PädiUAQ 4

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

AÑO 2, **NÚMERO** 2

ENERO 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

PädiUAQ. Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 2. Núm. 2, enero del 2019, es una publicación semestral editada y publicada por la Universidad Autónoma de Querétaro, División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.
C.U. Cerro de las Campanas S/N, Col. las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00, ext. 7035.

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo
No. 04-2017-040313301800-203
ISSN: En trámite

Ambos registros en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD
DE INGENIERÍA

COMITÉ EDITORIAL

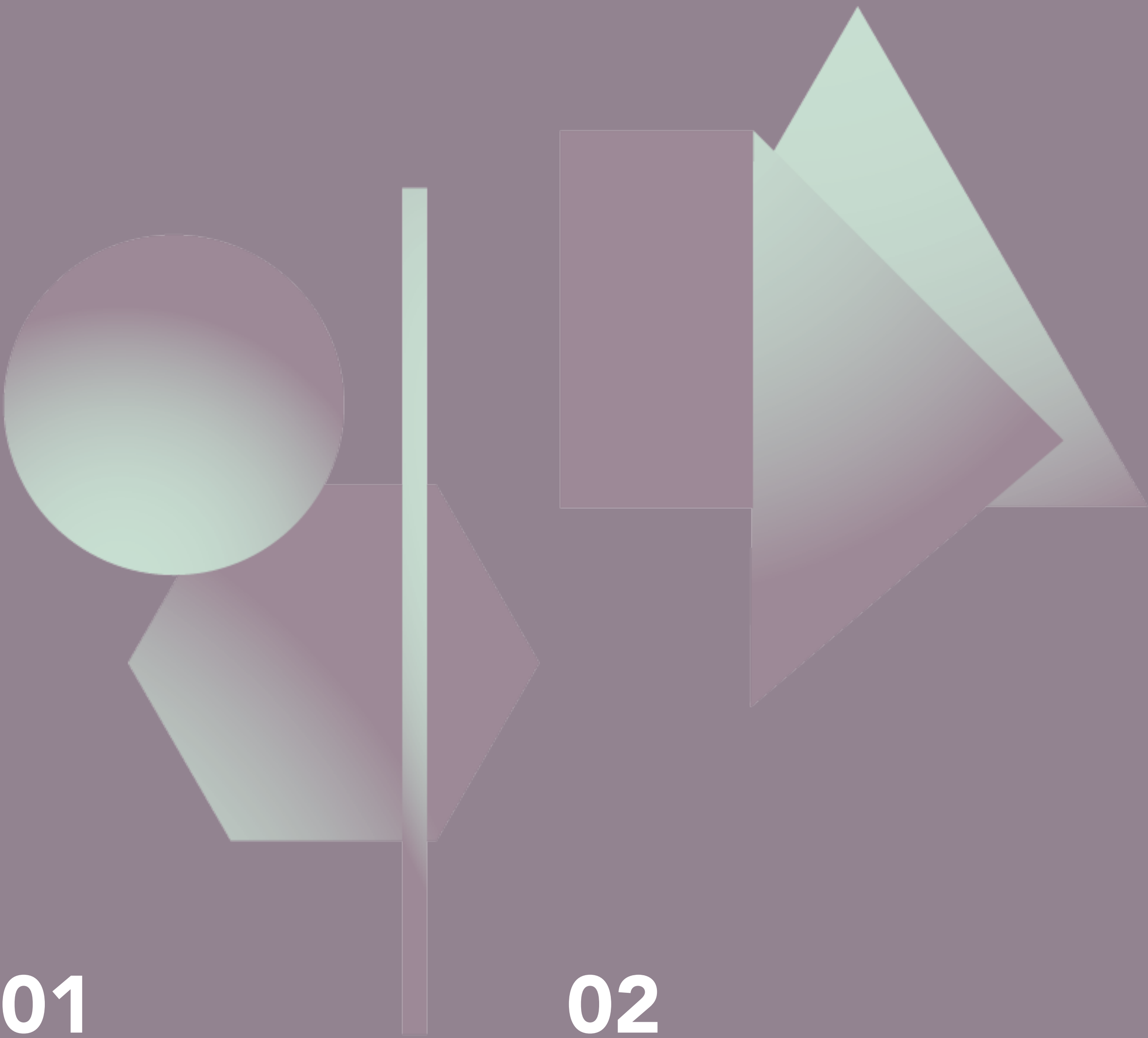
FI

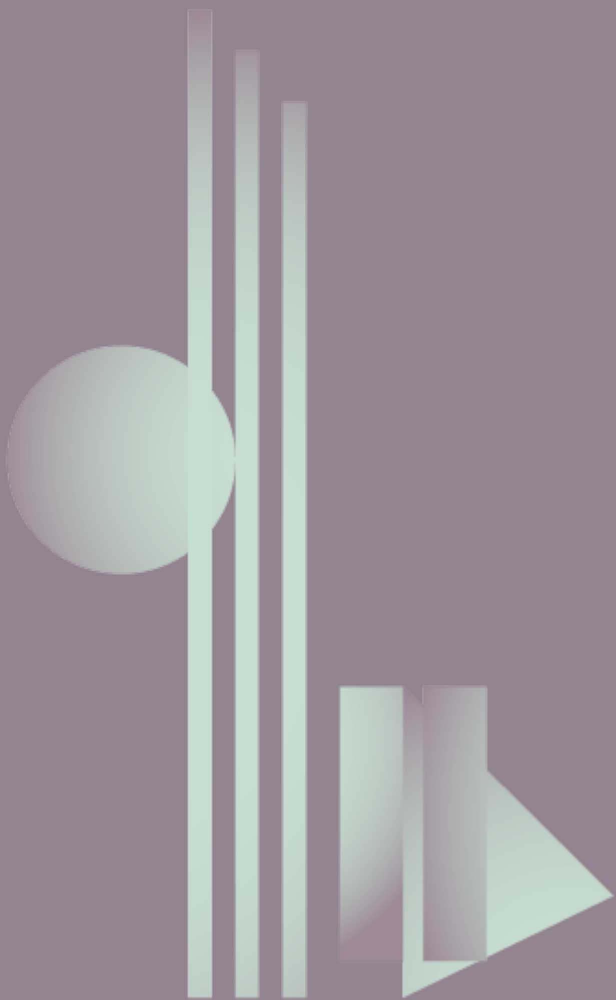
PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD
DE INGENIERÍA

ÍNDICE





ANTONIO SALES[1],
LEANDRO INÁCIO DA SILVA[2]

[1]LICENCIADO EM MATEMÁTICA, MESTRE E DOUTOR EM EDUCAÇÃO. DOCENTE SÊNIOR EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSS DO SUL, BRASIL E PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO CURSO DE LICENCIATURA DA UNIDERP-ANHANGUERA, CAMPO GRANDE, MS.

PROFESALES@HOTMAIL.COM

[2]LICENCIADO EM MATEMÁTICA PELA UNIDERP-ANHANGUERA, CAMPO GRANDE, MS. NA ÉPOCA DESTA EXPERIÊNCIA, ERA ESTUDANTE E PARTICIPOU DAS ATIVIDADES.

INACIOSILVABMB@GMAIL.COM

01

A MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA: PERCALÇOS DE UM PROCESSO

MATHEMATICAL MODELING IN A LICENSING COURSE: PERCUSSIONS OF A PROCESS

RESUMO

O presente trabalho surgiu a partir de duas hipóteses sobre as dificuldades que os acadêmicos de Matemática-Licenciatura encontrariam para trabalhar com Modelagem Matemática; este é, portanto, o resultado em uma pesquisa desenvolvida com acadêmicos do último semestre do curso durante as primeiras aulas de Modelagem Matemática. O objetivo foi verificar como os acadêmicos produziriam modelos para resolver atividades envolvendo produtos notáveis e analisar a dificuldade em observar regularidades de segunda ordem e enunciar o padrão observado, embora tais objetivos estejam também expressos em forma de hipóteses. Fundamentou-se na teoria dos obstáculos tanto epistemológico quanto didático e conclui-se que a capacidade de observar regularidade e fórmulas modelos não está desenvolvida nesse nível de escolaridade.

Palavras-chave: regularidade de primeira ordem, obstáculos à aprendizagem, atividade intramatemática.

ABSTRACT

The present work arose from two hypotheses about the difficulties that Mathematics-Licentiate scholars would encounter to work with Mathematical Modeling; this is, therefore, the result of a research developed with academics of the last semester of the course during the first classes of Modeling Mathematics. The objective was to verify how academics would produce models to solve activities involving notable products and analyze the difficulty in observing second order regularities and state the observed pattern, although such objectives are also expressed in hypothesis form. It was based on the theory of obstacles (both epistemological and didactic), and it was concluded that the ability to observe regularity and model formulas is not developed at this level of education.

Keywords: first-order regularity, obstacles to learning, intramathematic activity

INTRODUÇÃO

Quem é professor ou acadêmico em curso de Licenciatura em Matemática carrega em si a certeza de que a qualquer momento ouvirá a pergunta: "para que serve isso?" Essa pergunta partindo de um acadêmico ou de um estudante da Educação Básica, que não tenha afinidade com atividades intelectuais, pode significar: "que relação tem isso no meu cotidiano?" A sua preocupação centra-se na resolução de problemas práticos que o afligem ou que possam facilitar a sua sobrevivência. Sentem a necessidade de dominar os recursos naturais para satisfazer as necessidades fisiológicas ou manipular as informações para ocupar a posição social almejada. Isso não é estranho uma vez que a necessidade de sobrevivência foi um dos fatores que motivaram o progresso da Matemática. (D´Ambrosio, 2008).

Porém, se a mesma pergunta parte de um estudante (ou acadêmico) que tem afinidade com atividades intelectuais, que estuda pela busca da transcendência, ela poderá significar outra coisa. Por exemplo, ela pode sugerir que ele esteja perguntando: de onde surgiu essa fórmula ou o que comprova a validade dessa técnica? Quais as relações que posso estabelecer entre ela e aquilo que estudo ou encontro exemplificado nos livros didáticos ou textos usuais de estudo? Quais as conexões que posso estabelecer entre esse tema estudado e outras ciências? Dessa forma, entende-se que a pergunta para "que serve" pode ter significados diferentes em contextos diferentes ou partindo de pessoas diferentes.

Um acadêmico de licenciatura em matemática não pode se furtar em pensar sobre essas questões porque muito provavelmente se tornará professor da Educação Básica. Se não deseja ser simples repetidor daquilo que aprendeu e tenha a curiosidade de responder para si mesmo essa inquietante pergunta dos estudantes, a partir das diversas perspectivas, levando em conta os múltiplos fatores que a motivaram, ele certamente se interrogará e interrogará ao professor da disciplina: "para que serve?".

Pensando dessa forma começamos a questionar: como os acadêmicos de matemática encaram as possíveis "aplicações" da matemática. Sejam "aplicações" em forma de uma explicação sobre como determinada técnica se desenvolveu, seja "aplicação" no sentido de utilização de uma fórmula em outros domínios do saber humano, ou ainda um "receituário" que possa apontar alternativas de sobrevivência. Para isso, neste trabalho, percorreremos as perspectivas para a presença da matemática na Educação Básica conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais. De igual modo, buscamos entender o que outros pesquisadores da área de Educação Matemática discutem sobre a forma de abordagem esse saber escolar em qualquer nível de escolaridade. A forma de abordar a Matemática num curso de licenciatura tem por objetivo preparar o futuro professor para fazer frente aos diversos desafios que poderão surgir no seu fazer docente, inclusive os desafios de ordem intelectual. A questão, portanto, é: como acadêmicos de matemática, na etapa final do curso, reagem intelectualmente diante de desafios de explicar ou "aplicar" a matemática que estuda e que terá que ensinar?

Aplicar neste texto, conforme já pontuado anteriormente, não significa, necessariamente, a utilização da Matemática como ferramenta para resolver problema de outros domínios, sejam eles sociais, econômicos, biológicos ou técnicos. Aplicação pode, sim, ser uma referência a essa visão da Matemática como ferramenta. No entanto, aplicar a Matemática significa mais do que usá-la como instrumento para avaliar e interferir em outros domínios. Refere-se também ao uso das suas propriedades como um argumento plausível para explicar ou justificar a sua própria estrutura.

É nessa perspectiva, de que uma pergunta do estudante pode sugerir ao professor múltiplos direcionamentos em sua abordagem, que este trabalho se pauta e é conduzido. O tema da Modelagem está em pauta porque se faz presente na turma de sexto semestre do curso de Licenciatura em Matemática em decorrência de uma mudança curricular.

Contudo, por ser um tema novo, algumas questões a respeito da sua abordagem foram formuladas, especialmente no que diz respeito a possíveis dificuldades dos estudantes. Uma hipótese levantada foi a de que eles teriam dificuldades para detectar regularidades e formular um modelo para elas. Outra hipótese consistiu em pressupor que eles teriam dificuldades em recorrer a conhecimentos prévios e fazer investimento deles para resolver problemas ou até mesmo de associar o problema proposto a um determinado conteúdo matemático já conhecido.

Esses pressupostos surgiram em decorrência das experiências pessoais dos autores quando em determinado momento se depararam coma necessidade de resolver problemas que envolviam regularidade e a habilidade de formular um modelo. Habituados a receber todos os indicativos do que deve ser feito, eles mesmos não tinham liberdade para ousar ou para supor a existência de outras possibilidades. Faltava-lhes o raciocínio conjetural.

O presente trabalho, portanto, tem por objetivo analisar as dificuldades apresentadas por acadêmicos do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática no estudo de Modelagem Matemática.

A experiência dos autores também revela que, na região onde atuam, predomina no ensino da Matemática o modelo tecnicista onde o aluno recebe as fórmulas e deve exercitar para que possa ter algum resultado na avaliação. Os professores revelam uma preocupação intensa com as avaliações externas, incluindo os concursos e os processos seletivos.

Segundo Gascón o modelo tecnicista se caracteriza pelo treinamento de técnicas. Consiste na aplicação de técnicas a problemas previamente formulados ou a repetidos exercícios de reforço. Trata-se de uma trivialização do fazer matemático. Nas palavras do autor:

> El modelo docente tecnicista identifica implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender técnicas (algorítmicas)" por lo que constituye otra forma extrema de "trivializar el proceso de enseñanza de las matemáticas". Dado el énfasis tan exclusivo que pone en las técnicas "simples", el tecnicismo tiende a olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". En este sentido puede decirse que el tecnicismo comparte con el teoricismo "cierto tipo de trivialización de la actividad de resolución de problemas". En el tecnicismo se parte de ciertas técnicas algorítmicas y se proponen unicamente aquellos abusiva del proceso de resolución ni de adjudicar a la actividad de resolución de problemas un papel auxiliar sino de una fijación tan fuerte en las técnicas elementales que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios, ejercicios que sirven como "entrenamiento" para llegar a dominarlas; de esta forma se excluyen del repertorio de técnicas las estrategias de resolución complejas y no algorítmicas (Gascón, 2001, p. 135).

Essa prática tende a produzir obstáculos à aprendizagem da Matemática e pode também ser o principal fator de obstáculo à prática da modelagem.

Bassanezi admite a presença desse obstáculo ao afirmar que:

> O uso da modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. O tema escolhido pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse. (Bassanezi, 2002, p. 37).

Fugir da rotina em um contexto marcado ela presença tecnicista tem o seu preço. O desafio consiste em levá-los a superar obstáculos.

OBSTÁCULOS

Os obstáculos à aprendizagem de determinado conteúdo podem ser decorrentes de diversos fatores. Contribui para a compreensão desses fatores os estudos de Gaston Bachelard (1884-1962).

Um desses fatores é o próprio ato de conhecer, o seu mecanismo. Conhecer implica superar certos pressupostos, corrigir conhecimentos anteriores, admitir as limitações do que se sabe. Bachelard especifica o obstáculo epistemológico como aquele que decorre do próprio saber a ser apropriado pelo estudante. Determinados conteúdos são portadores de dificuldades próprias, inerentes ao conhecimento científico. No ato de conhecer subjazem dificuldades que não dependem de fatores externos e nem tem relação com o sujeito cognoscente.

> ... o espírito científico deve formar-se contra a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós, o impulso e a informação da Natureza, contra o arrebatamento natural, contra o fato colorido e corriqueiro. O espírito científico deve formar-se enquanto se reforma. (Bachelard, 1996, p. 30).

Outro obstáculo é denominado, pelo mesmo autor, de "experiência primeira" (Bachelard, p. 29). Tem a ver com o resquício do passado do sujeito, e da relação que estabelece com a realidade vivida, pois, "... Mesmo na mente lúcida, há zonas obscuras, cavernas onde ainda vivem sombras. Mesmo no novo homem, permanecem vestígios do homem velho" (Bachelard, p. 10). O real projeta sombras que obscurecem as próximas apropriações (Bachelard, p. 17). Superar uma opinião formada previamente é tarefa complexa e descartar evidências para fazer valer a razão requer esforço incomum.

Essa "experiência primeira" tende a estar fundamentada na certeza da completude do que se aprendeu no passado, seja na escola seja na experiência social. No entanto, o que se aprendeu pode ter sido fragmentado (o que dificulta juntar as partes agora) ou simplificado, para facilitar, de modo que ao vê-lo em sua complexidade o estudante pode recuar. Pode até mesmo ter sido aprendido corretamente, porém, estar marcado pela incompletude própria daquela etapa do conhecimento.

> É quando um conhecimento se torna obstáculo à aquisição de outro conhecimento. Esse conhecimento obstáculo é sempre o resultado da interação do estudante com o ambiente e precisa de uma situação que torna esse conhecimento interessante, diz Brousseau (1976, p. 107).

Outro obstáculo é a busca pela "generalização apressada e fácil" (Bachelard, 1996, p. 69). Ela costuma proporcionar prazer intelectual imediato e perigoso. A ideia de que toda Matemática necessária foi aprendida, e é como está posta, pode dificultar a busca por novos conhecimentos. A dificuldade para admitir que todo conhecimento corretamente construído, é eficaz em determinado momento, mas pode apresentar lacunas em estágios mais avançados, é um obstáculo.

A impaciência é tão própria de quem precisa estar preparado para a avaliação que toda instituição exige dos seus estudantes, é outro fator que dificulta aceitar a demora (muitas vezes necessária) pela busca de compreensão. Compreender demanda tempo que o estudante nem sempre dispõe.

Brousseau (1976) leva em contra também o interesse do estudante em investir no estudo do que está sendo proposto.

Esse mesmo autor destaca ainda o obstáculo de origem didática como aquele dependente da escolha de um projeto de ensino por parte do professor. A escolha de um modelo tecnicista pode resultar em muitos obstáculos ao progresso do estudante, uma vez que o tecnicismo considera a atividade matemática como treinamento e aplicação de algoritmos. Nessa perspectiva didática não há espaço para interpretação de problemas, discussão sobre processos alternativos de resolução ou observação de regularidades visando construção de um modelo matemático.

FINALIDADES DA MATEMÁTICA ESCOLAR

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática iniciam um dos seus parágrafos com a indicação clara de que se espera que os alunos da Educação Básica dominem mais do que números e operações. A razão é que esses fatores, eventualmente, podem ser reduzidos à pura memorização e aplicação de técnicas desprovidas de sentido. Pelo contrário, diz o documento, que devem ser orientados a buscar as "relações existentes entre eles", desenvolver a "capacidade de análise e de tomada de decisões" e tenham condições de "se manifestar" Embora o texto que se segue imediatamente nada fale sobre a natureza dessa manifestação, a continuidade do capitulo traz à tona que se trata da manifestação de uma forma de pensamento organizado pela observação de regularidades presentes na matemática e aplicabilidade dos modelos obtidos a partir dessa observação. Afirmam os elaboradores do referido documento que eles precisam ser levados "a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas". (Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p. 63-70). Como uma atitude esperada, resultante desse desenvolvimento intelectual, está o "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados". (Secretaria de Educação Fundamental, p. 75).

Em outro momento consta no documento que:

> [...] a Matemática no ensino fundamental, [se justifica] pela proposição que evidencia a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (Secretaria de Educação Fundamental, p. 15).

Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, decorrente do progresso intelectual esperado, fazendo com que os alunos justifiquem e relacionem, "criem" modelos. Essa é uma forma de fazer Matemática: explorar domínios novos para o sujeito. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), essa forma de tratar a matemática no contexto escolar tem tanta importância quanto explorar novos domínios, para especialistas. Cada um (estudante da educação básica ou especialista) na sua esfera está produzindo Matemática.

É importante entender que a Matemática surgiu, por um lado, da necessidade sentida pela humanidade em resolver determinadas situações do cotidiano que na atualidade ainda se fazem correntes e, por outro lado, pela busca da transcendência, pelo interesse de perscrutar o desconhecido, superar as limitações humanas de analisar apenas o perceptível pelos sentidos, de ir além do que satisfaz os interesses imediatos ou necessidades de primeira ordem. (D'Ambrósio, 2008).

Nesse embate entre a compreensão do vivido com a respectiva criação de modelos explicativos e a busca pela exploração do ainda não vivido, surge a Modelagem Matemática.

O QUE É A MODELAGEM

Embora o termo seja amplamente conhecido entendemos que ainda há acadêmicos que não tenham ouvido falar dele. Definimos, portanto, a modelagem como o elo, de ligação entre os blocos de ensino matemático e a análise de padrões matemáticos que se apresentam de maneira interligadas. Quando são explicitadas as ligações entre as diversas áreas da matemática e sua aplicabilidade na vida cotidiana trazemos a matemática para próximo da vivência e a tornamos, contextualizada socialmente, para os estudantes. Há quem apresenta Modelagem Matemática como o fator que favorece a autonomia do aluno porque se interpõe entre ele e os fenômenos sociais, econômicos, biológicos ou físicos, facilitando o processo de construção do conhecimento.

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob a ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose signficativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e tam-

bém ter senso lúdico para jogar com as variávesi envolvidas. (Biembengut y Hein, 2003, p. 12).

Segundo Caldeira (2009), a Modelagem Matemática não deve ser utilizada apenas para justificar o conteúdo que está sendo ensinado, mas sim deve valorizar a razão, o motivo pelo qual o aluno deve aprender Matemática, e a importância que isto representa na formação dele como cidadão responsável e participativo na sociedade. Quando se recorre aos exemplos práticos apenas para justificar ou ilustrar o conteúdo que está sendo ensinado, tem-se o caso de problemas de aplicação ou rotineiros segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2008). Evidentemente que o termo, no contexto usado por esses autores, tem o sentido restrito de aplicação ilustrativa. Trata-se de aplicação do problema e não da Matemática, uma vez que se limita a um problema elaborado ou selecionado especialmente para essa finalidade. A Modelagem não se presta a essa função. O seu objetivo é desafiar o estudante a utilizar a Matemática para resolver problemas que muitas vezes ainda não estão formulados. Usam-se os conhecimentos matemáticos disponíveis para criar o modelo e propor a solução exata ou aproximada.

A modelagem matemática vem como resposta a uma necessidade de contextualizar e explicar uma vez que, através de situações problemas reais, podemos expressar a linguagem matemática. Para Bassanezi (2002), a modelagem pode ser entendida também como um método científico ou como uma estratégia de ensino-aprendizagem, que envolve uma prática educativa em matemática, em que o que interessa não é encontrar um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas a fim de que o conteúdo matemático seja sistematizado e aplicado.

Segundo Biembengut:

> [...] a criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da Ciência é testemunha disso! (Biembengut, 1999, p. 11).

Foi com essa perspectiva que o trabalho foi desenvolvido.

A METODOLOGIA

Esta pesquisa qualitativa se caracteriza como descritiva e analítica porque consiste em descrever e analisar o processo de estudo de matemática, envolvendo interpretação de enunciados, observação de regularidade, relação com algum conteúdo já estudado e investimento em busca de um possível modelo, por acadêmicos do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para isso recorremos aos conceitos de "questões intramatemáticas" e "questões extramatemáticas" propostos por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 170) para falar de Modelagem Intramatemática e Modelagem Extramatemática conforme o tipo de problema que está sendo modelado.

Os problemas intramatemáticos originam-se na necessidade de resolver problemas gerados a partir do próprio estudo da Matemática e extramatemáticos são oriundos do contexto social, econômico ou outro contexto qualquer. (Sales, 2010).

De igual modo definimos regularidade imediata, ou de primeira ordem, e regularidade não imediata, ou de ordem superior a um, para nos referirmos à regularidade facilmente percebida e à regularidade não facilmente percebida, respectivamente. Esta última exige um olhar mais atento e, de alguma forma, previamente orientado, para percebê-la. A regularidade de primeira ordem pode ser percebida por qualquer pessoa que tenha um mínimo de curiosidade ou atenção.

A EXPERIÊNCIA

Problema proposto

A seguir estão algumas operações de multiplicação. Resolva todas elas, descubra um padrão comum a todas e forme um modelo único de resolução. Os produtos notáveis, tão conhecidos nossos, por exemplo, foram obtidos a partir da observação de regularidades durante a fatoração de expressões algébricas ou durante o desenvolvimento delas.

É possível encontrar um modelo único de resolução nas operações propostas a seguir? Por quê? Qual é esse modelo encontrado?

Os quadros a seguir trazem os exemplos

Quadro 1. Primeira atividade proposta

Original	1ª Ação Esperada
10x10=	10x10=100
9×11=	9×11=99
8x12=	8×12=96
7x13=	7×13=91
6x14=	6×14=84

A questão proposta se enquadra no perfil de modelagem intramatemática.

O que foi observado pelos acadêmicos e revelado na discussão em sala:
Na primeira coluna a sequência é decrescente com a diferença de uma unidade.
Na segunda coluna a sequência é crescente com acréscimo de uma unidade.
Na terceira coluna não viram regularidade.

Acontece que nas duas primeiras colunas a regularidade é de primeira ordem, facilmente observável.

Na primeira coluna tem–se: 9=10-1; 8=9-1 ou 10-2, etc.
Na segunda coluna tem–se: 11=10+1; 12=11+1 ou 10+2, etc.
Na terceira coluna tem–se uma regularidade de ordem superior a um.

Uma questão formulada pelo pesquisador foi: descubra o elemento-chave. A intenção era que eles pensassem tudo em termos de $10 \pm x$, o que não foi conseguido no primeiro momento. Essa seria uma regularidade não imediata.

A outra ação esperada (e necessária) era que eles observassem na terceira coluna a seguinte regularidade não imediata (Quadro 2).

No quadro da esquerda (Quadro 2) tem-se como regularidade imediata que a segunda coluna é 100-a, onde a=(1, 4, 9, 16), isto é, 100 menos um certo valor.

Essa regularidade imediata foi observada, porém, não foi considerada como regularidade. Não foi percebido o acréscimo de uma unidade na base da potência (quadro da direita). Como também não foi percebida a possibilidade da diferença entre dois quadrados.

A prática de receber todas as orientações de procedimento, presente no modelo tecnicista comumente adotado no ensino da matemática, constituiu-se no obstáculo à observação especulativa necessária. A "experiência primeira" de ter os detalhes do procedimento explicitados e as respostas imediatas não proporcionam estímulos à investigação. O "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultado" previsto nos PCN não se revelou presente, nesse primeiro momento.

Não se pode omitir, a essas alturas, a informação de que a atividade foi passada como desafio para ser entregue na próxima aula e que em sala de aula elas entrariam em pauta de discussão. Entregue a atividade houve um tempo de "provocação" e de espera por uma resposta e a primeira atividade foi resolvida. O estudante foi desafiado a resolver a atividade seguinte.

O que foi realizado na atividade extraclasse:
Salvo algumas exceções pode-se dizer que todos os 30 acadêmicos apresentaram a resolução. O que se percebeu foi uma redundância de procedimentos indicando uma produção coletiva. A figura a seguir (Figura 1) apresenta um excerto da resolução dessa questão.

Tendo observado uma sequência associou a um termo já conhecido a_n e fez n=(0, 1, 2, 3, 4, 5), isto é, a "distância", como expressou um acadêmico do ano de 2018, em relação ao número base.

Essa hipótese se confirma pela Figura 2 que tem parte da resolução da segunda atividade proposta.

Quadro 2. Exemplos de Regularidades Imediatas e não Imediatas

REGULARIDADE IMEDIATA	REGULARIDADE NÃO IMEDIATA
99=100-1	$99=100-1^2=10^2-1^2$
96=100-4	$96=100-2^2=10^2-2^2$
91=100-9	$91=100-3^2=10^2-3^2$
86=100-16	$86=100-4^2=10^2-4^2$

A segunda atividade era composta pela seguinte sequência de produtos não ordenados (Quadro 3).

Propositadamente a atividade proposta não seguiu uma sequência que tornasse imediata a regularidade. Para percebê-la os estudantes teriam que reorganizar a sequência que ficaria como segue e ainda completar, mesmo que apenas mentalmente, lacunas (em negrito) (Quadro 3- à direita):

Não houve essa iniciativa. Tal qual ocorreu na atividade anterior não se revelou presente o "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados,

Padrão comum : an(10-n).(10+n), onde n=(0, 1, 2, 3, 5)

a) 10x10
n=0
a_0=(10-0).(10+0)
a_0=10•10

a) 9x11
n=1
a_1 =(10-1)•(10+1)
a_1 =9•11

c) 8x12
n-2
a_2=(10-2)•(10+2)
a_2=8•12

c) 7x13
n=3
a_3 =(10-3)•(10+3)
a_3 =7•13

Figura 1. Resolução da questão por um acadêmico
Fonte: Dados da pesquisa, 2017

Quadro 3. Segunda actividade

Como prosto	Como esperado
100×100=	100x100=
85×115=	99x101=
70×130=	98x102=
97×103=	97x103=
90×110=	: :
	. .
	90x110=
	85x115=
	70x130=

Padrão comum : an(100-n)•(100+n). onde n=(0,3,10,15)

a) 100x100
n=0
a0 = (100-0).(100+0)
a0 = 100•100

b) 85x115
n=15
a15 = (100-15)•(100+15)
a15 = 85•15

c) 70x130
n=30
a30 = (100-30)•(100+30)
a30 = 70•30

d) 97x103
n=3
a3= (100-3)•(100+3)
a3= 97•103

Figura 2. Resolução da segunda questão por um acadêmico,
Fonte: dados da pesquisa, 2017

valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultado". Ocorreu a busca pela generalização apressada.

Há na terceira atividade (Quadro 4) uma regularidade de ordem superior à da atividade anterior. Naquela temos o elemento básico (100) evidente, enquanto nesta o elemento básico (50) está oculto. Para descobri-lo era necessário observar desde os anteriores que a soma dos elementos e qualquer linha é o dobro desse elemento básico.

Nesta atividade cujo elemento básico era 50 esperava-se que o estudante já tivesse percebido, nas atividades anteriores, a relação que há entre as soma dos fatores e o elemento-base. Por exemplo, 100+100=200, 85+115=200, etc., observação essa que fora provocada pelo enunciado e por falas do pesquisador que enfatizava: "observem regularidades presentes na atividade proposta".

Dada a forma como o trabalho foi conduzido esperava-se que nesta terceira atividade eles teriam elementos para discutir essas questões.

Quadro 4. Terceira atividade

$45\times55=$
$40\times60=$
$48\times52=$
$30\times70=$

Quando temos que x^2-y^2=(x+y)(x-y),
então (x+y)+(x-y)=2x

No ano letivo de 2018 a tarefa foi reapresentada, agora a um grupo de sete acadêmicos, os únicos presentes na primeira aula.

A primeira atividade (Quadro 1) foi proposta. Embora tivéssemos começado a aula apresentando a regularidade presente na sequência dos números pares naturais e dos números ímpares não houve manifestação espontânea de nenhum dos presentes mesmo após alguns minutos disponíveis para a discussão entre eles. Foi então destacada a ordem decrescente da primeira coluna e crescente na segunda coluna. Depois de algum tempo um acadêmico destacou que a sequência da terceira coluna obedecia a seguinte ordem: a diferença entre os números aumentava na mesma proporção dos números ímpares. Dessa forma, 100-99=1, 99-96=3, 96-91=5; 91-84=7 e, assim, sucessivamente. A sequência seria: (1,3,5,7, ...) (Quadro 5).

Quadro 5. Regularidade observada na terceira coluna

$10\times10=100$
$9\times11=99$
$8\times12=96$
$7\times13=91$
$6\times14=84$
$5\times15=75$

O quadro foi completado como se vê na foto (Figura 3) e o destacar que deveriam observar a diferença em relação ao 100 e em termos de um valor. Ao quadro o acadêmico acrescentou uma coluna à esquerda com os números de zero a 10 (Figura 3).

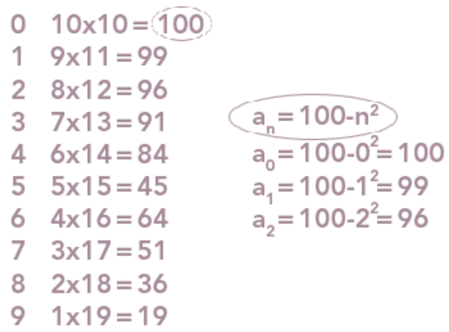


Figura 3. Atividade proposta em 2018
Fonte: Dados da pesquisa, 2018

Como o objetivo era que chegassem à expressão 10^2-n^2 foi sugerido que pensassem em termos de 100 menos um número ao quadrado. Foi então que ele criou uma coluna à esquerda com os números 0, 1, 2, ..., 9 que, no seu entender, seriam os índices de a (a_0, a_1, a_2, ... a_9).

Pensando em 100-n^2, ele vinculou n ao índice de a.

O procedimento é recorrente uma vez que na figura 1 vê-se procedimento semelhante.

Como forma de induzi-los a pensar em termos do que está no quadro 2, falou-se que a coluna criada à esquerda poderia ser um problema se aparecesse uma sequência não ordenado como nos quadros 3 e 4. Foi então proposto o que se vê a seguir (Figura 4):

Figura 4. Atividade proposta em 2018

$35\times65=$
$20\times80=$
$49\times51=$
$41\times59=$

Um segundo acadêmico que até então permanecera em silêncio afirmou que uma vez encontrado o número base que nesse caso é 50 bastaria saber a "distância de cada número a essa base" e ilustrou: "20 é 50-30 e 80 é 50+30".

Solicitado foi ao quadro e expressou a^2-n^2.
Foi-lhe perguntado: Quem é a?
Resposta: 50
P: Quem é n?
Resposta: a distância

O seu pensamento pode ser expresso em termos de uma reta numerada onde o número base é o ponto de referência. Dessa forma tem-se: 50$\pm$30, para o par (20, 80) da segunda linha (Figura 4).

Foi pedido que expressasse as demais distâncias da tabela e ele após um breve período de cálculo mental respondeu: 15, 1 e 9.

De alguma forma observa-se que a experiência primeira que o estudante tem de receber todas as orientações de procedimentos a serem adotados se tornou evidente nessa experiência. Mesmo o acadêmico no final do curso de Matemática-Licenciatura se mantém preso o "aluno velho" que não se desgarrou do seu passado. Mas neste caso esse obstáculo tem a sua origem na didática, na forma de conduzir um processo de estudo. É, portanto, um obstáculo didático.

Do mesmo modo, a dificuldade de observar regularidades de ordem superior se evidenciou tornando-se um obstáculo epistemológico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tentativa, de romper com o tecnicismo, se revelou cheia de percalços. As hipóteses de que teriam dificuldades para detectar regularidades e formular um modelo para elas e que teriam dificuldades em recorrer a conhecimentos prévios e fazer investimento deles para resolver problemas ou até mesmo de associar o problema proposto a um determinado conteúdo matemático já conhecido, se confirmaram.

Houve, no entanto, um aparente envolvimento dos estudantes embora não se saiba dizer qual a motivação: saber para a prova ou vivenciar a experiência de investigação.

Para desfazer essa incerteza na última a aula do semestre foi: solicitado, que os alunos expressassem as sua impressões sobre as aulas de Modelagem Matemática e sobre o conteúdo. As respostas indicam que alguns se sentiram desafiados, mas encontraram dificuldades de interpretação dos problemas e montagem da expressão matemática, outros sentiram necessidade de mais tempo e mais problemas para um maior envolvimento pessoal. Todos os que responderam, expressaram atribuir importância ao estudo da modelagem.

REFERÊNCIAS

Bachelard, G. (1996). *A Formação do Espírito Científico. Contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro, Brasil: Contraponto Editora.

Bassanezi, R. C. (2004). *Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática No Ensino*. 3.ed. São Paulo: Editora Contexto.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

D´Ambrósio, U. (2008). *Uma história concisa da Matemática no Brasil*. Petrópolis, Brasil: Editora Vozes.

Donizeti, A. (2009). Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Vol. 2*(2), pp. 33-54.

Fernandes, F. (2006). Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática. *UNIrevista. Vol.* 1(2).

Brousseau, Guy. (1976). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problematique et l'enseignement de la math_ematique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisee par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques, Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organis_ee par la Commission Internationale pour l'Etude et l', Louvain-la-neuve, pp.101-117. <hal-00516569v1>. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v1> Acesso em: 07 jan 2018.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 4*(2), pp. 129-159.

Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa. Vol. 5*(2), pp.11-37.

Sales, A. (2010). *Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática.* (Tese de doutoramento em Educação). Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS.

Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática*. Brasília: Ministério da educação e do desporto/Secretaria de educação Fundamental.

KARLA PATRICIA SALDAÑA SÁNCHEZ
JESÚS JERÓNIMO CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO,
FACULTAD DE INGENIERÍA.

02

APLICACIÓN DE LA MODELIZACIÓN EN EJEMPLOS DE GEOMETRÍA Y CÁLCULOS

MODELLING APPLIED IN GEOMETRY AND CALCULUS EXAMPLES

RESUMEN

En este artículo se presenta una serie de problemas donde se aplica la modelización geométrica e, incluso, interdisciplinar para la enseñanza de las Matemáticas a nivel bachillerato. Es conocido que los estudiantes muestran mayor interés en problemas relacionados con situaciones de la vida real que en aquellos planteados solamente en el contexto matemático. Este trabajo observa el proceso de modelización de Blum y Leiß que explica paso a paso cómo debe ser modelizado un problema para poder resolverlo. En el sistema educativo en México se considera la modelización como uno de los niveles más altos de aprendizaje, ya que es cuando los alumnos son capaces de relacionar sus conocimientos previos con problemas reales y así resolverlos con objetos matemáticos, para después llevarlos a la interpretación en la vida real. En este artículo veremos que la modelización matemática no es sólo el hecho de representar los problemas de manera abstracta, sino además, una propuesta de resolución de éstos.

Palabras clave: modelización matemática, geometría, enseñanza, aprendizaje, vida real, interpretación.

ABSTRACT

This article presents a few problems where geometric and even interdisciplinary modelling is applied for mathematics teaching. It is well known that students show more interest in real life problems that in those only concerned with mathematical objects. This article shows the modelling process according to Blum y Leiß, where they explain step by step how a problem should be modelled in order to be solved. In the Mexican educative system, modelling is considered as one of the highest levels of learning since it happens when the students are capable to match their knowledge with real problems and solve them with mathematical objects for later taking them to real life interpretation. In this article we shall see that Mathematical modelling is not only representing problems in an abstract way but also generating a proposal for solving them.

Keywords: mathematical modelling, geometry, teaching, learning, real life, interpretation

INTRODUCCIÓN

El uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas se realiza desde hace aproximadamente 30 años, lo cual se ha convertido en una parte fundamental de la investigación en la enseñanza de las matemáticas. Recientemente se incluyen en varios congresos de educación matemática varios artículos acerca de la modelización matemática y sus aplicaciones. El ICMI (International Commission on Mathemathical Instruction) tiene una sección dedicada a la modelización y sus aplicaciones, de la misma forma, la NCTM considera la importancia de integrar la modelización como una manera de resolver problemas y el informe PISA 2012 tiene en cuenta que es fundamental la construcción de modelos matemáticos a partir de un problema real para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En referencia a esto, la modelización matemática se ha ido utilizando en varios países para la enseñanza en el nivel básico. Un ejemplo de la aplicación de la modelización en la educación se encuentra en España a nivel secundaria donde se integran la modelización matemática y la construcción de modelos matemáticos (Búa y Fernández, 2015). En México en el libro de La enseñanza de la Geometría (García y López, 2015) se menciona que si se obtienen las habilidades visuales, las de comunicación, de dibujo y las de razonamiento se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos, al resolver problemas dentro de la misma geometría, sino también que modelen geométricamente situaciones del mundo físico o de otras disciplinas, a esto se le llama habilidades de transferencia y puede darse de diferentes formas; puede ser que el alumno utilice el contenido aprendido en geometría para resolver otra tarea que pertenezca al ámbito matemático, o que lo transfiera a otra área como la química, por menciona alguna.

En la actualidad el término modelización tiene mayor significado, ya que la investigación sobre ese tema no ha dejado de avanzar. Es necesario que la investigación en educación matemática que se realiza en todos los segmentos de la sociedad, se relacione con contenidos matemáticos aplicables a la vida real y con la necesidad de desarrollar una "competencia modeladora" como una competencia matemática básica de cualquier ciudadano, como dice el reciente informe mundial PISA. En 1993 se incluye en la reforma curricular de México el enfoque de resolución de problemas y se profundiza en el 2006. En este enfoque se plantea que el aprendizaje de las matemáticas se ahora debe orientar a que los alumnos puedan resolver problemas en diferentes contextos, anteriormente, la enseñanza era principalmente memorística y la aplicación mecánica de fórmulas o algoritmos.

Según Blum y Leiß (2015), la enseñanza de las matemáticas escolares va dirigida a que los alumnos desarrollen competencias y adquieran conocimientos que les permitan resolver situaciones matemáticas en la escuela así como en el "mundo real".

Por definición las competencias en modelización incluyen las competencias en resolución de problemas. En la mayoría de los casos, la matematización y el análisis del problema se constituyen en un problema matemático para el que modela y, en consecuencia, el proceso de modelización incluye resolución de problemas matemáticos. Pero es importante darse cuenta que es el problema de la vida real el que debería guiar la actividad de modelización y que la resolución del problema está subordinada a éste. Desde un punto de vista didáctico es importante que la perspectiva de modelización coloque a la actividad de resolución de problemas en un contexto real e incluya solución de problemas de naturaleza extramatemática (Blomhøj, 2004).

¿Qué es la modelización matemática?

La modelización matemática, en tanto estrategia didáctica y pedagógica, asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales, permitiendo la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. El principio fundamental es que los modelos son tratados como instrumentos para enseñar conceptos matemáticos.

Los modelos describen nuestras creencias acerca de cómo funciona el mundo. En la modelización matemática se traducen estas creencias en lenguaje matemático. Esto puede tener diversas ventajas como:

1. Las matemáticas son un lenguaje muy preciso.
2. Las matemáticas se configuran como un lenguaje conciso, con reglas y manipulación bien definidas.
3. Todos los resultados matemáticos probados a través de los años están a nuestra disposición.
4. Las computadoras pueden ser usadas para realizar cálculos numéricos (Marion y Dawson, 2008).

Actualmente existe investigación en modelización y sus aplicaciones centrada en la enseñanza explícita, lo que lleva hacia el encuentro de problemas de procesos de modelización:

-Problematización epistemológica: se cuestiona si las situaciones reales tienen propiedades didácticas.
-Problematización cognitiva: necesidad de profundizar los conocimientos activados por la realización de tareas de modelización y sus aplicaciones.

Argumentos a favor de la modelización

1. La modelización matemática une la experiencia de la vida diaria de los estudiantes y las matemáticas. Debido a esto se motiva el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo el apoyo cognitivo a conceptualizaciones de los alumnos, y se coloca a las matemáticas como forma de entender situaciones de la vida diaria.
2. En el desarrollo de las sociedades altamente tecnológicas las competencias para manipular los modelos matemáticos son muy importantes, no sólo en el mundo educativo sino también en el laboral.
3. Los modelos matemáticos son muy importantes en la sociedad actual, por lo tanto, el desarrollo de competencias en criticar modelos matemáticos y la forma en que son utilizados son necesarios para el mantenimiento y desarrollo de la sociedad.

La modelización matemática como práctica de enseñanza

La modelización matemática es una tarea difícil. El maestro tiene que colocar una situación o fenómeno de la vida diaria donde los alumnos puedan aplicar todo su conocimiento matemático en el proceso de modelización.

Objetivo: Mostrar cómo se realiza modelización geométrica o interdisciplinar en problemas inspirados en la vida real.

METODOLOGÍA: MATERIALES Y MÉTODOS

En la Figura 1 se muestra el ciclo de la modelización, según Blum y Leiß (2005), que se tendrá como metodología para realizar la modelización en geometría. Ésta se separa en dos campos grises: el de la izquierda es el mundo real y el de la derecha es el de las matemáticas.

Construir, simplificar/estructurar. Modelación de Blum y Leiß (2005)

a) Entender y reconocer un problema que se pueda afrontar matemáticamente.
b) Simplificar y estructurar. Reconocer las restricciones y especificaciones tomar decisiones acerca de éstas.

Matematizar

c) Identificar objetos y relaciones relevantes.
d) Elegir variables relevantes distinguiéndolas de otras
e) Reconocer el entorno matemático que se necesita.
f) Explicar relaciones reales con el objeto matemático.
g) Verificar la coherencia en el conjunto de supuestos y las relaciones matemáticas con el objeto real.

Trabajar matemáticamente

h) Establecer la relación entre las variables usando lenguaje matemático.
i) Formular hipótesis matemáticas.
j) Formular problemas en una forma matemática.
k) Resolución de problemas de una forma matemática.

Interpretar

l) Encontrar e interpretar soluciones matemáticamente en el modelo utilizado.

Validar

m) Conocer el significado de las soluciones en el mundo real.
n) Validar el modelo y cambiarlo si es necesario.
ñ) Discutir acerca de los resultados.

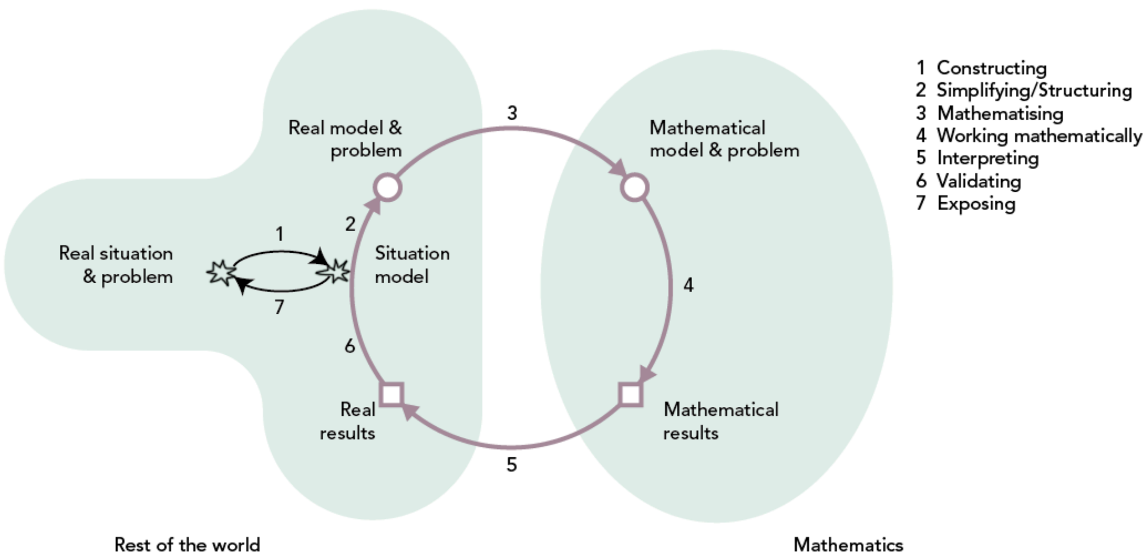


Figura 1. El ciclo de modelización según Blum y Leiß

Exponer

o) Comunicar resultados.

EJEMPLOS APLICADOS DE MODELIZACIÓN GEOMÉTRICA

Problema 1

En una graduación donde van a brindar 50 alumnos, calcular el mínimo de botellas de vino (750 ml) que se necesita para el brindis. Toma en cuenta que la copa se debe de llenar a 2/3 de su capacidad. (La copa es esférica con radio 3 cm)

Construir, simplificar/estructurar

La copa tiene forma esférica (véase Figura 2), por lo tanto, se podrá obtener el volumen con esa medida, el problema indica que se debe servir 2/3 de ella.

Figura 2.

Matematizar

La fórmula para obtener el volumen de una esfera es:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1}$$

Como sólo se va a llenar 2/3 de la esfera tenemos:

$$v_{copa} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \tag{2}$$

$$v_{necesario} = 50 * v_{copa} \tag{3}$$

$$no.\,botellas = \frac{v_{necesario}}{750\ ml} \tag{4}$$

Trabajar matemáticamente

$$v_{copa} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi(3\ cm)^3\right) = \frac{216}{9}\pi\ cm^3 = 24\ \pi\ cm^3$$

$$v_{necesario} = 50 * v_{copa} = 50 * 24\ \pi\ cm^3 = 1200\ \pi\ cm^3$$

$$no.\,botellas = \frac{1200\ \pi\ cm^3}{750\ cm^3} \approx 5.0266\ botellas$$

Interpretar

El volumen de 2/3 de la copa es 24 π cm^3 y cómo necesitamos 50 copas el volumen necesario será de 1200 π cm^3. Y si cada botella contiene 750 ml de producto necesitaremos 5.0266 botellas, o sea, 6 botellas.

Validar y exponer

El volumen mínimo total que será necesario para llenar 2/3 de la copa de cada uno de los estudiantes es de 6 botellas de 750 ml cada una.

Problema 2

Una vaca se encuentra atada a la esquina de su establo (por fuera) con una cuerda de 16 metros. Su establo es cuadrado de 8 metros de lado. ¿Cuál es el área de la superficie por donde se puede desplazar?

¿El problema se puede afrontar matemáticamente? Sí, ya que hablamos de áreas y figuras geométricas.

Matematizar

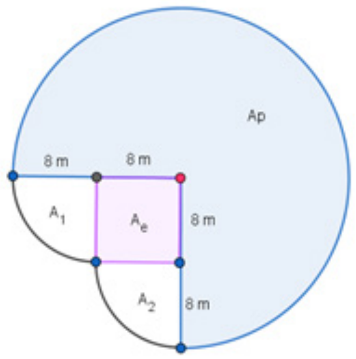


Figura 3

En la Figura 3 se observa:
a) Punto rosa: donde fue atada la vaca.
b) Ap= área donde se puede desplazar fuera de su establo. El punto rosa es el centro del círculo con radio 16 (medida de la cuerda con la que se encuentra atada).
c) A_1 y A_2= áreas donde la vaca se desplaza del otro lado de su establo.
d) A_e= área del establo.

A_3 es la suma de A_1 y A_2.

Se visualiza que la suma de A_1 y A_2 forma un medio círculo con radio 8 metros, entonces:

$$A_1 + A_2 = A_3 \rightarrow \; A_3 = \frac{1}{2}(\pi(r)^2) \tag{1}$$

Donde Ap es el área color azul que es la otra parte por donde se puede desplazar la vaca. Se observa que corresponde a ¾ de un círculo con radio 16 m.

$$A_p = \frac{3}{4}(\pi(r)^2) \tag{2}$$

Por último, se tiene el área del establo:

$$Ae = l^2 \tag{3}$$

También el área total:

$$\acute{A}rea\ total = A_3 + A_p + A_e \tag{4}$$

Trabajar matemáticamente

$$A_1 + A_2 = A_3 \rightarrow \; A_3 = \frac{1}{2}(\pi(8m)^2) \tag{5}$$

$$A_p = \frac{3}{4}(\pi(16m)^2) = 192\pi m^2 \tag{6}$$

$$A_e = (8m)^2 = 64\ m^2 \tag{7}$$

Luego:

$$\acute{A}rea\ total = \; 32\pi m^2 + 192\pi m^2 + 64\ m^2 \approx 767.72\ m^2 \tag{8}$$

Interpretar

El área total es la suma de las áreas A_1, A_2, A_p y A_e.

Validar y exponer

Con el trabajo matemático se valida y expone que el área de desplazamiento de la vaca es 767.72 m^2.

Problema 3

Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre sube corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana que se encuentra en la parte más alta de la montaña. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 min en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. ¿Cómo sabremos si está en lo correcto?

Construir, simplificar/estructurar

Se construye una gráfica en el plano cartesiano, en la cual se muestren los recorridos de subida y bajada con respecto al tiempo.

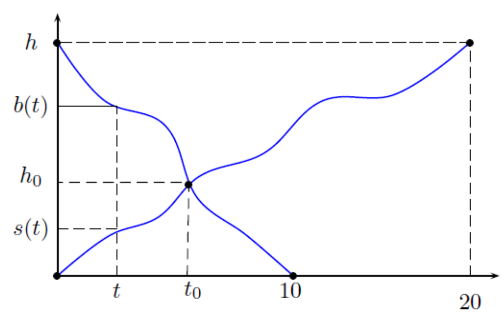


Figura 4

Matematizar

Supongamos que la altura de la montaña es una cantidad (h) y graficamos considerando el eje horizontal que representa el tiempo (t) y el eje vertical la altura a la que se encuentra el hombre en el tiempo (t).

Trabajar matemáticamente

Como las gráficas de subida y bajada se representan por curvas continuas es claro que las trayectorias de éstas deben cruzarse en algún momento.

Interpretar

Precisamente en ese momento que se cruzan las trayectorias el hombre se encontraba el sábado y el domingo a la misma altura a la misma hora.

Validar y exponer

La validación se obtiene a partir de la observación de la gráfica que representa la altura en cada momento para cada uno de los trayectos.

Problema 4

Tenemos un tablero de 3x3, coloreado como se muestra en la figura siguiente y se colocan cuatro caballos de ajedrez en las esquinas del tablero. Los de las esquinas superiores son negros y los de las esquinas inferiores son blancos. Siguiendo los movimientos permitidos para un caballo en el juego de ajedrez, ¿pueden cada uno de los caballos llegar a la esquina opuesta?

Construir, simplificar/estructurar

Observemos cómo están localizados los caballos en el tablero (Figura 5).

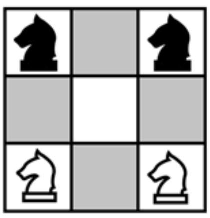


Figura 5

Matematizar

Asignamos números a cada uno de los cuadros del tablero de la manera siguiente (Figura 6).

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Figura 6

Trabajar matemáticamente

Representamos cada casilla del tablero como un vértice de un octágono y la casilla con el número 5 como un punto dentro del octágono. Asignamos los números de casilla a cada vértice tomando en cuenta que exista movimiento directo de un caballo de un vértice a otro adyacente. Por ejemplo, un caballo en la casilla 1 puede moverse a la casilla 6 o a la casilla 8, por tal motivo los vértices adyacentes del 1 en el octágono son el 6 y el 8. La única casilla que no puede alcanzarse mediante movimientos de caballo de ajedrez es la correspondiente al número 5, por eso la representamos como un punto aislado del octágono (Figura 7).

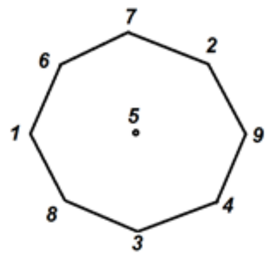


Figura 7

La posición original de los caballos corresponde al diagrama de la izquierda y el estado final al que se desea llegar queda representado por el diagrama de la parte derecha (Figura 8).

El caballo negro en la posición 1 se va a mover a la posición 9.

El caballo negro en la posición 7 se va a mover a la posición 3.

El caballo blanco en la posición 3 se va a mover a la posición 7.

El caballo blanco en la posición 9 se va a mover a l posición 1.

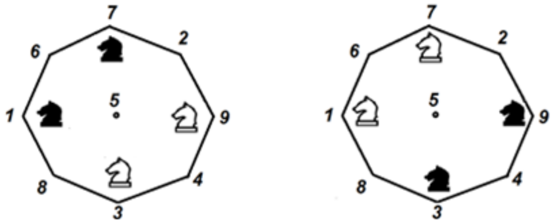


Figura 8

Interpretar

Observemos que no importa que caballo se desee mover, no puede cambiar el orden en el que aparecen: los dos blancos de un lado y los dos negros del otro. Esto se debe a que un caballo no puede brincar a otro ya que los movimientos permitidos para cada uno de ellos es mediante vértices adyacentes en el octágono.

Validar y exponer

Se concluye entonces que se necesitan 4 movimientos por cada caballo para llegar a la posición final.

Problema 5

Demostrar que en cualquier reunión de 6 personas hay tres personas que se conocen entre sí o tres que se desconocen mutuamente.

Construir, simplificar/estructurar

Representamos a cada una de las 6 personas como los vértices de un hexágono y a las posibles relaciones (conocerse o no conocerse) mediante segmentos de línea punteados (Figura 9).

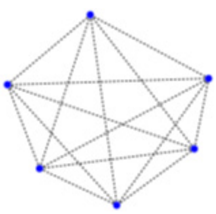


Figura 9

Matematizar

Elegimos a una de las personas y analizaremos sus posibles relaciones con las otras personas. Si dos personas se conocen pintamos el segmento que une a los puntos que los representan de color rojo, en caso de no conocerse dos personas pintamos el segmento que une a los puntos que las representan de color verde. De este modo, el problema se traduce en demostrar que no importa como pintemos los lados y diagonales de un hexágono, siempre habrá un triángulo con vértices en los vértices del hexágono, el cual tiene sus tres lados del mismo color (rojo o verde).

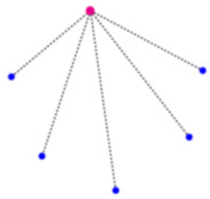


Figura 10

Trabajar matemáticamente

Como las posibles relaciones de la persona elegida con los demás son 5, tenemos que al menos tres de los 5 segmentos que llegan a ese vértice son del mismo color, por ejemplo, rojos (Figura 11).

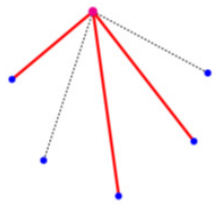


Figura 11

Si alguno de los segmentos que une un par de extremos es rojo, entonces ya tendríamos un triángulo con sus tres lados rojos.

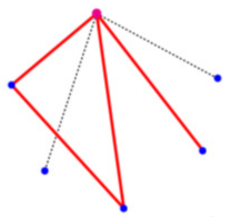


Figura 12

Entonces lo pintamos de verde:

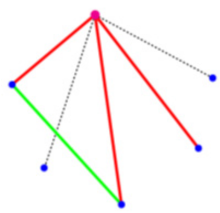


Figura 13

De igual modo se hace con otra pareja de extremos de segmentos rojos:

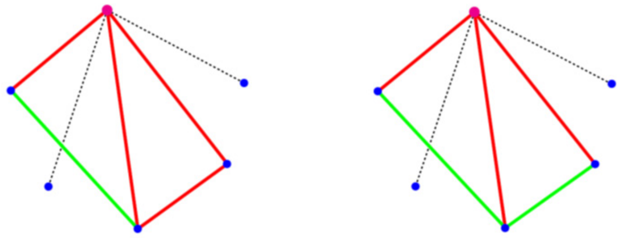


Figura 14

Sin embargo, al considerar el tercer extremo entre segmentos rojos, se distingue que, si se pinta rojo, se obtiene un triángulo rojo y, si se hace verde, resulta un triángulo verde. Por lo tanto, siempre tiene un triángulo rojo o un triángulo verde.

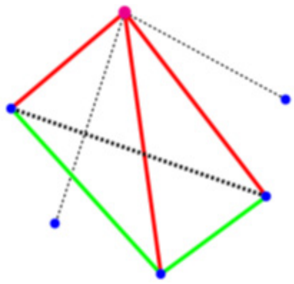


Figura 15

Interpretar

Como siempre hay un triángulo rojo o un triángulo verde, hay tres personas que se conocen entre sí o hay tres personas que se desconocen entre sí.

Validar y exponer

Notemos que el análisis del problema empieza suponiendo que hay al menos tres de las relaciones, de las cinco posibles, de una persona que son del mismo color. Después se analizaron los casos posibles en la manera de pintar los tres segmentos dados y se concluyó que siempre existía un triángulo con sus tres lados del mismo color. Si en lugar de ser tres segmentos rojos tuviéramos 4 o 5, es suficiente elegir tres de ellos y con eso repetir el análisis. Es así se concluye que el análisis realizado incluye todas las posibilidades y por tanto la prueba está completa.

DISCUSIÓN

Para un análisis complementario, Bosch *et. al* (2007) proponen que la modelización también se puede hacer con base en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, ya que propone que toda actividad humana (en este caso actividad matemática) puede ser modelada por praxeologías, dicho término proviene de la composición de praxis+logos; para la TAD praxis es el conjunto de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos y logos que se refiere a los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se usan (tecnología), también existe otro nivel que es el "saber" que es lo que explica la tecnología y se refiere a la teoría.

Las praxeologías (Chevallard, 1999) se definen como:

Tipos de tareas: Existen tareas (t) y tipos de tareas (T), las tareas son las que se expresan como un verbo, por ejemplo: limpiar el cuarto, hacer la comida, correr en el parque. Tipo de tarea es un objeto relativamente preciso: subir la escalera al segundo piso es un tipo de tarea pero el subir no lo es.

Técnicas: Sea pues un tipo T de tareas, para realizar este tipo de tarea se necesita una determinada manera de hacer (ô), a esto se le llama técnica. Una praxeología contiene un bloque designado [T/ô] que se le denomina bloque práctico-técnico y se identifica como el saber hacer.

Tecnología: Se entiende por tecnología y se indica generalmente por θ el discurso cuyo objetivo tiene justificar la técnica para asegurar que se realice el tipo de tarea (T).

Teorías: El discurso tecnológico tiene afirmaciones escritas con las que se pasa a un nivel superior de justificación, explicación y producción. El de la teoría que se simboliza como Θ.

Chevallard menciona que existe un proceso de estudio de la praxeología matemática y que está determinado por seis momentos didácticos, dónde en este caso no hay una estructura lineal:

Los seis momentos didácticos son:

a) Momento del primer encuentro

Se refiere a la primera vez que los estudiantes entran en contacto con el problema a resolver. Éste momento no es único ya que el estudiante puede volver a entrar en contacto con el problema inicial. Su función es dar una visión general de la problemática que se va a realizar para que comience el estudio.

b) Momento exploratorio

Se explora el problema en cuestión, se inscribe dentro de un tipo de tareas (de los previamente definidos) y se elabora una técnica para esta. El momento exploratorio tiene 2 etapas; la primera es la investigación de técnicas para solucionar el problema planteado y la segunda es donde los tipos de problemas son concretos y existen técnicas matemáticas para dar solución a ellos.

c) Momento del trabajo de la técnica

Se inicia con la técnica que fue utilizada en el momento exploratorio, y posteriormente se estimula para generar técnicas "nuevas" a partir de ésta y así continuar con el estudio de la problemática. Tiene que tener un muy buen dominio de la técnica ya que con esto se generarán nuevas tareas así que es importante que el alumno esté familiarizado con ella.

d) Momento tecnológico-teórico

Aparecen nuevas situaciones matemáticas relativas a las técnicas, como por ejemplo interpretación, justificación y alcance y relación de las mismas técnicas. La respuesta para estas situaciones requerirá de la realización de nuevas tareas matemáticas que también se integrarán a la praxeología en construcción.

e) Momento de la institucionalización

En este momento es donde aparece la praxeología elaborada, pues especifica todo lo que se ha utilizado para su construcción y que finalmente con esto adquiere la definición de praxeología.

f) Momento de la evaluación

Se evalúa toda la praxeología en sí; desde la identificación de las tareas, ¿a qué se asocian?, ¿existe variedad en ellas?, las técnicas sí están trabajadas de la forma correcta, ¿tienen una buena fundamentación?, ¿son las adecuadas para realizar las tareas solicitadas? Y si el discurso tecnológico es explícito y si ayuda a interpretar y justificar las técnicas.

CONCLUSIONES

En los ejemplos vistos anteriormente se puede notar que el ciclo de modelización de Blum y Leiß se puede usar fácilmente para resolver problemas creando modelos matemáticos a partir de conocimientos simples, de acuerdo con David Ausubel (1976), durante el aprendizaje significativo el aprendiz relaciona los conocimientos previos de una manera sustancial con los nuevos conocimientos. El aprendiz debe de estar dispuesto a aprender significativamente. Por otro lado, también importa la forma en que se plantean los materiales de estudio y las experiencias educativas. Si se logra el aprendizaje significativo, se trasciende la repetición memorística de contenidos y se logra construir significado, dar sentido a lo aprendido, y entender su ámbito de aplicación y relevancia en situaciones académicas y cotidianas. La resolución de problemas con modelización no se reduce a sólo interpretar los resultados con fórmulas matemáticas, gráficas o dibujos, es el hecho de generar un modelo dónde con ayuda de los conocimientos previos se llegue a una resolución final. La modelización se confunde muchas veces con interpretación pero en los ejemplos previos no es el caso ya que se tiene que generar una "fórmula final" (por llamarla así) para poder resolver los problemas propuestos.

El análisis previo realizado con base en la TAD muestra que también el ciclo de modelización se puede expresar en términos de praxeologías para respaldar la manera de utilizar la modelización en la enseñanza. El proceso de modelización es un proceso continuo y progresivo cuya idea fundamental se encuentra en el cuestionamiento constante de la adecuación del modelo a la tarea propuesta y de su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso de estudio.

Por lo tanto, si los alumnos son capaces de cuestionar los modelos matemáticos que desarrollen para las tareas propuestas, al mismo tiempo podrán reflexionar respecto a sus resultados obtenidos.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak, J. H. y H. Hanesian. (1976). Significado y aprendizaje significativo. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, pp. 53-106.

Blum, W. y Leiß, D. (2005). How do students and teachers deal with odelling problems? *Mathematical Modelling* (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics, pp. 222-231.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling-A theory for practice*. Suecia: National Center for Mathematics Education, 2004, pp. 145-159.

Búa, J. B. y Fernández, M. T. (2015). Dos ejemplos de modelización matemática basadas en fenómenos. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 221-266.

García, S. y López, O. L. (2008). L*a enseñanza de la Geometría*. Ciudad de México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

VIVIANA RIVERA MONJARAS
VÍCTOR ANTONIO AGUILAR ARTEAGA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO,
FACULTAD DE INGENIERÍA.

03

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS ENTRENAMIENTOS DE LA OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS

THE DIDACTIC OF MATHEMATICS APPLIED ON OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS TRAINING

RESUMEN

En este trabajo se analiza el contexto y desarrollo de los entrenamientos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) con la finalidad de establecer la importancia de sus elementos didácticos y la posible implementación de éstos en el aula de clases. En dichos entrenamientos se observan la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y el método de Polya que conforman el eje central de este artículo. Por un lado, la TSD afirma que el estudiante aprende mejor matemáticas cuando se le presenta un medio con actividades diseñadas por el docente, las cuales representen un obstáculo epistemológico y en donde es necesario que se resuelva una situación. Mientras que el método de Polya describe el proceso y las fases que llevan al alumno a la resolución de problemas matemáticos.

Palabras clave: Entrenamientos, situación, elemento didáctico, obstáculo epistemológico, problemas, método de Polya.

ABSTRACT

This article analyzes the context and development of the Olimpiada Mexicana de Matemáticas (vOMM) trainings. The purpose is to establish the importance of the didactic elements and their suitability, so they can be implemented in the class. Such trainings include the Theory of Didactical Situations (TDS) and Polya's method, which are the focus in this article. The TDS suggests that the student learns math when a set of activities designed by the teacher are presented, these activities represent an epistemological obstacle where a situation needs to be solved. Polya's method describes the process and phases that lead the student to solve math problems.

Keywords: Trainings, situation, didactic elements, epistemological obstacle, problems, Polya's method.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se hace un análisis de la metodología de la enseñanza de matemáticas en la OMM, ya que son relevantes los resultados de México en competencias internacionales están por encima de muchos países, en los que, según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), la enseñanza de las matemáticas es mejor que en nuestro país (2015). Es así que se desarrollan las bases para que los profesores en las aulas de clases adopten estrategias similares a las de la olimpiada de matemáticas, y también se evidencia la importancia de que los entrenadores conozcan las teorías didácticas para mejorar las sesiones.

Este artículo no pretende hacer una investigación exhaustiva sobre la aplicación de las teorías didácticas, sino dejar un tema de discusión abierto para trabajos futuros.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) es organizada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), cuya parte central es la realización del Concurso Nacional para estudiantes preuniversitarios. Este concurso es uno de los más importante en México a nivel bachillerato en esta área. La competencia es anual y se lleva a cabo en tres etapas:

- Concursos Estatales
- Concurso Nacional
- Entrenamiento, selección y participación de las delegaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales

Los objetivos de la OMM son diversos. En primer lugar, se pretende promover el estudio de las matemáticas en una forma no tradicional, alejándose de la memorización y mecanización, y buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes. Otro de los objetivos es crear grupos de entrenamiento de matemáticas donde los participantes desarrollen habilidades de resolución de problemas. Finalmente, tiene el objetivo de seleccionar a los alumnos más destacados para representar al país en competencias internacionales. Un gran número de personas participa en el proceso con el fin de conseguir dichos objetivos.

En referencia a esto, es importante mencionar el impacto que la OMM ha tenido en el ambiente educativo, ya que diversos profesores y alumnos han creado por su propia cuenta talleres y clubes para desarrollar habilidades de razonamiento y resolución de problemas matemáticos.

Comparativa de los resultados de México en las olimpiadas internacionales de matemáticas y las evaluaciones de la OCDE

De acuerdo con los resultados de la evaluación PISA del 2015, México ocupa el lugar 58 de 72 países en el ámbito de Competencia Matemática, promediando un total de 408 puntos por alumno, lo que lo ubica en el nivel 1, el más bajo de 6 niveles. La OCDE establece que en el nivel 1: "los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y de desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explicitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo" (Navarro, 2017). Además de esto, se reporta que menos del 1% de los alumnos mexicanos alcanza los niveles 5 y 6 de la prueba PISA, considerados de excelencia. Sin embargo, en ese mismo año, México se posicionó en el lugar 19 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas, superando a 14 de los mejores 20 paises en la evaluación PISA (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2016), como Hong Kong (segundo lugar de acuerdo con la OCDE), Japon, Finlandia y Alemania.

Perfil del alumno

En el artículo "Talento matemático excepcional y destino profesional. Trayectorias de participantes mexicanos en olimpiadas internacionales de matemáticas" En ésta, se abarcaron diferentes características como el género, el perfil socioeconómico, los rasgos de personalidad y el desempeño escolar.

En cuanto al género se menciona que los participantes suelen ser en su mayoría varones, este hecho es algo que también sucede en otros países y en competencias internacionales. La explicación de esta singularidad se le suele atribuir a diversos factores, uno de ellos puede ser el factor cultural.

El perfil socioeconómico de los participantes en esa investigación fue medido a partir de dos variables: el nivel educativo de ambos padres y el nivel de ingresos mensual familiar. Según los datos obtenidos, el nivel cultural promedio de los olímpicos es alto, principalmente, por la educación del padre, y una parte considerable de los olímpicos pertenece a la clase media o alta.

Los rasgos de personalidad en los participantes principalmente son: una actitud competitiva, disciplinados al realizar sus actividades y tener una gran motivación por parte de las personas que los rodean (familia, profesores, compañeros, instituciones, etcétera)

De igual manera, los participantes muestran un buen desempeño académico. Según la investigación antes mencionada, la media de los promedios de estos estudiantes se encuentra en 9.4, una cuestión que está directamente relacionada con las características anteriores.

Por lo tanto, al analizar el perfil de los participantes de la OMM se puede vislumbrar que las características de estos jóvenes distan a las de un alumno promedio. Cabe recalcar la labor de la OMM para integrar a más jóvenes a sus proyectos y ayudarlos a desarrollarse en el ámbito de las matemáticas.

Descripción de entrenamientos

Los entrenamientos de la OMM son parte del concurso y de un proceso extenso en el que participan miles de jóvenes estudiantes a lo largo de todo el país. La mayoría de los entrenamientos son organizados y guiados por profesores y estudiantes de licenciaturas o ingenierías afines a las matemáticas que dedican su tiempo de manera altruista.

Los entrenamientos del proceso olímpico comienzan desde etapas tempranas del concurso y se configuran como indispensables para poder trascender, pues distintos temas requeridos no se enseñan en las escuelas. Esto ocasiona que la dificultad de los temas y problemas vistos en los entrenamientos vaya aumentando con el transcurso del tiempo. Un entrenamiento de etapas tempranas puede ser muy distinto a uno avanzado.

Hay un esquema general que usualmente se utiliza, sin embargo, el diseño de cada sesión les corresponde a los entrenadores. Cabe mencionar que los exámenes de Olimpiada de Matemáticas tienen una duración mayor en comparación con los acostumbrados en las clases ordinarias y por este motivo los entrenamientos se organizan en sesiones largas, de 3 a 4 horas, para ayudar a que los alumnos tomen con normalidad el trabajo concentrado durante grandes periodos de tiempo. Cada entrenamiento se vuelve particular de acuerdo con el objetivo que se tenga de la sesión. El objetivo principal es incrementar en los jóvenes las habilidades de razonamiento, el análisis y la creatividad matemática, incluso, dentro de este objetivo, cada sesión se diseña para cubrir, enseñar o practicar ciertos temas o teoremas determinados.

Al ser un concurso y al tener en mente que se está practicando para lograr mejores resultados en éste, también entran en juego otros aspectos que ayudan a mejorar el rendimiento dentro de la competencia, así que en varias ocasiones las actividades del entrenamiento no sólo se enfocan en resolución de problemas, sino también en preparar estrategias para el concurso como el manejo del tiempo, el trabajo en equipo, la parte anímica del alumno y el manejo de situaciones en las que los problemas no salgan inmediatamente o simplemente no los pueda resolver. Aunque lo mencionado antes es un punto importante en los entrenamientos, en este texto nos enfocaremos únicamente a la parte didáctica.

La principal característica que diferencia a un entrenamiento de olimpiada de una clase normal es que en la OMM el alumno va construyendo por su cuenta la mayoría de los conocimientos a partir de axiomas o teoremas básicos por medio de los problemas que el asesor propone. El dar libertad creativa a los alumnos, en varias ocasiones, genera que las soluciones que el entrenador pretende que sean descubiertas no se presenten y son estos momentos en los que su guía se vuelve importante para la sesión, al exponerles una solución alternativa que podría hacerles más sencillo el trabajo en el futuro.

En ciertos casos, cuando el tema es distinto al conocimiento previo de los alumnos, se vuelve indispensable exponer la teoría de una manera más tradicional, pero siempre de la mano de problemas que exijan al alumno un grado de creatividad más específico y no solamente la aplicación del conocimiento de una manera directa. Esto muestra al estudiante, además de un ejemplo de cómo utilizar la herramienta, un ejemplo de una situación aplicable en la que se utiliza el teorema o técnica, a comparación de un ejercicio directo que sólo le describe al alumno el cómo utilizarla, pero sin ubicarla en un contexto.

También es común que se encuentren momentos en los que los entrenamientos se conviertan en una lluvia de ideas entre profesores y participantes, cuyo fin es resolver el problema. Esto conforma un fuerte ambiente de comunicación entre ambas partes y motiva la participación de los alumnos, quienes se sienten a la par del entrenador y motivados por la creación de un ambiente de confianza para desarrollar sus ideas.

ENLACE ENTRE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y LOS ENTRENAMIENTOS

Teoría de Situaciones Didácticas

Una de las teorías que se han desarrollado en la matemática educativa en los últimos años es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por la escuela francesa y encabezada por Guy Brousseau. Esta teoría afirma que el estudiante aprende matemáticas mediante actividades diseñadas por el profesor, en un medio en el que se plantea resolver una situación y en donde el mismo medio le comunica al estudiante qué es necesario cambiar o resolver para que el alumno adquiera una nueva estrategia que lo adapte al medio en conflicto (Brousseau, 2007).

Para entender mejor esta teoría, se define situación como un modelo de interacción entre un sujeto, al que también se denomina alumno, con cierto medio que determina un conocimiento dado. Hay situaciones que requieren la adquisición previa de los conocimientos y esquemas necesarios, pero también hay otras en las que el sujeto tiene la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo. El medio debe ser autónomo y antagonista del sujeto.

La TSD considera un esquema triangular donde participan alumno, docente y saber. Es importante recalcar que en esta teoría se le da mucho peso a la participación del docente, ya que tiene un papel crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñando un ambiente óptimo para que se lleve a cabo.

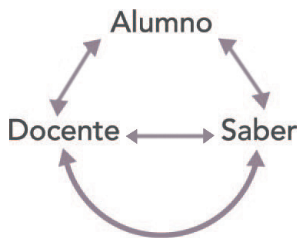


Figura 1. Triada didáctica

El docente debe ser consciente que un problema o ejercicio no se puede considerar como una simple reformulación de un saber, sino como un medio para adquirir el conocimiento. Para describir correctamente un medio se requiere considerar las siguientes cualidades:

- Cómo debe interactuar el sujeto para generar la necesidad de adquirir un conocimiento determinado
- La sucesión de acontecimientos que puede llevar al sujeto a concebir dicho conocimiento y a adaptarlo
- La información pertinente que obliga al sujeto a llegar a cierto conocimiento

Cuando el alumno trabaja sin la intervención del docente, las interacciones entre el sujeto y el medio están descritas a partir de las situaciones adidácticas que establecen las actividades de producción de conocimientos por parte del estudiante. El alumno se adapta al medio que es un factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, parecido al de la sociedad humana. Este nuevo saber es fruto de la adaptación, manifestándose en respuestas que son la prueba del aprendizaje. Entonces bien podemos considerar el concepto de medio como una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta y el conjunto de relaciones matemáticas que se van modificando durante el proceso de adaptación del saber del alumno.

Importancia de la selección de actividades y problemas en los entrenamientos de la OMM

El papel de los entrenadores es fundamental en el proceso de la olimpiada, pues ellos son los encargados de optimizar el tiempo necesario para el desarrollo de las habilidades de los jóvenes participantes. El éxito de la labor de un entrenador no reside solamente en su trabajo frente al grupo, sino también en el diseño previo de las actividades. Este diseño está muy ligado a la TSD, pero de forma empírica, pues en el formato de entrenamientos se encuentra presente la triada docente-sujeto-medio.

Los entrenadores tienen el papel de docentes que son los encargados de seleccionar un conjunto de problemas y actividades que describen el medio con el que el alumno interactúa, así proporcionándoles las herramientas para construir su propio conocimiento. Para ello los entrenadores en cada sesión deben tener claro el objetivo y, con base en esto, elaborar una secuencia de actividades adecuadas que lleven al alumno a enfrentarse a situaciones que le generen un conflicto cognitivo y con esto crear nuevo conocimiento gracias a la adaptación.

Las siguientes actividades representan diferentes dinámicas de interacción entre docente-alumno-medio:

• Actividad para generar la necesidad de un conocimiento

Para este caso el entrenador busca un problema que considera que el alumno no podrá resolver inmediatamente porque no tiene el conocimiento necesario, pero puede construirlo o deducirlo. La actividad debe hacer evidente la necesidad de un nuevo conocimiento. Por ejemplo, en los entrenamientos uno de los conocimientos son las técnicas para encontrar estrategias ganadoras. Un ejemplo para ilustrar esto es la siguiente situación planteada en un entrenamiento:

En la mesa hay 7 monedas con las que A y B juegan alternadamente. En cada turno, un jugador puede tomar 1 o 2 monedas. Si gana aquel que se quede con la última moneda y A comienza el juego, ¿qué jugador puede asegurar la victoria?

Para saber quién es el jugador que tiene asegurada la victoria, cuando hay 7 monedas en la mesa es conveniente comenzar revisando los casos donde hay menos monedas. Esta técnica no es fácil de deducir, así que el entrenador debe sugerir a los alumnos jugar las veces que sean necesarias para conocer las características del juego y poder deducir algo de ellas. Como actividad complementaria, el entrenador puede manejar preguntas que guíen al alumno y le generen la necesidad de adquirir un conocimiento nuevo sobre el juego.

-Una moneda. Es fácil vislumbrar que cuando hay una moneda, gana A porque él es el primer jugador y es quien la puede tomar al principio del juego. Se puede decir, entonces, que el que se tenga una moneda da como resultado una posición ganadora para A.

-Dos monedas. En este caso también gana A, dado que puede tomar las dos monedas. Eso ocasiona que ésta también sea una posición ganadora para A.

-Tres monedas. En este caso A tiene dos opciones: tomar una o dos monedas. Si hace lo primero dejará dos monedas sobre la mesa, y ya se sabe que si alguien agarra dos monedas, gana. Si hace lo segundo, le dejará a B una moneda, por lo que A perderá. Y como sólo tiene esas dos opciones, y ambas lo hacen perder, se puede concluir que tres monedas sobre la mesa hacen que A pierda, es decir, determinan una posición perdedora para A.

-Cuatro monedas. Si hay cuatro monedas y A toma una, dejará a B con tres monedas y ya se sabe que esa es una posición perdedora (lo que quiere decir que B perderá y A no). Por lo tanto, cuatro monedas son una posición ganadora para A.

-Cinco monedas. En este caso, lo que hará A es simplemente dejar a B con tres monedas, sabiendo que éste va a perder.

-Seis monedas. Las dos opciones que tiene A es tomar una moneda o dos monedas, lo cual dejará a B con cuatro o cinco monedas, ambas serán posiciones ganadoras para B. Como A no tiene otra opción, cuando hay cinco monedas la victoria es de B.

Al finalizar la revisión estos casos, el alumno podrá observar que cuando hay una cantidad múltiplo de tres sobre la mesa, A pierde. Entonces debe ser capaz de explicar lo siguiente: que si A tiene originalmente seis monedas puede dejarle a B, ya sean 5 o 4 monedas. En cualquiera de los dos casos, B le puede dejar 3 monedas a A. Más tarde, A puede dejar 1 o 2 monedas, pero en ambos casos B le gana. De este modo se obtiene la estrategia ganadora en este juego que consiste en dejar al contrincante con un múltiplo de 3. Si A comienza con 7 monedas, entonces debe tomar una para dejar a B con 6 monedas y así poder ganarle.

• Actividad para reforzar un conocimiento teórico (información pertinente)

Cuando el entrenador está seguro de que el alumno tiene cierto conocimiento puede plantear un problema que lo obligue a usarlo, de manera que en la actividad sólo se proporciona la información pertinente para la solución y así el mismo pueda descubrir qué conocimiento previo le ayuda a resolverlo.

Después de que se enseña a los alumnos semejanza de triángulos y propiedades de los ángulos entre circunferencias, un ejemplo de un problema para reforzar los conocimientos teóricos mencionados es pedirles demostrar el Teorema de la potencia de un punto, pues además de la necesidad de utilizar lo aprendido anteriormente, les deja un conocimiento teórico importante.

-Teorema de la potencia de un punto. Si dos cuerdas AB y CD se intersecan dentro de la circunferencia en un punto P, entonces:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

-Demostración. Al trazar los segmentos AD y CB (Figura 2), como abren el mismo arco $\angle ADC = \angle ABC$ y $\angle DAB = \angle DCB$, por lo tanto, los triángulos ADP y CBP son semejantes, por lo tanto $^{AP}/_{PD} = {}^{CP}/_{PB}$, y despejando se obtiene precisamente que:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

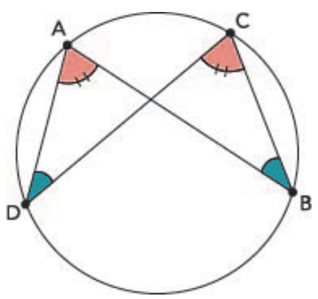


Figura 2

•Actividad paso a paso para llegar a un conocimiento mayor

Esta última actividad es interesante porque puede abarcar toda una sesión de entrenamiento. Llevar paso a paso a los alumnos a un conocimiento mayor no es necesariamente que el entrenador esté guiando a los alumnos de una forma directa, sino más bien estructurar una serie de actividades y problemas que se entrelacen y guíen al alumno a resolver un problema con mayor grado de dificultad o a adquirir un conocimiento mayor.

Conceptualización de qué es un problema

A pesar de haber mencionado el término *problema*, ni siquiera hemos bosquejado una definición formal de este elemento. En referencia a esto, se han propuesto diferentes conceptualizaciones de este término, por ejemplo, para Schoenfeld (Schoenfeld, 1985) la dificultad de definirlo radica en que es relativo, ya que un problema no se presenta solamente en la matemática, más bien es una relación entre el individuo y una tarea. Charnay (1994) lo define como una terna de situación-alumno-entorno, donde el alumno tiene en cuenta que se enfrenta a un problema cuando percibe una dificultad, pero en el mismo contexto otro alumno lo puede resolver inmediatamente, debido a que para este último no representa realmente un problema.

Finalmente, una definición aceptada para este trabajo es la de George Polya (1965) quien menciona que un problema es una dificultad o un obstáculo, y para resolverlo se necesita hallar una manera de superarlo y así lograr un objetivo que no podía ser alcanzado de forma inmediata.

Método de Polya

El método heurístico de George Polya (1965) tiene cuatro fases o etapas que muestran una forma de enfrentarse a los problemas con el propósito de resolverlos. Estas fases son:

- Familiarizarse con el problema
- Mejorar la comprensión del problema
- Buscar una idea útil, concebir un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

Las primeras dos fases del método son de suma importancia, ya que familiarizarse y comprender correctamente el problema puede encaminar a las siguientes fases, de otra manera, si no se asimila las condiciones del enunciado difícilmente se llegará a resolver el problema.

En la fase de buscar una idea útil es necesario poner atención en la conexión que tiene el problema con los conocimientos previos, verificar si tiene similitudes con los problemas antes resueltos. En esta fase es normal encontrarse con propuestas que pueden no ser del todo útiles o ser incompletas, por ello, Polya menciona que es una suerte llegar a tener una idea, aunque esta no vaya encaminada a la solución. Lo importante es regresar a esta fase las veces que sean necesarias para lograr tener la idea útil que ayude a resolver el problema.

La ejecución del plan da la oportunidad de probar las nociones que surgen en la fase anterior, lo cual es importante para poder se tenga en cuenta que las ideas son adecuadas al implementarlas. Esta fase no es nada sencilla, ya que es necesario que cada operación o aplicación esté sustentada mediante un razonamiento formal o por discernimiento intuitivo.

Por último, se tiene la fase de visión retrospectiva, aquí es necesario analizar la ejecución de la idea desde diferentes puntos de vista, de manera que la solución pueda completarse. Para Polya es importante que en esta fase se examine atentamente el método que haya llevado a la solución para comprender el por qué funciona y si habrá otras formas de solucionarlo. Esto lleva a conocer mejor la solución y a poder utilizarla en otros problemas que tengan similitudes con el problema resuelto.

El método de Polya en los entrenamientos de la OMM

Durante los entrenamientos de la olimpiada se desarrolla el método de Polya para lograr que los alumnos aprendan a resolver problemas, aunque muchas veces los participantes de dichos entrenamientos no son conscientes del uso de este método. Para ilustrar su empleo, se explicará a detalle cada una de las fases y la forma de aplicación en los entrenamientos.

En la primera etapa del método los alumnos de la olimpiada tratan de familiarizarse con el problema planteado. Para que el objetivo de esta fase se cumpla los entrenadores motivan a los alumnos a preguntar todas las dudas sobre la redacción o la situación explicada. Además, si un entrenador se da cuenta que los alumnos no han entendido del todo el problema, comienza a hacer preguntas claves que ayudan a reflexionar sobre la idea planteada y, con esto, lograr una mejor comprensión del problema.

En la fase de concebir un plan, los alumnos buscan una idea útil. En ciertas ocasiones, en los entrenamientos esta fase se hace en equipo, desarrollando las habilidades comunicativas, lo que ayuda a comentar las ideas y llegar de una forma óptima a una estrategia de solución. Otras veces esta fase se realiza de forma individual, pero con la experiencia después de trabajar en equipo puede identificar más fácilmente la idea útil del problema.

Después de concebir una idea útil es necesario la ejecución del plan, en esta fase el entrenador puede ayudar al alumno con técnicas y nociones que la hagan más efectiva. Por último, se necesita una visión retrospectiva de la solución verificando que esté completa, en los entrenamientos, esta fase da la oportunidad de exponer tus ideas frente al grupo y desde diferentes puntos de vista revisar si está completa la solución.

IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMA DE TRABAJO DE LOS ENTRENAMIENTOS EN EL AULA DE CLASE

El método de trabajo de los entrenamientos es efectivo para los alumnos que se tienen y el contexto en el que se desenvuelven. Ahora la pregunta sería si esta forma de trabajo puede ser aplicable en el aula de clase, ya que las condiciones pueden llegar a ser muy distintas.

En los objetivos que tienen la OMM y las instituciones de educación se encuentran algunas diferencias. Una de ellas es que la olimpiada de matemáticas tiene como objetivo seleccionar a los alumnos con mejores habilidades resolutorias para representar al país, convirtiendo esto en un proceso selectivo en el que participa un porcentaje de la comunidad estudiantil. Por otro lado, en las instituciones educativas no se lleva un proceso de selección, éstas se manejan bajo la filosofía de que la educación es para todos y tienen como eje central enseñar a grandes masas. Otra de las diferencias en los objetivos son los conceptos y temas que se enseñan, en la OMM los conocimientos del alumno giran en torno a las habilidades para resolver problemas y en las instituciones educativas se rigen por los programas educativos de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Considerando algunas de las diferencias que existen en los objetivos, es difícil imaginar que la forma de trabajar de la OMM pueda llevarse a las aulas de clase.

De igual manera, el perfil de egreso de la educación básica en México requerida por la SEP (2018) establece que los alumnos al término de la educación obligatoria (comprendida por educación básica y media superior) deben desarrollar las siguientes habilidades:

- Valorar las cualidades del pensamiento matemático.

• Plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones.
• Formular preguntas para resolver problemas de diversa índole.
• Argumentar las soluciones obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos, presentar evidencias que fundamentan sus conclusiones.
• Reflexionar sobre sus procesos de pensamiento. Utilizar el pensamiento lógico y matemático.
• Evaluar objetivos, resolver problemas, elaborar y justificar conclusiones y desarrollar innovaciones. Adaptarse a entornos cambiantes.

Dichas habilidades se desarrollan dentro de los entrenamientos de la OMM, lo cual sugiere que, aunque parece difícil su implementación, como se mencionó anteriormente, sería importante encontrar una estrategia para su aplicación.

Al analizar las diferencias y similitudes de la metodología de la olimpiada y la del aula de clases se concluye que es difícil llevar por completo la forma de trabajo de los entrenamientos a las clases normales, tomando en cuenta que existe una gran diferencia con respecto a los objetivos y el contexto. Se propone implementar en el aula las actividades tipo olimpiada de matemáticas como un método complementario, utilizando el formato de los entrenamientos en un porcentaje pequeño de las clases, a manera de taller, dando oportunidad a los alumnos de desarrollar la habilidad de razonar e intuir la resolución de problemas, pero sin descuidar otros conocimientos necesarios para su formación.

IMPORTANCIA DEL CONOCIMIENTO DE LAS TEORÍAS DIDÁCTICAS POR PARTE DE LOS ENTRENADORES

La mayoría de los entrenadores de la OMM se formaron en licenciaturas e ingenierías afines a las matemáticas, pero no todos tienen formación en el ámbito educativo, es por ello que la mayoría realiza los entrenamientos sin identificar las teorías didácticas que se implementan en cada actividad.

La forma de desarrollar los entrenamientos evoluciona gracias a las experiencias adquiridas en sesiones anteriores o por consejos de otros entrenadores. La mayoría de las veces este proceso suele ser largo y no siempre llega a una completa evolución para tener entrenamientos de la calidad esperada.

Conocer estas teorías reduciría el tiempo de aprendizaje de los entrenadores para poder realizar sesiones más productivas en relación con los conocimientos y técnicas de resolución de problemas por parte de los alumnos.

Un obstáculo para realizar esto es la oposición por parte de algunos de los entrenadores hacia las teorías didácticas, debido en muchas ocasiones al propio desconocimiento. Una propuesta para disipar este rechazo es la divulgación de estas teorías entre ellos, desde una perspectiva más práctica y enfocada exclusivamente al diseño de entrenamientos.

CONCLUSIONES

Al analizar los entrenamientos de la OMM desde la perspectiva de la didáctica se puede distinguir el impacto benéfico que tienen en los alumnos y los elementos que acompañan al éxito de estos. Gracias al análisis de las diferencias y similitudes entre los entrenamientos y el trabajo en el aula de clase, se puede concluir que es difícil implementar la misma forma de trabajo en los dos ámbitos. Por esta razón se propone que las actividades que se realizan en los entrenamientos sean implementadas en el aula como un método complementario, utilizando esta forma de trabajo en un porcentaje pequeño de las clases, dando oportunidad a los alumnos de desarrollar la habilidad de razonar, intuir, y la resolución de problemas, pero sin descuidar otros conceptos y habilidades que marca el perfil de egreso de la educación básica en México, requerido por la SEP (Secretaría de Educación Pública, 2018).

De la misma forma, se reconoce la importancia de la didáctica presente en los entrenamientos de la OMM, como un elemento que ayuda a reducir el tiempo de aprendizaje de los entrenadores para realizar sesiones más eficientes y productivas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. *Didáctica de las ma-*

temáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador, pp. 51-64
D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*. Vol. 17(1), pp. 87-106. Recuperado de: http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/655%20Epistemologia%20didactica%20y%20practicas.pdf,.
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2016). *México en PISA 2015*. Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/2016/PISA2016/noviembre/PISA_2015-informe.pdf
Navarro, J. (2017). Talento matemático excepcional y destino profesional. Trayectorias de participantes mexicanos en olimpiadas internacionales de matemáticas. *Innovación educativa. Vol. 17*(73), pp. 49-77. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732017000100049&lng=es&tlng=es.
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). (2015). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf
Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver matemáticas (traducción)*. México, D.F., México: Trillas.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, E. U.: Academic Press.
Secretaría de Educación Pública (SEP). (2018). *Aprendizajes clave para la educación integral.* Recuperado de: https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf

CLAUDIA AYALA GIRÓN
JESÚS JERÓNIMO CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO,
FACULTAD DE INGENIERÍA.

04

USO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA FACILITAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA GEOMETRÍA SINTETICA

Use of analytical geometry to facilitate the resolution of synthetic geometry problems

RESUMEN

El presente trabajo pretende mostrar la importancia del estudio de la geometría analítica para poder aplicar sus técnicas conocidas a la resolución de problemas que pareciera que por métodos sintéticos (uso de técnicas euclidianas) es poco intuitiva. Es por ello que se exponen tres ejemplos que ponen en evidencia tal hecho, detallando paso a paso la resolución de cada uno mediante ambos enfoques.

Palabras clave: geometría, analítica, sintética, problemas, técnicas

ABSTRACT

The present work pretends to show the importance of the study of the analytical geometry so that the techniques known in this area can be applied to the resolution of problems, which does not seem to be intuitive by synthetic methods (use of Euclidean techniques) . Three examples that are believed to highlight this fact are exposed, detailing step by step the solution of each one through both approaches.

Keywords: geometry, analytical, synthetic, problems, techniques

INTRODUCCIÓN

La geometría analítica, introducida por Descartes en 1637, proporcionó técnicas que permitieron no sólo abordar muchos de los problemas geométricos no resueltos hasta ese momento, sino también plantear problemas geométricos más profundos (Gascón, 2002). Con esta idea se puede observar que la geometría euclidiana, en ese momento, no había logrado dar respuesta o interpretación a todos los problemas geométricos conocidos, ya que se debe tener en cuenta que cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética y se introducen variaciones en ellos, se generan nuevos problemas que quedan limitados dentro de este campo, por lo tanto, surge la necesidad de investigar otro medio con el fin de dar solución a estos nuevos problemas. Esta necesidad puede llevar entonces a buscar la solución bajo técnicas que la geometría analítica provee.

En cuanto a esto, Gamboa y Ballestero, en su trabajo sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría, afirman que la geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo que permite resolver problemas de diversa índole y comprender el mundo en cada uno de los escenarios que lo conforman (Gamboa y Ballestero, 2010). Cuando se les presenta un nuevo tema matemático a los estudiantes, en varias ocasiones, es inevitable que recurra a la intuición geométrica, el conocimiento y a su experiencia previa. En el nivel medio superior se busca como competencia disciplinar que los estudiantes, una vez que han cursado materias en las que se estudia geometría euclidiana y geometría analítica, logren proponer, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques, concretamente con el programa de estudios PRE09 (Universidad Autónoma de Querétaro, 2010).

Si se desea lograr esta competencia disciplinar en los estudiantes dentro del curso de geometría analítica y más allá de éste, es importante que se estudie no sólo la construcción de ecuaciones y la representación gráfica de las propiedades de la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, situación común a la que se limita.

Es así que el presente trabajo pretende hacer evidente una de las razones para justificar el por qué es importante estudiar geometría analítica y tener presente el uso de sus técnicas al tratar de dar respuesta a un problema geométrico, el cual bajo un enfoque de geometría euclidiana no se puede resolver de forma sencilla. Por ello en la tercera sección de este trabajo se presentan tres problemas que dejan vislumbrar que si bien se puede dar una solución sintética, ésta puede no resultar tan fácil de conseguirse en primera instancia si no se tienen las nociones elementales de la geometría euclidiana bien cimentadas y un amplio bagaje de problemas resueltos por medio de estas técnicas. Pero al llevar estos problemas al plano cartesiano, es decir, al asignarle coordenadas a lo que plantea el problema, y al hacer uso de técnicas básicas de la geometría analítica, con un grado considerable de dominio, queda en evidencia una solución más alcanzable del problema.

METODOLOGÍA

Para fines de este artículo se ha optado por trabajar con problemas, ya que es común, en la práctica docente, que el profesor los emplee para que sus alumnos apliquen las competencias e, incluso, con el objetivo de medir el nivel de apropiación. Ante esto, se eligieron problemas que permitieran encontrar una solución a partir de técnicas euclidianas, así como analíticas. En cada problema se trató de desarrollar paso a paso su solución para dejar en evidencia que la solución euclidiana no resulta tan intuitiva, debido a que basta con pensar en llevar el problema a un plano cartesiano y trabajar con coordenadas. En el apartado de resultados y discusión se describe lo antes mencionado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan tres problemas resueltos mediante técnicas de la geometría sintética y geometría analítica. En las soluciones de estos se muestra cómo ambos enfoques pueden resolver un mismo problema, sin contraponerse en la resolución, con base en sus técnicas y conceptos elementales, respectivamente. Así dejando en evidencia que, al emplear las ideas intuitivas de la geometría sintética, no se puede llegar tan sencillamente a lo que se pide en cada uno de los problemas, sin embargo, al plantearlas en un plano cartesiano, con coordenadas, y al usar elementos de álgebra, es decir, al emplear las técnicas de la geometría analítica, resulta más sencillo obtener la respuesta solicitada en cada problema. A continuación, se enuncian los problemas y se muestran ambas soluciones paso a paso para que sea más claro lo anterior.

Problema 1

Sea ABC un triángulo, tal que AB=AC y sea D el pie de altura desde A. Sea E la proyección de D sobre AC y sea M el punto medio de DE. Entonces se cumple que AM es perpendicular a BE (véase Figura 1).

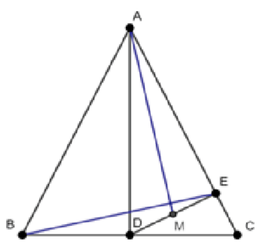


Figura 1. Representación gráfica del problema 1

Demostración (solución sintética)

Al ser N el punto medio de BD, se traza las líneas MN y AN, de acuerdo con el teorema de Tales se tiene que MNllBE. También se puede observar que $^{\triangle}$ABD es semejante al $^{\triangle}$ADE, ya que ambos son triángulos rectángulos, y que ∡BAD=∡DAE= α (véase después Figura 2).

Como N y M son puntos medios de los catetos correspondientes BD y DE (véase más tarde Figura 3), se tiene que:

$$\measuredangle NAD = \measuredangle MAD = \theta \qquad (1)$$

Al respecto, se sigue que ∡NAM=α, además, $ANAM=ABAD$ y nótese que ∡BAD=α, entonces se tiene por el criterio lal, que △ABD es semejante al △ANM.

Por lo que se consigue lo que se quería probar:

$$\measuredangle AMN = \measuredangle ADB = 90° \qquad (2)$$

Observación

Aunque la solución es aparentemente sencilla, involucrar el punto medio del segmento BD es una idea geométrica que no se le ocurre usualmente a un estudiante con poca experiencia en la solución de problemas relacionados con la geometría euclidiana. El involucrar el punto N puede ser considerado una idea realmente ingeniosa, la cual facilita de gran manera la solución del problema.

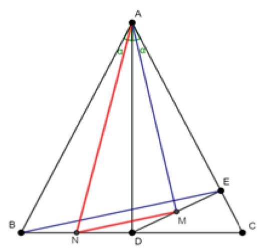


Figura 2. Aplicando teorema de Tales

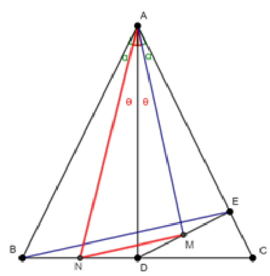


Figura 3. Triángulos semejantes △ABD y △ANM

Demostración (solución analítica)

Se introduce el sistema de coordenadas de modo que el origen está en D, el eje x coincide con el segmento BC y el eje y coincide con el segmento AD (Figura 4).

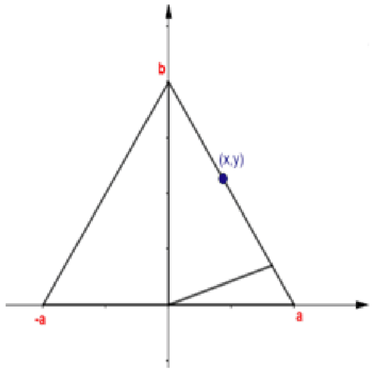


Figura 4. Representación gráfica del problema 1 en el plano cartesiano

Se puede suponer que las coordenadas de C son (a,0), de B son (-a,0) y de A son (0,b).

La pendiente de la línea AC es m_1=b/-a, entonces su ecuación es:

$$\frac{b}{-a} = \frac{y-b}{x-0} \tag{3}$$

De donde sigue:

$$bx = -a(y-b) \tag{4}$$

Y se obtiene:

$$bx + ay - ab = 0 \tag{5}$$

Ahora, como la pendiente de DE es $m^2=-{}^1/_{m_1}$, por ser perpendicular a AC y considerar dos puntos sobre DE (0,0) y (x,y), (véase Figura 5).

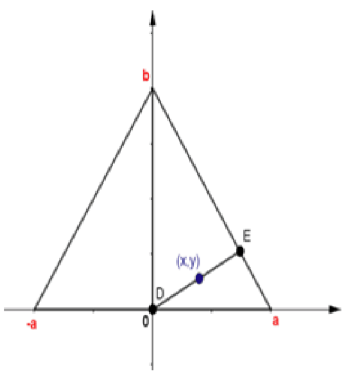


Figura 5. Punto (x,y) sobre la recta DE

Es así que se tiene que $m_2={}^a/_b$, por lo que la ecuación de DE queda defina por:

$$\frac{a}{b} = \frac{y-0}{x-0} \tag{6}$$

De donde se obtiene:

$$ax - by = 0 \tag{7}$$

Como las coordenadas del punto E (x0,y0) deben satisfacer las ecuaciones 5 y 7, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} bx + ay = ab \\ ax - by = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Por el método de sustitución se obtiene:

$$x = \frac{by}{a} \tag{9}$$

$$b\left(\frac{by}{a}\right) + ay = ab \tag{10}$$

$$y\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = ab \tag{11}$$

Entonces se visualiza claramente que:

$$y = \frac{a^2 b}{a^2+b^2} \tag{12}$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \tag{13}$$

De aquí se tiene que

$$E(x_0, y_0) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right) \tag{14}$$

Ahora se obtienen las coordenadas del punto medio (M) de ED, definido por:

$$M = \left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)}\right) \tag{15}$$

Como lo que se quiere es probar que AM y BE son ortogonales, se debe probar que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, es decir, si m_3 es la pendiente de AM y m_4 es la pendiente de BE, se debe probar que $m_3=-{}^1/_{m_4}$. Para obtener dichas pendientes m_3 y m_4, se toman los puntos A y E, y B y E, respectivamente (véase Figura 6).

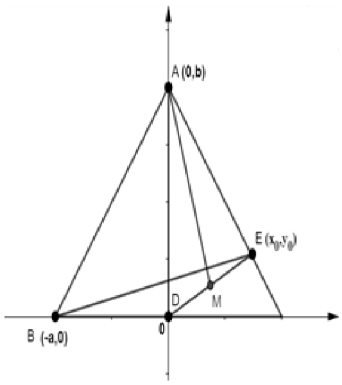


Figura 6. Coordenadas de los puntos A, B y E

Entonces se tiene que:

$$m_3 = \frac{\frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)} - b}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}} = \frac{-(a^2+2b^2)}{ab} \tag{16}$$

$$m_4 = \frac{\frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)}}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)} + a} = \frac{ab}{a^2+2b^2} \tag{17}$$

Por lo tanto, se llega a lo que se quería demostrar:

$$m_3 = -\frac{1}{m_4} \tag{18}$$

Observación

Aunque la solución es más larga y con muchas operaciones algebraicas, cada uno de los pasos se deriva de manera sencilla siguiendo los procedimientos normalmente empleados en geometría analítica.

Problema 2

Un grupo de piratas roba el tesoro de un barco y se dirige a una isla desierta a enterrar el tesoro. En la isla había dos palmeras y un roble R (véase Figura 7). Para enterrar el tesoro, los piratas hicieron lo siguiente: contaron los pasos del roble hasta la palmera P_1, giraron 90° en contra de las manecillas del reloj y caminaron la misma cantidad de pasos que habían recorrido entre el roble y la palmera. Ahí pusieron una marca (el punto A). Después hicieron lo mismo con la palmera P_2 pero ahora la rotación fue en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo marcaron una segunda posición (el punto B). El tesoro lo enterraron a la mitad del camino entre las dos marcas (punto X). Después de cierto tiempo, el paso de un huracán se llevó el roble, pero las palmeras siguieron en su lugar. Cuando los piratas llegan de nuevo a la isla para recuperar el tesoro se encuentran con la sorpresa de que sólo existen las palmeras. ¿Cómo localizaron el lugar dónde estaba enterrado el tesoro?

Demostración (solución sintética)

Por alguna razón, entre los piratas había un aficionado a la geometría y fue este pirata quien resolvió el problema. La solución es la siguiente:

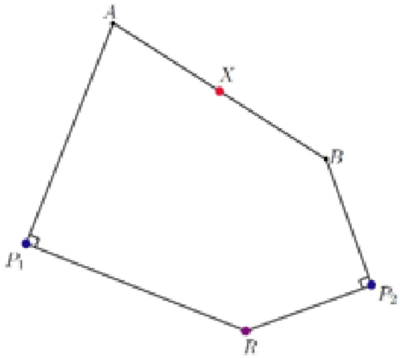


Figura 7. Representación gráfica del problema 2

Se trazan perpendiculares a P_1P_2 desde los puntos A, X, R y B, las cuales cortan al segmento en los puntos P, S, T y Q, respectivamente. Se observan las igualdades de ángulos.

$$\measuredangle P_1AP = \measuredangle RP_1T \tag{1}$$

$$\measuredangle P_1BQ = \measuredangle RP_2T \tag{2}$$

Además, de las igualdades de longitudes $AP_1 = P_1R$ y $BP_2 = P_2R$. Se tiene que $\triangle AP_1P$ es congruente a $\triangle P_1RT$ y que $\triangle BP_2Q$ es congruente a $\triangle P_2RT$. De estas congruencias (véase Figura 8), se tiene que:

$$P_1P = RT \tag{3}$$

$$QP_2 = RT \tag{4}$$

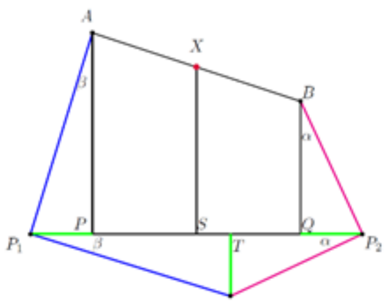


Figura 8. Congruencia de triángulos

Entonces se cumple que S es el punto medio de los segmentos PQ y P_1P_2. También de estas congruencias de triángulos se visualiza que:

$$AP = P_1T \tag{5}$$

$$BQ = TP_2 \tag{6}$$

Entonces se tiene que

$$AP + BQ = P_1T + P_2T = P_1P_2 \tag{7}$$

Por otro lado, se sabe que

$$XS = \frac{AP+BQ}{2} \tag{8}$$

Lo que implica que

$$XS = \frac{P_1P_2}{2} \tag{9}$$

La solución para el problema es la siguiente: se cuentan los pasos entre las palmeras, se recorre la mitad de esa distancia empezando en la palmera P_1 y, con dirección de la palmera P_2, se gira 90° en contra de las manecillas del reloj y se camina esa misma cantidad de pasos. El punto al que se llega es donde está enterrado el tesoro.

Observación

En la solución de este problema se han trazado varias líneas auxiliares, las líneas paralelas al segmento que unen a los puntos y representan a las palmeras. Al realizar estos trazos, aparecen congruencias de triángulos que sirven en la solución. Sin embargo, realizar este tipo de trazos es usualmente una habilidad de quienes tienen experiencia resolviendo problemas geométricos. Aunque la solución usa conceptos básicos de geometría, de nuevo está el inconveniente del ingrediente de ingenio que requiere una persona para obtener esta solución.

Demostración (solución analítica)

Se introduce el sistema cartesiano de manera que el eje x coincide con la línea por P_1 y P_2 cuyo origen está en el punto medio del segmento P_1P_2 (Figura 9).

Supongamos que las coordenadas de las palmeras y el roble son: $P_1=(-a, 0)$, $P_2=(a, 0)$, $R=(b, c)$.

Las coordenadas de los puntos A y B se pueden obtener trasladando el segmento P_2R paralelamente de manera que el extremo P_2 coincide con el origen. Las coordenadas del otro extremo de este segmento paralelo son (b − a, c), ya que sólo se trasladan en la dirección del eje x una cantidad -a. Se rota este segmento un ángulo de 90° en sentido de las manecillas del reloj, tomando como centro de rotación al origen.

.

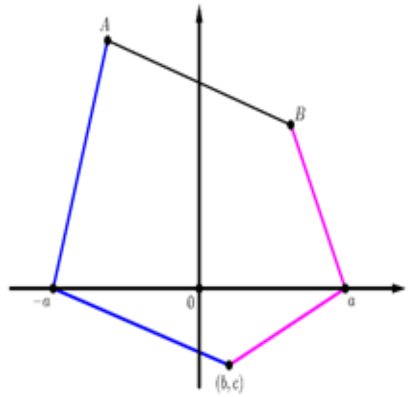


Figura 9. Representación gráfica del problema 2 en el plano cartesiano

Dado un punto (x, y), el punto que, se obtiene rotando 90° en sentido de las manecillas del reloj, tiene coordenadas (y,−x), además, el punto que se consigue al rotar 90° en sentido contrario a las manecillas tiene coordenadas (−y, x).

De lo anterior se sigue que el punto rotado tiene coordenadas (c, a − b), ahora, se traslada de nuevo una distancia a en dirección horizontal (Figura 10) y se vislumbra que:

$$B = (c + a,\ a - b) \tag{10}$$

De manera análoga se obtiene:

$$A = (-c - a, a + b) \tag{11}$$

Al seguir el punto

$$X = \left(\frac{-c-a+c+a}{2}, \frac{a+b+a-b}{2}\right) = (0, a) \tag{12}$$

Es decir, el tesoro se encuentra sobre la línea perpendicular a P_1P_2 a través de su punto medio, y la cantidad de pasos entre el tesoro y el punto medio de P_1P_2 es la mitad de los pasos entre P_1 y P_2. De nuevo, podemos ver que la posición del tesoro no depende de la posición del roble.

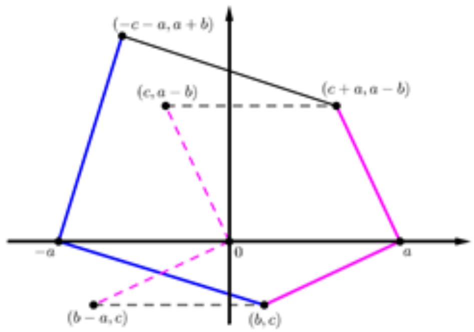


Figura 10. Coordenadas de los puntos a considerar

Observación

La solución algebraica de este problema solamente sigue las ideas y técnicas comunes de la geometría analítica, razón por la cual es más probable que una persona con los conocimientos básicos de geometría analítica puede llegar a tal solución.

Problema 3

Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso ¿qué curva describe la posición del gato? (véase Figura 11).

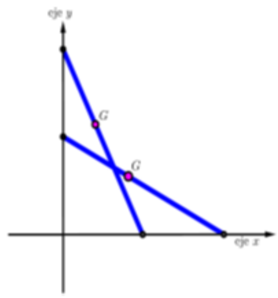


Figura 11. Representación gráfica del problema 3

Demostración (solución sintética)

El caso, cuando el gato se encuentra parado sobre el peldaño exactamente a la mitad de la escalera, se puede resolver de manera sencilla usando ideas de geometría euclidiana. Como G es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo △OAB, el centro de su circunferencia circunscrita es G, entonces se cumple:

$$GA = GB = GO \quad (1)$$

Es decir, los triángulos △AOG y △BOG son isósceles. De esto se obtiene que:

$$OG = \frac{1}{2}AB \quad (2)$$

Es decir, la distancia desde G hasta O es siempre una constante y, por lo tanto, G describe un arco de circunferencia (véase Figura 12).

Observación

El caso general es muy difícil de resolver utilizando sólo ideas de geometría euclidiana. En este caso, la solución es muy simple si se introduce el sistema cartesiano y se resuelve el problema en forma paramétrica.

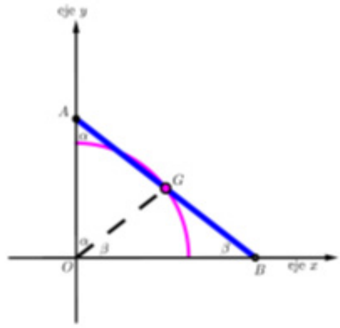


Figura 12. Arco de circunferencia descrita por el gato

Demostración (solución analítica)

A partir de que sea α el ángulo que forma la escalera con la pared se puede suponer que el origen es el punto donde se encuentra la línea de la pared y la línea del piso y que los ejes de coordenadas coinciden con esas líneas. Así se denota que las coordenadas del punto G como x(α) y y(α) y las longitudes constantes AG y GB con a y b, respectivamente (véase Figura 13).

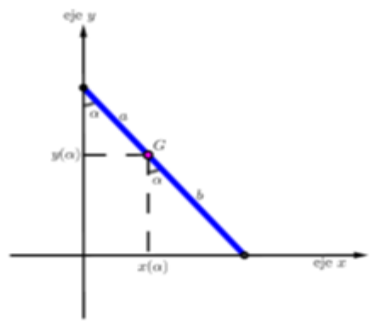


Figura 13. Representación gráfica del problema 3 en el plano cartesiano

Es fácil ver que:

$$\frac{x(\alpha)}{2} = sen\ \alpha \tag{3}$$

$$\frac{y(\alpha)}{2} = cos\ \alpha \tag{4}$$

Por la identidad Pitagórica se tiene que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \tag{5}$$

De donde se sigue que:

$$\frac{x(\alpha)^2}{a^2} + \frac{y(\alpha)^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Esto es la ecuación de una elipse centrada en el origen y con semiejes de longitudes a y b, por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el gato es un arco de elipse.

Observación

En este problema mediante sólo métodos sintéticos no es sencillo obtener solución. Sin embargo, al utilizar técnicas de geometría analítica sí fue posible desarrollar una solución.

Hasta aquí se ha mostrado la solución detallada de cada uno de los tres problemas, a través de herramientas sintéticas y analíticas.

CONCLUSIONES

Después de haber resuelto cada uno de los problemas empleando ambas técnicas, se puede apreciar que, mediante ideas de geometría euclidiana, es necesario poseer cierta experiencia y habilidad en la introducción de trazos auxiliares. De otro modo, la demostración de dichos problemas puede resultar extremadamente complicada. Cabe destacar, sin embargo, que las ideas de geometría euclidiana para la solución de problemas, normalmente son consideradas ideas más elegantes y creativas desde el punto de vista de la comunidad matemática. En el caso de los concursos tipo Olimpiada de Matemáticas, una solución en la se utilizan elementos de la geometría analítica se penaliza severamente si no se completa, mientras que, si se usan ideas de geometría euclidiana es común que se valoren y califiquen como puntos parciales, aunque la solución no esté completa. Saliendo del contexto de las competencias de Matemáticas, se puede decir que realmente la cuestión más importante es lograr resolver un problema, más allá de si la solución es considerada elegante o no, por tal motivo las técnicas de geometría analítica resultan una opción viable para intentar la resolución de problemas geométricos. Sin embargo, usar tales técnicas de manera adecuada requiere de práctica y el conocimiento de los conceptos básicos y sus representaciones algebraicas.

AGRADECIMIENTO

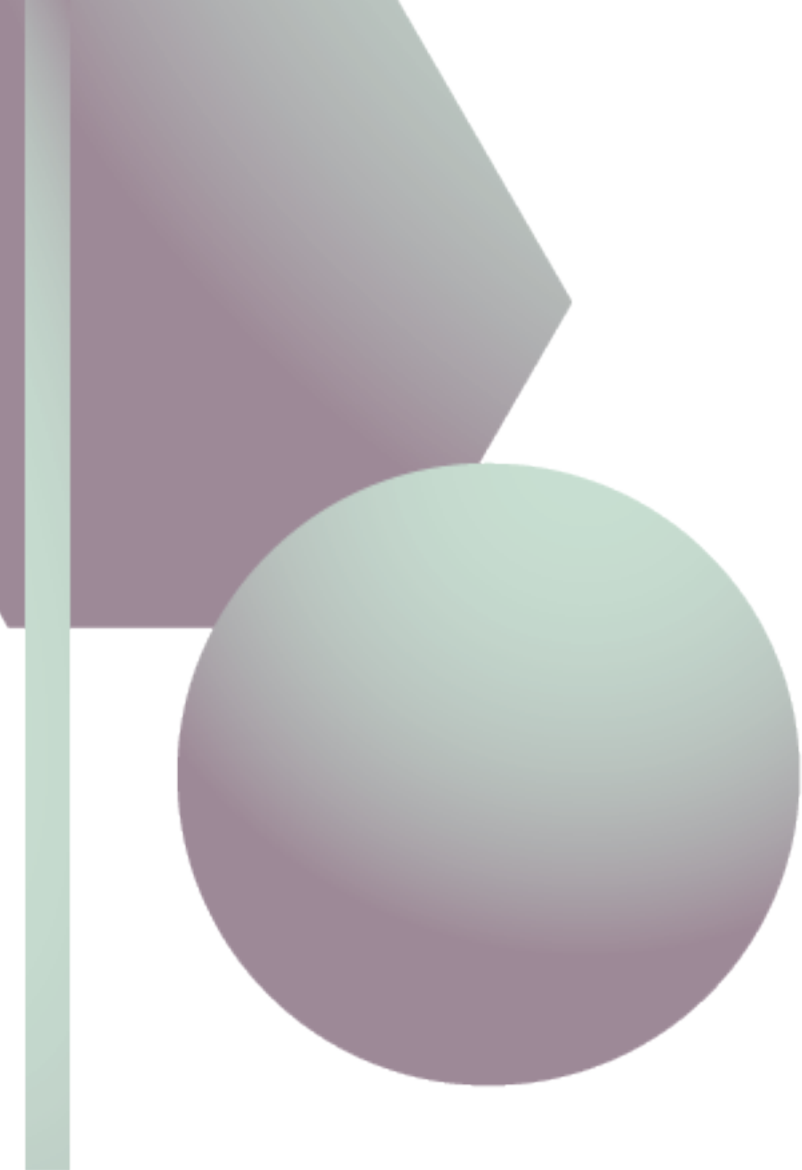
El primer autor listado en este trabajo agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo recibido mediante la beca para realizar los estudios en el programa de maestría en Didáctica de las Matemáticas.

REFERENCIAS

Gascón, J. (Febrero 2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, pp. 12-25.

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare. Vol. XIV*(2), pp. 125-142.

Universidad Autónoma de Querétaro. (2010). Programa de matemáticas IV. *Plan de estudios PRE09.*



La presente edición de
PädiUAQ
fue maquetada por Erika Moreno Miranda
y Rodrigo Alonso Hernández Gallegos
en la Coordinación de Diseño e Imagen de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Autónoma de Querétaro.
El cuidado estuvo a cargo de
Daniela Zeple y Gisella Cordero
Se publicó en enero del 2019
en Santiago de Querétaro, México.