a, SE3a
5	SE1a, SE2a, SE3b

Los resultados de la actividad 3 mostraron un incremento en el manejo operacional y estructural de las expresiones en comparación con los resultados de la prueba inicial. En la Tabla 5 se puede apreciar la diferencia entre los resultados de la actividad 1 y 3 de cada estudiante.

CONCLUSIONES

Con respecto a la caracterización de sentido estructural y ponderación propuesta por Ascencio y Eccius-Wellmann [1], la secuencia cumplió satisfactoriamente con el desarrollo del primer descriptor de estructura, pues todos los alumnos mostraron tener el descriptor SE1a al término de la intervención. En lo que respecta al segundo y al tercer descriptor, se observó mejoría, pues se presentaron mejores usos de la estructura y mejor ponderación en la actividad final, lo que demuestra la pertinencia de la ingeniería didáctica como metodología para una secuencia que busque desarrollar el sentido estructural algebraico.

La intervención da indicios de una mejoría en el sentido estructural presentado por los estudiantes, especialmente en el reconocimiento de estructuras familiares en distintas formas. En lo que se refiere a tratar un término compuesto como una entidad única, se pudo observar una mejoría significativa en el reconocimiento de un término compuesto por un producto (SE2a), y aunque la expectativa inicial era que los estudiantes llegaran al descriptor SE2b, presentaron dificultades para manejar un término compuesto que contuviera una suma o resta, probablemente por sus concepciones previas y la falta de familiaridad con el tipo de actividad propuesta. Respecto al tercer descriptor, se obtuvo mejoría en tres estudiantes, uno de los cuales alcanzó el nivel SE3a, que es la manipulación apropiada de una estructura en su forma más simple. Los otros dos llegaron al nivel SE3b, que hace referencia a la manipulación apropiada de estructuras compuestas de productos.

Aunque el sentido estructural como tal se ha estudiado desde fines del siglo pasado, e incluso investigaciones que hacían alusión a él ya se habían realizado con mayor anterioridad, en el contexto actual aún queda mucho camino por recorrer en lo que respecta a su desarrollo en los alumnos, cuestión que debería tomar mayor importancia a nivel práctico escolar.

Con los resultados obtenidos, se evidencia que es posible y necesaria la creación de una secuencia que pueda aplicarse en un aula de clases para generar el desarrollo de sentido estructural en alumnos de forma grupal.

Como se mencionó en un inicio, este artículo abarca los resultados de una prueba piloto, se continuará la investigación teniendo en claro la importancia de trabajar con una muestra más grande para un posterior análisis.

REFERENCIAS

[1] R. Ascencio Gonzalez & C. Eccius-Wellmann, "Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales", *Educación Matemática*, 31(2), 161–194, 2019. https://doi.org/10.24844/em3102.07

[2] L. Avalos, "Adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior". Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México, México, 2014.

[3] G. Brousseau, "Fundamentos y métodos de la Didáctica de la matemática", Univerisdad Nacional de Córdoba, Serie "B", *Trabajos de Enseñanza*, N° 5/2015. 1986

[4] G. Brousseau, *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, 1st ed.; Buenos Aires, Argentina: D. Fregona, Ed., Libros del Zorzal, 2007.

[5] R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezema, & A. Romo, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 2nd ed.., Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos, 2008.

[6] V. Cisternas, "Una propuesta de innovación para el tratamiento de productos notables según la teoría de situaciones didácticas", Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Santiago de Chile, Chile, 2017.

[7] Cruz-Mendoza, E. "Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática". Instituto Politénico Nacional, Ciudad de México, México, 2008.

[8] G. Harel, & O. Soto, "Structural Reasoning". *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 225–242, 2016. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0041-2

[9] M. Hoch, & T. Drefus, "Developing Katy's Algebraic Structure Sense". *CERME*, 6, 529–538, 2010.

[10] M. Hoch & T. Dreyfus, "Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets". *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 49–56, 2004.

[11] M. Hoch & T. Dreyfus, "Recognising an algebraic structure". *CERME*, 5, 436–445, 2007.

[12] A. Jupri & R. Sispiyati, "Expert Strategies in Solving Algebraic Structure Sense Problems:

The Case of Quadratic Equations". *Journal of Physics: Conference Series*, 812, 2017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/755/1/011001

[13] C. Kieran, "Learning and teaching algebra at the middle school through college levels". *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 707-762, 2007.

[14] L. Linchevski & D. Livneh, "Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts". *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173–196, 1999. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

[15] E. M. Martos Michaca, "Valores prácticos y epistémologicos de los productos notables en profesores de matemáticas". Tesis de maestría, Instituto Politéctico Nacional, Ciudad de México, México, 2008.

[16] T. Méndez & L. Cruz, "Dificultades en la práctica de productos notables y factorización". *Revista Del Instituto de Matemática y Física*, 15, 59–69, 2008.

[17] D. Serna, "Implementación de una estrategia didáctica mediada por las TIC para el fortalecimiento del concepto de productos notables en estudiantes del grado octavo de la institución educativa Gabriela Gómez Carvajal". Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Colombia, 2017

[18] D. Vega-Castro, Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España, 2013.

[19] G. Wagner Osorio, A. Marina Vásquez Giraldo, E. A. Hoyos Salcedo & H. Gutiérrez Zuluaga, "El Álgebra Geométrica como mediadora en la Enseñanza de la Factorizacion y los Productos Notables". *Revista de Investigaciones - Universidad Del Quindio*, 26(1), 137–142, 2014.

SANDRA G. HERNÁNDEZ-LEYVA,
LUISA RAMÍREZ-GRANADOS,
VÍCTOR A. AGUILAR-ARTEAGA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

SANDRA G. HERNÁNDEZ-LEYVA. CORREO ELECTRÓNICO: SANDRAHLEYVA@GMAIL.COM
LUISA RAMÍREZ-GRANADOS. CORREO ELECTRÓNICO: LUISA.RAMIREZ.GRANADOS@GMAIL.COM
VÍCTOR A. AGUILAR-ARTEAGA. CORREO ELECTRÓNICO: VICTTOR.AGUILAR@GMAIL.COM

03

ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS DE RAZÓN DE CAMBIO DE LA DERIVADA EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

PRAXEOLOGICAL ANALYSIS OF DERIVATIVE AS RATE OF CHANGE IN CALCULUS TEXTBOOKS

RESUMEN

Las dificultades de aprendizaje del cálculo diferencial se agravan cuando los libros de texto usados como material de apoyo en la asignatura carecen de sustento teórico; se enuncian las definiciones o teoremas, pero no se demuestran, lo que genera un conflicto entre las ideas intuitivas de los estudiantes y las definiciones formales de los conceptos matemáticos. El objetivo del presente artículo es mostrar un análisis comparativo de tres libros de texto que actualmente forman parte de los programas de enseñanza media superior, respecto a la manera en la que se aborda la razón de cambio de la derivada. Se considera como sustento teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard [1], cuyo principio fundamental radica en que toda actividad humana puede describirse como un modelo único llamado praxeología, basándose en el "saber hacer" y el "saber", analizando el tipo de problemas y técnicas que se construyen para resolverlos, así como las justificaciones utilizadas.

Palabras clave: Praxeologías, Cálculo, libros de texto, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

ABSTRACT

Most difficulties of calculus learning arise when textbooks used as reference in the course lack of theoretical support, insomuch as definitions or theorems are enunciated without being demonstrated, which generates a conflict between the students' intuitive ideas and the formal definitions of mathematical concepts. The objective of this paper is to show a comparative analysis of three textbooks, which are consulted at high school programs, regarding the way derivative rate of change is approached. We consider as theoretical support the Anthropological Theory of Didactics by Yves Chevallard [1], whose fundamental principle is that every human activity could be described as a unique model, called praxeology, based on "know-how" and "knowledge", analyzing the type of problems and techniques that are used to solve them as well as the used justifications.

Keywords: Praxeologies, Calculus, textbooks, Anthropological Theory of Didactics.

INTRODUCCIÓN

Históricamente el concepto de la derivada ha estado ligado al estudio de problemas de variación, lo cual implica cuantificarla en un intervalo y en un instante, establecer diferencias en intervalos y conjeturar sobre las variaciones. Como menciona Ramírez [2]:

"Desde los griegos, se plantearon cuatro problemas fundamentales que al ser resueltos en el siglo XVI – XVII, dieron vida a la función derivada, fueron ellos: El de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos."

Por otro lado, Boyer [3] menciona: "La función derivada como objeto del cálculo infinitesimal logra su reconocimiento social, científico y matemático en el siglo XX, cristalizando el trabajo de muchas personas durante 20 siglos". Actualmente, estos métodos y procedimientos están presentes en los programas de estudio a nivel medio superior, donde se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la apropiación y manipulación del concepto de la derivada, tal como lo muestran diversas investigaciones realizadas en didáctica de la matemática [4], [5], [6], las cuales aportan diferentes formas de mirar el desarrollo de la comprensión de la razón de cambio de la derivada por parte de los estudiantes.

Caballero y Cantoral [7] consideran importante entender qué es, en qué consiste y cómo se desarrolla el pensamiento variacional, ya que éste se caracteriza por estudiar fenómenos propios de la matemática y de las ciencias naturales, sociales y humanas que involucren cambios que sea necesario cuantificar y analizar para predecir estados futuros. Esta situación ubica los conocimientos matemáticos propios del cálculo más allá de la sola manipulación algebraica.

Estas investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, ponen de manifiesto las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para comprender de la noción de razón de cambio. Dificultades que se hacen más notorias cuando los libros de texto abordan la actividad matemática a través de tareas que carecen de sustento tecnológico y teórico; es decir, no incluyen descripciones y explicaciones que permitan entender la técnica utilizada y tienden a centrarse en los aspectos algorítmicos y algebraicos, sin que esto signifique que los estudiantes han alcanzado una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento matemáticos.

Dichas tareas, técnicas, tecnologías y teorías que encontramos en los libros de texto sitúan a la actividad matemática en un conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales que puede describirse con un modelo único llamado "praxeología". Esta noción constituye una herramienta fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las instituciones.

El análisis comparativo de los libros de texto en cuanto a cómo abordan el tema de razón de cambio de la derivada pretende darle herramientas al docente que le permitan elegir el libro de texto más adecuado según el enfoque que cada institución quiera darle a la enseñanza-aprendizaje.

El proceso de análisis del contenido de los libros de texto de la razón de cambio de la derivada está escrito de la siguiente manera: en la siguiente sección se muestra evidencia de las definiciones y ejemplos de cada uno de los libros mencionados y se hace el análisis con la Teoría Antropológica de lo Didáctico, por último, se establecen algunas conclusiones.

METODOLOGÍA

En este trabajo se revisaron y analizaron los libros de texto *Cálculo Diferencial e Integral* de William A. Granville [10], Cálculo de Schaum (5ª edición) [11] y *Matemáticas 1 Cálculo Diferencial* de Dennis Zill [12], respecto a la manera en la que se aborda el tema de razón de cambio de la derivada.

El enfoque metodológico utilizado en el análisis comparativo de los libros de texto es cualitativo de tipo documental, ya que se realizó una revisión e interpretación de la manera en la que se aborda la razón de cambio de la derivada bajo el marco teórico de la TAD.

Según Morales [8], la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) admite que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se denomina con la palabra de praxeología" (*praxis* + *logos*), en la cual se distinguen dos niveles [9]:

El nivel de la *praxis* o del "saber hacer", que abarca los tipos de problemas o tareas que se estudian, y las técnicas que se construyen para resolverlos.

Dado un tipo de tarea, se requiere una manera de realizarlas, a la que se conoce como técnica (τ); por lo tanto, una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene una técnica τ, la cual no necesariamente es algorítmica y la elección de ésta depende en ocasiones de las técnicas institucionalmente reconocidas [1].

El segundo nivel, del logos o del "saber", incluye las descripciones y explicaciones que permiten entender las técnicas que se utilizan, las cuales reciben el nombre de tecnología; dentro del saber existe un segundo subnivel de descripción y explicación que se denomina teoría.

Por lo tanto, alrededor de un tipo de tareas T, se encuentra una tripleta formada por (al menos) una técnica τ, una tecnología θ y una teoría Θ; dicho conjunto [T, τ, θ, Θ] constituye una praxeología formada por un bloque práctico-técnico y por un bloque tecnológico-teórico [1].

El primer texto considerado, Granville [10], aborda el tema de la derivada a partir del análisis del cambio del valor de una función al modificarse la variable independiente. La medida de esta variación, llamada razón del incremento de la función $y = f(x)$, se denota por Δy; el incremento de la variable independiente x, está dado por Δx. Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada en $x = x_0$, utilizando para ello la siguiente simbología:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x) \tag{1}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Una vez definidas las Ecs. (1) y (2), el texto establece cuatro pasos a seguir como procedimiento para derivar una función:

Paso 1: Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, para calcular el nuevo valor de la función $y + \Delta y$
Paso 2: Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y y se obtiene Δy (incremento de la función)
Paso 3: Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable dependiente)
Paso 4: Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable dependiente) tiende a cero.

El límite así hallado es la derivada buscada. Después se realiza una interpretación geométrica de la derivada, que en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.Ec. (3)

$$\frac{dy}{dx}: \text{pendiente de la recta tangente en el punto } P(x, y) \tag{3}$$

Si bien es cierto que el estudiante puede familiarizarse con este método, también lo es que el aprendizaje de la derivada se convierte en una mecanización, generando con esto una comprensión parcial del concepto de derivada.

Posteriormente, introduce la derivada como rapidez de variación, llamada también razón de cambio, retomando la razón de los incrementos Δx, Δy. Además define la rapidez media de variación de y con respecto a x como la pendiente de la recta tangente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y la rapidez instantánea de la variación de y con respecto a x para un valor definido en x como $\frac{dy}{dx}$.

Cuando la variable independiente es el tiempo, a la rapidez de variación con respecto a esa variable se le llama velocidad media, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, donde s representa la distancia y t el tiempo. Asimismo, se define la velocidad instantánea, Ec. (4), como el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$; es decir, la velocidad en un instante cualquiera es la derivada del espacio con respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4}$$

En muchos de los problemas de aplicación existen variables que son funciones del tiempo, por lo que el libro de texto establece una guía de cinco pasos para la resolución de este tipo de problemas. Si las condiciones del problema lo permiten, se pueden establecer relaciones entre las variables, y hallar mediante la derivación una relación entre la rapidez de cambio de las variables.

Los cinco pasos para la resolución de problemas que establece son:

Paso 1: Construir una figura que sea una interpretación del enunciado del problema, y representar por medio de variables necesarias las cantidades que cambian con el tiempo.
Paso 2: Obtener una relación entre las variables implicadas que se verifique en un instante cualquiera.
Paso 3: Derivar con respecto al tiempo.
Paso 4: Hacer una lista de las cantidades dadas y de las buscadas.
Paso 5: Sustituir en el resultado de la derivación (paso 3) las cantidades dadas, y resolver con respecto a las que se buscan.

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de $x^3 - 2x + 7$.

Resolución. Hagamos $y = x^3 - 2x + 7$.

Primer paso. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7$
$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7.$

Segundo paso.
$$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7 \\ y = & x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2x \qquad\quad + 7 \\ \hline \Delta y = & \quad 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \qquad - 2 \cdot \Delta x \end{array}$$

Tercer paso. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2.$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (*A*) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2.$$

O bien,
$$y' = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 7) = 3x^2 - 2.$$

Figura 1: Praxeología 1. Derivada de una función (Granville, 2009, página 31).

La primera **tarea** planteada (Fig. 1), en el libro de texto Granville [10], se centra en la parte algorítmica y algebraica, y consiste en calcular la derivada de una función cúbica. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cuatro pasos que define previamente el libro. La **tecnología** se sustenta en la definición de derivada de una función como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero. Por último, los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la razón de cambio; así como los que definen a la derivada de una función en el marco del análisis matemático.

1. Un hombre camina $7\frac{1}{2}$ Km por hora hacia la base de una torre que tiene 18 m de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia de la base es 24 m?

Solución. Aplicando la regla, tendremos:

Primer paso. Construyamos la figura 33. Sea x la distancia entre el hombre y la base de la torre, y y su distancia de la cima, en un instante cualquiera.

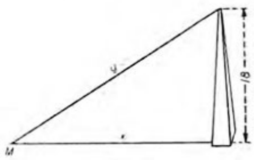


Fig. 33

Segundo paso. En el triángulo rectángulo de la figura se verifica:

$$y^2 = x^2 + 324.$$

Tercer paso. Derivando, obtenemos

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}, \text{ o sea,}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Esto significa que en un instante cualquiera se verifica la igualdad:

rapidez de variación de $y = \left(\frac{x}{y}\right)$ *veces* (*rapidez de variación de* x).

Cuarto paso. $x = 24$ $\qquad \frac{dx}{dt} = -7\frac{1}{2}$ Km por hora
$= -7\,500$ m por hora.

$y = \sqrt{x^2 + 324} = 30.$ $\qquad \frac{dy}{dt} = ?$

Quinto paso. Sustituyendo en (1),

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{24}{30} \times 7\,500 \text{ m por hora}$$
$$= -6 \text{ Km por hora.}$$

Figura 2: Praxeología 2. Rapidez de variación (Granville, 2009, páginas 82 y 83).

La segunda tarea planteada (Fig. 2) en el libro de texto Granville [10] consiste en interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana, el cual implica calcular la razón de cambio de una variable respecto a otra. La técnica utilizada para resolverla es el método de los cinco pasos para la resolución de problemas que sugiere el libro. La tecnología se sustenta en las reglas para derivar funciones algebraicas, y los elementos teóricos que sustentan la tecnología son aquellos de la derivación de funciones algebraicas.

El segundo libro de texto considerado, Schaum (5ª edición) [11], aborda el tema de derivada definiendo la notación delta, para lo cual considera un número cualquiera x_0 en el dominio de la función f. Define Δx como un pequeño cambio de x a x_0, y Δy como el cambio correspondiente en el valor de $y = f(x)$, obteniendo de esta manera la razón de cambio promedio de la función f en el intervalo que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, Ec. (5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{5}$$

Y define la tasa de cambio instantánea de f en x_0 como el límite de la tasa promedio de cambio entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ cuando Δx se aproxima a cero, siempre que el límite exista. A éste le llama derivada de f en x_0, denotada como Ec. 6:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6}$$

El libro introduce el movimiento rectilíneo de un objeto cuya coordenada en cualquier instante t está dada por la función posición $s = f(t)$, y define: Velocidad media, Ec. (7)

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{7}$$

Velocidad instantánea, Ec. (8)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = f'(t) \tag{8}$$

Si una cantidad y es una función del tiempo t, la razón de cambio de y respecto al tiempo está dada por $\frac{dy}{dt}$. Cuando dos o más cantidades, todas funciones del tiempo t, están relacionadas por una ecuación, la relación de sus razones de cambio puede hallarse derivando ambos lados de la ecuación.

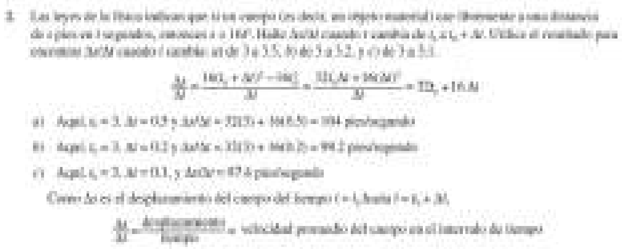


Figura 3. Praxeología 1. Derivada de una función (Schaum, 5ª edición, página 73).

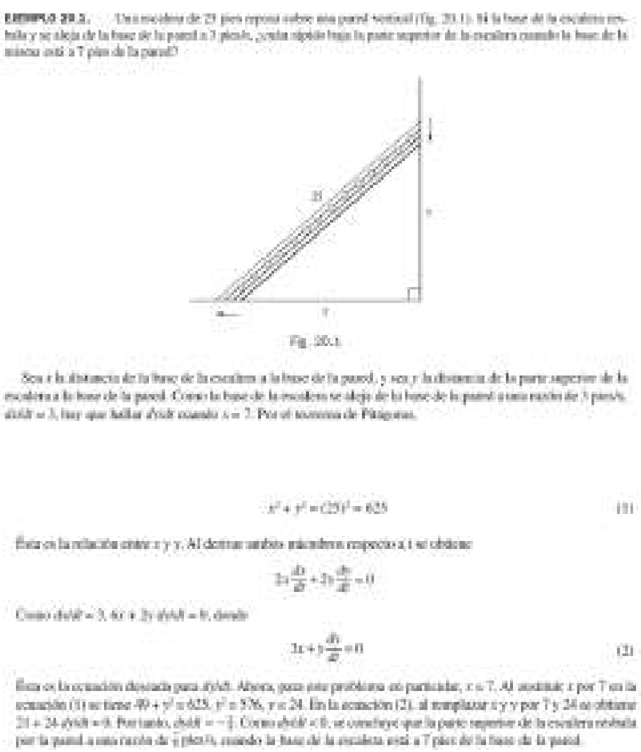


Figura 4. Praxeología 2. Rapidez de cambio (Schaum, 5ª edición, página 166).modelos ajustados.

La primera **tarea** planteada, (Fig. 3) en el libro de texto Schaum (5ª edición) se centra en la parte algorítmica y algebraica y consiste en calcular la derivada de una función dada en términos de la distancia y tiempo de un cuerpo que cae libremente. La **técnica** utilizada para resolverla es a través de la razón de cambio promedio de la función definida, y a partir del resultado obtenido evalúa diferentes valores de t cuando cambia de t_0 a $t_0 + \Delta t$. En cuanto a la **tecnología y teoría**, se considera que carece de sustento debido a que únicamente se enuncian las definiciones y teoremas sin que éstos sean demostrados, lo que deviene en un procedimiento meramente algebraico, sin que el estudiante logre alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada.

La segunda **tarea** planteada (Fig. 4) en el libro de texto Schaum (5ª edición) consiste en interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana que implica calcular la rapidez de cambio de una variable con respecto a otra. La técnica utilizada para resolverla es realizar primero un dibujo que permita interpretar el enunciado del problema, representar con variables las cantidades dadas, establecer la relación entre ellas a través de una expresión algebraica y finalmente derivar la expresión para llegar al resultado. Se considera que carece de sustento tecnológico-teórico ya que, si bien es cierto que utiliza reglas para derivar funciones y el Teorema de Pitágoras para establecer la relación entre las variables, no se evidencia una descripción que permita entender la técnica utilizada; lo que genera un procedimiento meramente algebraico; una vez más, el estudiante no puede alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada.

El tercer libro de texto considerado, Zill [12], aborda el tema de la derivada a partir de la definición de recta tangente, recta secante, cociente diferencial y pendiente de la recta tangente, y establece un proceso de cuatro pasos para obtenerla, tres de los cuales implican sólo pre-cálculo matemático: álgebra y trigonometría, y el cuarto paso, llamado paso de cálculo.

Paso 1. Evaluar $f(a)$ y $f(a+h)$.

Paso 2. Evaluar la diferencia entre $f(a+h) - f(a)$. Simplificar.

Paso 3. Simplificar el cociente diferencial $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Paso 4. Calcular el límite del cociente diferencial $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Posteriormente resuelve una serie de problemas que van dosificados respecto a su dificultad y permiten la práctica de los cuatro pasos mencionados. Introduce la definición de razón de cambio media y razón de cambio instantánea utilizando el diferencial de x (Δx) y el diferencial de y (Δy). Ecs. (9) y (10)

$$\text{razón de cambio media} = \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{9}$$

$$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{10}$$

Define la velocidad media o rapidez media de un objeto en movimiento como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto tiempo. Ec. (11).

$$\mathrm{v_{pro}} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}} \tag{11}$$

Dada una función $s(t)$ que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta, define la velocidad instantánea en el instante $t = t_0$, siempre que el límite exista, como:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{12}$$

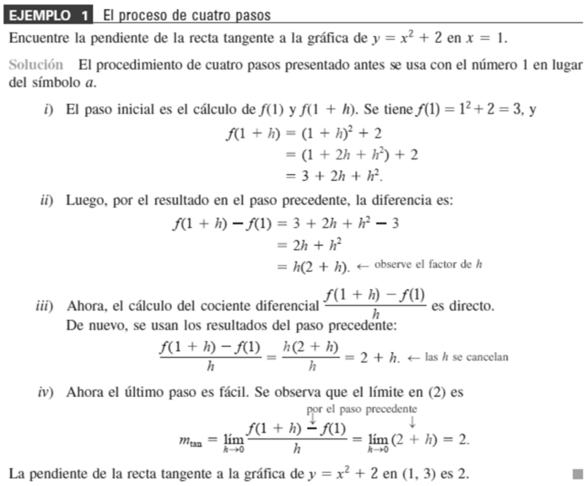
Cuando una función $s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo $\frac{ds}{dt}$ se interpreta como la velocidad del objeto.

En general, una razón de cambio con el tiempo es una respuesta a la pregunta, "¿cuán rápido cambia la cantidad?"

Para resolver los ejercicios de aplicación propuestos, Zill [12] presenta algunas sugerencias:

- Leer varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trazar un esquema.
- Identificar con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
- Escribir todas las razones que se proporcionan. Usar notación de derivadas para escribir la razón que desea encontrar.
- Escribir una ecuación o una función que relacione todas las variables introducidas.
- Diferenciar con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso anterior. Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

La primera **tarea** planteada (Fig. 5) en el libro de texto Zill [12] se centra en la parte algorítmica y algebraica y consiste en calcular la pendiente de recta tangente de una función de segundo grado. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cuatro pasos, tres de los cuales implican el uso de herramientas de pre-cálculo matemático, principalmente álgebra, y el cuarto paso implica el cálculo del límite de la expresión obtenida en el paso 3. La **tecnología** se sustenta en la definición de recta tangente, recta secante y recta tangente con pendiente previamente definidas en el libro y los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la recta tangente y recta secante en el marco del análisis matemático.



EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a.

i) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1 + h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2+h). \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

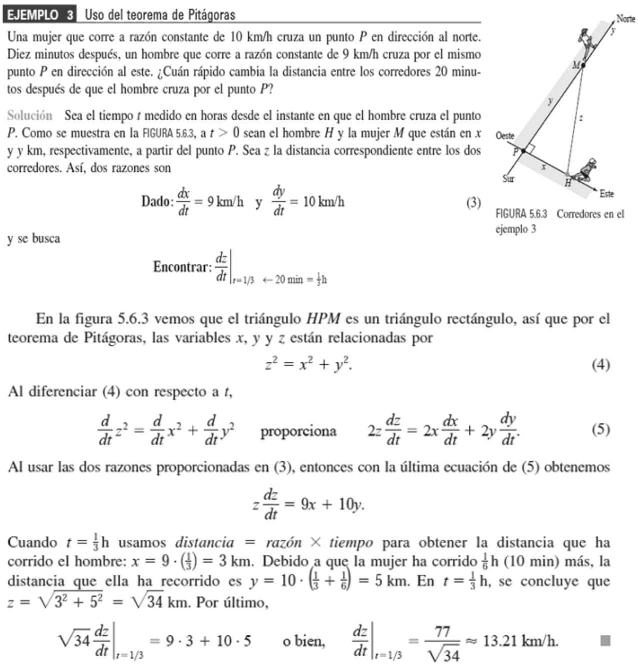
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h. \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \overset{\text{por el paso precedente}}{=} \lim_{h \to 0}(2+h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en (1, 3) es 2. ■

Figura 5. Praxeología 1. Pendiente de la recta tangente (Zill, 2011, página 135).



EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P?

Solución Sea el tiempo t medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P. Como se muestra en la FIGURA 5.6.3, a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\text{Dado: } \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \tag{3}$$

FIGURA 5.6.3 Corredores en el ejemplo 3

y se busca

$$\text{Encontrar: } \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} \leftarrow 20 \text{ min} = \tfrac{1}{3}\text{h}$$

En la figura 5.6.3 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{4}$$

Al diferenciar (4) con respecto a t,

$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \tag{5}$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$h usamos *distancia* = *razón* × *tiempo* para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h.} \quad ■$$

Figura 6. Praxeología 2. Razón de cambio (Zill, 2011, página 241)

La segunda **tarea** planteada (Fig. 6) en el libro de texto Zill [12] consiste interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana que implica calcular la razón de cambio de una variable con respecto a otra. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cinco pasos para la resolución de problemas que sugiere el libro. Respecto a la tecnología, ésta se sustenta a través de las reglas para derivar funciones algebraicas y el Teorema de Pitágoras; finalmente, los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la derivación de funciones algebraicas y del Teorema de Pitágoras en el marco del análisis matemático.

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Sabemos que alrededor de un tipo de tareas T, se encuentra una tripleta formada por una técnica τ,una tecnología θ y una teoría Θ; dicho conjunto constituye una praxeología formada por un bloque práctico-técnico y un bloque tecnológico-teórico.

La elección de los tipos de tareas en cada libro se hizo de manera que en la tarea 1 se evidenciaran actividades centradas en la parte algorítmica y algebraica, y que en la tarea 2 se realizaran una interpretación y resolución de un problema de la vida cotidiana enfocado a calcular la razón de cambio de la derivada, para posteriormente analizar las técnicas y tecnologías sobre las que se sustentan.

Los tipos de tareas propuestos en el libro de texto Granville [10] están enfocados principalmente en determinar un valor de acuerdo al problema planteado, esto implica llevar a cabo ciertos procedimientos basados en reglas que son consideradas verdaderas para obtener un resultado.

Conforme se va avanzando en el contenido temático, se proporcionan algunas definiciones, proposiciones y teoremas que forman el sustento teórico, sin embargo, en ocasiones éstos carecen del entorno tecnológico, lo que hace que se convierta en un procedimiento meramente algebraico, sin que el estudiante logre alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada

Los tipos de tareas propuestos en el libro de texto Schaum (5ª edición) obedecen más a una práctica de reglas y definiciones dadas, lo que genera que los estudiantes trabajen más la parte algebraica y mecánica sin que ello implique una comprensión del significado de razón de cambio de la derivada.

Si bien es cierto que el manejo y dominio algebraico es importante en la asignatura de Cálculo, la enseñanza-aprendizaje bajo esta dinámica puede llegar a generar ciertas dificultades a los estudiantes que no tienen un dominio algebraico pleno, afectando con ello su desempeño académico.

En general, el libro proporciona una breve explicación del tema, resuelve un ejemplo y proporciona al estudiante una serie de problemas resueltos y de problemas complementarios enfocados más a una mecanización de las expresiones algebraicas anteriores que a la comprensión misma de su significado.

La serie de ejercicios propuestos por el libro de texto Zill [12] permite al estudiante consolidar poco a poco las propiedades y características de las definiciones proporcionadas, debido a que éstos van dosificados en cuanto a dificultad se refiere, permitiendo al estudiante una mejor comprensión del tema.

Además de los ejercicios que implican el uso de algoritmos, al abordar el tema de razón de cambio se enfoca en la resolución de problemas de la vida cotidiana y sugiere ciertas directrices para traducir del lenguaje coloquial al lenguaje matemático cada problema que le ayuden al estudiante a resolver la situación planteada. En caso de que se requiera algún conocimiento previo, lo menciona dentro de la solución del ejercicio como recordatorio para el estudiante.

Derivado del análisis de los libros de texto en torno a los tipos de tareas específicos, se observaron ciertas similitudes y diferencias; por ejemplo, el libro de texto Granville [10] y el libro de texto Zill [12] están enfocados principalmente en determinar o calcular un valor de acuerdo al problema planteado a través de ciertos procedimientos que implican el uso de algoritmos. Aunque en ambos libros se evidencia sustento tecnológico-teórico, solamente en el libro de texto Zill [12] se detallan explicaciones de conocimientos previos requeridos que sirven de apoyo para el estudiante en la resolución de la tarea planteada. Respecto al libro de texto Schaum (5ª edición), las tareas propuestas obedecen a una práctica de reglas y definiciones dadas, enfocadas más a una mecanización que a la comprensión misma de los significados.

El presente trabajo es meramente un análisis bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico a las praxeologías de los libros ya mencionados, la elección de cada uno de ellos dependerá del enfoque que cada institución quiera darle a la enseñanza-aprendizaje de la actividad matemática; sin embargo, es importante mencionar que la ausencia de sustento tecnológico en los libros de texto genera que el aprendizaje de la razón de cambio de la derivada se traduzca en la aplicación de ciertas reglas consideradas como verdaderas, sin que ello implique que el estudiante ha alcanzado una comprensión del significado.

CONCLUSIONES

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha permitido analizar las praxeologías propuestas en los libros de texto de Cálculo Diferencial de Granville [10], Schaum (5ª edición) [11] y Zill [12], al hacer una revisión sobre las tareas, técnicas, tecnologías y teorías utilizadas. Se observó que la mayoría de las tareas planteadas están enfocadas en calcular algún valor a través de un procedimiento algebraico mediante la aplicación directa de las definiciones planteadas, sin que esto garantice que los estudiantes logren comprender el significado de la razón de cambio de la derivada.

Es verdad que los libros de texto Granville [10] y Zill [12] proporcionan ciertos pasos a seguir en la resolución de problemas de aplicación, los cuales pueden servir de apoyo al estudiante; sin embargo, también es cierto que en la resolución de problemas existe una gran área de oportunidad para trabajar con los estudiantes en el aula. Se trata de una actividad que implica práctica constante a fin de desarrollar ciertas habilidades que les permitan enfrentar y resolver cualquier situación planteada.

Los resultados muestran que las praxeologías propuestas por los libros de texto, las cuales constituyen una herramienta fundamental en la enseñanza-aprendizaje, carecen de simetría entre los bloques práctico-técnico y el tecnológico-teórico, ya que en su mayoría enuncian las definiciones o teoremas pero no las demuestran, por lo que recomendamos añadir por lo menos una idea de la demostración para presentar un marco general acorde a la teoría utilizada en el análisis de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Y. Chevallard, "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico." *Recherches En Didactique Des Mathéematicques*, vol. 19, pag. 221-266. 1999.

[2] E. Ramírez Rincón, "Historia y epistemología de la función derivada", *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, No. Extraordinario, 2009. https://doi.org/10.17227/01203916.261

[3] C. Boyer, *Historia de la matemática*, versión española de Mariano Martínez Pérez, Madrid, España: Alianza Universidad Textos, 1992.

[4] N. Londoño, A. Kakes & V. Decena, "Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas," *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 26, 2013.

[5] L. G. Mendoza, M. R. B. Alemán & L. M. A. Nieves, "Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica". *Revista Científica"General José María Córdova"*, 15(20), 137-153, 2017.

[6] G. Sánchez-Matamoros, M. García, & S. Llinares, "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296, 2008.

[7] M. Caballero & R. Cantoral, "Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 26 (pp. 1197-1205), 2013

[8] H. Morales, "La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción", *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 4518-4525, 2013.

[9] M. Bosch, F. J. García, J. Gascón, L. R. & Higueras, "La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico". *Educación matemática*, 18(2), 38, 2006.

[10] W. Granville, *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa, 2009.

[11] F. Ayres, E. Mendelson, *Cálculo Schaum*, 5ª. Edición, México: McGraw- Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2010.

[12] D. Zill & W. Wright, *Matemáticas 1 Cálculo diferencial*, 4ª. Ed., México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2011.

DANIEL A. GARCÍA PACHECO
LUISA RAMÍREZ GRANADOS
VÍCTOR A. AGUILAR ARTEAGA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

DANIEL_A_GP@HOTMAIL.COM
LUISA.RAMIREZ@UAQ.MX
VICTTOR.AGUILAR@GMAIL.COM

04

IDENTIFICACIÓN DE ERRORES EN EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

ERROR IDENTIFICATION IN THE POLYNOMIAL DIVISION ALGORITHM

RESUMEN

En este artículo se muestra una recopilación de errores identificados en la resolución de una actividad piloto llevada a cabo con una adaptación de la metodología ACODESA, sobre el algoritmo de la división de polinomios de grado tres con una sola variable. Además se muestra el respectivo análisis, con apoyo del marco teórico "Enfoque Lógico Semiótico" para determinar un posible origen. Los resultados muestran de manera prominente la presencia de errores durante el manejo de las operaciones básicas con polinomios por parte de estudiantes que ya han concluido las materias de álgebra de preparatoria, éstos se deben probablemente a la didáctica con la que recibieron el contenido algebraico y a una deficiencia en el contenido aritmético.

Palabras clave: ACODESA, división, poli-nomios, enfoque lógico semiótico, álgebra.

ABSTRACT

This paper presents a compilation of errors identified in the resolution of a test activity, executed with an adaptation of the ACODESA methodology, on the division algorithm of third degree polynomials with one variable. The analysis was performed under the theorical framework of "Semiotic Logical Approach", in order to determine a possible origin of the errors. The results show prominently the presence of errors during the basic operations with polynomials by students who have already completed high school algebra subjects, these are probably due to the didactics with which they received the algebraic content and to a deficiency in arithmetic content.

Keywords: ACODESA, division, polynomials, semiotic logical approach, algebra.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se parte de la problemática en el aula referente al manejo de la división de polinomios, cuyo algoritmo sigue mostrándose difícil de ejecutar para los alumnos, incluso en niveles educativos pre-universitarios y universitarios. Dado que dicho algoritmo requiere sólidas bases de álgebra y un buen manejo de conocimientos aritméticos, es sencillo apreciar una secuencia en la que los errores cometidos en etapas tempranas continúan siendo arrastrados e impiden una compresión adecuada del tema en cuestión. Se vuelve relevante entonces identificar los errores y determinar su origen con el fin de aspirar a una corrección.

Para comenzar, los polinomios son parte de un contenido convencional en instituciones de nivel medio-superior y superior. Las operaciones con ellos se encuentran dentro de una rama que se desarrolla en una amplia y rica sección del álgebra; sin embargo, éstas han sido consideradas por los estudiantes como uno de los tópicos menos aplicables a otros campos del conocimiento, de escasa utilidad y excesiva abstracción. Es por estas razones que se dificulta apropiarse de ese conocimiento a pesar de que se les plantea cuáles fueron las ideas y problemas que le dieron origen y significado [4] y Santiesteban, 2015).

Aunado a esto se observan, de acuerdo a [7], dificultades en cuestiones algebraicas como el manejo de fracciones, cálculos aritméticos y, por supuesto, manejo de los signos, las cuales persisten en los estudiantes pese a que el tema de polinomios se considera tradicional en la educación básica. Esta situación termina por afectar de forma negativa el acercamiento a la división entre dos polinomios.

Aguiriano [1] concluye que, en lo que respecta al algoritmo de la división en los enteros, su grupo de estudio, estudiantes de ingreso a ingeniería agronómica, tuvo un desempeño no satisfactorio, mostrando lo que él llama "errores de nivel secundaria", como no agregar ceros al cociente, no identificar residuos mayores que el divisor, leve empleo analítico de la igualdad

$$a = bq + r \tag{1}$$

(El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo) para comprobar el resultado, olvidar el planteamiento de restas como paso intermedio y no cambiar el signo de algunos términos.

Según Socas [11], es posible que un estudiante muestre errores operacionales, estructurales y procesuales, aunque no tenga dificultad aparente con las matemáticas. Estos errores de los objetos matemáticos dificultarán el aprendizaje de un contenido posterior, por lo que hacer un diagnóstico y tratamiento puede permitir a los profesores idear dinámicas y procedimientos que ayuden en su corrección. Lo anterior queda reafirmado en la investigación de [5], donde se encontraron errores con un origen en la formación matemática previa al nivel educativo actual de los estudiantes universitarios. En tal trabajo se plantea la obtención de logros en el aprendizaje si los errores pueden ser reconocidos y superados. Es interesante mencionar, en este mismo tema, la aportación de Rico [9], sobre las características generales de los errores presentados en su grupo de estudio y su conclusión de la contribución positiva a la enseñanza proveniente de los errores. “El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, y es una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos” [2].

En resumen, existe evidencia que los alumnos siguen mostrando problemas con el algoritmo de la división de polinomios, mientras que las investigaciones de Socas [11], Rico [9] y [2] muestran que tratar adecuadamente las propiedades algebraicas permite acceder a un nuevo contenido matemático; de ahí la importancia de identificar los errores y trabajar en una corrección posterior.

Se pretende entonces dar respuesta a la pregunta: ¿Qué errores emergen durante el algoritmo de la división de polinomios? con el objetivo de identificar y clasificar errores cometidos por los alumnos. Para esto se aplicó una serie de actividades a dos estudiantes voluntarios de manera individual y por equipo a lo largo de varias etapas, cada una de las actividades consistía en un ejercicio de división de polinomios con una sola variable. El procedimiento utilizado por los alumnos y los resultados obtenidos fueron analizados con un marco teórico para clasificar los errores identificados y determinar su origen. Finalmente, se establecen conclusiones a partir de las evidencias recabadas y analizadas.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: En la próxima sección se describe la metodología que fue adaptada para la aplicación de las actividades: el Enfoque Lógico Semiótico como teoría utilizada para analizar los resultados y la forma en que permite clasificar y estudiar los errores identificados. Más adelante se detalla la intervención realizada a los estudiantes voluntarios desde un repaso del contenido necesario para abordar las actividades hasta su aplicación. Y por último se presenta el análisis y discusión de los resultados y las conclusiones de esta investigación.

Metodología ACODESA

Para este trabajo de investigación de carácter cualitativo se utilizó la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión, ACODESA [6] por su acrónimo en francés, la cual surge de un sistema semiótico expandido que considera representaciones funcionales e institucionales y su evolución en un escenario cultural al que se refiere como “Sistema Cultural Semiótico”. La microsociedad de un salón de clases puede favorecer la evolución de este sistema partiendo de las dos representaciones mencionadas: la institucional es generada por la enseñanza convencional, usualmente el docente y los medios de los que dispone para impartir la clase, y la funcional es una representación que emerge espontáneamente del alumno para entender y resolver tareas matemáticas no rutinarias previo a la representación institucional.

Durante la resolución de las tareas, el profesor no debe proveer una solución o pistas que permitan llegar a una; su papel es más bien el de observar el trabajo individual de los estudiantes, dar apoyo para un buen intercambio de ideas dentro del proceso sociocultural de comunicación y animar la auto-reflexión antes de la institucionalización, integrando los entornos individual y sociocultural. La metodología permite introducir un conocimiento matemático a lo largo de cinco etapas.

- Trabajo individual: cada estudiante resuelve la tarea por cuenta propia, desarrollando representaciones funcionales.
- Trabajo en equipo: se trabaja la misma tarea en equipo y, gracias a la argumentación y validación de los integrantes, se puede mejorar lo desarrollado en la fase anterior.
- Debate: se mejora nuevamente lo obtenido en la fase anterior con toda la clase participando y ofreciendo su forma de resolver la tarea.
- Auto-reflexión: el estudiante trabaja la tarea por su cuenta, reconstruyendo el conocimiento.
- Proceso de institucionalización: las represen-taciones institucionales son presentadas por el profesor, basándose en los resultados de las fases anteriores.

La metodología ACODESA permitirá aplicar una serie de tareas en cada una de sus etapas y, al recolectar los resultados, se procederá a un análisis para identificar los errores cometidos por los estudiantes del grupo de estudio y cuáles de ellos persisten. Estos errores podrán ser clasificados según su origen con el Enfoque Lógico Semiótico.

Enfoque Lógico Semiótico

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) es un marco teórico en construcción desarrollado por el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de la Laguna, en España, y centra su atención en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Este marco “pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias" [12]. "Se caracteriza por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias para el estudio de errores: el formal y el cognitivo" [3].

El microsistema educativo puede ser descrito como el lugar o ambiente donde se enseña el conocimiento matemático, está compuesto de tres elementos básicos: estudiante, docentes y la disciplina en cuestión (en este caso matemáticas); y de tres componentes que determinan el contexto: el Social, el Cultural y la Institución Escolar.

En esencia, toma los elementos del triángulo didáctico y establece relaciones entre ellos, como se muestra en la Fig. 1 obtenida del trabajo de Socas, "El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular en didáctica de la matemática" [12].

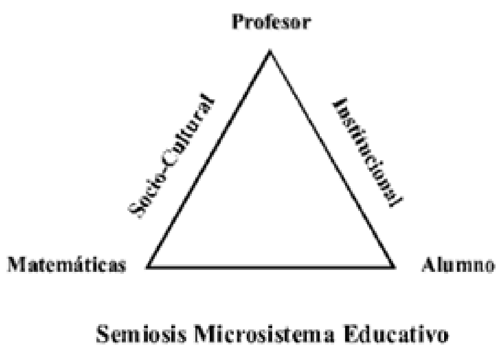


Figura 1. Relaciones del triángulo didáctico en el ELOS [12].

Sobre los modelos por competencias, el de competencia formal parte de la organización funcional, fenomenológica y conceptual de los objetos algebraicos.

En palabras de Delgado [3]: "explica la relación que hay entre los objetos matemáticos y el lenguaje algebraico".

Por su parte, el modelo de competencia cognitivo se organiza según:

- Las representaciones semióticas
- Los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra
- Dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra

Es importante profundizar en cada una de ellas para dar paso a la clasificación y estudio del error. La representación semiótica en este enfoque parte de entender la semiosis como el triple proceso de generar signos, de acciones del signo y de inferencia. El proceso de ésta última corresponde a la designación de un objeto matemático mediante un signo, esta representación genera una interpretación mental en el receptor, de modo que el significado de un objeto matemático puede ser observado a través del signo y está de cierta forma ligado a un interpretante.

La segunda componente se refiere a los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra. Para hablar de ellos primero es necesario mencionar los sistemas de representación semiótica; estos consisten en un sistema de signos a través de los cuales pueden comunicarse los objetos matemáticos.

Socas [11] menciona que los sistemas de representación semiótica más formales permiten que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, contrario a los sistemas más visuales o más intuitivos, y es en el dominio de estos sistemas formales donde aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivos que permiten generar una competencia. Se tienen entonces tres estadios de desarrollo: el semiótico, el estructural y el autónomo.

En el estadio semiótico el objeto y los signos nuevos emergen y son caracterizados por objetos y signos antiguos ya conocidos; es decir, el individuo aprende y emplea signos nuevos con los significados de los signos pertenecientes al sistema antiguo que ya sabe manipular.

En el estadio estructural se recurre a comportamientos y patrones del sistema antiguo para dotar de significado a los símbolos y objetos que aparecen en el nuevo sistema. Mediante estructuras ya conocidas se puede asignar un significado a la aparición de símbolos que no se habían visto antes.

Finalmente, en el estadio autónomo se tiene a los signos y objetos cuyo significado no puede ser obtenido con el manejo de un sistema antiguo —ya sea de signos, procedimientos o estructuras—, sino que es propio del nuevo sistema.

La tercera y última componente del modelo de competencia cognitivo engloba a las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra. Las dificultades, de acuerdo a Socas [10] tienen su origen en el ya mencionado microsistema educativo, conectadas en complejas redes que terminan por concretarse en forma de obstáculos, que a su vez generan errores en los estudiantes, y están asociadas a la disciplina de las matemáticas y complejidad de los objetos, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y a las actitudes afectivas y emocionales que tienen hacia las matemáticas.

En resumen, las dificultades pueden abordarse desde tres elementos: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemáticas y los procesos de enseñanza.

Clasificación y estudio del error

Para Socas [11], los errores aparecen cuando los estudiantes abordan un conocimiento nuevo que los lleva a reestructurar lo visto anteriormente, y es esta adaptación del conocimiento lo que dará al error distintas procedencias. Con este marco teórico se sitúan los errores cometidos por los alumnos en tres ejes que se organizan en semiosis distintas: el error puede tener origen en un obstáculo epistemológico, didáctico o cognitivo. Otro origen posible es la ausencia de sentido semiótico, estructural o autónomo, y también puede tener origen en la afectividad, emociones, actitudes y creencias de los alumnos hacia el contenido matemático. Los errores con origen en un obstáculo y en las actitudes hacia las matemáticas proceden directamente de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, mientras que los errores con origen en una ausencia de sentido parten de los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación vistos anteriormente.

Cuando hablamos de un obstáculo epistemológico nos referimos a un contenido matemático que experimentó de forma natural una gran resistencia a ser adquirido a lo largo de la historia de la humanidad, por lo que no debería sorprender que los estudiantes tengan dificultades para abordarlo. El obstáculo didáctico es, junto con el cognitivo, referente al currículo de matemáticas, el primero genera errores debido a la forma en que las clases y el material son presentados por el docente a sus alumnos; mientras que los errores generados por el segundo están relacionados con la manera en que el alumno construye por sí mismo el conocimiento. Los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales parten de los sentimientos, generalmente negativos, hacia el contenido matemático, tales como la incertidumbre, ansiedad o estrés, por mencionar algunos. Kieran y Filloy [8] mencionan que la sociedad considera el álgebra como una parte compleja de las matemáticas, a tal grado de que simplemente escuchar la palabra "álgebra" es suficiente para provocar miedo e indisposición en los estudiantes.

Y los errores con origen en una ausencia de sentido pueden diferenciarse en tres etapas: errores con origen en la aritmética, errores de procedimiento y errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Los errores con origen en la aritmética parten de una ausencia de sentido semiótico; se refieren a objetos y símbolos que fueron presentados en el lenguaje aritmético y cuya comprensión y asimilación permite emplearlos en álgebra con un significado diferente, o dotar de significado a nuevos símbolos y objetos. Los errores de procedimiento yacen en una ausencia de sentido estructural; se manifiestan cuando los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento. Por último, los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico surgen en el manejo de signos cuyo significado no puede atribuirse al de un signo del lenguaje antiguo, en otras palabras, son autónomos.

A continuación, la Fig. 2 describe los componentes anteriores del modelo de competencia cognitivo.

Figura 2. Componentes del modelo de competencia cognitivo [11].

La investigación de Socas [11] entrega un listado y descripción de los errores encontrados durante el análisis de las actividades aplicadas a sus estudiantes participantes. A continuación se describen dichos errores.

Errores relativos al uso del paréntesis: Se refieren al mal uso del paréntesis, o al hecho de no utilizarlos aunque se identifique en el contexto. Por la forma en que se enseña este contenido matemático puede tener origen en un obstáculo didáctico, o bien puede deberse a una ausencia de sentido semiótico; para este último en particular nos remontamos a orígenes aritméticos.

Errores debidos a la concatenación: Ya los mencionan Kieran y Filloy [8] como una fuente de confusión para el alumno, puesto que en aritmética la yuxtaposición de dos símbolos indica una adición, y en algebra indica una multiplicación. Por ejemplo, en aritmética los símbolos 3 y 7 colocados juntos forman el número 37 es decir $30 + 7$, mientras que en álgebra los símbolos 4 y b colocados juntos forman $4b$, que significa 4 por b.

Necesidad de particularización: Es un error con origen en una ausencia de sentido, pues dependiendo el contexto el alumno no puede hallar sentido al uso del lenguaje algebraico y retro-

cede entonces al lenguaje numérico que sí sabe utilizar.
Necesidad de clausura: Error con origen en un obstáculo didáctico que se presenta cuando el alumno desea "concluir" una operación que él considera incompleta, por ejemplo, $5x+3$ resulta en $8x$.

Tabla 1. Origen de los errores descritos anteriormente [11].

ERROR IDENTIFICADO	ORIGEN DEL ERROR
Mal uso del paréntesis	Obstáculo didáctico
	Ausencia de sentido semiótico (origen en la aritmética)
Concatenación	Obstáculo cognitivo
Necesidad de clausura	Obstáculo didáctico
	Ausencia de sentido estructural (errores de procedimiento)
Necesidad de particularización	Ausencia de sentido

Ya que el algoritmo de la división de polinomios involucra todas las operaciones básicas (suma, resta y multiplicación) es en estas operaciones donde se espera identificar errores cuyo origen pueda ser determinado con el ELOS. Previo a la intervención, el diseño de la actividad permitió predecir ciertos tipos de errores que podrían aparecer, el listado de ellos se presenta a continuación.

Error con origen en la ausencia de sentido semiótico: Llega a presentarse durante la división de monomios que permite determinar los elementos del cociente, pues se requiere usar leyes de los exponentes —tema visto en aritmética—. También puede presentarse en la resta de polinomios cuando sólo un término del sustraendo cambia de signo, pues esto indica que el paréntesis fue omitido debido a una mala aplicación de las propiedades aritméticas.

Error con origen en la ausencia de sentido estructural: Se manifiesta un error de procedimiento cuando el manejo de una estructura conocida es inapropiado; por ejemplo, si bien la omisión deliberada del paréntesis tiene origen en la ausencia de sentido semiótico, este mismo error puede manifestarse con un origen distinto cuando se considera la suma de monomios dentro de un paréntesis como un solo término, y al multiplicarlo por un término exterior la estructura es confundida.

$$2x \cdot (4x + 3) = 8x^2 + 6x \quad (2)$$

La estructura puede ser trasladada de manera errónea a:

$$2x \cdot (4x \cdot 3) = 8x^2 \cdot 6x \quad (3)$$

Lo mismo podría aparecer en esta investigación de manera inversa, es decir

$$2x \cdot (4x \cdot 3) = 2x \cdot 4x \cdot 3 \quad (4)$$

La estructura puede ser mal trasladada a:

$$2x \cdot (4x + 3)= 2x \cdot 4x + 3 \quad (5)$$

Error con origen en un obstáculo didáctico: Puede presentarse en la "simplificación" de dos términos, cuando uno de ellos es un número y el otro una letra, mostrando que la expresión se percibe como una operación incompleta que debe ser concluida antes de proceder (necesidad de clausura).

Pueden también presentarse errores que no son analizados con el ELOS para determinar su origen, pero que sí han sido identificados en otros estudios enfocados al algoritmo de la división [1] por ejemplo:

- Una mala elección de los elementos del cociente
- No comprobar el resultado
- Olvidar plantear una resta
- No ubicar residuos mayores que el divisor

En la actividad realizada para este artículo no se espera ver errores con origen en la ausencia de sentido autónomo, puesto que lo que se trabajará en el algoritmo de la división de polinomios está fuertemente ligado a operaciones previas y a conocimiento aritmético. No se verán signos cuyo significado sea exclusivo del lenguaje algebraico; por ejemplo, el uso del signo "=" en el estudio en el manejo de ecuaciones, a menos claro que los estudiantes utilicen la propiedad Ec. (1) (el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo) para comprobar el resultado. Si bien, se hará las observaciones puntuales de la experiencia de los estudiantes en distintas etapas del estudio, no se buscará analizar los errores con posible origen en actitudes emocionales y afectivas hacia el contenido matemático.

Intervención
Repaso de contenido pertinente

Las actividades aplicadas consistieron cada una en un ejercicio diseñado por el investigador, el ejercicio en cuestión consiste en una división de polinomios en la que el dividendo es un polinomio de grado tres y el divisor es un binomio de grado 1. Se diseñó así para que los participantes pudieran plantearlo desde un enunciado y concluirlo en no más de 20 minutos, pero que en ese tiempo y en los pasos que implica su resolución se trabajara con números negativos, leyes de los exponentes, leyes de los signos, división de monomios y operaciones básicas con polinomios. Todo con el propósito de predecir algunos de los errores que podrían aparecer, tener en claro dónde se utilizaría el Enfoque Lógico Semiótico para determinar el origen y asegurar que la actividad estuviera al nivel de los participantes.

La actividad piloto se aplicó de manera presencial a dos estudiantes identificados como "Estudiante1" y "Estudiante2", siendo el primero de nivel licenciatura perteneciente a la Universidad Autónoma de Querétaro y el segundo un estudiante de nivel preparatoria perteneciente al Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro. La metodología ACODESA, descrita en la sección 2, fue adaptada para este singular escenario en el que los estudiantes ya han llevado el tema de división de polinomios con anterioridad, pero aun así se muestran incapaces de abordarlo y de realizar la etapa de debate. Se contó con el espacio adecuado para desarrollar la actividad, un escritorio para los estudiantes y un pizarrón como apoyo.

Además, ambos estudiantes permitieron que se grabara toda la intervención, la cual duró aproximadamente 80 minutos, de los cuales 30 minutos fueron destinados a describir las características de la investigación, la dinámica y el repaso de contenido.

Lo primero, una vez procurado lo anterior y teniendo listo el material para la actividad, fue presentar ante los estudiantes el título de esta investigación, su objetivo, sus características, las etapas a realizar, y después se les preguntó sobre qué tan preparados se sentían para realizar un ejercicio de división de polinomios.

Dado que para ambos ha pasado un tiempo considerable desde su último contacto con el álgebra, fue necesario comenzar con un repaso de operaciones con polinomios, donde se vio lo siguiente:

- Término algebraico
- Clasificación en monomios, binomios, trinomios y polinomios
- Suma, resta y multiplicación de polinomios
- División de monomios y algoritmo de la división aritmética

Durante el repaso los estudiantes mencionan características que hacen ver que recuerdan la ley de los exponentes aplicada al producto de dos términos con la misma base y a la división de monomios

$$(x^m \cdot x^n = x^{(m+n)}) \qquad (6)$$

$$(x^m / x^n = x^{(m-n)}) \qquad (7)$$

pero no recordaban la manera de realizar el algoritmo de la división de polinomios, por lo que se presentaron ejemplos previos a la aplicación de la actividad.

Antes de aplicar la actividad, se desarrolló en el pizarrón un ejemplo "sencillo" de división de polinomios en el que se utilizó todo lo visto anteriormente. El ejemplo fue borrado una vez concluido para que no pudiera ser utilizado como una guía para resolver la actividad.

Aplicación de la actividad

La actividad 1 consistió en plantear una división de polinomios desde un enunciado y, de acuerdo a la metodología ACODESA, cada estudiante recibió una hoja con dicha actividad para trabajarla de manera individual. El estudiante debía identificar los componentes de la división (dividendo y divisor), colocarlos en su respectivo lugar en la casilla de división y realizar el algoritmo hasta obtener un residuo de grado menor al grado del divisor. Durante la aplicación de la actividad no obtuvieron ningún tipo de ayuda por parte del investigador y se les dio 15 minutos para resolver el ejercicio. Aunque el "Estudiante1" lo finalizó en menor tiempo, los estudiantes al entregar la actividad desconocen si su resultado es correcto o no.

Siguiendo la metodología, para la actividad 2 cada estudiante recibió una hoja con la misma actividad que en la etapa anterior, sólo que ahora las instrucciones cambiaron a trabajar en equipo, haciéndoles énfasis en la importancia de discutir, aportar su punto de vista y corregir al otro en caso de creerlo necesario. El procedimiento se muestra en las hojas de trabajo de ambos estudiantes y tuvo una duración de 11 minutos.

Dado el número de estudiantes y el hecho de que se trataba de una prueba piloto, no se consideró necesario realizar la etapa de debate, puesto que en ella el investigador aún no debe intervenir ni darles pistas para resolver la actividad; además, ambos estudiantes ya han intercambiado argumentos y llegado a una conclusión.

La actividad 3 fue entonces para la etapa de auto-reflexión. A cada estudiante se le dio nuevamente la misma hoja de trabajo inicial para que fuera resuelta de manera individual, pues se espera que, si en alguna etapa anterior se presentaron errores, en esta sean resueltos. La duración de esta etapa fue de 5 minutos.

La actividad 4 consistió en aplicar una segunda hoja de trabajo para la misma etapa de auto-reflexión. Ahora el ejercicio sería distinto al inicial para ver si se familiarizaron con el tema o si aún se presentan errores. Con la actividad 4, la cual les tomó 10 minutos, concluye la intervención y la recolección de evidencias.

Finalmente, a petición de los participantes y después de que ambos entregaron su actividad, se procedió a una etapa de institucionalización en la que el ejercicio de la actividad 4 fue explicado con más detalle, tanto en los elementos de la división como en los pasos del algoritmo para llegar al resultado correcto, con una duración de aproximadamente 10 minutos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la actividad 1, ambos participantes manejaron el algoritmo haciendo cada paso fuera de la casilla de división para después colocar los polinomios pertinentes en su lugar. Sin embargo, el "Estudiante2" cambió esto a partir de la actividad 2, y en ninguna de las actividades los participantes intentaron comprobar su resultado.

Figura 3. El procedimiento a la derecha hecho fuera de la casilla de división por el "Estudiante1".

En esta etapa aparece sólo un tipo de error que se esperaba en un inicio: el "Estudiante1" se equivocó en una suma de polinomios; en un término cambió de signo en un paso anterior y, a pesar de ejecutar correctamente ese cambio de signo y dejar evidencia de ello, hizo la reducción de términos semejantes en la suma de polinomios conservando el signo del paso anterior.

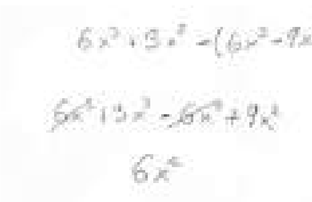


Figura 4. Suma de polinomios incorrecta

El error se acarreó en el resto del algoritmo y, naturalmente, no se obtuvo el resultado correcto. Cabe resaltar que en un paso posterior similar, la reducción de términos semejantes sí se hizo correctamente, por lo que el error tal vez se debió a un descuido, ya que el mismo "Estudiante1" durante la actividad pidió que "no lo presionasen" cuando el investigador sugirió un tiempo límite.

Además, no identificó un residuo de grado igual al del divisor, por lo que dio por finalizada la actividad, aunque el algoritmo aún continuaba hasta obtener un residuo de grado menor.

Si bien dicho error podría tener origen en una ausencia de sentido o en un obstáculo didáctico, lo cierto es que el "Estudiante1" expresó que "ya no sabía qué hacer" porque "ya no podía dividir", refiriéndose a dividir $5x$ por $2x$ para determinar el siguiente término del cociente.

De lo anterior se puede concluir que ese error, por la forma en que ocurrió, tiene origen en la aritmética (ausencia de sentido) debido a la incapacidad de manejar fracciones o decimales.

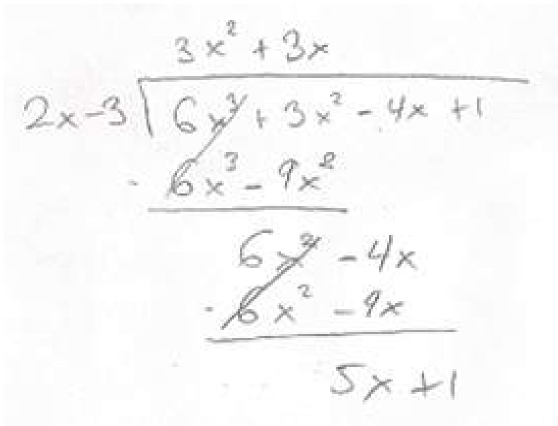


Figura 5. Residuo del mismo grado que el divisor.

En cambio, el"Estudiante2" comete un error al hacer la operación $(2x - 3)(3x^2)$ y obtener $6x^3 - 6x^2$. Dado que el error se presenta por un contenido aritmético deficiente al manejar las tablas de multiplicar se puede determinar su origen en una ausencia de sentido.

Analizando el resto de su procedimiento no se encontraron más errores, claro que debido al error inicial no se llegó al resultado correcto.

Es importante mencionar que el "Estudiante2" sí decidió trabajar con números decimales y continuar el algoritmo, pero no se planteó la posibilidad de estar equivocado y usar la comprobación aritmética que conoce para verificar esto.

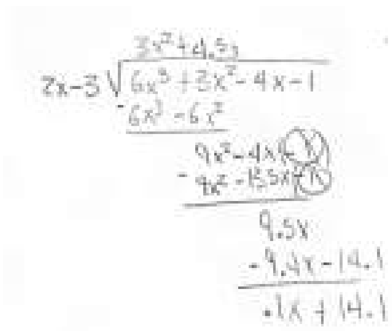


Figura 6. Manejo de decimales.

La actividad 2 corresponde a la etapa de trabajo en equipo, a los 3 minutos de haberla iniciado ambos expresaron haberse dado cuenta de que se equivocaron en la primera parte del algoritmo en la actividad 1.

Aunque entregaron sus hojas anteriores, ambos recordaron el residuo que obtuvieron e inmediatamente lo contrastaron durante el procedimiento, y aunque no comprobaron su resultado, se mostraron convencidos de que esta vez era el correcto.

Una discusión puntual entre ambos es el manejo de cierto número de términos del dividendo durante el algoritmo; el "Estudiante1" trabajó sólo con los términos que eran semejantes a los que obtuvo de multiplicar el término correspondiente del cociente por el divisor para hacer la resta, y argumentó que era la forma correcta debido a la similitud con el algoritmo en aritmética.

Mientras tanto, el "Estudiante2" trabajó siempre con todos los términos del dividendo, argumentando que se debía tomar "toda la ecuación".

Eventualmente concluyeron que ambas formas son correctas para este ejercicio, aunque es posible que en un caso distinto en el que los términos del dividendo no sean de grado consecutivo el "Estudiante1" podría tener problemas al determinar con que términos trabajar y con cuáles no.

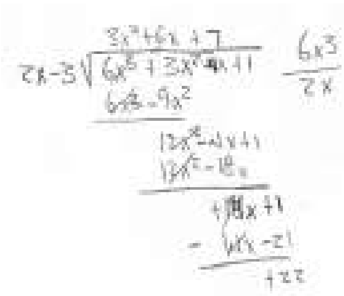


Figura 7. El "Estudiante2" "baja" el 1 del dividendo después de la primera resta.

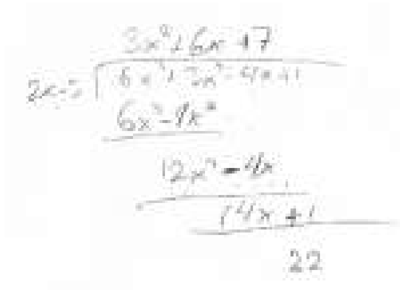


Figura 8. El "Estudiante1" "baja" el 1 hasta que le parece pertinente.

La actividad 3 es la etapa de auto-reflexión, en ella se les dio una hoja de trabajo con la misma actividad y, como era de esperarse, cada uno de manera individual concluyó el algoritmo y llegó al resultado correcto.

La actividad 4 presentó una extensión de la etapa anterior en la forma de un nuevo ejercicio para ver si la experiencia anterior permitía que en esta ocasión tampoco se presentaran errores, premisa que no fue cumplida.

El "Estudiante1" falló desde el inicio en escribir correctamente el dividendo en la casilla de división, ya que un término fue escrito con signo contrario al que solicitaba la actividad, por lo que es imposible que el algoritmo concluya llegando al resultado correcto. A pesar de este error la actividad fue analizada, y de la forma como el estudiante planteó el ejercicio no se presentaron más errores en el algoritmo.

De igual manera, sorprendentemente, el "Estudiante2" también falló en escribir un término del dividendo. El análisis de esta actividad partió de considerar el planteamiento del "Estudiante2" como correcto y, revisando el resto del algoritmo, se encontró un error más, el cual ocurrió al dividir dos monomios, pues se omitió el signo "-" en el resultado.

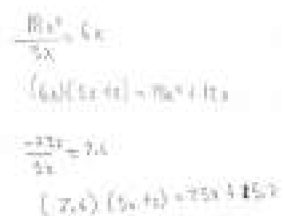


Figura 9. Omisión del signo "-" en la división de monomios.

Este error, cuyo origen yace en una ausencia de sentido o en un obstáculo didáctico, nuevamente lleva al estudiante a trabajar con números decimales. Este hecho, al igual que en la actividad 1, no parece alertarlo de que ha cometido un error o de que sería prudente revisar su procedimiento hasta ahora; en vez de eso, continua con el algoritmo hasta que el manejo de decimales es tan grande que decide entregar la actividad.

Tabla 2. Errores encontrados

ERRORES ENCONTRADOS	DESCRIPCIÓN DEL ERROR	POSIBLE ORIGEN
$6x^3 + 3x^2 - (6x^3 - 9x^2)$ $6x^3 + 3x^2 - 6x^3 + 9x^2 = 6x^2$	Falla al reducir términos semejantes por confusión de un signo previo.	Sentimiento de presión que pudo llevar al descuido.
Grado de $(5x + 1)$ = Grado de $(2x - 3)$	No se identificó un residuo de grado igual al del divisor, de modo que el algoritmo fue concluido prematuramente.	Ausencia de sentido al no trabajar con números decimales en un contexto algebraico (origen en la aritmética)
$(2x - 3)(3x^2) = 6x^3 - 6x^2$	Mal uso de las tablas de multiplicar	Ausencia de sentido por mal manejo de contenido aritmético
Mal planteamiento del ejercicio	Ambos estudiantes copiaron mal un término del dividendo	Descuido al plantear la división
$\frac{-23x}{3x} = 7.6$	Se omitió el signo "-" en la división de monomios	Probablemente un obstáculo didáctico al ver el tema de leyes de los signos aplicado a división
Ausencia de comprobación	No se utilizó la propiedad Ec. (1) (el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el	Probablemente un obstáculo didáctico, pues se aprecia que no saben

CONCLUSIONES

El ELOS usado para analizar este algoritmo matemático permitió determinar el origen de algunos errores encontrados en los pasos que involucran operaciones con polinomios, concretamente en la división de monomios, suma, resta y multiplicación de polinomios. El análisis apunta a que los participantes del estudio manejan adecuadamente las estructuras algebraicas. No obstante, es en la parte aritmética donde se presentan problemas debido a un contenido tan básico como las tablas de multiplicar, y al manejo de números decimales, que si bien no hubieran conducido al resultado correcto en esta actividad, sí marcaron un impedimento para continuar con un algoritmo que quedó incompleto.

En el caso del error número dos de la tabla nos encontramos ante una ausencia de sentido, semiótico, pues no tiene relación con la identificación del grado de los polinomios en el algoritmo, sino más bien con el empleo de un contenido aritmético. Puede verse cómo los objetos y símbolos propios de los números racionales (decimales o fraccionarios) no pudieron ser dotados de significado en el sistema algebraico, y aunque el error podría ser atribuido a un obstáculo debido a la dificultad del contenido, esto no puede apreciarse ya que no hubo empleo ni manipulación del mismo.

Otros errores pueden deberse a la didáctica con la que se les enseñó álgebra. Por ejemplo, el modo de enseñanza del tema de leyes de los signos, pues tal vez no les quedó claro que también se aplica a la división de monomios y no solo a la multiplicación, donde no parecen tener problemas. Puede además deberse a las dificultades asociadas a los objetos matemáticos, en este caso el manejo de cantidades negativas cuya dificultad es inherente a dicho contenido matemático (obstáculo epistemológico).

El otro error es acerca de la ausencia de una comprobación, que si bien podría considerarse su origen en un obstáculo si saben aplicarla en un contexto aritmético pero no es trasladada al algebraico, es posible que se relacione con el hecho de que tampoco realizan una revisión de su procedimiento, ni cuando están seguros de su resultado para verificarlo ni cuando tienen dudas de lo que llevan resuelto.

Los errores restantes parecen encontrarse en un simple descuido o falta de atención, pues pudieron evitarse fácilmente e incluso ser corregidos también con mucha facilidad con tan solo revisar su procedimiento, y pueden catalogarse como descuidos debido a que no ocurren por un mal manejo del lenguaje aritmético o algebraico como los errores anteriores.

La aplicación de la prueba piloto terminó mostrando que, efectivamente, la presencia de errores continúa incluso en estudiantes que han aprobado las materias de álgebra y dichos errores seguirán afectándolos en futuros cursos de matemáticas, por lo que es pertinente el estudio posterior para atender esta problemática desde su origen, sea cual sea éste.

También, resulta de gran importancia resaltar la gran utilidad que tuvo la etapa de trabajo en equipo de ACODESA, pues les permitió a los estudiantes darse cuenta de sus errores previos rápidamente y, trabajando juntos, quedaron convencidos del resultado obtenido en la actividad, mostrándose entonces como una dinámica efectiva para resolver ejercicios y corregir errores.

REFERENCIAS

[1] S. Aguiriano, "Estudio sobre el uso del algoritmo de la división y su vínculo en la transición de la aritmética al álgebra, el caso de los anillos Euclideos con alumnos de primer ingreso de la carrera de ingeniería agronómica de la UNAG", Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras, 2015.

[2] S. M. Del Puerto, C. L. Minnaard & S. A. Seminara, "Análisis de los errores : una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje". *Revista Iberoamericana de Educación*, 1922, 13, 2004.

[3] Delgado, A. "Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios". Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2011 https://www.mendeley.com/viewer/?fileId=-5fd8f8bd-bf42-6bab-5168-e38b92a59c03&-documentId=0aac0c72-1e16-3d0a-a09a-afc-52ca36a91

[4] M. E. Gamboa Graus, D. Santiesteban Feria, "Alternativa didáctica para la división entera de polinomios". *Boletín Redipe*, Vol. 4, No. 8, pp. 54-58, 2015.

[5] J. García Suárez, I. Segovia & J. L. Lupiáñez, "Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas" *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 145–155, 2011.

[6] F. Hitt & A. S. González-Martín, "Covariation between variables in a modelling process: The

ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method." *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201–219, 2015. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7

[7] A. Jiménez Marín & V. García Salmerón, "La división sintética vinculada al algoritmo de la división de polinomios una propuesta para bachillerato", *Investigación e innovación en matemática educativa, Volumen 2*, (pp. 297–299) 2017. http://www.revistaiime.org/index.php/IIME/article/viewFile/79/27#page=299

[8] C. Kieran, & E. Filloy Yagüe, "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica". *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 7* (December), 229–240, 1989.

[9] L. Rico, "Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas". *Educación Matemática: Errores y Dificultades de Los Estudiantes, Resolución de Problemas, Evaluación e Historia*, pp. 69–108, 1995. http://funes.uniandes.edu.co/486/

[10] M. Socas, "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", In *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). Universidad de la Laguna, 1997. https://doi.org/10.31819/9783964565464-004

[11] M. Socas, "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico", In *Investigación en Educación Matemática* XI (pp. 19–52). Universidad de la Laguna, 2007. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

[12] M. Socas, "El Análisis Del Contenido Matemático En El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a La Investigación Y Al Desarrollo Curricular En Didáctica de la Matemática", *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* – 2012, pp. 1–22, 2012.

La presente edición de
PädiUAQ. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.
fue maquetada por Ana Laura Ontiveros
en la Coordinación de Diseño e Imagen de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Autónoma de Querétaro.
El cuidado estuvo a cargo de Daniela Pérez y Soid Ruiz
Se publicó en junio de 2021.
en Santiago de Querétaro, México.