

# PädiUAO

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

# 6



AÑO 3, NÚMERO 6

DICIEMBRE 2019



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

# DIRECTORIO

**Dra. Margarita Teresa de Jesús García Gasca**  
**Rectora**

**Dr. Aurelio Domínguez González**  
**Secretario Académico**

**Dra. María Teresa García Besné**  
**Secretaria de Extensión Universitaria**

**Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña**  
**Directora**  
**Investigación y Posgrado**

**Dr. Manuel Toledano Ayala**  
**Director**  
**Facultad de Ingeniería**

**Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa**  
**Jefe de Investigación y Posgrado**  
**Facultad de Ingeniería**

**Jorge Javier Cruz Florín**  
**Coordinador de Diseño e Imagen**  
**Facultad de Ingeniería**

*PädiUAQ. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.*

Año 3. Núm. 006, diciembre del 2019, es una publicación semestral editada y publicada por la Universidad Autónoma de Querétaro, División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Centro Universitario, Cerro de las Campanas s/n, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00, ext. 7035.

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo  
No. 04-2017-040313301800-203  
ISSN: En trámite

Ambos registros están en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

QUEDA ESTRICTAMENTE PROHIBIDA LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL DEL CONTENIDO E IMÁGENES DE LA PUBLICACIÓN SIN PLENA AUTORIZACIÓN DE LA UNIVERSIDAD.

# PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería



**FACULTAD**  
DE INGENIERÍA

# COMITÉ EDITORIAL

Dr. Manuel Toledano Ayala  
**Dirección**

Dr. Víctor Larios Osorio  
**Editor responsable**

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez  
MDM. Carmen Sosa Garza  
Dr. Jesús Jerónimo Castro  
MC. Patricia Isabel Spíndola Yáñez  
MDM. Teresa de Jesús Valerio López  
**Editores asociados**

Isaac Cabrera Ruiz  
Rodrigo Alonso Hernández Gallegos  
Fátima de los Ángeles Alcántar Rodríguez  
MDI. Yessica Guzmán de la Paz  
**Diseño editorial**

Alejandro Martínez Sánchez  
**Portada**

Soid Lazlo Ruiz Ramírez  
**Corrección de estilo**

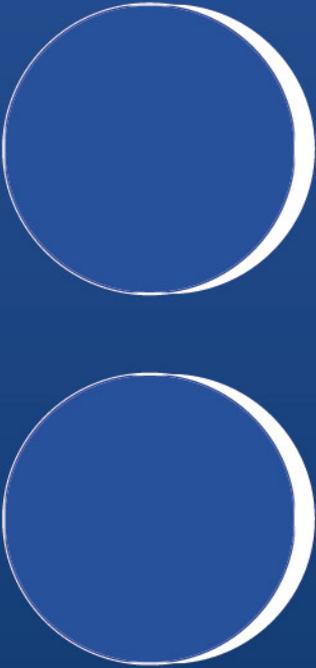


# PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería



**FACULTAD**  
DE INGENIERÍA



# ÍNDICE

## 01

**UNA PROPUESTA PARA LA  
ENSEÑANZA DEL CONCEPTO  
ABSTRACTO DE ESPACIOS  
VECTORIALES**

**ANA VICTORIA VAZQUEZ**

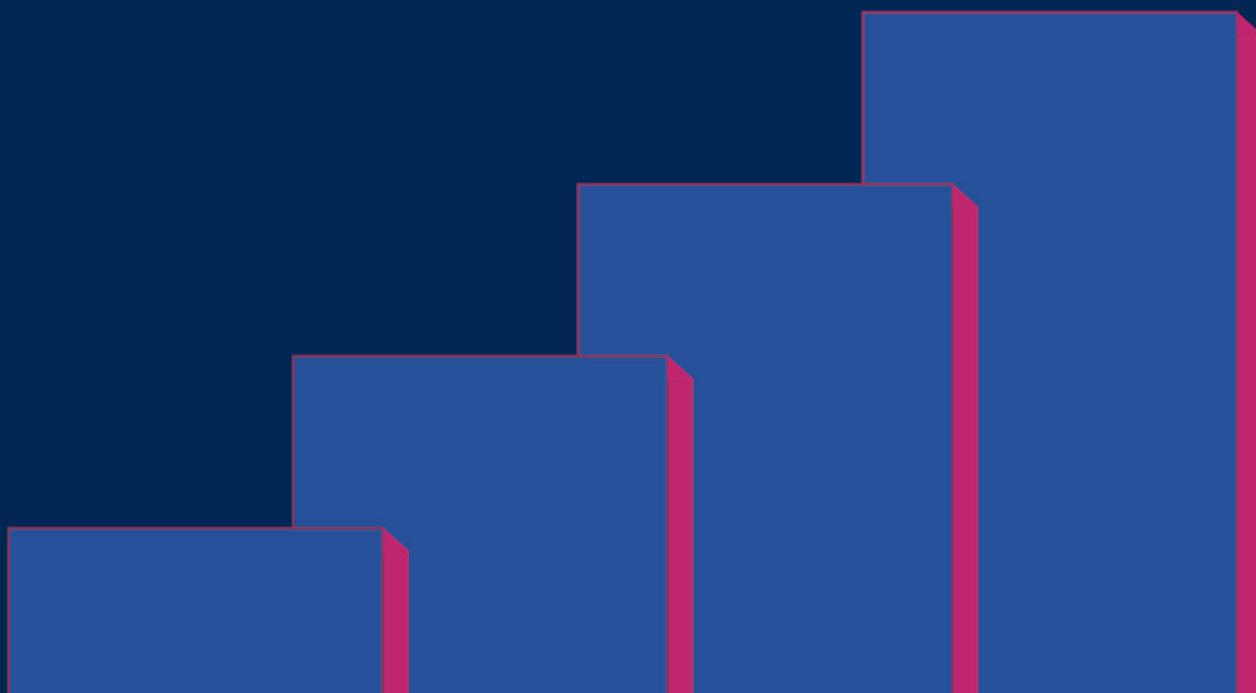
pág. 08

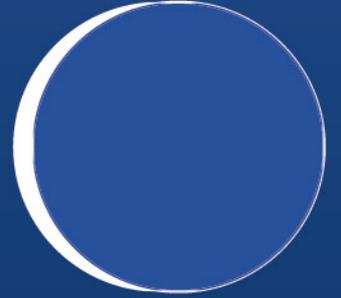
## 02

**MODERN TEACHING METHODS OF  
PHYSICS**

**MOHAMED SERROUKH  
IBRAHIM SERROUKH**

pág. 16



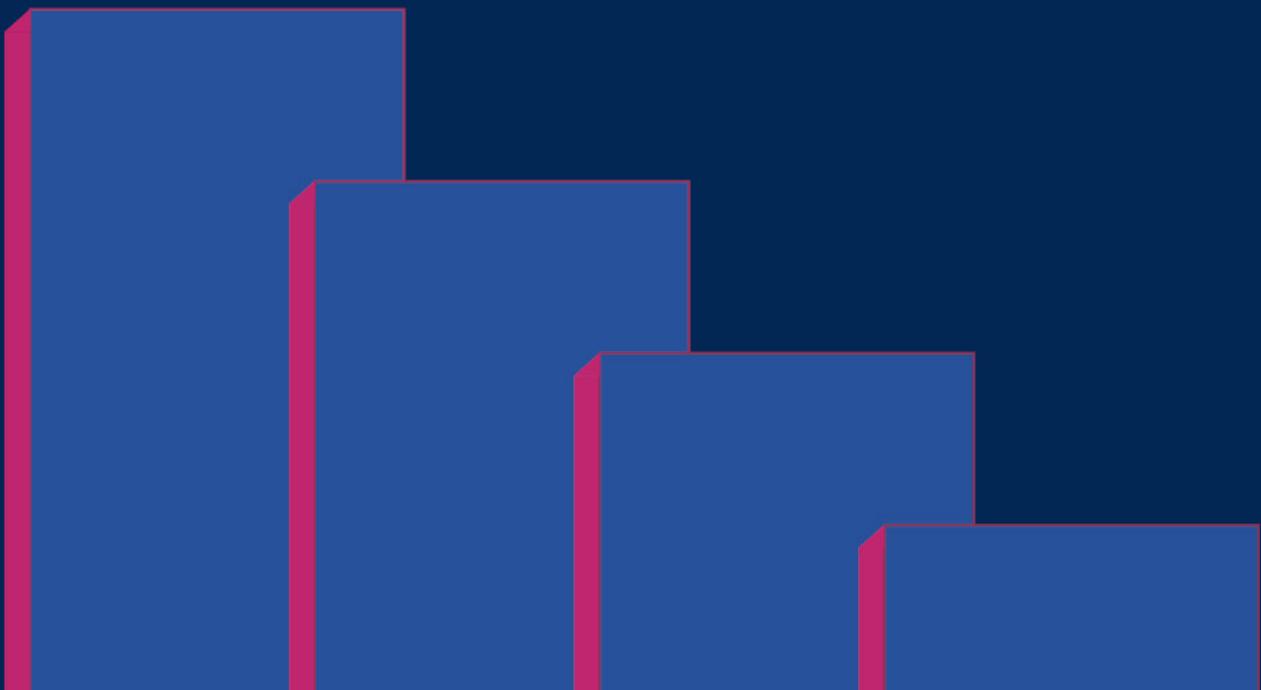


# 03

## LA HABITABILIDAD EDUCATIVA EN LAS AULAS CAPFCE

JESSICA GUERRERO GUZMÁN,  
HÉCTOR ORTIZ MONROY

pág. 22



ANA VICTORIA VAZQUEZ

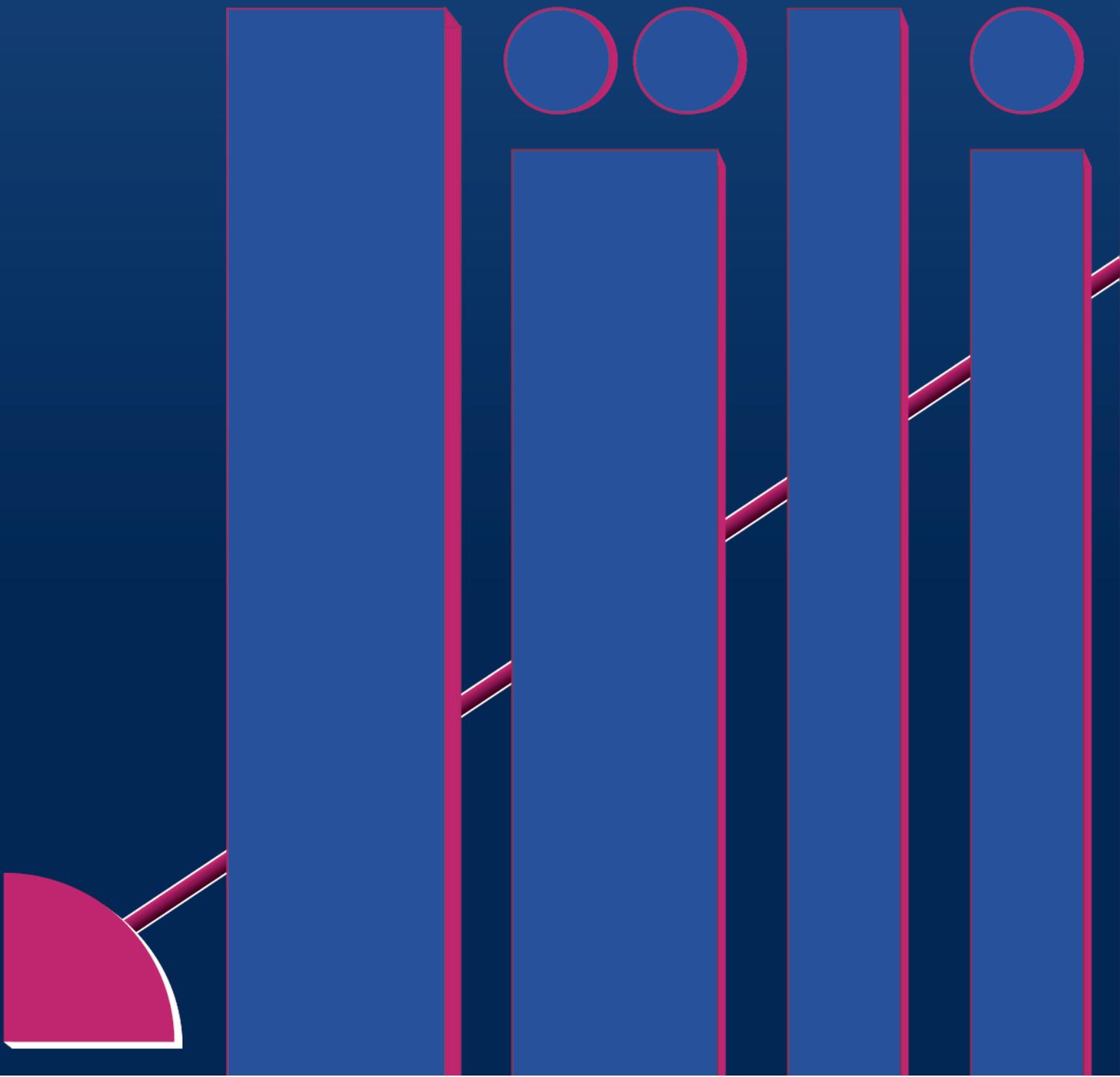
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

ANA VICTORIA.VAZLOZ@GMAIL.COM

01

# UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ABSTRACTO DE ESPACIOS VECTORIALES

A PROPOSAL FOR TEACHING THE ABSTRACT CONCEPT OF VECTOR SPACES



## RESUMEN

Debido a su conocida dificultad conceptual entre los estudiantes, existen diversas investigaciones que estudian el álgebra lineal en la disciplina de la didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, los trabajos desde la perspectiva de la enseñanza que se enfocan en el tema específico del concepto de espacio vectorial son muy pocos y es un campo de investigación reciente. Como parte de una investigación más amplia, que considera los fundamentos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en este artículo se presenta una propuesta de actividades que permite estudiar cómo los estudiantes se enfrentarán inicialmente al concepto de espacio vectorial.

Esta propuesta también posibilita que los estudiantes exploren las propiedades de los espacios vectoriales, de tal manera que las estructuras algebraicas presentadas les resulten similares a las que han trabajado en otras asignaturas y así la introducción a los conceptos abstractos del álgebra lineal no sea tan repentina como suele ser en la enseñanza tradicional.

**Palabras clave:** espacio vectorial, teoría antropológica de la didáctica, dificultades, álgebra lineal, propiedades.

## ABSTRACT

Due to its known conceptual difficulty among students, there are many investigations that study linear algebra in the discipline of mathematics education. However, researches that focus on the specific concept of vector space from the perspective of teaching are not abundant and it is a recent research field. As a part of a broader investigation that considers the fundamentals of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), in this article a proposal of activities that allows to study how students will initially face the concept of vector space is presented. This proposal also allows students to explore the properties of vector spaces, so that the algebraic structures presented are similar to those that have worked in other courses. Thus, the introduction to the abstract concepts of linear algebra may not be as sudden as it usually is in traditional teaching.

**Keywords:** vector space, anthropological theory of the Didactic, difficulties, linear algebra, properties.

## INTRODUCCIÓN

En la enseñanza tradicional del álgebra lineal, para el concepto de espacios vectoriales, la me-

todología se basa en la mecanización y la memorización de los axiomas que definen este concepto. Es muy importante mencionar que esta estructura algebraica es de naturaleza abstracta y es presentada a los estudiantes de manera súbita en su primer curso de álgebra lineal, lo cual provoca que su comprensión sea difícil para la mayoría de los estudiantes. Para Dorier y Sierpinska [1] existen dos razones a las dificultades de los estudiantes: la naturaleza misma del álgebra lineal y el tipo de pensamiento que se requiere para entender esta asignatura.

Entre las investigaciones que se han enfocado en el concepto de espacio vectorial, podemos resaltar el trabajo de Moreno [2], que realizó una analogía para ayudar a los estudiantes a comprender y memorizar los conceptos relacionados con los espacios vectoriales; la investigación de Kú, Trigueros y Oktac [3], que presentaron una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial e indagaron las posibles construcciones mentales que los estudiantes realizaron; en el trabajo de Parraguez [4] se estudió la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y el papel que juegan otras nociones del álgebra lineal para su comprensión.

Con la contribución de estas investigaciones, se han identificado y analizado los principales errores y las dificultades de los estudiantes al aprender sobre espacios vectoriales. Maracci [5] observó que los estudiantes, generalmente, suelen orientarse hacia los procesos, dando menor importancia a las estructuras de los espacios vectoriales. Estos aportes han ayudado al diseño de actividades para la enseñanza, de tal manera que se busca evitar dichos errores, y trabajar en las dificultades conocidas.

Es importante indagar sobre los procesos cognitivos del estudiante para conocer sus concepciones, sus dificultades en el aprendizaje y los errores que cometen en el proceso. Esto constituye un punto de apoyo esencial para la construcción de propuestas de enseñanza productoras de aprendizajes significativos. Por ello, el objetivo de este trabajo es proponer un recurso didáctico dirigido a estudiantes de un primer curso de álgebra lineal a los que sólo se les ha presentado la definición teórica de espacio vectorial, con la que se busca estudiar y responder la pregunta de investigación "¿Cómo se enfrentan los estudiantes de licenciatura inicialmente al concepto de espacio vectorial, a través de su definición?" y que, a su vez, los dirija a explorar sus propiedades de tal manera que logren comprobarlas en las estructuras algebraicas presentadas y puedan llevarlas posteriormente a estructuras más complejas.

Es necesario que, para la organización de la enseñanza y el aprendizaje, se preste especial aten-

ción al tipo de actividades que se utilizarán para presentar y estudiar los espacios vectoriales.

Los estudiantes están muy acostumbrados a trabajar con conceptos que pueden imaginar o representar de alguna forma gráfica [7]; por lo tanto, se les dificulta trabajar con espacios vectoriales cuya estructura algebraica no les permite concretar sus elementos. Sumando este argumento a los mencionados anteriormente, se recalca la importancia de presentar una propuesta de actividades didácticas que permitan a los estudiantes trabajar con espacios vectoriales de estructuras algebraicas que ya han trabajado con anterioridad para que, una vez que sean comprendidas, puedan desarrollarlas posteriormente en su razonamiento abstracto.

## REFERENTES TEÓRICOS

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard, se toma el objeto de estudio junto con el proceso completo de la enseñanza y el aprendizaje, en este caso, del saber matemático, particularmente el concepto de los espacios vectoriales. Esta teoría postula que toda actividad humana puede explicarse con praxeologías [6], es decir, con la vinculación del saber-hacer (praxis) y el saber (logos). Se utiliza la noción de praxeología como herramienta para la organización de la enseñanza y el aprendizaje de la actividad matemática.

El modelo praxeológico de Chevallard se representa de la siguiente manera:

**Tabla 1.** Modelo Praxeológico

Praxeología=[T,τ,θ,Θ]	
<i>Praxis</i> - Saber hacer	T Tipos de tareas
	τ Técnica
<i>Logos</i> - Saber	θ Tecnología
	Θ Teoría

El "saber hacer" o nivel de la praxis, que incluye un tipo de problemas o tareas y las técnicas para resolverlos.

El "saber" o nivel del logos, que incluye la tecnología, es decir, el discurso que describe y justifica las técnicas. Este nivel también incluye a la teoría, que se denomina como la tecnología de

la tecnología, es decir, la teoría justifica a la tecnología. Para este trabajo no se profundizará en las teorías, pues se ha identificado que los estudiantes de alto desempeño responden hasta las tecnologías en las actividades escolares que les solicitan alguna justificación.

La praxeología matemática es el resultado del proceso de construcción matemática. A este proceso de construcción matemática se le conoce como proceso de estudio [8], el cual está estructurado por seis momentos didácticos que no son lineales, incluso pueden repetirse o aparecer de manera simultánea:

1. Momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas.
2. Momento de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica relativa.
3. Momento de la constitución de un entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica y que permita la construcción de nuevas técnicas.
4. Momento del trabajo de la técnica, que busca mejorar las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas.
5. Momento de la institucionalización, cuando se precisa la organización matemática construida con los elementos que la delimitan.
6. Momento de la evaluación, junto con el momento de institucionalización se reflexiona la praxeología construida.

Estos momentos y la relación entre ellos son importantes para realizar adecuadamente el proceso de estudio. De esta manera, el modelo praxeológico es la base para la organización y el diseño de la propuesta realizada en esta investigación.

## MÉTODOS

Para este trabajo se realizó un estudio de tipo cualitativo y analítico [9]. Se inició con un análisis de la enseñanza tradicional, considerando los ejercicios y actividades propuestas por algunos libros de texto de álgebra lineal. Posteriormente, se realizó el análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de las técnicas y tecnologías que se utilizan para resolver las actividades tradicionales. Finalmente, se realizó el diseño y adecuación de las actividades que, desde la perspectiva de la TAD, permitan estudiar el desarrollo de los estudiantes acerca de las propiedades de los espacios vectoriales.

## ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL

En este trabajo no se profundizó en el análisis de libros de texto, solo se tomaron como referencia de análisis los ejercicios y actividades planteados en el tema de espacios vectoriales en los siguientes libros de álgebra lineal:

- Grossman, S. Matemáticas 4 Álgebra lineal, 6a edición. Editorial: Mc Graw-Hill, 2011.
- Anton, H. Introducción al álgebra lineal, 3ª edición. Editorial: Limusa, 1994.
- Grossman, S. & Flores, J. Álgebra lineal, 7a edición. Editorial: Mc Graw-Hill, 2012.
- Larson, R. & Edwards B. Introducción al Álgebra Lineal. Editorial: Limusa, 2004.

Los ejercicios y actividades identificadas en los libros de texto se vincularon con los errores y dificultades conocidas por los estudiantes para dar paso al diseño de la propuesta didáctica, objeto de este estudio.

## PRAXEOLOGÍAS DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Las praxeologías de los espacios vectoriales que permiten el desarrollo de la propuesta didáctica sugerida son las de la Tabla 2.

En los tipos de tareas podemos encontrar:

T1: Realizar y comprobar: solicita al estudiante llevar a cabo alguna operación indicada y comprobar su resultado a través de una pregunta guiada.

T2: Comprobar que se cumpla: en este tipo de tarea se solicita al estudiante realizar las igualdades indicadas y verificarlas.

T3: Construir vector y analizarlo: se solicita al estudiante construir un vector que cumpla cierta propiedad o propiedades y analizarlo con una pregunta guiada.

En cuanto a las tecnologías, de acuerdo a la actividad propuesta, se irán presentando o construyendo sobre las tareas. A pesar de que algunos de los axiomas son intuitivos, otros pueden generar conflictos en las estructuras algebraicas más complejas, es por esto que la propuesta es reforzar las propiedades de un espacio vectorial, poniéndolas en práctica en las estructuras más familiares para los estudiantes e incluso en las que se puede ver una representación gráfica; de tal manera que, con la práctica, se pueda extender este conocimiento a cualquier estructura abstracta más compleja de espacio vectorial.

**Tabla 2.** Praxeologías de los espacios vectoriales

Tipo de tarea	Técnica	Tecnología (propiedades)
T1: Realizar y comprobar	$\mathcal{T}_1$ : Sumar dos vectores y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	$\theta_1$ : Cerradura bajo la suma: Si $u \in V$ y $v \in V$ , entonces $u + v \in V$
T2: Comprobar que se cumpla	$\mathcal{T}_2$ : Sumar los vectores de ambos lados de la igualdad y verificar que se cumplan la igualdad	$\theta_2$ : Ley asociativa de la suma de vectores: Para todo $u, v, w \in V$ , $(u + v) + w = u + (v + w)$
T2: Comprobar que se cumpla	$\mathcal{T}_3$ : Sumar dos vectores y verificar que no importa el orden de suma, el resultado será el mismo	$\theta_3$ : Ley conmutativa de la suma de vectores: Si $u$ y $v$ están en $V$ , entonces $u + v = v + u$
T3: Construir vector y analizarlo	$\mathcal{T}_4$ : Sumar un vector dado $u$ con un vector desconocido e igualarlo al vector $u$ , igualar y despejar los elementos correspondientes para obtener los elementos del vector desconocido	$\theta_4$ : Vector cero o neutro aditivo: Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $u \in V$ , $u + 0 = 0 + u = u$
T3: Construir vector y analizarlo	$\mathcal{T}_5$ : Sumar un vector dado $u$ con un vector desconocido e igualarlo al vector resultante del ejercicio anterior, igualar y despejar los elementos correspondientes, comparar el vector dado con el vector resultante	$\theta_5$ : Inverso aditivo: Si $u \in V$ , existe un vector $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
T1: Realizar y comprobar	$\mathcal{T}_6$ : Multiplicar un escalar por un vector y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	$\theta_6$ : Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Si $u \in V$ y $\alpha$ es un escalar, entonces $\alpha u \in V$
T2: Comprobar que se cumpla	$\mathcal{T}_7$ : Realizar las multiplicaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que el resultado sea el mismo	$\theta_7$ : Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Si $u \in V$ y $\alpha$ y $\beta$ son escalares, entonces $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
T2: Comprobar que se cumpla	$\mathcal{T}_8$ : Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	$\theta_8$ : Primera ley distributiva (respecto de los vectores): Si $u$ y $v$ están en $V$ y $\alpha$ es un escalar, entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
T2: Comprobar que se cumpla	$\mathcal{T}_9$ : Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	$\theta_9$ : Segunda ley distributiva (respecto de los escalares): Si $u \in V$ y $\alpha$ y $\beta$ son escalares, entonces $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se presentan a continuación las actividades diseñadas para el estudio del enfrentamiento inicial de los estudiantes con el concepto espacios vectoriales:

1. Dados los vectores  $u=(2, 3)$ ,  $v=(3, -5)$ ,  $w=(-1,4)$  donde  $u, v$  y  $w \in \mathbb{R}^2$ . Y los escalares  $\alpha=3$  y  $\beta=-2$ .

- Realizar  $u+v$  ¿El resultado de la suma pertenece a  $\mathbb{R}^2$ ?
- ¿Se cumple  $(u+v) + w = u+(v+w)$ ?
- ¿Se cumple  $u+v = v+u$ ?
- Construir un vector  $n \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $u + n = u$  ¿Se puede concluir cómo sería un vector  $m$  tal que  $x + m = x$  en  $\mathbb{R}^4$ ?
- Siendo  $n$  el vector construido en el inciso anterior: Construir un vector  $p$ , tal que  $u + p = n$   
Construir un vector  $q$ , tal que  $v + q = n$   
Construir un vector  $r$ , tal que  $w + r = n$   
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores  $u, v, w$  contra los  $p, q, r$  respectivamente?
- Realizar  $\alpha u$  ¿El resultado de la multiplicación pertenece a  $\mathbb{R}^2$ ?
- ¿Se cumple  $(\beta u) = (\alpha\beta)$ ?
- ¿Se cumple  $(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ?
- ¿Se cumple  $(\alpha + \beta) = \alpha u + \beta u$ ?
- ¿Es  $\mathbb{R}^2$  un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

2. Sean  $(x)=3x+5$ ,  $(x)=2x+4$ ,  $h(x)=x-2$  vectores  $\in F$ , donde  $F$  es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo  $[0,1]$ . Y sean  $\alpha=3$  y  $\beta=-2$ .

- Realizar  $f+g$  ¿El resultado de la suma pertenece a  $F$ ?
- ¿Se cumple  $(f+g)+h = f+(g+h)$ ?
- ¿Se cumple  $f+g=g+f$ ?
- Construir un vector  $n \in F$ , tal que  $f+n=f$  ¿Puede existir otro vector diferente de  $n$ , llamado  $z$ , tal que  $f+z=f$ ?
- Siendo  $n$  el vector construido en el inciso anterior, construir un vector  $q$ , tal que  $g+q=n$  ¿Qué se puede observar sobre su construcción al comparar los vectores  $g$  y  $q$  respectivamente?
- Realizar  $\alpha f$  ¿El resultado de la multiplicación pertenece a  $F$ ?
- ¿Se cumple  $(\beta f)=(\alpha\beta)$ ?
- ¿Se cumple  $(f+g)=\alpha f + \alpha g$ ?

i) ¿Se cumple  $(\alpha + \beta) = \alpha f + \beta f$ ?

j) ¿Es  $F$  un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

3. Sean  $(x)=5x+4$ ,  $(x)=x^2$ ,  $(x)=2x^2$  vectores  $\in P$ , donde  $P$  es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean  $\alpha=3$  y  $\beta=-2$ .

- Realizar  $p+q$  ¿El resultado de la suma pertenece a  $P$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $(p+q)+r=p+(q+r)$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $p+q=q+p$ ? ¿Por qué?
- Construir un vector  $n \in P$ , tal que  $p+n=p$ . ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido  $n$ ?
- Siendo  $n$  el vector construido en el inciso anterior, construir un vector  $m$ , tal que  $p+m=n$  ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido  $m$ ?
- Realizar  $\alpha p$  ¿El resultado pertenece a  $P$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $(\beta p) = (\alpha\beta)$ ?
- ¿Se cumple  $(p+q)=\alpha p + \alpha q$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $(\alpha + \beta) = \alpha p + \beta p$ ?
- ¿Es  $P$  un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

4. Sean  $(x)=x^3+1$ ,  $(x)=-x^3$ ,  $(x)=x^3$  vectores  $\in W$ , donde  $W$  es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean  $\alpha=3$  y  $\beta=-2$ .

- Realizar  $p+q$  ¿El resultado de la suma pertenece a  $W$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $(p+q)+r=p+(q+r)$ ?
- ¿Se cumple  $p+q=q+p$ ?
- Construir un vector  $n \in W$ , tal que  $p+n=p$ . ¿El vector  $n$  pertenece a  $W$ ? ¿Por qué?
- Siendo  $n$  el vector construido en el inciso anterior, construir un vector  $m$ , tal que  $p+m=n$  ¿El vector  $m$  pertenece a  $W$ ? ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector  $m$ ?
- Realizar  $\alpha p$  ¿El resultado pertenece a  $W$ ? ¿Por qué?
- ¿Se cumple  $(\beta p)=(\alpha\beta)$ ?
- ¿Se cumple  $(p+q)=\alpha p + \alpha q$ ?
- ¿Se cumple  $(\alpha + \beta) = \alpha p + \beta p$ ?
- ¿Es  $W$  un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Como se puede apreciar, cada inciso de cada actividad corresponde a una tecnología respectivamente, es decir, a cada una de las propiedades que definen a un espacio vectorial. Además de que las actividades se resolverán bajo ciertas téc-

nicas, también se les solicita dar una justificación sobre la lógica bajo la que se determinó la solución dada. Del mismo modo, se hace uso de la repetición para diferentes estructuras algebraicas, con la intención de conseguir la construcción y comprensión de las propiedades de forma general utilizando estos casos particulares.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el diseño de esta propuesta se busca motivar a los estudiantes a los que se les está presentando por primera vez la definición de espacios vectoriales. Debido a esto, la importancia de las estructuras algebraicas seleccionadas, en las que, según el análisis a priori, se demuestra que se requieren estrategias conocidas por los estudiantes de licenciatura que están en un curso de álgebra lineal para su realización. Por ejemplo, presentamos a continuación una posible respuesta esperada de la actividad 1:

1. Dados los vectores  $u = (2, 3)$ ,  $v = (3, -5)$ ,  $w = (-1, 4)$  donde  $u, v$  y  $w \in \mathbb{R}^2$ . Y los escalares  $\alpha = 3$  y  $\beta = -2$ .

a) Realizar  $u + v$ ; ¿El resultado de la suma pertenece a  $\mathbb{R}^2$ ?

$$u + v = (2, 3) + (3, -5) = (5, -2) \in \mathbb{R}^2$$

b) ¿Se cumple  $(u+v)+w=u+(v+w)$ ?

$$((2, 3) + (3, -5)) + (-1, 4) = (2, 3) + ((3, -5) + (-1, 4))$$

$$(5, -2) + (-1, 4) = (2, 3) + (2, -1)$$

$$(4, 2) = (4, 2); \text{ Sí se cumple.}$$

c) ¿Se cumple  $u + v = v + u$ ?

$$(2, 3) + (3, -5) = (3, -5) + (2, 3)$$

$$(5, -2) = (5, -2); \text{ Sí se cumple.}$$

d) Construir un vector  $n \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $u+n=u$

$$(2, 3) + (n_1, n_2) = (2, 3)$$

$$(2 + n_1, 3 + n_2) = (2, 3)$$

$$2 + n_1 = 2$$

$$n_1 = 0$$

$$3 + n_2 = 3$$

$$n_2 = 0$$

$$n = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

¿Se puede concluir cómo sería un vector  $m$  tal que  $x + m = x$  en  $\mathbb{R}^4$ ?

Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  y  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$ ,

tal que  $x + m = x$ ;  $m = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$

Para cumplir esta propiedad el vector a buscar siempre debe ser neutro en la adición.

e) Siendo  $n$  el vector construido en el inciso anterior.

Construir un vector  $p$ , tal que  $u+p=n$

$$(2, 3) + (p_1, p_2) = (0, 0)$$

$$(2 + p_1, 3 + p_2) = (0, 0)$$

$$2 + p_1 = 0 \quad p_1 = -2$$

$$3 + p_2 = 0 \quad p_2 = -3$$

$$p = (-2, -3)$$

Construir un vector  $q$ , tal que  $v+q=n$

$$(3, -5) + (q_1, q_2) = (0, 0)$$

$$(3 + q_1, -5 + q_2) = (0, 0)$$

$$3 + q_1 = 0 \quad q_1 = -3$$

$$-5 + q_2 = 0 \quad q_2 = 5$$

$$q = (-3, 5)$$

Construir un vector  $r$ , tal que  $w + r = n$

$$(-1, 4) + (r_1, r_2) = (0, 0)$$

$$(-1 + r_1, 4 + r_2) = (0, 0)$$

$$-1 + r_1 = 0 \quad r_1 = 1$$

$$4 + r_2 = 0 \quad r_2 = -4$$

$$r = (1, -4)$$

¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores  $u, v, w$  contra los  $p, q, r$  respectivamente?

Podemos observar que existe un vector inverso para cada vector que hará que obtengamos el vector neutro al sumarlos.

f) Realizar  $\alpha u$  ¿El resultado de la multiplicación pertenece a  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\alpha u = 3(2, 3) = (6, 9) \in \mathbb{R}^2$$

g) ¿Se cumple  $(\beta u) = (\alpha \beta)$ ?

$$(\beta u) = 3(-2(2, 3)) = 3(-4, -6) = (-12, -18)$$

$$(\alpha \beta)u = [(3)(-2)](2, 3) = -6(2, 3) = (-12, -18)$$

h) ¿Se cumple  $(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ?

$$3[(2, 3) + (3, -5)] = 3(2, 3) + 3(3, -5)$$

$$3(5, -2) = (6, 9) + (9, -15)$$

$$(15, -6) = (15, -6)$$

i) ¿Se cumple  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ?

$$(3 - 2)(2, 3) = 3(2, 3) - 2(2, 3)$$

$$(1)(2, 3) = (6, 9) - (4, 6)$$

$$(2, 3) = (2, 3)$$

j) ¿ $\mathbb{R}^2$  es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Podemos observar que es un espacio vectorial ya que cumple con las propiedades de:

Cerradura bajo la suma

Ley asociativa de la suma de vectores

Ley conmutativa de la suma de vectores

Neutro aditivo

Inverso aditivo

Cerradura bajo la multiplicación por un escalar

Ley asociativa de la multiplicación por escalares

Primera ley distributiva (respecto de los vectores)

Segunda ley distributiva (respecto de los escalares)

Neutro multiplicativo

De forma análoga, podemos observar las posibles técnicas a ser utilizadas en las demás actividades,

ya que los tipos de tareas serán los mismos, pero con una estructura algebraica diferente. Se espera que las tecnologías sean observadas en la justificación de las respuestas dadas.

Otro aspecto importante que no podemos olvidar son los errores esperados de acuerdo a los ya identificados por otras investigaciones [5]. En el caso del tipo de tarea T1, comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado puede ser difícil para algunos estudiantes que no estén familiarizados con las estructuras algebraicas abstractas más complejas, así como las tareas T3, que solicitan la construcción de un vector que cumpla ciertas propiedades. Por esto, es de importancia lograr que los estudiantes manejen inicialmente los axiomas que definen a un espacio vectorial en casos que puedan visualizar o incluso que puedan modelar, y puedan posteriormente generalizarlos a cualquier caso de espacio vectorial.

## CONCLUSIONES

El álgebra lineal es una asignatura común para la mayoría de las licenciaturas pertenecientes a las facultades de ingeniería, y sus contenidos son de gran importancia para distintas áreas de las Matemáticas, Ciencias e Ingenierías. Los espacios vectoriales son solo una pequeña porción de los contenidos abstractos de estas áreas. Respecto a esto, se busca favorecer la motivación y el interés de los estudiantes y darle mayor importancia a las actividades que se presentan dentro y fuera del aula, ya que es a través de éstas y con la dirección del profesor, que los estudiantes van a explorar y, eventualmente, aprender los contenidos matemáticos.

Por estos argumentos se proponen las actividades didácticas mencionadas, con las que se le permitirá al estudiante trabajar cada propiedad que define a un espacio vectorial, dando oportunidad a que incluso pueda construirlas en su razonamiento. Atendiendo así las dificultades identificadas acerca de la estructura de este contenido matemático.

Por otra parte, la puesta en práctica de las actividades propuestas, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, permite que el profesor o el investigador estudien como se enfrentan inicialmente los estudiantes a las propiedades que definen un espacio vectorial. Esto puede ayudar en la planeación de las siguientes sesiones y actividades, una vez que se observa dónde está

la mayor problemática, y así continuar exitosamente a los espacios vectoriales de estructuras algebraicas más complejas.

Con la misma intención, se invita a que se haga uso de otros apoyos para la enseñanza inicial de este contenido matemático, como software con el que se pueda hacer el modelado de las actividades propuestas, ya que son casos en los que los estudiantes podrán ver gráficamente los vectores.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido mediante una beca para realizar estudios en el programa de maestría en Didáctica de las Matemáticas.

## REFERENCIAS

- [1] J. L. Dorier, and A. Sierpiska, "Research into the teaching and learning of linear algebra", in *The teaching and learning of mathematics at university level*, New ICMI Study Series, vol. 7, Springer, Dordrecht, 2001, pp. 255-273.
- [2] M. Moreno, "Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul", *SUMA*, vol. 37, pp. 75-82, 2001.
- [3] K. Kú, M. Trigueros y A. Oktac, "Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE", *Educación Matemática*, vol. 20, no. 2, pp. 65-89, ago. 2008.
- [4] M. Parraguez, "Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial", tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional, México, 2009.
- [5] M. Maracci, "Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 40, no. 2, pp. 265-276, 2008.
- [6] Y. Chevallard, "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, no. 2, pp. 221-266, 1999.
- [7] P. Ortega Pulido, "La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico", tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España, 2002.

- [8] M. Bosch, F. García, J. Gascón y L. Ruiz Higuera, "La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico", *Educación matemática*, vol. 18, no. 2, pp. 37-74, 2006.
- [9] O. León y I. Montero, *Métodos de investigación en psicología y educación*. España: Mc Graw Hill, 2003.

MOHAMED SERROUKH

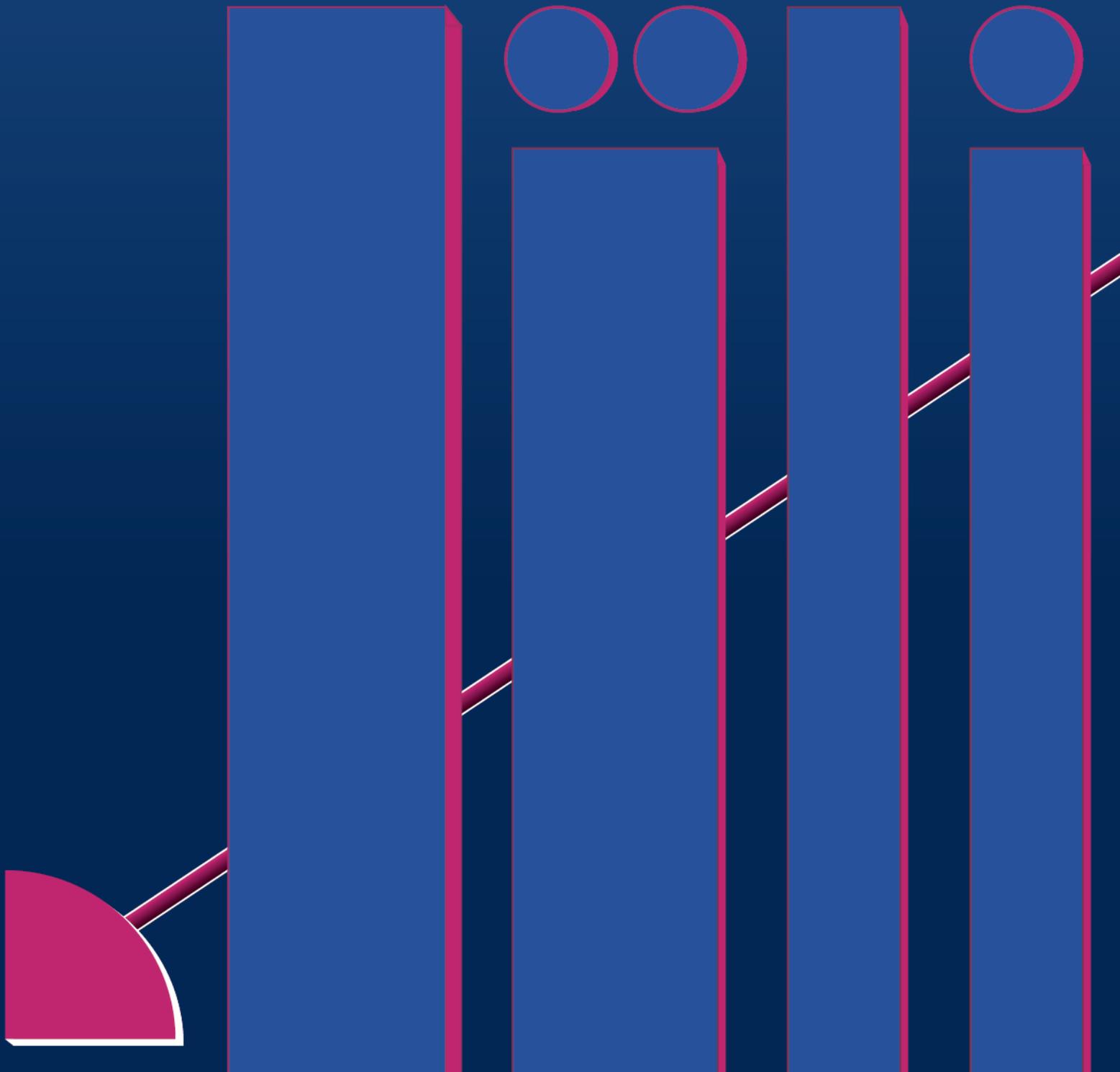
IBRAHIM SERROUKH  
IBRAHIM@UAQ.MX

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

02

# MODERN TEACHING METHODS OF PHYSICS

A PROPOSAL FOR TEACHING THE ABSTRACT CONCEPT OF VECTOR SPACES



## ABSTRACT

This work provides an insightful view into the traditional methods of science teaching. Through an extense review of the available literature, the authors seek to criticise what they deem an inefficient way of fomenting learning in science students, and propose an alternative of their own design, considering the multiple intelligence model and the notions of *educere* and *educare* as ideological foundations of an innovative method of teaching.

**Keywords:** science teaching, multiple intelligences, *educere*, *educare*.

## RESUMEN

El presente trabajo proporciona una mirada profunda al interior de los métodos tradicionales de la enseñanza en las ciencias. A través de una extensa revisión de la literatura disponible, los autores buscan hacer una crítica de lo que consideran una manera ineficiente de fomentar el aprendizaje en los alumnos de las ciencias, y al mismo tiempo proponen una alternativa de diseño propio, considerando el modelo de inteligencias múltiples y las nociones de *educere* y *educare* como fundamentos ideológicos de un innovador método de enseñanza.

**Palabras clave:** enseñanza de ciencias, inteligencias múltiples, *educere*, *educare*.

## INTRODUCTION

According to Donald Bligh's findings in his book titled *What is the Use of Lectures*, the traditional teaching and learning method is not working [1]; it puts the lecturer/tutor completely in charge, and relies on economic assessment of all teaching and learning resources. Such method renders students into passive learners.

Modern teaching and learning should make learners independent, according to Muijs and Reynolds [2]; and according to Brooks and Brooks [3], a proper assessment should be integrated. The strategic approach to modern teaching is focused on "why we want to teach?" using the two methodologies of *educere* and *educare* from the Latin meaning of general education.

Every topic in education, including Physics, must have a method that makes learning active, according to Edgar Dale and "The learning pyramid" [4].

The seven laws of teaching by John Milton Gre-

gory [5] has had the most influence on modern teaching and learning; furthermore, communication between teacher and learner is also important in modern teaching according to Petty [6].

The three theories of learning: *Behaviorism*, *Cognitivism* and *Humanism* are used in different areas: Behaviorism is used with young learners, Cognitivism in higher education, and Humanism with mature students.

The best way of assessing teaching and learning is by using Tummons' method [7].

Teaching and learning is an old practice that has existed for many thousands of years; however, higher education has been in existence for six hundred years without any major change. We measure education in the twenty-first century by how many students have graduated, and such measure does not relate to the real outcome of education, even when we try to relate education with employment. Therefore, the question is "why do we educate?" When we find the answer to that question, then we will be able to measure the performance of education

## THE TRADITIONAL WAY OF TEACHING AND LEARNING

Traditional teaching lasted 600 hundred years since the middles ages without major changes. This continuous traditional way of teaching is failing in the twenty-first century. Some higher education performance assessments are mainly based on the growth of the number of students enrolling in universities worldwide. According to the University of Oxford on its report of International Trends in Higher Education 2016-17 [8], the number of people entering higher education has increased from 14 % to 32 % in the two decades prior to 2012.

According to Robert Goddard, the number of students around the globe enrolled in higher education will reach 262 million by 2025, up from 178 million in 2010.

According to Philip Altbach, from the Center for International Higher Education at Boston College in the US, only two countries in the world will be responsible for much of the increase in the students' enrolment numbers in Higher Education. Therefore, the Chinese are rethinking expansion as they are beginning to have more unemployment of university graduates. Andreas Schleicher, the OECD's head of education, has written that China now opens the equivalent of a new university every week [9].

Such financial modelling measurement of Higher Education performance focuses on the expansion of students' numbers, rather than on the quality of teaching and learning. What happens to the remaining percentages of students that never reach Universities? The current teaching style is based on production measurement of supply and demand. This production chain system serves only a small section of the job market. In response to the increase of student's enrolments, universities build larger lecture theatres; except for a few universities in European countries, like Germany, Denmark, and Finland, where teaching and learning use other methods than lecturing.

Donald Bligh, in his research on teaching in higher education, summarizes:

*"Lecturing is inefficient and any other present methods of teaching are much better compared to the traditional lecturing."*

The traditional teaching and learning method puts the lecturer/tutor in complete charge of the classroom/theater, where teaching relies mainly on textbooks and emphasizes basic skills; additionally, learning assessment is placed as a separate entity from the number of study hours, rather than on lecturing hours.

Lecture rooms are still extensively used because they are economical and meet universities' budgets.

In the university where I teach Physical Science students, I found students have a culture of listening, and thus become passive learners. In Physics, students are required to participate in teaching and learning, laboratory experiments, workshops, and other methods that make teaching and learning interactive and use a participative approach.

## THE MODERN TEACHING AND LEARNING

The modern teaching method is effective because the learner learns through sociable interactive environments and becomes an independent learner [2].

This method is hands-on based on the big idea of practical workshops. Therefore, assessment is an activity integrated with teaching and learning, and occurs through portfolios and observation [3].

The strategic approach to modern teaching is focused on "why we want to teach". This question will lead us to consider the culture of the individual classroom, its diversity, the students' background, experience, knowledge, environment, and learning goals. Explanation-and-demonstration is the new way of teaching in today's modern world.

This leads to considering the two methods that may come from the ancient Latin words *educere* and *educare*. In modern teaching, if the two methods are used as a combination, it may provide good results throughout the learning age of students.

From my own experience, the *educare* style may be used for primary education, it will later overlap with the *educere* style in secondary education and then fade away, when *educere* will take over and prevail up to higher education.

My new approach to teaching and learning was implemented with physics students in higher education sessions. I begin by posing a physics problem and draw out several answers or solutions from the students. Then I go on to explore and build a lesson plan on the suggestions that emerge from the discussion. The best example is when I posed the questions "What is the definition of friction?", "Where can we experience such phenomenon?", "How can we reduce its negative effect to save energy?", and "What consequences in our everyday life will be there if we do not?"

A great way of inviting students to participate in teaching and learning is to create an atmosphere that encourages student participation by giving them a coursework or assignment that is relevant to their everyday life, a method that will make their learning relatable and constructive to what they learn. In the classroom, I use a discussion approach to discuss their assignments in groups and use the feedback and comments from the whole class. When I give such opportunity to students to contribute to their learning, they feel confident and assertive, particularly when I pose challenges to their ideas. This can lead to constructive debates that encourage students to engage with the subject of physics. I found such approach thought-provoking, and adequate to present different points of view on any given topic. Finally, I do away with an approach that relies on only certain views as the best accounts for evidence.

The learning theory that I found works better with students learning physics is based on "The learning pyramid" on the active learning section [4].

I used a combination of three teaching and learning styles from the multiple intelligence model: visual, kinesthetic and logical and mathematical. These three styles are adapted from the Seven Laws of Teaching by John Milton Gregory [5], which has an important influence on my teaching. Lecturing must take into account the seven important factors of teaching and learning:

(1) The Teacher is the one with the *knowledge*, and the *method* on how to convey the right information to the learner with the right balance of learning capacity.

(2) The learner who attends has immense interest and passion to learn.

(3) The *language* used must be the fundamental *medium* between teacher and learner and it has to be common to both.

(4) The teacher must explain the lesson using the knowledge of the learner.

(5) The teacher uses the learners mind to grasp the desired thought or art of the knowledge required from the lesson.

(6) The teacher must fully understand the crucial thinking in the learner's own understanding of a new idea, truth, or knowledge.

(7) The reviewing process must include reviewing, rethinking, re-knowing, reproducing, and applying.

Communication in teaching is also the most important factor to convey information to learners. Any ineffective communication or distortion thereof may lead to wrong information or even misunderstandings. Petty [6] noted: "In practice, a number of barriers present themselves, preventing or inhibiting effective communication".

I have successfully explored the main three theories of learning, Behaviorism, Cognitivism, and Humanism, in the communication with learners. I have examined these theories against my own teaching practice, and I have found them to overcome barriers to learning by students from different cultural backgrounds.

The theory of behaviorism as a theory of learning, I found it to be effective on young learners as a direct response to the continued application of specific stimuli, where it is used to positively reinforce and encourage wanted behavior and negatively reinforcing and discouraging unwanted behavior. Reece and Walker [10] expressed this theory by their comment: "thought that sensations, feelings, and instinct were not a necessary part of the study of learning. The only area of interest is what the 'subject' is doing in response to the stimuli".

I found this theory of behaviorism to work well in motivating the learners by praising them for their good work. Such approach is helpful to overcome their difficulties on punctuality and attendance, and to provide stimuli to the course.

I found the theory of Cognitivism to go a step

further than the Behaviorism theory, because it is based on "teaching for understanding." As Petty [6] notes:

"... new learning is built on existing learning [...] cognitivist theory called 'constructivism' is now almost universally accepted by all experts on the brain or the mind. They all agree that learning occurs when students construct their own meanings, usually out of their prior learning and experience, and of course out of their instructional experience".

I found such theory helpful when teaching higher education students, where group learning and workshops take place; particularly, discussion sessions after watching a video clip on a certain topic. I use this method to overcome barriers such as lack of practice with social interaction.

The theory of Humanism proved to be more suitable for mature and experienced learners, what Reece and Walker describe as a 'meaningful context to the information learned' [10].

Also by Petty's comment [6]:

"The humanistic school believes that emotional factors, and personal growth and development, are the highest values,...that society, schools and colleges exist to meet the needs of the individual learner' and that 'Teachers are encouraged to help each learner choose what knowledge and skills they want to learn".

The assessment of teaching and learning we use is the one that assesses the new skills learned by the student and it has been adapted from Tummons [7], particularly the last part of his definition:

"discover whether or not the learner could perform a specified task in a workshop, or to judge the extent to which the learner has mastered a new skill or a new body of theoretical knowledge".

The usefulness of this method is to assess the new skills learned by the student using the kinesthetic method.

In the twenty-first century, education performance is measured by how many students are graduated, which is a financial approach. This measure has no compatibility with education or students' employment prospects. The future market of china and India also has a trend of incompatibility of such measure according to their own standards. Therefore, what is the solution?

Education programmes worldwide are framewor-

ks that require learners to fit within them, rather than the programme fit each learner's requirements. Education programmes would be better if they could be suited to each individual learner, by introducing Individual learning Plans (ILP). The strategy of each session would be better planned by introducing a lesson plan structured into three stages: Stage 1 is for conveying information to the learners by the teacher or lecturer, using visual and audio methods. The second stage would be in the form of a workshop for learners to explore what they learned and carry out experiments on the knowledge they gained from the first third of the session. The third stage of the session would be used for discussing, debating and developing their understanding of the session's topic.

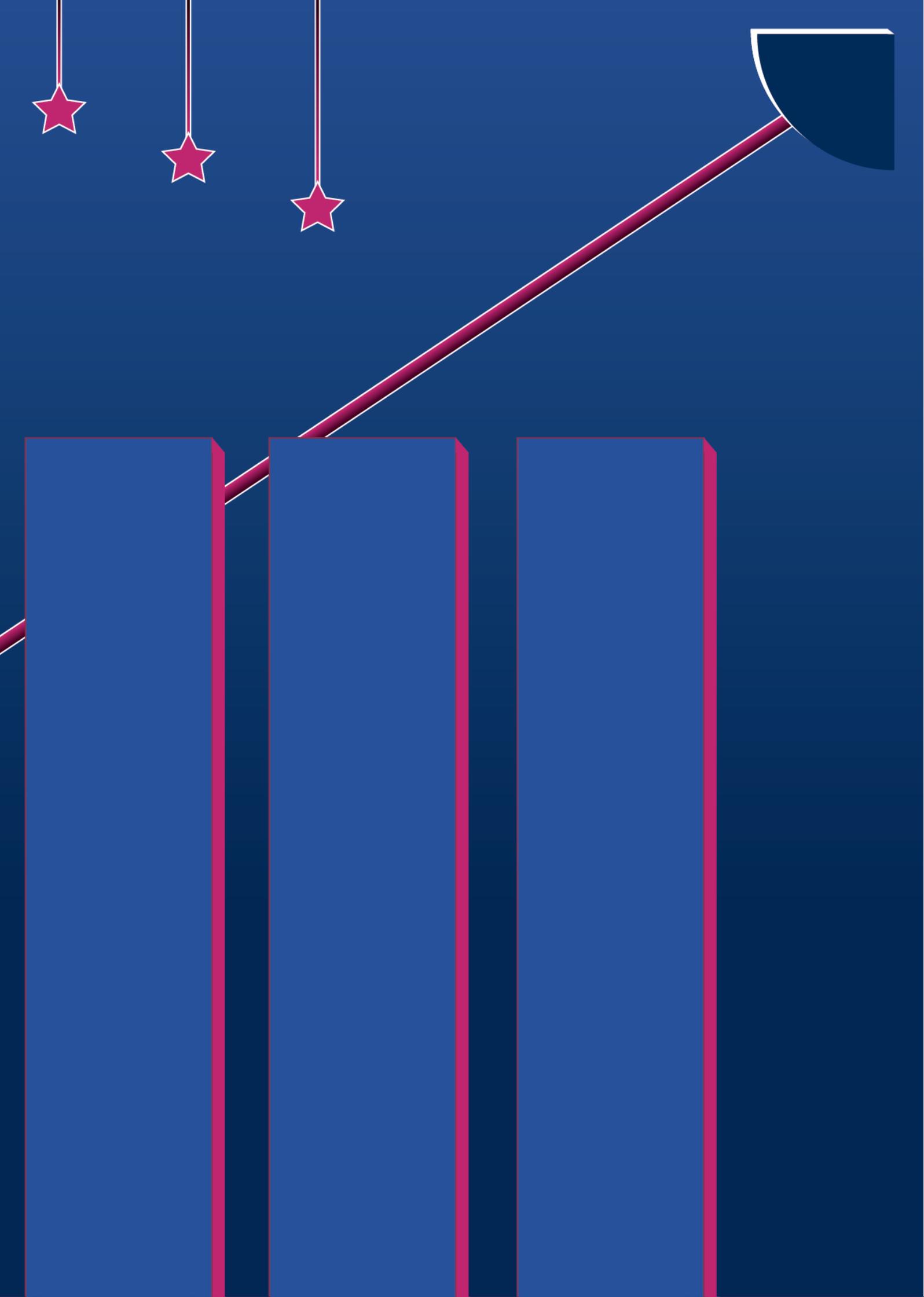
[10] I. Reece & S. Walker, *Teaching, Training and Learning: A Practical Guide*, 6th edition, UK: Business Education Publ., 2007.

## ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to thank my partner Dr. Ibrahim Serroukh for his tremendous contribution to the research, and the resources and involvement of his Physics Science department at the Autonomous University of Queretaro. I would also like to thank Marie Sayers and Professor Cliff Huggett from Canterbury University for their wonderful support.

## REFERENCES

- [1] D. Bligh, *What's the use of lectures?* San Francisco, USA: Jossey-Bass, 2000.
- [2] D. Muijs & D. Reynolds, *Effective Teaching: Evidence and practice*, 2nd Edition, England: SAGE Publications, 2005.
- [3] M. Brooks & J. Brooks, "The courage to be constructivist," *The Constructivist Classroom*, vol. 57(3), pp. 18-24, 1999.
- [4] E. Dale, *Audiovisual Methods in Teaching*, New York, USA: Dryden Press, 1969.
- [5] J. M. Gregory, *The seven laws of teaching*, Michigan, USA: Baker Book House, Edited into digital media in 1994
- [6] G. Petty, *Teaching today: A Practical Guide*. 4th ed. England: Nelson Thornes, 2004, pp. 4, 40.
- [7] J. Tummons, *Assessing Learning in the Lifelong Learning Sector*, 2nd edition, England: Learning matters, 2007.
- [8] "International Trends in Higher Education 2016-17," Oxford Univ., Oxford, England, 2017.
- [9] A. Schleicher, "China opens a new university every week," BBC News, March, 2016.



JESSICA GUERRERO GUZMÁN  
HÉCTOR ORTIZ MONROY

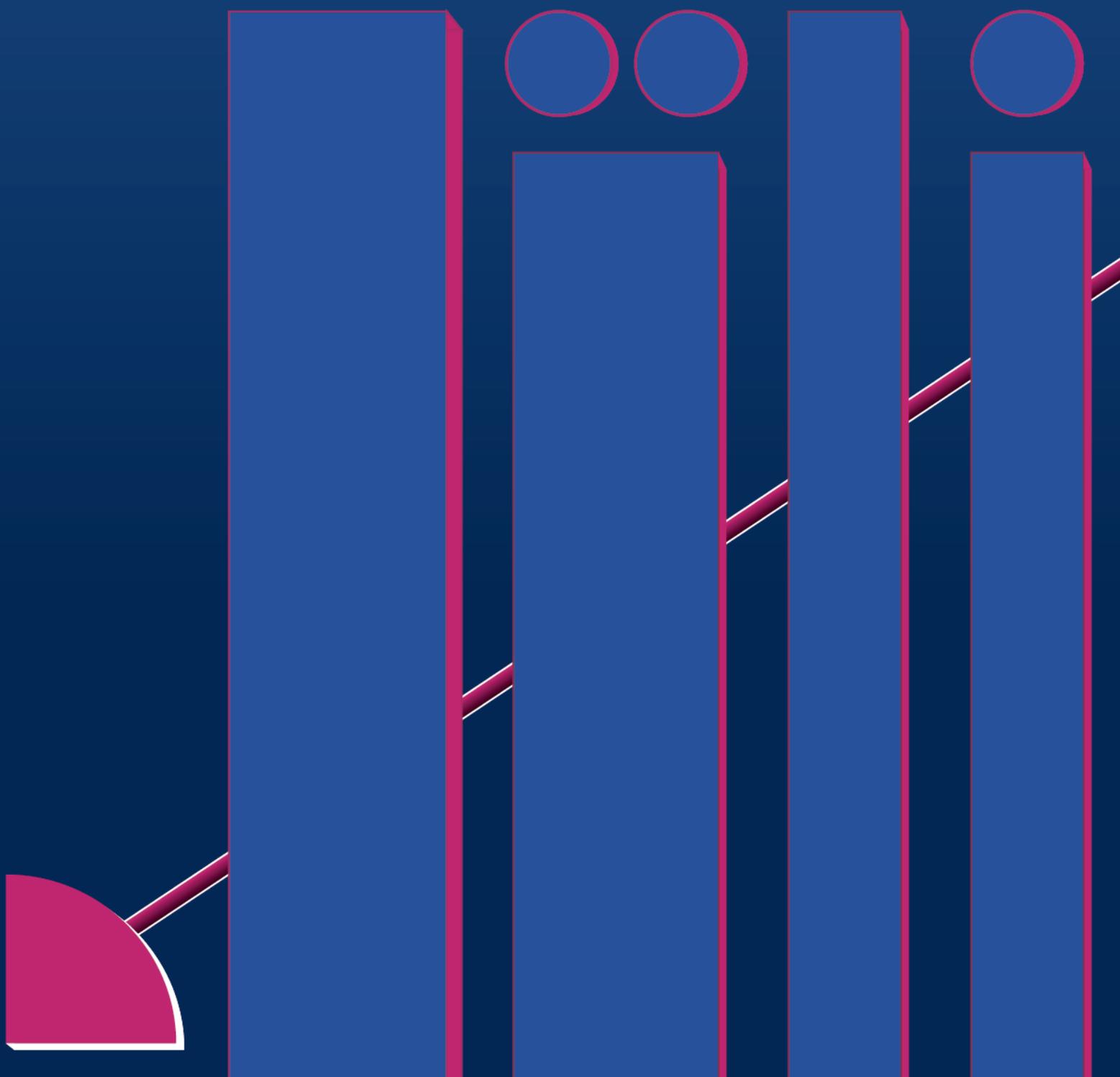
GUERREROJESSICARQ@HOTMAIL.COM

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

03

# LA HABITABILIDAD EDUCATIVA EN LAS AULAS CAPFCE

THE EDUCATIONAL HABITABILITY IN THE CAPFCE CLASSROOM



## RESUMEN

Este documento retoma el concepto de habitabilidad educativa en la escuela (HHE), creado por el Dr. Hernández Vázquez [1], para la creación de una metodología que acceda a la medición de indicadores inscritos en las dimensiones de confort físico en el aula y el espacio educativo, que permitan evaluar las aulas CAPFCE implementadas desde hace 74 años en México, y analizar los puntos críticos para proponer una modificación a dicho modelo, con el fin de obtener una correcta apropiación del espacio-enseñanza-aprendizaje.

**Palabras clave:** aula CAPFCE, confort, habitabilidad, habitabilidad educativa, indicadores

## ABSTRACT

This document takes up the concept of educational habitability in the school (HHE), created by Dr. Hernández Vázquez [1], for the development of a methodology that accesses the measurement of indicators inscribed in the physical comfort dimensions in the classroom and the educational space, which are the ones that allow an evaluation of the CAPFCE classrooms implemented since 74 years ago in Mexico, and thus allows us to analyze the critical points to propose a modification of said model in order to obtain a correct appropriation of the teaching-space-learning.

**Keywords:** CAPFCE classroom, comfort, habitability, educational habitability, indicators.

## INTRODUCCIÓN

La educación permanece en una continua evolución y transformación, por ende, las aulas y espacios arquitectónicos donde se imparte y adquiere la misma deberían evolucionar junto con ella.

Este artículo propone el análisis de aulas de modelo tipo CAPFCE, el cual ha sido implementado desde hace 74 años en la mayoría de las escuelas de México y, aunque en su momento fue novedoso, su diseño no ha tenido modificación alguna en los años transcurridos.

Por su parte, la concepción de la arquitectura sí se ha modificado con el paso del tiempo, teniendo entre sus prioridades la habitabilidad de los espacios, entendido tal concepto como:

El conjunto de características del espacio arquitectónico y/o de la ciudad que proporcionan a los usuarios confort biológico, psicológico y espi-

ritual, es decir, todos los aspectos que conforman la naturaleza humana, para desarrollar de la mejor manera las actividades que dan origen al diseño de los espacios arquitectónicos interiores y a la planificación de las ciudades, para contribuir al desarrollo de sus potencialidades individuales y sociales [2].

La habitabilidad, entonces, no es dada sino creada; esto significa que debe cumplir con ciertos estándares con relación a las condiciones acústicas, térmicas y de salubridad, esto es, sonidos, temperatura y sanidad, o dicho de otro modo, comodidad ambiental, higiene, y protección contra ruidos, aunque hoy en día se agrega el ahorro de energía [3].

Frente a los esfuerzos de la OCDE en la búsqueda de una base que sirva para evaluar la calidad de las instalaciones educativas en América Latina y otros países, que ha dado como resultado el concepto de la noción de calidad del ambiente físico educativo [4] y el de la idea de habitabilidad básica de los espacios arquitectónicos [5], Hernández Vázquez ha creado una fusión de ambas nociones para materializar el concepto de habitabilidad educativa de la escuela (HHE), el cual apoya el desarrollo de indicadores que puedan medir las condiciones actuales de las escuelas.

Este modelo comprende la revisión de ocho dimensiones cuya pertinencia se argumenta con base en la revisión de bibliografía internacional sobre las temáticas involucradas. Las ocho dimensiones planteadas incluyen: 1) disponibilidad de instalaciones y equipamiento en la escuela; 2) condiciones físicas de instalaciones y equipamiento; 3) confort físico en el aula; 4) espacio educativo; 5) sustentabilidad de la escuela; 6) higiene y seguridad física en la escuela; 7) accesibilidad de la escuela; y 8) disponibilidad de infraestructura y servicios de apoyo en la zona de asentamiento [1].

A pesar de que existen organismos que se dedican a analizar y medir las condiciones de infraestructura y equipamiento escolar, como la SEP, el Instituto Nacional de la Infraestructura Física Educativa, INIFED (antes CAPFCE) y el propio INEE, éstos son insatisfactorios para medir las condiciones de Habitabilidad Educativa en las Escuelas (HEE). Los estudios nacionales tampoco suelen recoger información sobre el confort físico de las aulas. No se pregunta objetiva ni subjetivamente acerca de las condiciones térmicas, de ventilación, aislamiento acústico y ergonomía del mobiliario.

Es por ello que el presente artículo toma como base las dimensiones planteadas por Hernández

para medir y analizar los indicadores de habitabilidad educativa dentro de las aulas tipo CAPFCE. De las ocho dimensiones mencionadas anteriormente, son dos las que hacen referencia propiamente al aula: la dimensión tres, del confort físico en el aula, y la dimensión cuatro, el espacio educativo, las cuales se desarrollaran más extensamente; asimismo, se creará y sugerirá la metodología para, posteriormente, medirlas y analizarlas. Cabe destacar que en la presente investigación solo se analiza la habitabilidad del aula, mas no se abordan las razones por las que no se han realizado modificaciones del aula tipo CAPFCE.

## CONFORT FÍSICO EN EL AULA

“El aula es el espacio privilegiado donde se desarrollan los procesos cotidianos de enseñanza-aprendizaje; diversas investigaciones han desentrañado la relación entre los aspectos del confort al interior de este lugar y los resultados de los estudiantes. El confort físico involucra cinco aspectos: confort térmico, ventilación, acústica, iluminación y calidad del mobiliario” [1].

## CONFORT TÉRMICO Y VENTILACIÓN

Un ambiente térmicamente ideal es aquel en el que los usuarios no experimentan ninguna sensación incómoda de calor o frío, es decir, permanecen con una sensación neutra respecto al ambiente. La condición es un equilibrio en el cual el cuerpo no necesita tomar ninguna acción en particular para mantener su propio balance térmico.

Los principales factores que afectan la sensación de confort son: temperatura del aire, temperatura radiante, velocidad del aire, humedad relativa, cantidad de ropa y actividad desarrollada en el espacio. Cualquier cambio en ellos puede provocar las diferentes sensaciones de confort.

La temperatura de confort recomendable es la que marca la Tabla 1.

**Tabla 1.** Medidas de confort en épocas del año [6]

Época del año	Temperatura °C	Velocidad del viento (m/seg)	Humedad relativa (%)
Invierno	20-24	0.14	45
Verano	23-26	0.25	65

La temperatura ideal para alcanzar los niveles de confort de acuerdo al grado de actividad o tarea es la siguiente Tabla 2.

**Tabla 2.** Temperatura de confort de acuerdo con la actividad [7]

Tipo de tarea	Temperatura del aire °C
Sentado efectuando una tarea intelectual	21
Sentado haciendo trabajo liviano	19
De pie haciendo trabajo liviano	18
De pie haciendo trabajo corporal pesado	17
Haciendo trabajo corporal muy pesado	15-16

## AISLAMIENTO ACÚSTICO

La posibilidad de escuchar claramente en el aula es fundamental para que los estudiantes aprendan lo que el profesor busca transmitir. La experiencia cotidiana muestra que el ruido excesivo y la reverberación interfieren con los sonidos del habla, por lo que pueden presentar barreras acústicas al aprendizaje, además de tener efectos perniciosos en la salud al despertar el estrés y elevar la presión arterial. La mayor parte de los estudios que indagan sobre la relación entre condiciones acústicas y aprendizaje llegan a la conclusión de que los estudiantes no aprenden cuando no pueden oír bien. Por ello, los desempeños más elevados se encuentran asociados a escuelas enclavadas en los ambientes más silenciosos [8].

**Tabla 3.** Niveles de confort acústico según actividades (valores aconsejables) [9], [10]

Actividades	dB
Talleres	50-55
Oficinas mecanizadas	40-50
Gimnasios, salas de deporte, piscinas	35-45
Restaurantes, bares, cafeterías	30-40
Despachos, bibliotecas, salas de justicia	25-35
Cines, hospitales, iglesias pequeñas, salas de conferencias	20-30
Salas de concierto, teatro	20-25
Clínicas, recintos para audiometrías	10-20
Sistemas de ventilación	30-35

## ILUMINACIÓN

Una iluminación correcta permite distinguir las formas, colores y objetos, y que todo ello se realice fácilmente sin ocasionar fatiga visual. A la hora de diseñar un ambiente luminoso adecuado para la visión, es necesario atender a la luz proporcionada, y a que ésta sea la más adecuada. Una distribución inadecuada de la luz puede provocar dolores de cabeza, incomodidad visual, errores, fatiga visual, confusiones, accidentes y, sobre todo, la pérdida de visión. Un buen sistema debe asegurar suficientes niveles de iluminación en los puestos de trabajo y en sus entornos. Los lugares de trabajo han de estar iluminados preferentemente con luz natural, pero, de no ser suficiente o no existir, deberá ser complementada con luz artificial. Será una iluminación general, complementada a su vez por luz localizada cuando la tarea así lo requiera.

**Tabla 4.** Lugar de trabajo niveles mínimos de iluminación [7]

Tareas	Niveles de iluminación (lux)
Bajas exigencias visuales	100
Exigencias visuales moderadas	200
Exigencias visuales altas	500
Exigencias visuales muy altas	1000
Áreas o locales de uso ocasional	50
Áreas o locales de uso habitual	100
Vías de circulación de uso ocasional	25
Vías de circulación de uso habitual	50

## CALIDAD DE MOBILIARIO

En relación con la calidad del mobiliario, Hernández menciona lo siguiente [1]:

“Si las sillas y mesas en las aulas no tienen las dimensiones adecuadas para la talla de los alumnos, éstos tendrán serias dificultades para realizar los trabajos escolares. Fisher (2000) menciona que estudios sobre laboratorios de ciencias indican que el desempeño de los estudiantes puede ser significativamente mejor, alrededor de siete por ciento, entre aquellos en escuelas con los mejores y los peores índices de calidad de mobiliario.”

La calidad del mobiliario no abarca solamente la importancia estética o la comodidad, sino un di-

seño que permita al estudiante realizar correctamente sus actividades y funciones dentro del aula, tomando en cuenta que será utilizado por diversos estudiantes y por un tiempo significativo.

## ESPACIO EDUCATIVO

Esta dimensión involucra tres aspectos: la amplitud, versatilidad y apariencia estética en los espacios escolares.

### AMPLITUD

Según Harker [11], un cuerpo importante de investigación sugiere que las dimensiones del espacio para el aprendizaje tienen una fuerte correlación con el desempeño estudiantil, y que la reducción de los grupos escolares mejora el aprendizaje, en particular en educación primaria. Sin embargo, difícilmente se podría precisar cuáles son los tamaños de grupo y de escuela ideales para los mejores rendimientos.

### VERSATILIDAD

La forma del espacio educativo también es importante, dada la creciente necesidad de espacios flexibles de aprendizaje para aplicar estrategias pedagógicas, programas y tecnologías. “El proceso de mundialización económica requiere ambientes de aprendizaje funcionales al establecimiento de formas de enseñanza variadas que fomenten la curiosidad de los estudiantes, el aprendizaje autónomo y las habilidades sociales” [12].

Este indicador también hace referencia a la necesidad de flexibilidad en el aula, la cual implicaría el poder enseñar y aprender de distintas formas, como es el caso del uso de los diversos instrumentos tecnológicos y herramientas, como computadoras y diferentes equipos propios para el aprendizaje, por lo que es de suma importancia señalar el correcto diseño de instalaciones eléctricas en distintas zonas del aula.

### APARIENCIA ESTÉTICA

Siguiendo a Hernández [1], “Los efectos estéticos pueden ser analizados desde dos perspectivas: observando sus consecuencias directas desde el

principio de que los estudiantes logran mejores resultados dada la experimentación del orden encontrado en un ambiente estético mejorado o centrando sus efectos indirectos si se trata de un factor que despierta sentimientos y actitudes favorables para un mejor aprendizaje.”

## METODOLOGÍA

Para realizar la medición de las dimensiones y sus indicadores, se realizó una subdivisión de estos últimos, de modo que pueden medirse de manera cualitativa o cuantitativa.

**Tabla 5.** Mediciones Cuantitativas y Cualitativas

Dimensiones	Indicadores	Cuantitativas	Cualitativas
Confort físico en el aula	Confort térmico y ventilación	X	X
	Aislamiento acústico	X	
	Iluminación	X	X
	Calidad del mobiliario		X
Espacio educativo	Amplitud		X
	Versatilidad	X	X
	Apariencia estética		X

Para las mediciones cuantitativas, que incluyen la temperatura, velocidad del viento e iluminación acústica, se pueden utilizar instrumentos como el termohigrómetro, nanómetro, luxómetro y sonómetro, realizando las mediciones en el aula por lo menos en tres horarios distintos en los que se encuentra ocupada. Por último, el indicador de versatilidad puede evaluarse analizando el aula conforme a la cantidad de sus conexiones eléctricas. Para este punto se eligió como caso de estudio el aula I12 de la Facultad de Ingeniería, y se realizaron las mediciones entre febrero y abril.

En cuanto a la medición cualitativa, ésta se puede realizar mediante un análisis subjetivo de los participantes, refiriéndose a las percepciones que tienen los alumnos y profesores con respecto a las aulas en función de los indicadores anteriormente mencionados. Se partirá de dos vertientes: la primera es la realización y aplicación de una encuesta a los usuarios, seleccionando ciertos parámetros, y la segunda es la creación un grupo focal conformado por profesores y alumnos de distintos grados de la Facultad de Ingeniería en la UAQ. Por medio de ambas se pretende obtener los puntos críticos que requieren ser modificados en el modelo CAPFCE.

## RESULTADOS

Como se mencionó anteriormente, se eligió el aula I12 de la Facultad de ingeniería como caso de estudio para las mediciones cuantitativas, donde se colocó un termohigrómetro desde el 18 de febrero de 2019 hasta el 11 de abril de 2019, con el que se pudieron obtener los datos de temperatura y humedad.

**Tabla 6.** Mediciones de temperatura y humedad

Día	Temperatura	Humedad Mañana %	Temperatura (12:00-14:00)	Humedad Medio día %	Temperatura (18:00-20:00)	Humedad tarde %	Media Temp. °C	Media Humedad %
18-feb	9	40	27.4	34	25.3	37	18.2	38.5
19-feb	6	41	26.8	38	24.6	40	16.4	40.5
20-feb	6	41	26.4	38	25.1	39	16.2	40
21-feb	5	41	20	38	25	41	15	39.5
22-feb	4	40	17.8	37	21.3	39	12.65	38.5
25-feb	6	40	19.5	37	23.4	39	14.7	38.5
26-feb	5	40	17.8	37	21.8	39	13.4	38.5
27-feb	7	38	22.8	40	24.5	38	15.75	39
28-feb	7	41	25.8	38	25.4	36	16.4	38.5
01-mar	9	38	24.5	38	25.7	37	17.35	37.5
04-mar	9	38	25.7	38	25.2	36	17.35	37
05-mar	9	36	25	36	24.9	34	17	35
06-mar	7	39	25.6	40	24.7	40	16.3	39.5
07-mar	7	37	24.4	34	25.7	36	16.35	35.5
08-mar	10	36	26.5	24	24.2	33	18.25	34.5
11-mar	11	37	28	36	26.5	37	19.5	36.5
12-mar	10	34	26	37	24.9	37	18	35.5
13-mar	11	36	24	33	23.8	38	17.5	35.5
14-mar	9	38	23.7	34	24.6	38	16.8	36
15-mar	10	34	19.5	36	23.5	37	16.75	36.5
19-mar	8	37	22.8	34	23.3	39	15.65	36.5
20-mar	8	35	23.2	34	24.3	40	16.15	37
21-mar	7	41	23.1	36	24.4	39	15.7	37.5
22-mar	10	41	24.6	33	25.3	41	17.65	37
25-mar	7	41	21.5	36	24	39	15.5	38.5
26-mar	8	39	23	38	26.3	39	17.15	38.5
27-mar	6	38	21.8	38	27.3	38	16.65	38
28-mar	7	40	24	39	26.4	39	16.7	39.5
29-mar	7	39	24.8	40	26.9	39	16.95	39.5
01-abr	6	37	25.7	35	27.2	37	16.6	36
02-abr	8	39	25	36	26.4	38	17.2	37.5
03-abr	8	38	24.6	39	26.2	39	17.1	38.5
04-abr	9	40	25.3	37	27.1	37	18.05	28.5
05-abr	12	36	26.2	37	25.8	36	18.9	36.5
08-abr	11	39	24.2	36	24	37	17.5	37.5
09-abr	8	40	25	38	21.5	38	14.75	39
10-abr	7	40	26.5	36	23.8	36	15.4	38
11-abr	12	38	25	37	24.3	37	18.15	37.5

Al mismo tiempo, se realizó una encuesta a alumnos y profesores para capturar sus percepciones y obtener los indicadores más críticos a modificar en el aula y ver si coincidían con los datos medidos cuantitativamente; por último, se creó un grupo focal conformado por 8 integrantes, entre alumnos de licenciatura, maestría y profesores, para comparar y rectificar los datos arrojados de la entrevista. Y los resultados fueron los siguientes.

De los resultados obtenidos en la encuesta, la mayor cantidad de encuestados fue de estudiantes de arquitectura que cursan los grados de 4° a 8°, que pasan en el aula entre 6 y 8 hrs., mayormente (Figura 1) realizando actividades específicas véase Figura 2.

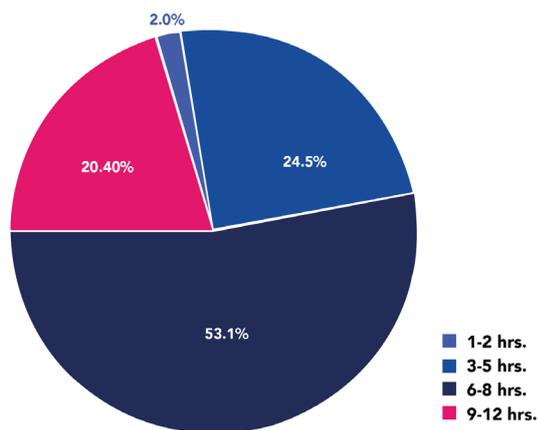


Figura 1. Horas transcurridas en el aula

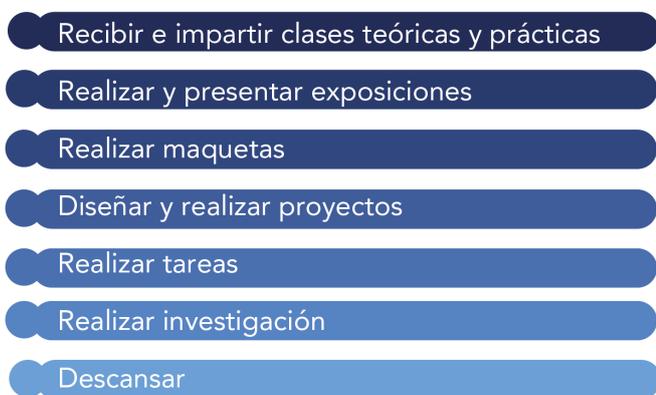


Figura 2. Actividades realizadas

El 90 % de los encuestados y del grupo focal piensa que las aulas no son confortables, la mitad percibiendo una temperatura confortable y el otro 50% sintiendo una temperatura cálida. De igual forma, el 86 % cree que el mobiliario no es el adecuado y nada confortable. Tales opiniones están representadas en la Fig. 3.

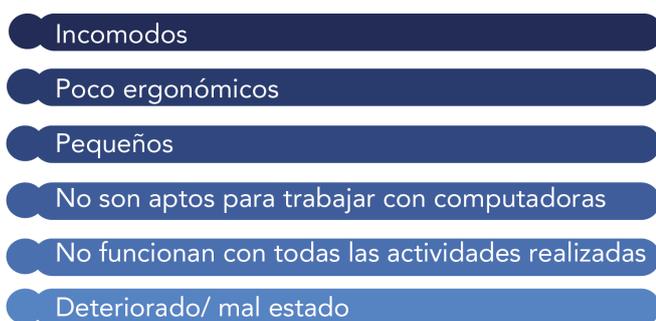


Figura 3. Opiniones respecto al mobiliario

Por último, se les cuestionó el sentimiento que les generaban las aulas, teniendo "fatiga" o "flojera" como respuestas frecuentes, seguidas por la generación de estrés (Figura 4), cuestión que se debería modificar en las aulas (Figuras 5 y 6).

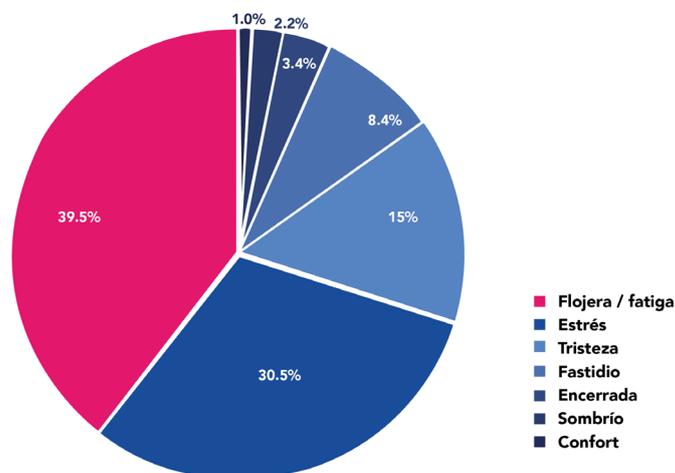


Figura 4. Sentimientos generados en el aula

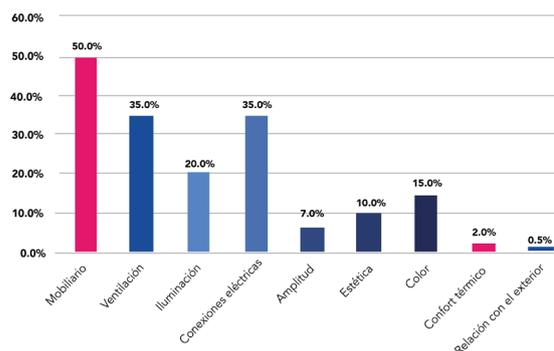


Figura 5. Modificaciones requeridas



Figura 6. Qué debería existir en el aula

Al analizar los puntos de temperatura y humedad, se determina que cumplen con los rangos de confort.

Se encontraron los puntos críticos arrojados por la encuesta y el grupo focal, teniendo como punto principal el mobiliario, el segundo punto fue la colocación de contactos eléctricos por diversos puntos del aula, ya que son insuficientes y su disposición es inconveniente, por lo que se les complica el correcto uso del equipo para gestionar las clases y materias, este factor forma parte del indicador de versatilidad del espacio; por último, se tiene el tema de la ventilación, para el que en realidad se tendrá que hacer un segundo análisis donde se considere la cuestión del diseño de las ventanas en las aulas, muchas de las cuales ya no se pueden abrir, y el mantenimiento de las mismas.

## CONCLUSIONES

Como anteriormente se menciona, los resultados arrojados son solo del análisis del aula I12 de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, utilizada como caso de estudio en el periodo invierno-primavera, por lo que no se evalúa en su totalidad el modelo de aula tipo CAPFCE a nivel nacional. Sin embargo, se cree que es importante aplicar las mediciones de cada dimensión de la habitabilidad educativa en las diversas escuelas, ya que, según diversos estudios realizados, los espacios influyen en la calidad educativa de las personas; por tal motivo, dicha investigación puede ser de utilidad para arquitectos o personas inmersas en el ambiente educativo para realizar un análisis en los lugares educativos de su interés, y estudiar y comprender si en realidad existe alguna mejoría en la calidad educativa, con el fin de crear una apertura a futuras líneas de trabajo.

Es importante que los arquitectos se enfoquen en el diseño centrado en las personas y en la habitabilidad de los espacios; asimismo, comprender que aunque el diseño del modelo CAPFCE ha sido favorecedor en distintos aspectos y aplicable a lo largo de los años, requiere ser analizado en cuanto a la habitabilidad del espacio y, si los resultados no son los óptimos, realizar las modificaciones necesarias para mejorar la habitabilidad, ya que es un espacio que alberga estudiantes durante 8 horas o más, y es donde se forja en gran parte el futuro de nuestro país.

La importancia de la subjetividad de los participantes es imprescindible, especialmente la de los

alumnos, ya que es la fuente más cercana e idónea para medir las interacciones y circunstancias suscritas al aula, más allá de mediciones como la temperatura y humedad. La arquitectura no es el edificio en sí, sino la interacción que crea y vive entre el espacio y el participante.

Aunque las mediciones sean locales, este es un paso para la apertura a la creación de metodologías válidas para la modificación del modelo CAPFCE para los diversos contextos nacionales, considerando características mínimas comunes independientes de la zona y tomando en cuenta que, aunque sea un modelo tipo, podrá haber ciertas modificaciones dependiendo del contexto en el que se requiera aplicar; por ello, un análisis de este tipo ayudaría a tener un mejor acercamiento e interacción de la arquitectura con los usuarios, logrando así la habitabilidad necesaria y requerida para mejorar el aprendizaje y calidad de vida de los usuarios.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo durante todo el proyecto de investigación presentado en el presente artículo.

A los directivos de la Universidad Autónoma de Querétaro, por permitirnos realizar la investigación en las aulas y por el espacio brindado para el desarrollo del artículo.

Y por último, pero no menos importantes, a los alumnos y profesores de la Universidad Autónoma de Querétaro, por brindarnos un poco de su tiempo y disposición dentro de la investigación, los cuales fueron factores muy importantes en ella.

## REFERENCIAS

- [1] J. M. Hernández, "Habitabilidad educativa de las escuelas. Marco de referencia para las escuelas", *Sinéctica*, vol. 35, pp. 1-14, Dic 2010.
- [2] Barrios y D.M Ramos, "El ser humano excluido del diseño del entorno individual y social", en *La ciudad un espacio para la vida, miradas y enfoques desde la experiencia espacial*, D. Sánchez y C. Egea. México D.F.: UNAM, 2013, pp. 79-97.
- [3] S. Moreno, "La habitabilidad urbana como condición para la calidad de vida". *Palapa*, vol. III, no. II, pp. 47-54, Julio- Dic. 2008.

- [4] "Proposals for enhancing PISA data on the physical learning environment of schools", OCDE-PISA, París, Doc.de trab., 23a reunión de la Junta de Gobierno, 2007.
- [5] J. Hernández y H. Robles. "Habitabilidad educativa de la escuela y su entorno. Marco de referencia para la generación de indicadores", INEE, México, 2008.
- [6] ISO 7730, "Moderate thermal environments. Determination of the PMV and PPD indices and specifications of the conditions for thermal comfort", 2006.
- [7] "Guía técnica para la evaluación y prevención de los riesgos relativos a la utilización de los lugares de trabajo", Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo (INSHT), RD, 486/1997, BOE nº 97 23-04-1997.
- [8] J. Buckley, M. Schneider y Y. Shang, "The Effects of School Facility Quality on Teacher Retention in Urban School Districts", Chestnut Hill, MA: Lynch School of Education/ National Clearinghouse for Educational Facilities, 2004.
- [9] ISO R-1996, "Acoustics- Description and measurement of environmental noise", 2003.
- [10] UNE 74-022. "Valoración del ruido en función de la reacción de las colectividades", Instituto Nacional de Racionalización y Normalización: IRANOR, Madrid, 1997.
- [11] R. Harker, "Class size and student attainments: Research and strategic implementation", Manuscrito, College of Education, Massey University, 2004. Available: <http://www.aare.edu.au/03pap/har03248.pdf>.
- [12] R. Fielding. (2006, Oct 26), "Best Practice in Action: Six Essential Elements that Define Educational Facility Design", CEFPI Planner, Available: <http://www.designshare.com/images/SixEssentialElementsIllustrated.pdf>.



La presente edición de  
*PädiUAQ Revista de Proyectos y Textos Académicos  
en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*  
fue maquetada por Yessica Guzmán de la Paz  
en la Coordinación de Diseño e Imagen de la Facultad de Ingeniería  
de la Universidad Autónoma de Querétaro.  
El cuidado estuvo a cargo de Soid Lazlo y Daniela Pérez  
Se publicó en diciembre de 2019.  
en Santiago de Querétaro, México.

