PädiUAQ 5

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

AÑO 3, **NÚMERO** 1

JUNIO 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

PädiUAQ. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 3. Núm. 001, junio del 2019, es una publicación semestral editada y publicada por la Universidad Autónoma de Querétaro, División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.
Centro Universitario, Cerro de las Campanas s/n, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00, ext. 7035.

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo
No. 04-2017-040313301800-203
ISSN: En trámite

Ambos registros están en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD
DE INGENIERÍA

COMITÉ EDITORIAL

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD
DE INGENIERÍA

ÍNDICE

LILIA P. AKÉ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

LAKE86@GMAIL.COM

01

¿QUIÉN ES EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS? CONTRASTE ENTRE CREENCIAS E INVESTIGACIONES SOBRE SU FORMACIÓN

WHO IS THE MATHEMATICS TEACHER?
CONTRAST BETWEEN BELIEFS AND RESEARCHES IN MATHEMATICS TEACHER'S TRAINING

RESUMEN

La formación inicial y continua del profesorado de matemáticas es una cuestión abierta en las investigaciones internacionales en Didáctica de la Matemática, dada la complejidad de los diferentes factores que intervienen en los procesos formativos. En México, este tema es difuso, ya que la preparación de estos profesionales de la enseñanza de las matemáticas depende de diversas instancias y no existe un consenso sobre un marco formativo al que debieran ceñirse, pese a las múltiples propuestas desde la investigación sobre su conocimiento matemático y conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. De este modo, los profesores de matemáticas presentan diferentes perfiles que se acogen a diversos planes de estudio de formación inicial y continua. Bajo esta realidad y a partir de la exposición del estado del arte, se abre paso a rutas reflexivas y contraposiciones entre las creencias sobre la formación del profesorado y las investigaciones. Se concluye que a pesar de los 30 años de investigación en el campo de la formación de profesores aún no se tiene injerencia en los planes y programas formativos, y los investigadores en Didáctica de la Matemática tampoco inciden como formadores de profesores. Esto obstaculiza la estructuración de una identidad y desarrollo profesional docente en esta disciplina, y los alcances para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Formación de profesores, enseñanza de las matemáticas, conocimiento matemático

ABSTRACT

The initial and continuous formation of mathematics teachers is an actual question in international researches in Didactics of Mathematics given the complexity of factors that intervene in the training processes. In Mexico, it also becomes diffuse because the training depends on various instances and there is not an accepted agreement on a framework to which they should adhere, despite the multiple proposals from researches in mathematics knowledge and knowledge for the mathematics teaching. In this way, mathematics teachers present different profiles that are included in various curricula of initial and continuing education. Under this reality and from the exhibition of the state of art, it opens the way to reflexive paths and oppositions between beliefs about teacher training and research. It is concluded that despite 30 years of research in the field of teacher training, there is still no influence in training plans and programs, and researchers in Didactics of Mathematics do not train teachers either. This makes difficult the identity and professional development in this area, and the scope for improving the teaching and learning of mathematics.

Keywords: Teacher training, mathematics teaching, mathematical knowledge

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas es un problema que es de especial interés para los investigadores y que se ha conformado como campo de investigación desde hace más de 30 años. Desde la investigación en Didáctica de la Matemática y desde una perspectiva internacional, los estudios sobre el profesorado de matemáticas se realizan desde diferentes aristas, cuyo objetivo es caracterizar la profesión docente para esta disciplina: sobre el conocimiento que se desarrolla en su formación inicial y continua, sobre su conocimiento matemático, sobre sus competencias didáctico-matemáticas para ejercer la docencia, sobre su desarrollo profesional y sobre su identidad profesional.

Respecto a los estudios centrados en el conocimiento del profesor, se reporta que no existe un conocimiento profesional definido y específico que caracterice la profesión del docente de matemáticas. No existe un consenso en los elementos que debieran considerarse para su preparación inicial y durante su formación continua cuando se encuentra en ejercicio de su práctica profesional. Ante esta realidad global surge la necesidad de indagar, reflexionar y discutir sobre ¿qué conocimientos deben ser promovidos durante la formación inicial de los profesores para que puedan llevar a cabo su práctica de enseñanza? La pregunta es pertinente debido a que "el profesor es el encargado principal de enseñar y, es él quien ha de afrontar profesionalmente las tareas que su labor conlleva, para lo cual debe poseer un conocimiento profesional" (Sosa, 2011, p. 11).

De hecho, la profesionalización del docente de matemáticas se encuentra ligada a su formación, por lo que es necesario definir los conocimientos específicos del docente que lo distinguirá de las demás profesiones (Lorenzo, 1998). Por esta razón, el docente en general como profesional de la enseñanza y en particular de las matemáticas debe adquirir conocimientos específicos durante su formación inicial y tener una progresión coherente durante su formación continua.

Estas cuestiones referentes a los conocimientos del profesor forman parte de la problemática que constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática y que se discute en el presente escrito.

Después de esta introducción, en el segundo apartado se destacan algunas creencias sobre la formación de maestros de matemáticas para la educación básica, confrontándolas con las realidades expuestas en las investigaciones. De manera similar en el tercer apartado se desarrolla el ser y deber ser de la formación del profesorado a nivel medio superior o bachillerato. En el apartado cuatro se discute sobre la formación proporcionada a los docentes de matemáticas desde la perspectiva de las maestrías profesionalizantes. Finalmente se concluye con algunas reflexiones y sugerencias.

LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DEL MAESTRO DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

La discordancia entre investigación y práctica es una asignatura pendiente entre los investigadores y los docentes de matemáticas pues muchos de los resultados obtenidos en las pesquisas no tienen una incidencia directa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este escenario se repite en el ámbito de la formación de profesores. En México la formación de docentes en esta disciplina continúa siendo un desafío de cierto modo porque existen tensiones entre las creencias sobre lo que "debe saber" el profesor de matemáticas y lo que resultados de investigaciones aportan para el mismo fin. De un modo generalizado, como lo plantean García, Azcárate y Moreno (2006), las creencias son ideas personales, conocimientos motivados por lo empírico y lo intuitivo ante ciertas situaciones, por lo que las justificaciones a las mismas carecen de rigor o respaldo científico o académico. Es en este sentido que se plantea que aún prevalece la creencia generalizada de que un conocimiento matemático es suficiente para ser docente de matemáticas, es decir, la premisa predominante es que la única cualidad necesaria para ejercer la enseñanza radica en ser un "buen matemático (a)" y "saber muchas matemáticas" (Flores, Moreno y Sánchez, 2001). Parte de esta creencia tiene su origen en que no existe un programa de formación homogéneo en el país para la formación docente para los diferentes niveles educativos. Aunque existen investigaciones realizadas en el área de la formación del profesorado de matemáticas, las propuestas no son consideradas para la elaboración de planes de estudios de las licenciaturas y posgrados orientadas a la formación de profesores en México (Dolores, 2013; Hernández, Sosa y López, 2013).

En referencia a esta situación, por un lado, la formación inicial de maestros para preescolar y primaria ha sido tarea de las Escuelas Normales, por otro, la formación de los maestros de secundaria está a cargo de las Escuelas Normales Superiores. Así, de manera general la formación de los maestros de la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) en México es atendida primordialmente por la Escuela Normal para Maestros, la cual posee el estatus de institución de educación superior (Navarrete-Cazales, 2015) y cuyo planes y programas de formación inicial presentan el mismo enfoque. Los maestros de preescolar y de primaria tienen una formación generalista pues imparten diversas áreas del conocimiento incluyendo el aspecto matemático. Mientras que los profesores de secundaria tienen líneas terminales de formación, es decir, obtienen una licenciatura de maestro en educación secundaria especializado en matemáticas, por ejemplo. Lo limitado del estudio de las matemáticas en estos planes formativos motiva la creencia de que estos profesionales de la enseñanza para la educación básica no tienen un conocimiento profundo de la disciplina en el sentido planteado por Ma (1999) y Tzur (2018). El conocimiento de las didácticas específicas es limitado y particularmente existen conflictos para desarrollar un pensamiento matemático, dado que el propio no está consolidado (Parada, Figueras y Pluvinage, 2009). Empero, estas restricciones tienen parte de su explicación en las investigaciones dado que se ha identificado que, de manera general, el profesorado de estos niveles educativos se forma bajo un enfoque pedagógico sin consolidar el aspecto disciplinar, ofreciendo una formación que, según Figueroa (2000), está "caracterizada por tender a homogenizar prácticas y discursos [...] donde la búsqueda de la receta de cómo ser maestro parece ser la tónica del enfoque positivista" (p. 120). Según la autora, también se precisa imbricar a este hecho que "las prácticas pedagógicas que se le demandan al estudiante en formación, no siempre se corresponden con las del ejercicio real de la práctica futura" (Figueroa, 2000, p. 122). Esto no parece mejorar con la formación continua de los docentes de estos tres niveles educativos, la cual de manera esencial es atendida por los Centros de Actualización para Maestros. Según Santibánez (2012), el número de cursos relacionados con la materia disciplinar es limitado, tanto los cursos y talleres de formación continua, pese a focalizarse en la práctica. Además, se presenta un particular conflicto con los docentes de secundaria ya que evitan centrarse en aspectos disciplinares porque "existe una renuencia a reconocer las deficiencias en sus conocimientos de la materia disciplinar" (Santibáñez, 2012, p. 320). La autora apunta que, al considerarse a sí mismos "especialistas", existe una tendencia a no aceptar la falta de conocimientos acerca de su asignatura y más aún si son maestros que enseñan una materia distinta de su campo de especialización. Lo reportado en las investigaciones contrasta con la creencia que señala las falencias de los maestros de educación básica para enseñar matemáticas, ya que no es posible solicitar una enseñanza de las matemáticas "idónea" si no se les forma para tal fin, es decir, dichas falencias existen porque la formación del profesor de matemáticas de la educación básica no es congruente con lo que se pretende alcanzar con los estudiantes en términos de aprendizajes y competencias matemáticas.

LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Para la educación media superior (bachillerato), la demanda de profesores de matemáticas ha sido atendida por profesionales egresados de las universidades o centros de educación superior. Individuos con una profesión especializada afín a las matemáticas, pero no necesariamente formados como profesores de matemáticas, más bien su formación inicial está en el campo de la ingeniería, matemática, contaduría, actuaría, economía o relativas a otras profesiones, por lo que se hacen profesores de matemáticas a través de los años de práctica. De esta manera, el trabajo del docente de matemáticas para este nivel educativo, a diferencia del contexto normalista, no cuenta con el reconocimiento social de una profesión, es decir, los profesionales con injerencia en la enseñanza de las matemáticas creen que para ser profesores no se necesita una formación profesional específica, incluso estos docentes de bachillerato se reconocen a sí mismos a partir de su profesión universitaria y no propiamente como docente de la disciplina. No se pone a discusión que el conocimiento matemático que estos profesionales poseen es situacional y contextual a la profesión para la cual fueron formados, es decir, corresponden a planes y programas específicos y naturalmente dista del conocimiento matemático escolar que se desarrolla (o se debiera desarrollar) en el bachillerato. Esta realidad es irrelevante al momento de contratar al profesorado de matemáticas de este nivel educativo, debido a otra creencia: si estos profesionales "saben algún tipo de matemáticas" y las "saben bien" entonces "enseñan mejor" que aquellos que "no saben bien" las matemáticas. Esta idea se plantea en el mismo sentido que menciona Wu (2018) al referir que una vez que los profesores saben las matemáticas (de la universidad), de alguna manera sabrán mejor las matemáticas de los niveles educativos inferiores (matemáticas escolares) y, por lo tanto, enseñarán mejor. Nada más lejano a la realidad, pues diversas investigaciones sugieren la necesidad de un conocimiento matemático especializado (Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009) y competencias didáctico-matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) para el ejercicio de la docencia en cada nivel educativo.

Se vuelve necesario poner a discusión que estos profesionales no poseen una formación pedagógica, o bien, una didáctica específica encaminada a la docencia porque en los planes y programas de estudio de ingenieros, matemáticos, contadores, actuarios, economistas, etcétera, no se ofrece algún contenido (como si unos pocos fueran suficientes) para ese propósito. Es necesario cuestionar ¿por qué en las licenciaturas afines a las matemáticas, el ejercicio de la docencia se ofrece en muchas ocasiones como salida laboral? para que la docencia no sea desempeñada a luz de la experiencia que estos profesionales tuvieron como alumnos.

La formación continua de estos profesores que inciden en el nivel medio superior todavía es más clara-oscura que su formación inicial. Al respecto, autores como Sosa y Ribeiro (2014) señalan que: (1) la formación continua corresponde a cursos de capacitación y actualización puntuales y en ocasiones más aislados que hilados conceptualmente, (2) existe la ausencia de un organismo o institución que vigile, reglamente y monitoree el seguimiento de los cursos ofrecidos para su formación continua; y finalmente, (3) no hay control de calidad de los programas de capacitación y actualización, sobre todo no hay seguimiento de su efectividad en términos de la mejora de la práctica docente y de los aprendizajes de los alumnos.

Lo que se expone refleja puntos de tensión que precisan ser atendidos si se pretende desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático congruente con las exigencias y fines de la educación matemática desde una perspectiva internacional.

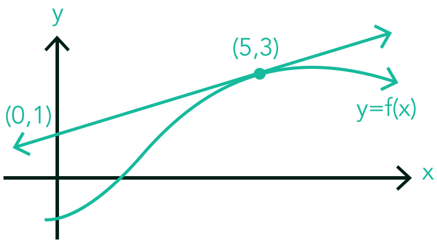
FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE POSGRADOS PROFESIONALIZANTES

A diferencia de otros contextos educativos donde el docente de matemáticas, de secundaria y bachillerato es matemático con estudios de posgrado en Didáctica de la Matemática (Vega-Gil, 2005; Gómez-Chacón, 2005; Dumas-Caré, Furió-Mas y Garret, 1990), en México los posgrados orientados por la disciplina son escasos y no son requisito esencial para ejercer la docencia.

A raíz de este panorama, en el contexto mexicano han emergido opciones para la profesionalización de los docentes de matemáticas, generalmente enfocadas según el nivel educativo. Este es el caso de las maestrías profesionalizantes, en sus diferentes denominaciones "Matemática Educativa" (Universidad Autónoma de Zacatecas), "Educación Matemática" (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla), "Docencia de las Matemáticas" (Universidad Autónoma de Guerrero) y "Didáctica de las Matemáticas" (Universidad Autónoma de Querétaro). El común denominador de estos posgrados profesionalizantes es contribuir de manera positiva tanto en los aspectos formativos del profesor de matemáticas como en sus procesos de enseñanza y aprendizaje. El eje articulador es la disciplina científica de la Matemática Educativa, como es conocida en México, y que en el mundo anglosajón de ha denominado Mathematics Education. En Europa esta disciplina emergió como Didáctica de las Matemáticas en España, Didactique des Mathématiques en Francia, Didaktik der Mathematik en los países de habla germánica. Sin embargo, esta iniciativa no es generalizada, es de carácter opcional para los docentes y aún faltan investigaciones que permitan medir los alcances de esta formación profesionalizante en el aula de matemáticas.

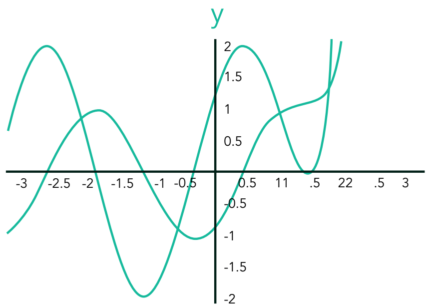
Desde la investigación, la formación inicial del profesor de matemáticas puede ser (o debiera ser) concebida y estructurada para desarrollar un conocimiento profesional especializado, dicho conocimiento ha de distinguirse del conocimiento académico de los investigadores en Didáctica de la Matemática y del sentido común propio de la mayoría de las personas (Ponte, 2012). Existen avances en la delimitación y definición de estos conocimientos y su naturaleza (Godino 2009; Ball, Thames y Phelps, 2008; Montes, Contreras y Carrillo, 2013). A esto se suma las aportaciones por área del conocimiento que pueden ser desarrolladas con los profesores de matemáticas. Por ejemplo, las siguientes actividades que Badillo, Azcárate y Font (2011) desarrollaron con profesores de matemáticas de secundaria para determinar sus niveles de comprensión de $f'(a)$ y $f'(x)$ (véase Figura 1) y, que es posible adaptarlas a través de procesos instruccionales específicos a la formación de profesores para el desarrollo de competencias matemáticas y didáctico-matemáticas.

No hay suficientes investigaciones que discutan y evidencien sobre si este tipo de actividades tienen presencia en la formación del profesorado, más aún, en los programas formativos de las maestrías profesionalizantes en México. Sobre todo, quiénes son los que fungen como formadores de estos profesores en el marco de dichos posgrados, este aspecto que al contrastarlo con la realidad parece no tener importancia. Sin embargo, de acuerdo con Llinares (2014), el papel del formador de profesores es crucial para exteriorizar el acervo de aportaciones entre la investigación (en Didáctica de la Matemática) y la práctica para hacerlas parte de la actividad profesional del docente. De este formador depende el qué y cómo aprenden los profesores de matemáticas en formación y en servicio, y el modo en el que se retroalimentan las decisiones de la práctica de enseñanza a partir del conocimiento generado por la investigación. Bajo esta perspectiva la necesidad de que los formadores de profesores sean investigadores adquiere sentido y se justifica.



a)

La recta L es tangente a la gráfica de y = f (x) en el punto (5,3).
Encuentra f(5). Explica y justifica cada paso en la soluci n.
Encuentra f ′(5). Explica y justifica cada paso en la solución.



b)

Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta la respuesta.

Figura 1. Actividades para la evaluación del concepto de derivada en profesores.
Fuente: Tomado de Badillo, Azcárate y Font, 2011, p. 204.

CONCLUSIÓN

Caracterizar el conocimiento profesional específico para la enseñanza de las matemáticas permitirá un desarrollo profesional y contribuirá al alcance de una identidad profesional para los docentes. En este punto es en el que la educación continua juega un papel relevante bajo el reconocimiento que “dentro de este conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas aparece un componente dinámico, que se desarrolla en el desempeño y ejercicio de su tarea profesional” (Flores, 1998, p. 41). Es por esta razón que el desarrollo profesional docente en matemáticas no es estático, sino que es dinámico y ha de poner en conjugación los elementos que intervienen “para”, “en” y “de” la práctica educativa del docente en formación inicial o continua que le permiten construir en los estudiantes el conocimiento matemático (Sowder, 2007). Es necesario proporcionar un marco para que los docentes construyan sus propias ideas de cómo ser y cómo actuar, que reúna tanto aspectos individuales como sociales, incluyendo dimensiones profesionales como su conocimiento profesional y personales como sus creencias y experiencias, lo que sería construir su identidad profesional (Losano y Trindade-Cyrino, 2017). Esta es la necesidad que atienden las investigaciones en Didáctica de la Matemática en el campo de la formación del profesor y que han puesto de manifiesto la complejidad de los procesos de aprendizaje de las matemáticas de los profesores y del desarrollo de sus competencias para el diseño, desarrollo y evaluación de situaciones de enseñanza que promuevan el aprendizaje de las matemáticas en sus estudiantes. Mientras no se encuentre un marco teórico-metodológico para desarrollar en los profesores el conocimiento del contenido que necesitan para lograr un nivel de competencia en la enseñanza de las matemáticas, coincidimos con Wu (2018) cuando afirma que en ese escenario no existe (o no se ha encontrado aún) la formación docente en matemáticas (aunque existan programas para tal fin).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education. Vol. 59*(5), pp. 389-407.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f′(a) y f′(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias. Vol. 29*(2), pp. 191-206.

Dolores, C. (2013). La formación de profesores de matemáticas en México desde el currículum oficial. *Matemática Educativa: La formación de profesores.*Guerrero, México: Díaz de Santos Ediciones, S. A, pp. 13-25.

Dumas-Caré, A., Furió-Mas, C. y Garret, R. (1990). Formación inicial del profesorado de ciencias en Francia, Inglaterra y Gales, y España. Análisis de la organización de los estudios y nuevas tendencias. *Enseñanza de las Ciencias. Vol. 8*(3), pp. 274-281.

Figueroa, L. M. (2000). La formación de docentes en las escuelas normales: entre las exigencias de la modernidad y las influencias de la tradición. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Vol. 30*(1), pp. 117-142.

Martínez, P. F. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (17), pp. 37-50.

Flores, P., Moreno, A. J., y Sánchez, J. M. (2001). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y oposiciones. *Conferencia en Investigación en el Aula de Matemáticas: La función docente*. Granada, España: Depto. de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 9*(1), pp. 85-116.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Vol. 20*, pp. 13-31.

Godino, J. D, Giacomone, B., Batenero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática. Vol 31*(57), pp. 90-113.

Gómez-Chacón, I. (2005). Tendencias y retos en formación de profesores en Matemáticas. Vivir el presente y crear futuro en la cooperación Europa-Latinoamérica. *Educación Matemática y Formación de Profesores*. Bilbao, España: Universidad de Deusto, pp. 15-32.

Hernández, J. Sosa, L. y López, I. (2013). Los formadores de profesores como punto de inflexión en la educación. *Segundo Congreso Latinoamericano de Ciencias Sociales: Las crisis en América Latina, diferentes perspectivas y posibles soluciones*. Zacatecas, Zacatecas: UAZ.

Lorenzo, J. A. (1998). El profesor y su dimensión profesional. *Revista complutense de educación. Vol. 9*(1), pp. 141-163.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática. Vol. 26*, pp. 31-51.

Losano, L. y Trindade-Cyrino, M. C. (2017). T*he Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World: ICME13-Topical-Survey*. Switzerland: Springer, pp. 25-31.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Montes, M., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. *Investigación en Educación Matemática XVII*. España: Servicio de Publicaciones, pp. 404-410.

Navarrete-Cazales, Z. (2015). Formación de profesores en las Escuelas Normales de México. Siglo XX. *Revista historia de la educación latinoamericana. Vol. 17*(25), pp. 17-34.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Teoría, critica y práctica de la educación matemática*. Barcelona, España: Graó, pp. 83-98.

Parada, S., Figueras, O. y Pluvinage, F. (2009). Hacia un modelo de reflexión de la práctica profesional del profesor de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM, pp. 355-366.

Santibañez, L. (2007). Entre dicho y hecho. Formación y actualización de maestros de secundaria en México. *Revista mexicana de investigación educativa. Vol. 12*(32), pp. 305-335.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral. Huelva, España.

Sosa, L. y Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa. Vol. 1*(1), pp. 1-15.

Sowder, J. (2007). The Mathematical education and the development of teachers. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning. Vol. 1*, pp. 157-224.

Tzur, R. (2008). Profound awareness of the learning paradox (PALP). T*he Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. Sense Publishers, pp. 137-156.

Vega-Gil, L. (2005). Los sistemas educativos europeos y la formación de profesores. Los casos de Francia, Reino Unido, España y Finlandia. *Revista de Educación. Vol. 336*, pp. 169-187.

Wu, H. H. (2018). The content knowledge mathematics teachers need. *Mathematics Matters in Education. Springer, Cham*, pp. 43-91.

JOSÉ MARCOS LÓPEZ-MOJICA
MARÍA GUADALUPE ORDAZ-ARJONA

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

02

REFLEXIONES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS ANTE LA INCLUSIÓN

MODELLING APPLIED IN GEOMETRY AND CALCULUS EXAMPLES

RESUMEN

En el presente documento se realizan algunas reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas ante el fenómeno de la educación inclusiva en México. Se perfila un acercamiento metodológico para el diseño de actividades que permitan desarrollar un pensamiento matemático, dada la diversidad en el aula. Además, se establece una postura respecto a qué es el conocimiento inclusivo del profesor de matemáticas. De la misma manera, con ejemplos de actividades se determina una alternativa de enseñanza diferenciada que reconoce la discapacidad y los procesos cognitivos de los niños, para así promover la inclusión de alumnos en el aula de educación regular.

Palabras clave: matemáticas escolares, educación inclusiva, geometría, álgebra.

ABSTRACT

In this document some reflections are made on the initial training of mathematics teachers in the face of the phenomenon of inclusive education in Mexico. A methodological approach is outlined for the design of activities that allow developing a mathematical thought, given the diversity in the classroom. In addition, a position is established regarding what is the inclusive knowledge of the mathematics teacher. At the same time, with examples of activities, a differentiated teaching alternative is determined that recognizes disability and cognitive processes of children, to promote the inclusion of students in the regular education classroom.

Keywords: school mathematics, inclusive education, geometry, algebra.

INTRODUCCIÓN

La Secretaría de Educación Pública de México en el 2016 realizó una reforma educativa, en la cual se tomaron como uno de los cinco ejes para el funcionamiento del sistema educativo a la inclusión y la equidad (SEP, 2016). Particularmente se señala que "la escuela debe constituir un espacio incluyente, en el que se practique la tolerancia y no se discrimine por origen étnico, género, discapacidad, religión, orientación sexual o cualquier otro motivo. Un espacio donde se valore la diversidad" (SEP, 2016, p. 63).

Sin embargo, ante ello, no se deja claro cuál es el enfoque en el que se sustentará la atención a la diversidad, pues en su discurso aparecen más referencias al término "inclusión" que al de "educación inclusiva", como lo menciona García-Cedillo (2018). Este mismo autor explica que en momentos se expresa identificar y eliminar barreras que los alumnos pudieran tener, pero a la vez señala la necesidad de ofrecer mayores recursos educativos a la población en condiciones de vulnerabilidad.

Además, el García-Cedillo añade que el modelo de atención que predomina durante la práctica en las escuelas regulares es el de "integración educativa", a pesar de que en el discurso de la SEP (2016) se señala a la educación inclusiva como modelo. La integración consiste en "identificar las NEE [Necesidades Educativas Especiales] que presentan algunos niños, precisar el tipo de apoyos que requieren y gestionar su dotación, sea en la forma de adecuaciones de acceso o en forma de adaptaciones curriculares" (p. 54). Debido a la desarticulación entre lo señalado en el modelo educativo y lo que sucede en la práctica dentro de las escuelas (Flores y García, 2016), se puede hablar entonces de un estancamiento de los procesos de inclusión (García-Cedillo, 2018).

En los últimos diez años se ha reflejado una creciente incorporación de alumnos con necesidades educativas especiales, asociadas a una discapacidad, en las aulas de escuelas regulares (García y Romero, 2016). Esto ha provocado una inquietud en los profesores titulares, pues ahora deben prepararse para acercar el contenido que marcan el plan de estudio al alumnado con o sin discapacidad. Algunas investigaciones como la de Flores y García (2016) señalan que los maestros no proporcionan los apoyos educativos a estos alumnos y dejan la atención a los profesionales de la educación especial en su servicio de USAER (Unidades de Servicios de Apoyo a la Educación Regular).

De lo anterior es claro que existe una problemática respecto a la atención de los alumnos con NEE, asociadas a una discapacidad en la educación primaria básica, por lo tanto, ¿qué sucede con los que logran acceder al nivel secundaria?, específicamente, ¿cómo es la atención respecto a lo que señala el currículo de matemáticas?, ¿el profesor de matemáticas posee un conocimiento inclusivo que permita el desarrollo del pensamiento matemático de niños con estas características?

Sin duda, las interrogantes anteriores obligan a reflexionar sobre la formación inicial de los profesores de matemáticas. Aké y Vargas (2015), además de señalar una carencia en investigaciones que documenten sobre cómo preparar a profesores de esta área ante la inclusión educativa, justifican la necesidad de colaboración entre los profesores de educación especial y matemáticas para aterrizar el contenido necesario para su formación.

El investigar sobre las características del conocimiento inclusivo del profesor de matemáticas e identificar los procesos cognitivos de los niños con discapacidad permitirán establecer un marco de referencia para la construcción de tareas matemáticas bajo el enfoque inclusivo. Por lo que desde la matemática educativa es necesario comenzar a reflexionar sobre alternativas de enseñanza diferenciadas (Florian, 2010) que promuevan una educación de calidad.

LA INCLUSIÓN Y LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Es bien sabido que uno de los agentes principales en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el profesor. Por lo que diversas investigaciones se han centrado en analizar la formación que requieren. De acuerdo con Dolores (2013) necesita una formación profesional que le permita desarrollar competencias para propiciar el aprendizaje de las matemáticas: dominar el saber matemático, conocer cómo aprenden los estudiantes, y diseñar métodos, procedimientos y medios didácticos que posibiliten el aprendizaje.

De manera tradicional la formación de profesores de matemáticas a nivel secundaria ha sido atendida por las escuelas normales superiores, donde el énfasis recae en el desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos (Elizarrarás, 2018). Para el nivel de bachillerato y superior, los profesores de matemáticas son egresados de universidades o centros de educación superior, no necesariamente formados como profesores de matemáticas, es decir, con perfiles de ingenieros, matemáticos, contadores, actuarios o de otras profesiones relacionadas con las matemáticas. Estos profesionistas se hacen profesores de matemáticas en la práctica (Dolores, 2013).

Ante la evidente problemática, han surgido programas de formación de docentes de matemáticas en México. Estos programas educativos se pueden agrupar en tres categorías: Licenciaturas en Educación con especialidad en Enseñanza de las Matemáticas, Licenciaturas en Matemáticas con orientación en Matemática Educativa y Licenciaturas en Matemática Educativa (Dolores y Hernández, 2013). De la clasificación anterior, en un estudio reciente se pudo identificar que sólo tres programas educativos han comenzado a contemplar unidades de aprendizaje relacionadas a la inclusión (López-Mojica, Aké y Hernández, 2019), los cuales son 1) La Licenciatura en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Baja California que ofrece la materia Educación, Diversidad e Inclusión como parte del bloque obligatorio. Este programa corresponde a la categoría de Licenciaturas en Educación con especialidad en Enseñanza de las Matemáticas. 2) La Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Colima presenta una materia optativa denominada Matemáticas y Educación Especial y pertenece a las licenciaturas en educación. 3) La Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán también cuenta con una materia optativa llamada Enseñanza de las matemáticas en ambientes de inclusión educativa. Esta pertenece a las Licenciaturas en Matemática.

Si bien los tres programas presentan ese acercamiento a la inclusión, aún no es clara la postura sobre ésta. A lo más que presentan son generalidades en contenido sobre la inclusión educativa, sin tomar como referencia elementos sobre el aprendizaje de las matemáticas de personas con discapacidad. Esto propiciaría profesores de matemáticas sin preparación en las NEE y la desvinculación con la reflexión sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas a personas con discapacidad o aptitudes sobresalientes, lo que limitaría entonces su conocimiento inclusivo.

CONOCIMIENTO INCLUSIVO Y PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Al iniciar con la reflexión sobre el conocimiento inclusivo, es necesario hacer la distinción entre integración educativa y educación inclusiva. Para García *et al.* (2000), la integración educativa es un proceso con el cual se busca que los alumnos con necesidades educativas especiales puedan estudiar en las escuelas regulares, ofreciéndoles apoyos educativos según sus particularidades. Mientras que para Booth y Ainscow (2002), la educación inclusiva "es un proceso que busca eliminar las barreras para el aprendizaje y la participación que enfrentan los alumnos para ofrecerles a todos y todas, una educación de calidad" (García-Cedillo, 2018, p. 51). En términos generales, la educación inclusiva es "el proceso de cambio en las escuelas que permita ofrecer una educación de calidad para todos los estudiantes. Pero también plantea la necesidad de ofrecer los apoyos específicos que precisan los estudiantes con necesidades educativas especiales con y sin discapacidad" (García *et al.*, 2013, p. 5).

El término de Necesidades Educativas Especiales (NEE) está ligado a la integración educativa y "se refiere a los apoyos que deben darse a los alumnos cuyos aprendizajes difieren significativamente de los del resto del grupo, para potenciarlos" (García-Cedillo, 2018, p. 51). Es de aclarar que el término NEE no está sujetado a los niños con discapacidad exclusivamente, sino a todos lo que están por debajo de su potencial (García-Cedillo, 2018). En la educación inclusiva se usa el concepto de Barreras para el Aprendizaje y la Participación (BAP), el cual "alude a los obstáculos que enfrenta el alumnado (en plural) para alcanzar sus aprendizajes, y se relaciona tanto con la carencia de recursos en las escuelas, como a procesos de exclusión" (García-Cedillo, 2018, p. 51). Éste y otros autores consideran que existen dos tipos de educación inclusiva, una denominada "universal" (Florian, 2010) y la otra "moderada" (García-Cedillo, 2013).

Por lo tanto, en este documento coincidimos con García *et al.* (2013) cuando señalan que se debería buscar una coincidencia entre integración educativa y educación inclusiva, pues el reto está en identificar y apoyar de manera complementaria a los niños que lo requieren. Además, es importante que las instrucciones del docente deban ser diversificadas y no especializadas (Florian, 2010). Como mencionan Romero y García (2013, p. 88), "los docentes deben conocer diversas formas de enseñar para utilizar las adecuadas al contexto y a los alumnos que atienden".

Es necesario entonces, reconocer los conocimientos disciplinares, como es el caso de las matemáticas, para establecer las características de la enseñanza de esta disciplina a personas con discapacidad. Un panorama como tal permitiría conocer el tipo de estrategias que potencialicen sus cualidades. Esto implica un conocimiento especializado (conocimiento inclusivo) sobre el tipo de conocimiento matemático y la producción de éste en relación con la característica del individuo. Además, Romero y García resaltan que no sólo se tienen que buscar las modificaciones pertinentes al currículo, a los espacios físicos, reglamentaciones educativas, cuestiones culturales, sociales, entre otros, sino también se requiere "entregar a los docentes estrategias didácticas generales y disciplinares" (Romero y García, 2013, p. 88), que les permitan reflexionar sobre cómo generar y alcanzar los aprendizajes en los estudiantes.

Lo anterior implica un reto para el docente, pues ahora deben prestar atención en cómo diseñar una estrategia de enseñanza diversificada, más que una diferente (Florian, 2010), ya que "las estrategias de enseñanza y las intervenciones que han sido diseñadas para atender a una discapacidad en específico o a una necesidad educativa especial han resultado benéficas para otros" (Florian, p. 29). Este tipo de estrategia tendría más beneficios para los alumnos dada la diversidad en el aula.

Entonces el identificar apoyos para lograr el aprendizaje de personas con discapacidad en el área de las matemáticas recae en la búsqueda de estrategias de enseñanza diversificadas, que atiendan a los alumnos. La clave está en el tipo de instrucción que generen las nociones matemáticas (López-Mojica, Aké y Hernández, 2019).

Una primera aproximación para comprender la naturaleza del conocimiento en la educación inclusiva se basa en un enfoque multidisciplinar de ocho dimensiones analíticas (Ocampo, 2017). Para el presente documento se considera lo referente a lo epistémico, pedagógico y psicológico. El primero tiende a contemplar el enriquecimiento disciplinar (conocimiento), el segundo reconoce educar desde los "talentos", es decir, desde las características de los individuos. El psicológico valora la heterogeneidad como propiedad del aprendizaje y reconoce nuevas subjetividades (Ocampo, 2017, p. 966). Desde este enfoque interesa comprender el conjunto de propiedades que definen la autenticidad de saberes, los mecanismos que crean y garantizan el funcionamiento del conocimiento (Ocampo, 2017).

TAREAS MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN INCLUSIVA

Según el planteamiento anterior, es necesario el diseño de tareas matemáticas con una instrucción diversificada, más no especializada (Florian, 2010). En otras palabras, es reconocer la necesidad de conocimientos disciplinares en matemáticas desde un enfoque epistemológico, cognitivo y social (López-Mojica, 2013). Además, el establecer las características de la enseñanza de las matemáticas a las personas con discapacidad permitiría tener un panorama general sobre el tipo de estrategias que potencien sus cualidades. Así pues, se trata de identificar los procesos que desarrolla el niño con discapacidad para promover su pensamiento matemático y así señalar las sutilezas que implica la enseñanza en Educación Especial.

López-Mojica (2013) presentó una síntesis de las tendencias de la literatura sobre el tema educación especial y la enseñanza de las matemáticas, en la cual se rescatan tres aspectos importantes: el diseño de materiales didácticos, la formación de los profesionales de educación especial y la identificación de procesos cognitivos. Los tres aspectos anteriores confluyen en el diseño de tareas matemáticas, pues es necesario tener conocimiento de los procesos cognitivos para saber el tipo de instrucción a desarrollar y emplear cierto material didáctico que recupere las características de la población en cuestión.

A continuación, se colocan dos ejemplos de tareas matemáticas que se han diseñado y aplicado a niños con discapacidad intelectual y discapacidad visual, en el nivel de educación primaria y secundaria, en cuanto a los temas de álgebra y geometría.

La primera tarea consiste en el desarrollo de la comprensión de la ecuación lineal, por medio de nociones de equivalencia e igualdad, en jóvenes con discapacidad intelectual del nivel secundaria (Miranda, 2019). Se tomó en cuenta la característica de esta discapacidad, así como el uso de memoria de trabajo y a corto plazo, conductas adaptativas y esquemas compensatorios. Además, se utilizó la técnica de la balanza para ir colocando objetos de diferentes formas y pesos, a manera de mantener el equilibro en ella. En el siguiente esquema se detallan los cuatro niveles de los que consta la tarea de ecuación lineal.

En el nivel de exploración, los estudiantes tienen que realizar acciones de comparación de objetos, respecto a forma y peso. Se emplea la cardinalidad de conjuntos para estimar pesos y equivalencias en la balanza. Además, se estimulan los esquemas perceptuales, tanto visual como motriz. En el nivel operatorio, las tareas se enfocan en establecer equivalencias y mantener la igualdad de objetos en la balanza (balanza en equilibrio), por ejemplo, dos cubos pequeños equivalen a un cubo grande. Para el nivel transitivo las tareas se enfocan en el uso de incógnitas y/o cantidades desconocidas, se prescinde de la balanza en físico e inicia el uso de gráficos transformacionales en hojas de control a manera de realizar pequeños cálculos. En caso de requerir comprobación, se puede usar la balanza. En el nivel de abstracción, se comienza con el uso de incógnitas y se mantiene la estructura de la ecuación, se realizan tareas en las hojas de control, donde los alumnos llevan a cabo cálculos de equivalencia para identificar la ecuación.

La segunda tarea se enfocó en desarrollar nociones de área y perímetro de niños con discapacidad visual del nivel primaria (Avilés, 2018). Se partió de las nociones de conteo, medición y comparación, y reconocimiento espacial. También se tomaron en consideración las caracterís-

Figura 1. Estrategia de enseñanza diferenciada para la comprensión de la ecuación lineal ante la discapacidad intelectual (Miranda, 2019)

ticas de la discapacidad visual como el sistema háptico, además de esquemas compensatorios auditivo y motriz.

La tarea matemática constó de cuatro actividades: A1-Medición de longitud, A2-Reconocimiento de figuras planas, A3-Reconocimiento de figuras planas y A4-Áreas de figuras planas. En la siguiente tabla se identifican las características del pensamiento geométrico que se generó según las actividades de la tarea de geometría.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Resulta de suma importancia que, en la preparación de profesores de matemáticas, el enfoque de la educación inclusiva insista en la generación de estrategias diversificadas, que permitan la atención de todo el alumnado, sin descuidar las particularidades de los que así lo requieran (Florian, 2010; Romero y García, 2013).

De esta forma, urge analizar la frontera entre el conocimiento matemático y el conocimiento inclusivo que permita establecer elementos en común las áreas de educación especial y matemáticas. Y así aportar condiciones a la formación docente de matemáticas para promover un pensamiento matemático en las personas con discapacidad incorporados en las aulas regulares.

Es necesario una agenda de investigación que abone a la caracterización del pensamiento aritmético, que se profundice en el pensamiento probabilístico y algebraico. Además de iniciar con investigaciones que documenten el pensamiento variacional y el geométrico de todos los casos con discapacidad incorporados en las aulas regulares.

REFERENCIAS

Aké, L. P., y Vargas, M. (2015). Los profesores de matemáticas y su formación. Reflexiones ante la inclusión educativa. Educación inclusiva. Una perspectiva de oportunidades. Colima, México: Universidad de Colima, pp. 95-107.

Avilés, K. (2018). Procesos cognitivos y pensamiento geométrico de niños ciegos. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Booth, T. y Ainscow, M. (2002). Guía para la evaluación y mejora de la educación inclusiva. Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas. Consorcio Universitario Para la Educación Inclusiva. Universidad Autónoma de Madrid.

Dolores, C. (2013). La formación profesional de los profesores de matemáticas. Matemática educativa: la formación de profesores. México: Díaz de Santos, pp-13-25.

----------- y Hernández, J. (2013). La formación de profesores de matemáticas en México desde el currículum oficial. Matemática educativa: la formación de profesores. México: Díaz de Santos, pp. 39-51.

Elizarrarás, S. (2018). Similitudes del programa de estudios 1993 para cursos de matemáticas respecto al planteamiento curricular 2017. Revista Praxis Investigativa ReDIE. Vol. 10(9), pp. 120-129.

Flores, V. J. y García, I. (2016). Apoyos que reciben estudiantes de secundaria con discapacidad en escuelas regulares: ¿corresponden a lo que dicen las leyes? Revista Educación. Vol. 2(40), pp. 1-20.

Florian, L. (2010). Special Education in the Era of Inclusion: The End of Special Education or a New Beginning. The Psychology of Education Review. Vol. 34(2), pp. 22-29.

García-Cedillo, I. (2013). La educación especial de cara a la educación inclusiva. Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva. Vol. 7(2), pp. 77-91.

------------ (2018). La educación inclusiva en la reforma educativa de México. Revista de Educación Inclusiva. Vol. 11(2), pp. 49-62.

García, I., Escalante, I., Escandón, M. C., Fernández, G., Mustri, A. y Puga, I. (2000). La integración educativa en el aula regular. Principios, finalidades y estrategias. Secretaría de Educación Pública-Fondo Mixto México-España.

------------ y Romero, S. (2016). Avances de la integración educativa/educación inclusiva y la formación docente para la inclusión en México. México: CEMEJUS-UASLP.

López-Mojica, J. M. (2013). Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en educación especial. Tesis de maestría no publicada. México, Cinvestav-IPN.

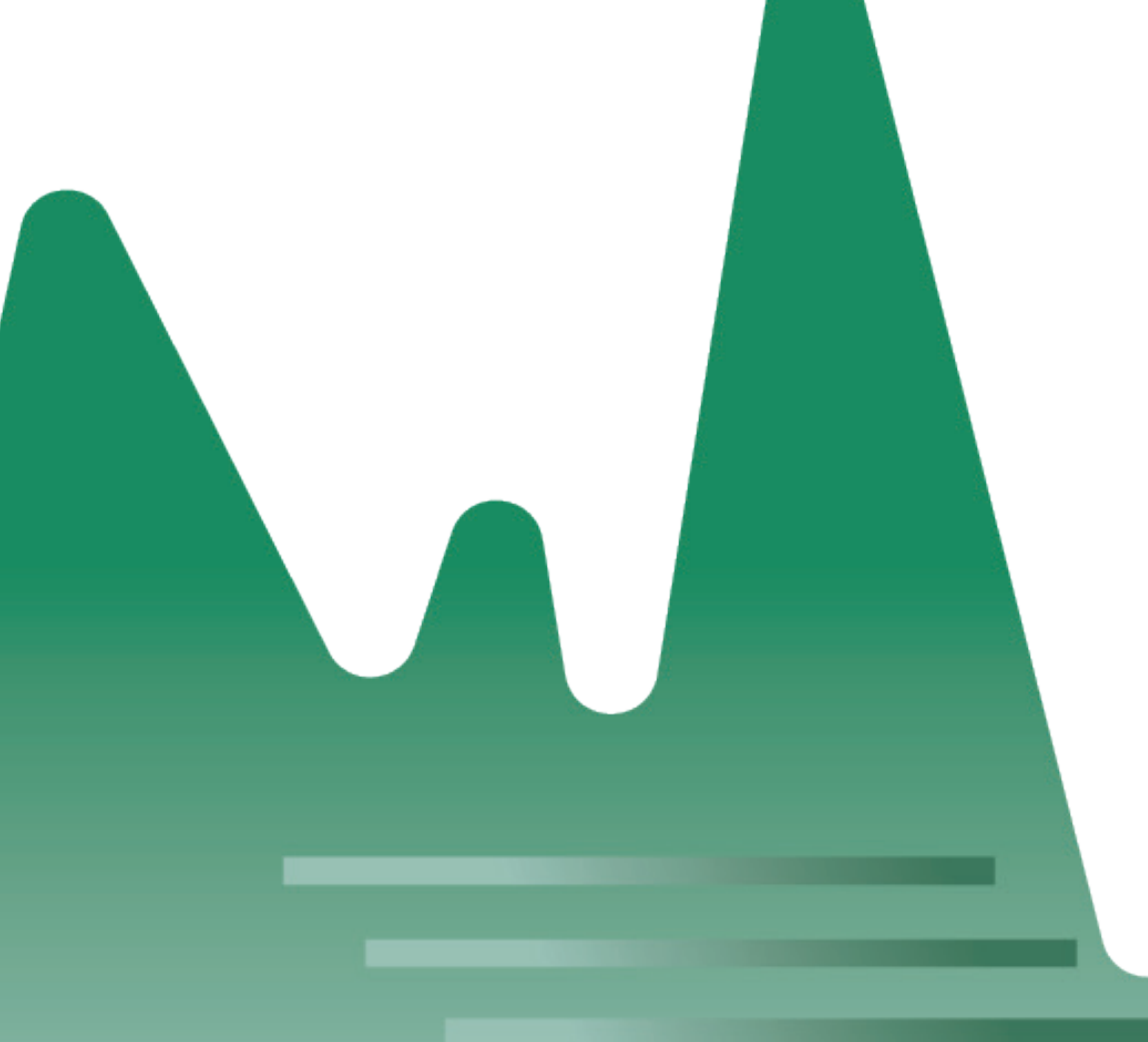
-------------, Aké, L. y Hernández, J. (2019). Pensamiento matemático para la educación inclusiva. Una aproximación desde matemática educativa. Educación Inclusiva en el Contexto Mexicano. México: CENEJUS.

Miranda, I. (2019). Comprensión de la ecuación lineal de estudiantes con discapacidad intelectual del segundo grado de secundaria. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Ocampo, A. (2017). Epistemología de la educación inclusiva: un estudio sobre sus condiciones de producción y fabricación del conocimiento. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Granada, España.

Romero, S., y García, I. (2013). Educación especial en México. Desafíos de la educación inclusiva. Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva. Vol. 7(2), pp. 77-91.

Secretaría de Educación Pública (2016). El modelo educativo 2016. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/118382/El_Modelo_Educativo_2016.pdf



JESÚS JERÓNIMO CASTRO
HERIBERTO DÍAZ PEÑA
GABRIELA SILVA OLVERA

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

JERONIMO@CIMAT.MX,
JESUSJERO@HOTMAIL.COM

03

USANDO ÁREAS PARA DEMOSTRAR TEOREMAS

INTRODUCCIÓN

En muchos problemas de Geometría, especialmente aquéllos que tratan de razones de segmentos, conviene encontrar una equivalencia entre la razón de las longitudes de los segmentos y la razón de áreas de figuras asociadas a estos segmentos, usualmente triángulos y cuadriláteros. Al hacer el cambio a una razón de áreas, es más sencillo visualizar hechos y propiedades que pueden cumplirse en nuestro problema en cuestión.

En otras ocasiones, el problema mismo trata de áreas de figuras, sin embargo, a veces conviene considerar otras figuras (usualmente triángulos) que tengan área igual. En cierto sentido, esto es como trasladar la figura sin mantener su forma pero si conservando su área. La idea central en muchos de los problemas que tratan sobre áreas de figuras es la siguiente: dos triángulos con bases de la misma longitud y alturas de la misma longitud, tienen áreas iguales.

Por otro lado, algunos problemas sobre lugares geométricos de puntos están relacionados con áreas de algunas figuras, por lo que en muchas ocasiones es útil analizar cuando algunas figuras tienen la misma área o cuando la suma de las áreas de éstas es un valor constante. Recordemos el concepto de lugar geométrico de puntos: un lugar geométrico de puntos es el conjunto de puntos que cumplen cierta propiedad. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que siempre están a la misma distancia de un punto fijo es una circunferencia con centro en ese punto fijo.

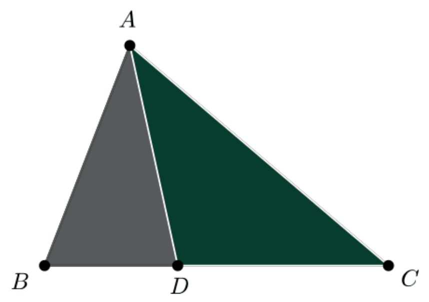
EL MÉTODO DE ÁREAS

Un ejemplo de un lugar geométrico de puntos que se relaciona con áreas de triángulos es la definición de mediana de un triángulo: la mediana hacia un lado de un triángulo, es el lugar geométrico de los puntos en el triángulo que forman con los otros dos lados del triángulo, un par de triángulos de la misma área.

Veremos ahora que la mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Para esto, probaremos un par de hechos geométricos que forman parte de un método para resolver problemas geométricos, conocido como el método de áreas. Tal método consiste precisamente en cambiar razones de longitudes de segmentos por razones de áreas de figuras.

Lema 2.1

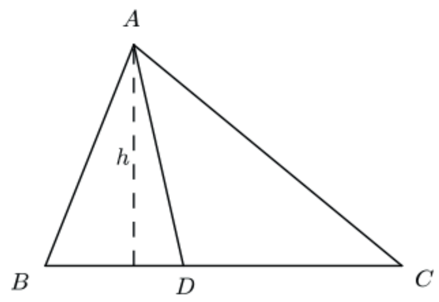
Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$, entonces se cumple que $BD/DC = |ABD/ADC|$



Demostración. Notemos que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ comparten la altura desde el vértice. Digamos que la medida de su altura es h. Como $|ABD| = BD\cdot h/2$ y $|ADC| = DC\cdot h/2$, tenemos que:

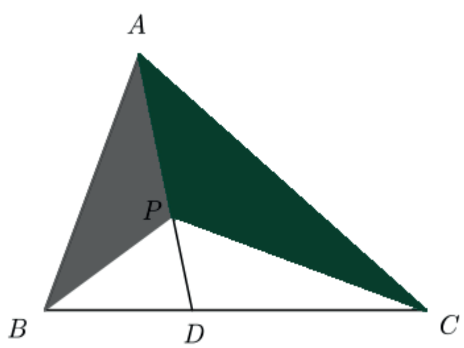
$$\frac{|ABD|}{|ABC|} = \frac{\frac{|BD\cdot h|}{2}}{\frac{|DC\cdot h|}{2}}$$

es decir, $|ABD|/|ADC| = BD/DC$



Lema 2.2

Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ y sea P un punto en el segmento AD, entonces se cumple que $BD/DC = |ABP|/|APC|$



Demostración. De acuerdo al Lema 2.1, tenemos que $BD/DC = |ABD|/|ADC|$. Notemos que BD y DC también son las bases de los triángulos △BPD y △PDC, respectivamente, por lo que $BD/DC = |BPD|/|PDC|$.

Ahora observemos lo siguiente: si para los números x, y, z,w se cumple que $x/y=z/w= \lambda$, entonces también se cumple $x\text{-}z/y\text{-}w = \lambda$

Esto último puede verse simplemente sustituyendo $x=\lambda y$ y $z=\lambda w$ en la expresión anterior. Utilizando este hecho tenemos que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{|ABD| - |BPD|}{|ADC| - |PDC|} = \frac{|ABP|}{|APC|}.$$

Volviendo a nuestra discusión sobre las medianas de un triángulo, supongamos que P es un punto en el interior de un triángulo △ABC tal que |ABP|=|APC|. Prolongamos AP hasta cortar a BC en un punto D; dado que $BD/DC=|ABP|/|APC|=1$, tenemos que D es el punto medio del segmento BC. Concluimos entonces que la mediana correspondiente al vértice A es el segmento de lınea que une A con el punto medio del lado BC.

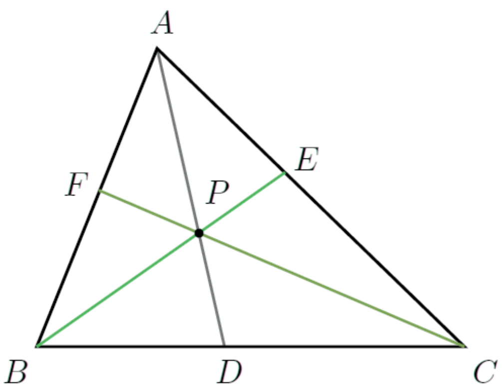
Ahora veremos otro ejemplo donde se usa el Lema 2.2 (ver por ejemplo [1, 3, 4, 6]).

Teorema 2.1 Teorema de Ceva. Dado un triángulo △ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si las líneas AD, BE y CF concurren entonces

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Demostración. Por el Lema 2.2 sabemos que $|ABP|/|APC|=BD/DC$, $|CBP|/|ABP|=CE/EA$ y $|APC|/|CBP|=AF/FB$. De aquí se obtiene que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{|APC|}{|CBP|} \cdot \frac{|ABP|}{|APC|} \cdot \frac{|CBP|}{|ABP|} = 1.$$



Ejemplo 2.1 Tomando en cuenta la figura del ejemplo anterior, probar que se cumple que

$$\frac{DP}{DA} + \frac{EP}{EB} + \frac{FP}{FC} = 1.$$

Demostración. Notemos que $DP/DA = |BPD|/|BAD| = |CPD|/|CAD|$, entonces, utilizando el hecho mencionado en la demostración del Lema 2.2, tenemos que

$$\frac{DP}{DA} = \frac{|BPC|}{|ABC|}. \tag{1}$$

De manera análoga se obtiene que

$$\frac{EP}{EB} = \frac{|APC|}{|ABC|}, \tag{2}$$

$$\frac{FP}{FC} = \frac{|APB|}{|ABC|}. \tag{3}$$

Sumando las igualdades (1), (2), (3), obtenemos que

$$\frac{DP}{DA} + \frac{EP}{EB} + \frac{FP}{FC} = \frac{|BPC| + |APC| + |APB|}{|ABC|} = \frac{|ABC|}{|ABC|} = 1.$$

CONSIDERANDO FIGURAS DE ÁREAS EQUIVALENTES

Como mencionamos en la introducción, en muchas ocasiones conviene cambiar una o más figuras por otras que tengan la misma área. El siguiente es un buen ejemplo de esto (ver [2]).

Ejemplo 3.1 Sean DE y FG segmentos sobre los lados AB y AC de un triángulo △ABC y sea P0 un punto en el interior del triángulo. Entonces el lugar geométrico de los puntos P en el triángulo △ABC, tales que

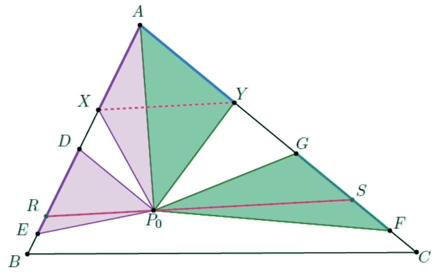
$|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|$,

es un segmento.

Demostración. Consideremos los puntos X en AB e Y en AC de manera que AX = DE y AY = FG. Como $|AXP_0| = |DEP_0|$ y $|AY P_0| = |FGP_0|$ entonces $|AXP0Y| = |DEP_0|+|FGP0|$, además, como $|AXP0Y| = |AXY| + |XP_0Y|$ y el triángulo △AXY es fijo, tenemos que

$|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|$

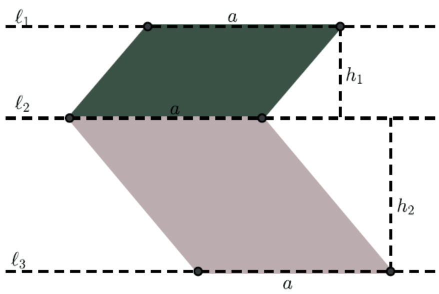
si y sólo si $|XPY| = |XP_0Y|$. Esto último se cumple si y sólo si los puntos P están sobre la lınea paralela a XY a través de P_0. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos P tales que $|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|$ es el segmento RS paralelo a XY.



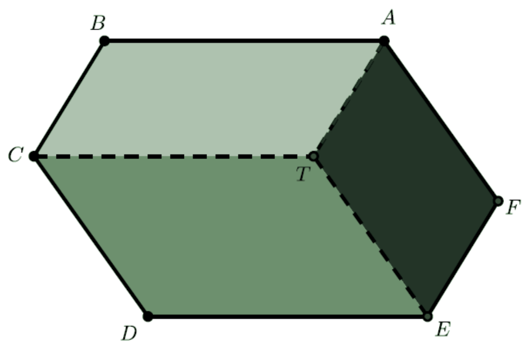
Ejemplo 3.2 Sea H un hexágono en cual cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Prueba que existe un paralelogramo Q cuyos vértices son vértices de H y el cual cumple que

$$\frac{|Q|}{|H|} \geq \frac{2}{3}.$$

Demostración. Primero, observemos que el área de un paralelogramo depende de la longitud de cualquiera de sus lados y la altura (distancia hacia el lado opuesto) hacia ese lado. Si consideramos entonces tres segmentos de la misma longitud, digamos a, sobre tres lıneas paralelas $\ell 1$, $\ell 2$ y $\ell 3$, separadas a distancias h1 y h2 (como se muestra en la siguiente figura), entonces la suma de las áreas de los paralelogramos es constante e igual a a(h1 + h2), independientemente de la posición de los tres segmentos.



Dividimos el hexágono en tres paralelogramos, como se muestra en la siguiente figura.



Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del hexágono es 1. Entonces la suma de las áreas de los dos paralelogramos más grandes (ABCT y CDET) es mayor o igual que 2/3. Si lo anterior no fuera cierto, entonces tendrıamos que el área del hexágono es menor que 1, lo cual es una contradicción.

Ahora aplicamos la observación hecha al principio de la demostración y obtenemos que

$$|BPQA| + |PEDQ| = |ABCT| + |CDET| \geq 2/3$$

en otras palabras $|ABDE| \geq 2/3$.

USANDO ÁREAS COMO IDEA AUXILIAR

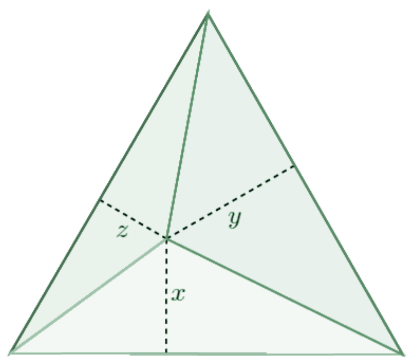
Hay problemas en los que no parece haber una conexión directa con el área de triángulos, sin embargo, calcular el área de ciertos triángulos puede ser una estrategia muy útil para lograr encontrar una solución. Un ejemplo muy conocido de aplicación de esta idea es el Teorema de Viviani (ver [1, 5, 6]).

Teorema 4.1 Teorema de Viviani. La suma de las distancias hacia los lados, desde un punto en el interior de un triángulo equilátero, es constante.

Demostración. Sean a y h las longitudes del lado del triángulo equilátero y de su altura. Sean x, y, z, las distancias desde el punto hacia los lados del triángulo. Sabemos que el área del triángulo se calcula como $^{ah}/_2$, por otro lado, si descomponemos el triángulo en los tres triángulos mostrados, el área también se calcula como $^{ax}/_2+^{ay}/_2+^{az}/_2$. Tenemos que

$$\frac{ah}{2} = \frac{(x+y+z)h}{2},$$

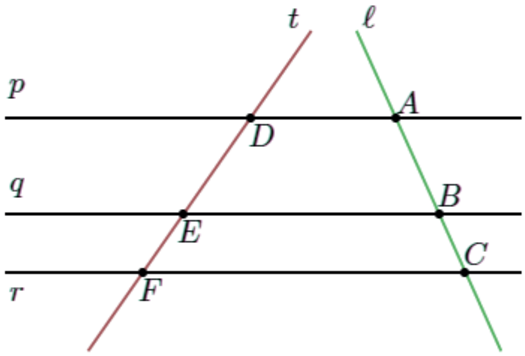
de donde se obtiene que x+y+z=h, es decir, la suma es igual a la altura del triángulo.



Otro ejemplo de aplicación del área de triángulos como una idea auxiliar, es la demostración del Teorema de Tales de Mileto (ver [1, 6]). Lo que este teorema establece, es útil entre otras cosas, para justificar los criterios de semejanza y congruencia de triángulos. El teorema es el siguiente:

Teorema 4.2 Si una linea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón m:n, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón m:n.

Por ejemplo, sean p, q, r, tres rectas paralelas. Si una línea ℓ corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que AB:BC=2:1, y otra línea t corta a las rectas paralelas en D, E y F, también se cumple que DE:EF=2:1.



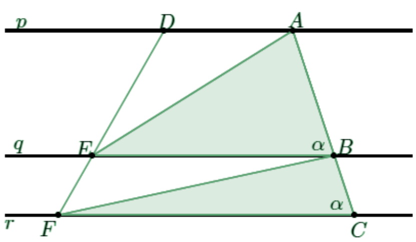
Demostración. Tomando en cuenta la figura anterior, debemos demostrar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Para esto utilizaremos que el área de un triángulo se puede obtener mediante el semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre éstos, lo cual es fácil de demostrar. Tenemos entonces que

$$\frac{|ABE|}{|BCF|} = \frac{\frac{BE \cdot AB \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}}{\frac{CF \cdot BC \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}},$$

donde α=∡ABE=∡BCF.



Análogamente tenemos que

$$\frac{|DEB|}{|EFC|} = \frac{\frac{BE \cdot DE \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}}{\frac{FC \cdot EF \cdot \operatorname{sen} \beta}{2}},$$

donde β=∡DEB=∡EFC. Como |ABE| = |DEB| y |BCF| = |EFC| tenemos que ${}^{|ABE|}/_{|BCF|}={}^{|DEB|}/_{|EFC|}$ lo cual implica que ${}^{BE \cdot AB}/_{CF \cdot BC}={}^{BE \cdot ED}/_{CF \cdot EF}$. Se sigue que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

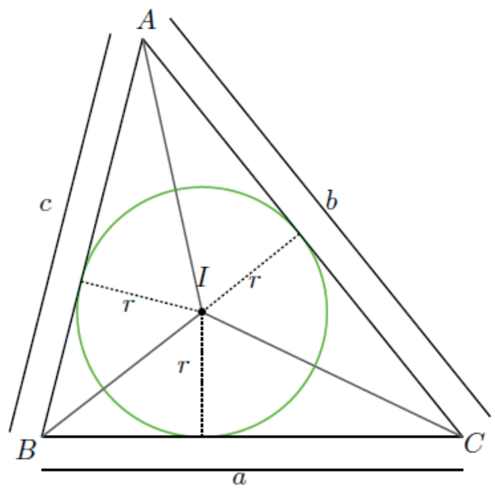
El siguiente teorema también se demuestra de manera muy sencilla si usamos áreas (ver [4, 6]).

Teorema 4.3 El área de un triángulo se obtiene como rs, donde r es el inradio del triángulo y s es su semiperímetro.

Demostración. Sea △ABC el triángulo dado y sean a, b y c las longitudes de sus lados. Sea I el centro de la circunferencia inscrita. Descomponemos el triángulo en los tres triángulos △AIB, △BIC, △CIA; entonces tenemos que |ABC| = |AIB| + |BIC| + |CIA|, es decir,

$$|ABC| = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}.$$

En otras palabras, |ABC| = sr.



Ejemplo 4.1 Sean h_A, h_B, h_C las alturas desde los vértices de un triángulo △ABC hacia los lados BC, CA y AB, respectivamente, y sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que se cumple que

$$\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.3 sabemos que $a+b+c={}^{2|ABC|}/_{r}$. Como $2|ABC| = ah_A = bh_B = ch_C$, tenemos que ${}^{2|ABC|}/_{h_A}= a$, ${}^{2|ABC|}/_{h_B}= b$, ${}^{2|ABC|}/_{h_C}= c$, por lo que

$$\frac{2|ABC|}{h_A}+\frac{2|ABC|}{h_B}+\frac{2|ABC|}{h_C}=\frac{2|ABC|}{r},$$

es decir,

$$\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}.$$

CONCLUSIONES

A lo largo de los ejemplos desarrollados en este trabajo, pudimos notar que la idea de usar áreas para cambiar razones de segmentos, o usar áreas de triángulos como elemento auxiliar, nos ayuda a desarrollar soluciones elegantes para ciertos tipos de problemas geométricos.

REFERENCIAS

Eves, H. (1985). Estudio de las geometrías, UTEHA.
Goloviná, L.I, Yaglóm I.M (1981). Inducción en la geometría, MirMoscú.
Honsberger, R. (1995). Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry, The Mathematical Association of America.
Martin Isaacs, I. (2002). Geometría universitaria, Thomson Learning.
Shariguin, I. (1989). Problemas de geometría, Planimetrıa, Colección Ciencia Popular, MIR-Moscú.
Shively, L. S. (1984). Introducción a la geometría moderna, CECSA.

JESÚS JERÓNIMO CASTRO
CARMEN SOSA GARZA
PATRICIA ISABEL SPÍNDOLA YÁÑEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

04

ALGUNOS PROBLEMAS TÍPICOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

EL RINCÓN OLÍMPICO

¿QUÉ SON LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS?

La Olimpiada Internacional de Matemáticas es una competencia donde participan estudiantes jóvenes provenientes de más de 100 países de alrededor de todo el mundo. Los alumnos participantes en un certamen de esta naturaleza, no deben estar inscritos en el nivel universitario en el momento de la realización del concurso. Usualmente participan estudiantes desde nivel primaria hasta nivel bachillerato y, sin temor a equivocarnos, podemos afirmar que éste es el evento académico de más tradición a nivel preuniversitario.

Las primeras Olimpiadas se llevaron a cabo en Hungría hace más de 100 años, contando con la participación de 4 países de la región de Europa del Este. Desde hace casi 60 años, la Olimpiada Internacional de Matemáticas se ha celebrado anualmente y se cuenta con la participación de un poco más de 100 países. Cada país, realiza su propia Olimpiada y organiza entrenamientos para sus estudiantes, de manera que puedan conformar un equipo con a lo más seis estudiantes que los representen en el evento internacional. México no es la excepción y, además de organizar el evento nacional, cada estado realiza un concurso estatal para seleccionar un equipo de seis estudiantes que los representen en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el mes de noviembre.

Los concursos y entrenamientos tipo Olimpiada tienen dos objetivos principales:

- Elegir y entrenar las selecciones que representen al estado (o país) en los diversos eventos tipo Olimpiada.
- Difundir la belleza del pensamiento matemático y promover el intercambio académico y cultural entre los maestros y alumnos participantes.

Podemos decir que el primer punto se lleva a cabo de manera satisfactoria en la mayoría de las regiones de México, sin embargo, falta mucho trabajo que realizar con respecto al segundo punto. En este trabajo se pretende contribuir (al menos un poco) a la difusión de la belleza de las ideas que se manejan en la solución de los problemas tipo Olimpiada, las cuales debemos decir, requieren de una gran dosis de esfuerzo, ingenio y creatividad.

¿CÓMO SON LOS PROBLEMAS TIPO OLIMPIADA?

Los problemas que se abordan en los entrenamientos y concursos tipo Olimpiada, no son ejercicios rutinarios. Para lograr resolverlos se requiere de mucho esfuerzo, tenacidad, perseverancia y una buena dosis de ingenio y creatividad. Podríamos decir que los problemas son de tres tipos principales: "de fuerza bruta ", "de técnica", "de ingenio".

Los problemas de fuerza bruta son aquéllos que no requieren de casi ningún conocimiento especial para ser resueltos, sin embargo, usualmente se requiere realizar muchos cálculos y analizar una buena cantidad de casos.

Los problemas de técnica son aquéllos que requieren del uso de algún teorema o técnica especial. Usualmente un alumno que ha recibido un entrenamiento adecuado puede resolver este tipo de problemas que son aquéllos que la estrategia de solución, por parte de un alumno bien entrenado, es casi inmediata. Sin embargo, puede tener detalles que en ocasiones dificultan su solución.

Los problemas de ingenio son aquéllos que tanto un alumno con mucho entrenamiento como un alumno novato, pueden llegar a resolver. Las soluciones de este tipo de problemas usualmente son cortas pero requieren de una idea poco usual y difícil de encontrar. Es común escuchar que un alumno que logra resolver uno de estos problemas exprese comentarios como el problema estaba muy fácil, sin embargo, son muy pocos alumnos los que logran resolver este tipo de problemas durante el tiempo que se les aplica el examen.

Pero no debemos sentirnos desanimados, existe una *luz de esperanza* en esto de resolver problemas olímpicos: en la opinión de los grandes ganadores de medallas a nivel mundial, el único consejo útil que pueden dar es resuelve muchos pero muchos problemas, y cuando creas que ya has resuelto demasiados, entonces resuelve más. Estas palabras esconden la clave: todo se reduce a trabajar y disfrutar mucho la resolución de problemas y la ganancia se notará cuando menos lo pienses.

En las siguientes secciones de este trabajo, mostraremos algunos ejemplos de problemas típicos de una Olimpiada de Matemáticas y algunas de las estrategias más utilizadas para la resolución de problemas. Al final de cada sección, proponemos pequeñas listas de problemas para aquél lector interesado en intentar la resolución de este tipo de problemas o para aquélla persona interesada en impartir entrenamiento a estudiantes para este tipo de competencias.

Como consejo al intentar este tipo de problemas podemos decir lo siguiente:

1. Lee bien el enunciado, ya que es muy común que estudiantes pierdan horas intentando un problema incorrecto por leer sin cuidado el enunciado.
2. Una vez entendido el problema, escribe todas las ideas que se te vengan a la mente y que crees podrían ayudar en la solución.
3. Los problemas no se resuelven en una sola dirección, a veces hay que ir del principio al fin, a veces del final hacia atrás, a veces una parte es en una dirección y otra parte es en otra dirección. La idea central es lograr llegar a nociones sea equivalentes, es decir, debemos ir cambiando el problema por problemas equivalentes que sean más sencillos.
4. No te rindas. Si no logras resolver un problema en poco tiempo, sigue pensando, tarde o temprano aparece una idea que te da luz, y si ésto no pasa, abandona por un rato el problema y después lo vuelves a intentar.
5. Aunque no logres resolver un problema, si dedicaste mucho esfuerzo y tiempo, tu cerebro se va entrenando y con el tiempo empezarón a salir soluciones. Nada es tiempo perdido.

INGENIO Y CREATIVIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Del latín *ingenium*, el ingenio es la facultad de una persona para inventar con prontitud o solucionar algo con facilidad. Por creatividad se entiende a la facultad que alguien tiene para crear y a la capacidad creativa de un individuo. Es así que consiste en encontrar procedimientos o elementos para desarrollar labores de manera distinta a la tradicional, con la intención de satisfacer un determinado propósito.

No encontramos una mejor manera de explicitar estas características, que poseen algunas soluciones a problemas matemáticos, que presentando algunos ejemplos de problemas con soluciones ingeniosas.

Ejemplo 3.1 Encuentra la solución en forma cerrada para la suma

$1+2+3+...+n$,

Donde n es un número natural.

Demostración. Este problema es famoso ya que fue resuelto por un niño alemán cuando tenía 10 años, cuyo nombre era Carl Friedrich Gauss quien es uno de los más grandes genios que han existido en Matemáticas. La solución es la siguiente:

Denotemos a suma como S=1+2+...+(n-1)+n, ahora advertimos el orden de los términos y los sumamos con los de la igualdad anterior.

$S=1+2+\ldots+(n-1)+n$
$S=n+(n-1)+\ldots+2+1$

De donde obtenemos que

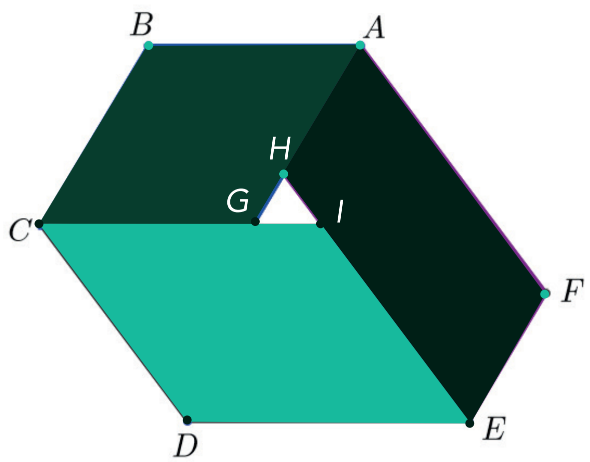
$2S=(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)=n(n+1)$.

se sigue que

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo 3.2 Cada par de lados opuestos de un hexágono ABCDEF son paralelos. Demuestra que

$$|AEC|\geq\frac{1}{2}|ABCDEF|.$$

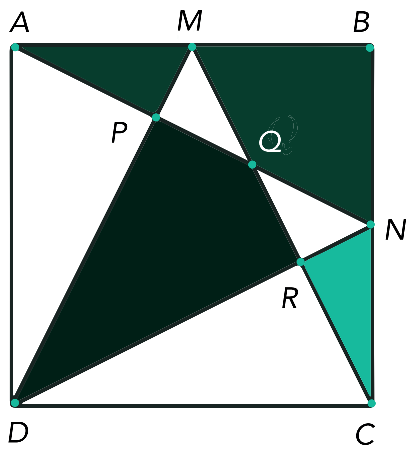


Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que AB≤DE. Trazamos el segmento CI paralelo y de la misma longitud que DE y consideremos el punto G en CI tal que AG es paralelo a EF. Observemos que también existe un punto H en el segmento AG tal que EH es paralelo y de la misma longitud que AF. El hexágono ABCDEF se descompone entonces en los paralelogramos ABCG, DEIC, EF AH y el triángulo △GIH. De aquí es fácil observar que el área del triángulo △ACE se compone de la mitad de las áreas de los paralelogramos más el área del triángulo △GIH, es decir, su área es mayor o igual que la mitad del área del hexágono.

Observación 3.1 Notemos que |AEC|=½|ABCDEF| exactamente cuando G, H e I son el mismo punto, es decir, cuando los lados opuestos del hexágono tienen la misma longitud.

Ejemplo 3.3 Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC de un cuadrado ABCD. Sean P el punto donde AN interseca a DM, Q el punto donde AN interseca a CM y R el punto donde CM interseca a DN. Prueba que

|AMP|+|BMQN|+|CNR|=|DPQR|.



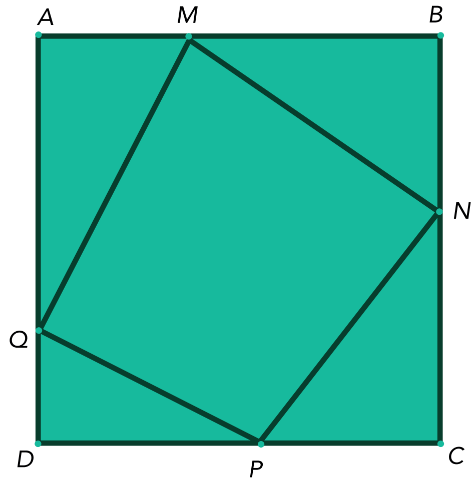
Demostración. La solución a este problema es muy sencilla si consideramos el siguiente resultado conocido como el Teorema de los Tapetes:

Si dos tapetes de áreas S_1 y S_2 se colocan en una región de área $S=S_1+S_2$, entonces el área doblemente cubierta es igual al área sin cubrir.

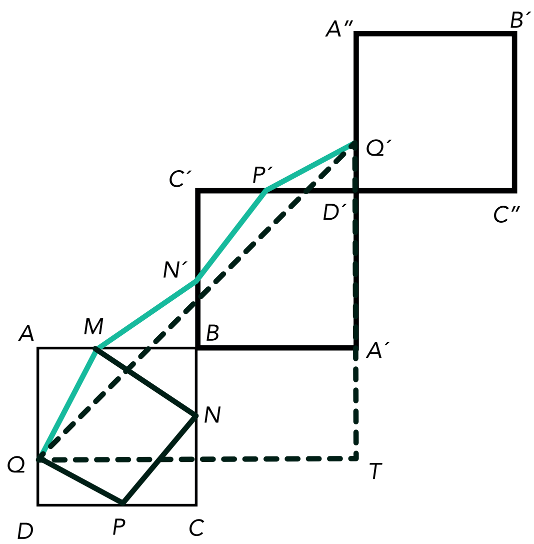
Para el problema que estamos analizando en particular, se cumple que la suma de las áreas de los dos triángulos es igual al área del cuadrado. La solución es evidente aplicando el Teorema de los Tapetes.

Observación 3.2 Notemos que no es importante que los puntos M y N sean puntos medios de los lados AB y BC.

Ejemplo 3.4 Sea ABCD un cuadrado con lado de longitud 1 y sean M, N, P y Q, puntos sobre sus lados como se muestra en la figura. Entonces el perímetro de MNPQ es mayor o igual que 2√2.

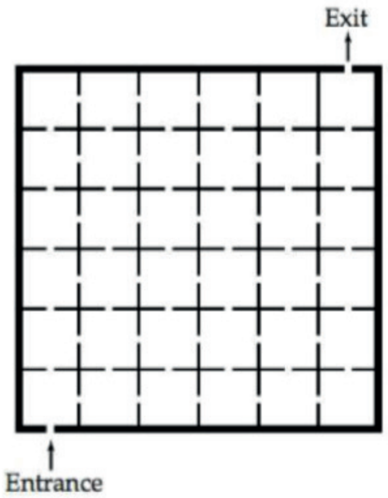


Demostración. Dibujamos cuadrados congruetes a ABCD de manera que el recorrido formado por los segmentos QM, MN, NP, PQ, ahora se obtiene con los segmentos QM, MN′, N′P′, P′Q′, donde MN′=MN, N′P′=NP y P′Q′=PQ (como se observa en la siguiente figura). Como tenemos la igualdad Q′D′=QD, se sigue que TQ′=TQ=2, donde T está sobre la línea Q′A′ y TQ es paralelo a AB. Del triángulo rectángulo isósceles △Q′TQ tenemos que QQ′=2√2, se sigue entonces que QM+MN′+N′P′+P′Q′≥2√2, es decir, el perímetro del cuadrilátero MNPQ es mayor o igual que 2√2.

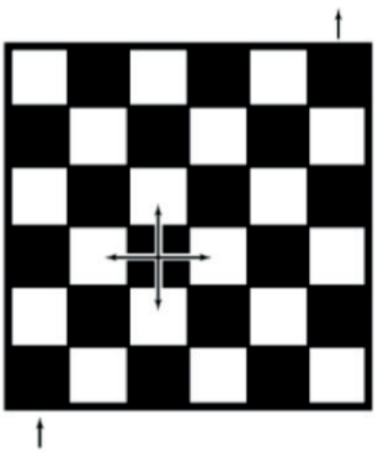


Ejemplo 3.5 Una oficina burocrática tiene exactamente una entrada y una salida. En la mitad de cada pared interior de cada sala hay una puerta (como se muestra en la figura).

Para obtener un certificado, uno debe entrar al edificio, visitar cada sala exactamente una vez y salir del edificio. ¿Es posible o no obtener un certificado en esa oficina?



Demostración. Coloreamos el tablero que representa al edificio como el tablero del ajedrez. Notemos que para pasar de una oficina a otra siempre vamos de un color al otro, entonces, para recorrer cada oficina una sola vez y salir del edificio, necesitamos hacer 38 movimientos (incluyendo el movimiento de entrada y el de salida). Como empezamos en un cuadro negro y realizamos 36 movimientos en el interior (que corresponden a las 36 oficinas), la última oficina visitada debe estar representada por un cuadro blanco. Sin embargo, la puerta de salida está en una oficina representada con cuadro negro, por lo tanto, no es posible hacer trámites en esa oficina.

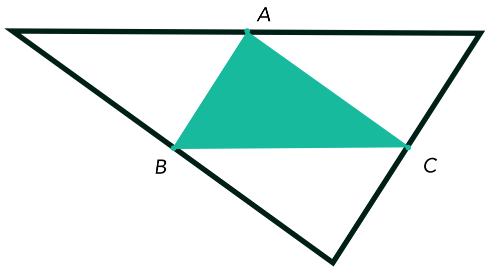


PRINCIPIO DEL EXTREMO

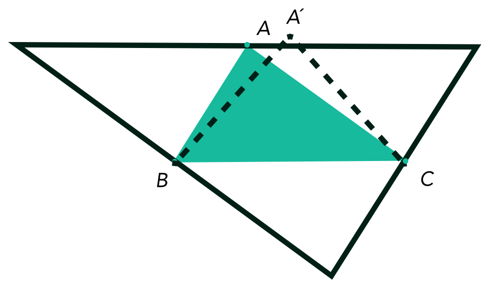
Cuando en un problema tenemos una cantidad finita de objetos (puntos, líneas, números, etcétera), en ocasiones una idea muy útil es considerar el máximo o el mínimo de alguna característica de los objetos. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 4.1 Sea P un conjunto finito de puntos tal que todo triángulo con vértices en los puntos de P tiene área menor o igual a 1. Entonces existe un triángulo de área menor o igual a 4 que cubre a P.

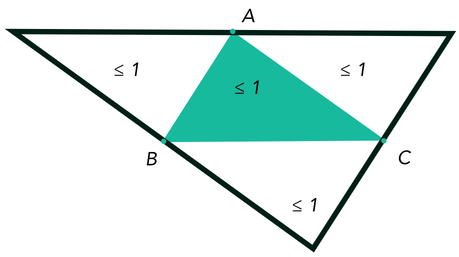
Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo de área máxima, de entre todos los triángulos que se pueden formar con vértices en el conjunto de puntos P. Tracemos paralelas a los lados del triángulo por cada uno de los vértices.



No puede haber puntos de P fuera del triángulo grande.



El triángulo grande tiene área ≤ 4 y cubre a P.



El siguiente ejemplo se resuelve aplicando la versión más simple de un famoso Teorema de Geometría Discreta.

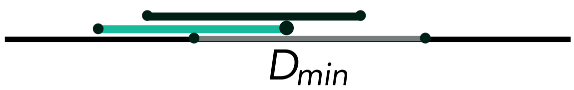
Ejemplo 4.2 En una clase de Matemáticas cada uno de los estudiantes se duerme exactamente una vez. Sabemos que para cada dos estudiantes hay un lapso de tiempo en el que ambos están dormidos simultáneamente. Prueba que en algún momento de la clase, todos los estudiantes están dormidos simultáneamente.

En un principio, este problema puede parecer algo informal, alejado del mundo de las Matem áticas. Sin embargo, después de meditarlo un instante, nos damos cuenta que podemos representar los lapsos de tiempo que duran los estudiantes dormidos mediante segmentos sobre una línea. Lo que deseamos probar es la existencia de al menos un punto en común para todos estos segmentos. La solución se obtiene mediante una aplicación directa del Teorema de Helly:

Teorema de Helly (en dimensión 1). Sea *F* una familia finita de segmentos sobre una línea recta. Si cualesquiera dos segmentos de *F* tienen punto en común, entonces existe un punto en común para todos los segmentos de *F*.

Demostración. Sea $F=\{S_1, S_2,\ldots,S_n\}$ nuestra familia de segmentos. Para cada segmento S_j, $j=1, 2,\ldots,n$, denotemos por I_j y D_j sus extremos izquierdo y derecho, respectivamente. De entre todos los extremos derechos, consideremos aquél que está más a la izquierda, es decir, el menor de los extremos derechos si éste es considerado como un número real. Denotemos tal extremo derecho como $D_{min.}$

Claramente, todos los demás extremos derechos deben estar a la derecha de D_{min}, además, como cualesquiera dos segmentos de *F* se intersecan, tenemos que todo segmento contiene al punto D_{min}.



Observación 4.1 Notemos que la prueba también funciona si en lugar de considerar el extremo derecho más a la izquierda, se toma en cuenta el extremo izquierdo más a la derecha.

PROBLEMAS

Problema 4.1 Prueba que todo poliedro convexo tiene al menos dos caras con el mismo número de lados.

Problema 4.2 Cada punto de una retícula en el plano es etiquetado con un entero positivo. Cada uno de los números es la media aritmética de sus cuatro vecinos. Muestra que todas las etiquetas son iguales.

Problema 4.3 Sea Ω un conjunto de puntos en el plano. Cada punto de Ω es el punto medio de dos puntos en Ω. Prueba que Ω es un conjunto infinito.

Problema 4.4 2n+1 personas están colocadas en el plano de tal manera que sus distancias mutuas son distintas. Al mismo tiempo, cada uno dispara a su vecino más cercano. Prueba que

a) Al menos una persona sobrevive
b) Ninguna persona recibe más de 5 balas
c) Las trayectorias de las balas no se cruzan
d) El conjunto de segmentos formado por las trayectorias de las balas no contiene un polígono cerrado

Problema 4.5 Prueba que en cualquier pentágono convexo es posible escoger tres diagonales con las cuales se puede construir un triángulo.

Problema 4.6 Veinticinco puntos están dados en el plano. Entre cualesquiera tres de ellos se pueden escoger dos a una distancia menor que 1 cm. Prueba que existen 13 puntos los cuales pueden ser encerrados por un círculo de radio 1 cm.

Problema 4.7 Prueba que todo polígono convexo de área 1 está contenido en un rectángulo de área 2.

Problema 4.8 Se tienen 2n+3 puntos en el plano, no hay tres de ellos colineales ni cuatro sobre una misma circunferencia. Prueba que se pueden escoger tres de los puntos y dibujar un círculo a través de estos puntos de tal manera que exactamente *n* de los restantes 2*n* puntos están en el interior del círculo y *n* están fuera de él.

Problema 4.9 Sea *M* la mayor de las distancias entre 4 puntos en plano, y sea *m* la menor de las distancias. Demuestra que

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{2}.$$

Problema 4.10 Sea M la mayor de las distancias entre 6 puntos en plano, y sea m la menor de las distancias. Demuestra que

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{3}.$$

Problema 4.11 Se escoge un punto P en el interior de un polígono convexo M. Se construyen las proyecciones ortogonales desde P hacia todas las líneas que contienen los lados de M. Demuestra que al menos una de esas proyecciones está sobre un lado de M.

PRINCIPIO DE LAS CASILLAS O DE LOS PALOMARES

En muchas ocasiones, la idea o principio que se enuncia de manera muy evidente, puede resultar muy útil para descubrir estrategias de solución de problemas. Un ejemplo de ésto, es el principio de las casillas o principio de Dirichlet, que afirma lo siguiente:

Si colocamos n+1 objetos en n cajas entonces una de las cajas deber contener al menos dos objetos. Este principio puede generalizarse de la siguiente manera:

Si colocamos nk+1 objetos en n cajas entonces una de las cajas deberá contener al menos k+1 objetos.

Resolvamos algunos ejemplos utilizando este principio.

Ejemplo 5.1 En un grupo con al menos 13 personas, siempre hay dos que cumplen años el mismo mes.

Demostración. Consideremos 12 casillas, cada una de ellas representa un mes del año. Después, le asignamos a cada persona la casilla que corresponde al mes de su cumpleaños. Como tenemos 13 personas (los objetos) y 12 meses (las casillas), por el principio de las casillas podemos asegurar que hay una casilla con al menos dos personas. Esas dos personas festejan su cumpleaños el mismo mes del año.

Ejemplo 5.2 Probar que en toda reunión, siempre hay dos personas que conocen al mismo número de personas de entre las presentes.

Demostración. Supongamos que asistieron n personas a la reunión. El máximo número de personas que puede conocer una persona dada es n−1. En este problema las casillas o cajas serán las posibles cantidades de personas que una persona conoce, los objetos serán las n personas. Tenemos entonces las casillas con las etiquetas 0, 1, 2,..., n−1, sin embargo, observemos que no pueden existir al mismo tiempo las casillas con el número 0 y el número n−1, ya que si una persona conoce a todas las demás, entonces no existe una que no conozca a nadie y viceversa. En cualquiera de los dos casos tenemos n−1 casillas posibles en la cuales se distribuirán n personas. Por el principio de las casillas tenemos que alguna de las casillas contiene al menos a dos personas. Esas dos personas son las que conocen al mismo número de personas de entre las presentes.

Ejemplo 5.3 Se tienen los números enteros del 1 al 2n escritos en un pizarrón. Se tachan n−1 de ellos. Probar que entre los números que quedaron sin tachar en el pizarrón, hay al menos 2 de ellos que son consecutivos.

Demostración. En esta ocasión hay que tener cuidado, pues los números que deseamos que cumplan la propiedad de ser consecutivos, deben estar entre los números que quedaron sin tachar. Es decir, nuestros objetos serán los números sin tachar, que son 2n−(n−1) = n+1. Como son n+1 números y queremos que al menos dos de ellos sean consecutivos nos conviene crear n casilleros de tal forma que si dos números pertenecen al mismo casillero entonces son consecutivos. La idea es dividir el conjunto total de trabajo en casilleros, en este caso el conjunto total de 2n números originales. Como son 2n podemos dividirlos de la siguiente manera:

1, 2	3, 4	...	2n-1, 2n

En el casillero 1 ubicamos los números 1 y 2; en el casillero 2, los números 3 y 4, y así sucesivamente, hasta que en el casillero n ubicamos los números 2n−1 y 2n. De este modo si dos números están en el mismo casillero, entonces serán consecutivos. Como los números sin tachar son n+1, y cada uno de ellos pertenece a alguno de los n casilleros indicados previamente, entonces por el principio de las casillas podemos asegurar que habrá un casillero que contenga 2 de los números sin tachar.

Problemas

Problema 5.1 Una línea ℓ en el plano no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo △ABC. Demuestra que ℓ no puede cortar los tres lados del triángulo (en el interior de los lados).

Problema 5.2 Cada cuadrito de una cuadrícula de 3×3 es llenado con uno de los números −1, 0, 1. Prueba que de las ocho posibles sumas sobre los renglones, las columnas, las diagonales, dos deben ser iguales.

Problema 5.3 Sean a1, a2, ..., an *n* enteros no necesariamente distintos. Demuestra que siempre existe un subconjunto de esos números con suma de sus elementos divisible por *n*.

Problema 5.4 Están dados 5 puntos de coordenadas enteras en el plano. Demuestra que existen dos de estos puntos tales que el punto medio del segmento que determinan también tiene coordenadas enteras.

Problema 5.5 Sean P_1, P_2, ..., P_9 nueve puntos de coordenadas enteras en el espacio, no tres de ellos colineales. Demuestra que existe un punto de coordenadas enteras L sobre algún segmento P_iP_k, i≠k.

Problema 5.6 Demuestra que entre 6 personas siempre hay tres que se conocen entre sí o hay tres que son completamente extraños.

Problema 5.7 Una línea se colorea con 11 colores. Demuestra que podemos encontrar dos puntos del mismo color a una distancia entera en centímetros.

Problema 5.8 Supongamos que se dibujan varias cuerdas en un círculo de radio 1. Demuestra que si cada diámetro del círculo corta a lo más *k* cuerdas, entonces la suma de las longitudes de todas las cuerdas es menor que kπ.

Problema 5.9 Están dibujados varios círculos dentro de un cuadrado de lado 1. Sabemos que la suma de los perímetros de los círculos es 10. Demuestra que existe una línea recta, la cual interseca por lo menos a cuatro de los círculos.

Problema 5.10 Un jugador de ajedrez tiene 77 días para prepararse para un torneo. Él quiere jugar al menos un juego por día, pero no más de 132 juegos en total. Demuestra que existe un lapso de días sucesivos en los cuales él juega exactamente 21 juegos.

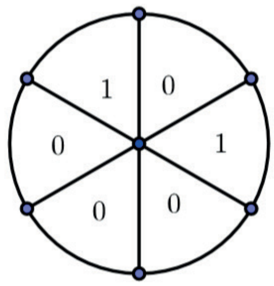
PRINCIPIO DEL INVARIANTE

Este principio puede ser resumido de la siguiente manera: Si hay repetición, busca lo que no cambia.

En los algoritmos, hay un estado inicial y una sucesión de pasos permitidos. Debemos buscar respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Puede un estado final dado ser alcanzado?
2. Encuentra todos los estados finales alcanzables.
3 ¿Hay convergencia a un estado final?
4. Encuentra todos los periodos, si los hay.

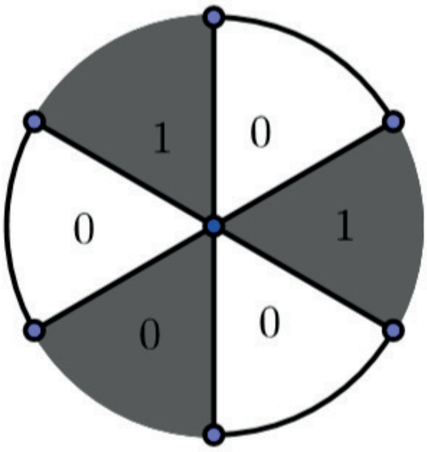
Ejemplo 6.1 Un círculo es dividido en 6 sectores. Los números 1, 0, 1, 0, 0, 0 son escritos dentro de los sectores. Se pueden incrementar dos números vecinos en 1. ¿Es posible que todos los números puedan llegar a ser iguales realizando una secuencia de tales pasos?



Demostración. Coloreamos los sectores de manera alternada como se muestra en la figura. Observemos que la suma de los números en los sectores sombreados es 2 y la suma de los números en los no sombreados es 0. La diferencia entre las sumas sombreadas y no sombreadas es

$$S-NS=2$$

Si escogemos un par de sectores vecinos y los incrementamos en 1, tenemos que incrementaremos un sector sombreado y uno no sombreado, no importa como los hayamos escogido. Entonces la nueva suma sombreada será S+1 y la nueva suma no sombreada será NS+1. Su diferencia sigue siendo S+1−(NS+1)=2, es decir, la diferencia es invariante a la operación de incrementar en 1 cualesquiera dos sectores vecinos. Si todos los números de los sectores fueran iguales, la diferencia sería 0, pero ésto no puede pasar. Por lo tanto, no se puede llegar a tener números iguales en todos los sectores.



Problemas

Problema 6.1 En la siguiente figura, dos cuadros son vecinos si comparten un segmento. Consideremos la siguiente operación: se escogen dos cuadros vecinos y se le agrega el mismo entero a los números en ambos cuadros. ¿Se puede transformar la tabla de la izquierda en la de la derecha mediante una sucesión de tales pasos?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Problema 6.2 Sean a1, a2, ..., *an* una permutación de los números 1, 2,..., *n*. Si *n* es impar, prueba que el producto $(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$ es par.

Problema 6.3 Un tablero de ajedrez está coloreado de la manera usual. Se pueden intercambiar los colores de los cuadrados de

a) todo un renglón o toda una columna,
b) de un cuadrado de 2×2.

La meta es obtener exactamente un cuadrado negro. ¿Es posible esto?

Problema 6.4 Hay un entero positivo en cada cuadro de una tabla rectangular. En cada movimiento se puede doblar cada número en un renglón o restar 1 de cada número de una columna. Prueba que se puede obtener una tabla de ceros por una secuencia de tales movimientos.

Problema 6.5 Un dragón tiene 100 cabezas. Un caballero puede cortar 15, 17, 21 o 5 cabezas, respectivamente, con un golpe de su espada. En cada uno de esos casos, 24, 2, 15 o 17 nuevas cabezas salen sobre sus hombros. Si todos las cabezas son cortadas, el dragón muere. ¿Puede el dragón llegar a morir?

Problema 6.6 Hay signos + y − escritos en un pizarrón. Se pueden borrar dos signos y escribir, inmediatamente, + si son iguales y − si son diferentes. Demuestra que el último signo sobre el pizarrón no depende del orden de borrado.

Problema 6.7 Cada uno de los números a_1, a_2,..., an es 1 o −1, y tenemos que

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots$$

Prueba que 4 divide a *n*.

Problema 6.8 A cada vértice de un cubo se le asigna el valor +1 o −1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valor puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

REFERENCIAS

Courant, R. y Robbins, H. (1996). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies.* Springer-Verlag New York.

Larson, L. C. (1983). *Problem-Solving through problems*. Springer-Verlag New York.

Zeitz, P. (2007). *The art and craft of problem solving*. John Wiley and Sons.

La presente edición de
PädiUAQ Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería
fue maquetada por Rodrigo Alonso Hernández Gallegos
en la Coordinación de Diseño e Imagen de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Autónoma de Querétaro.
El cuidado estuvo a cargo de Daniela Pérez y Gisella Cordero
Se publicó en junio del 2019.
en Santiago de Querétaro, México.

ä