PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FI

DIPFI
POSGRADO
INGENIERÍA

DIRECTORIO

Dra. Margarita Teresa de Jesús García Gasca
Rectora

Dr. Aurelio Domínguez González
Secretaría Académica

M. A. P. José Alejandro Ramírez Reséndiz
Secretaría de la Contraloría

M. S. P. Sergio Pacheco Hernández
Secretaría Administrativa

M. en I. Alejandro Jáuregui Sánchez
Secretaría de Finanzas

Dra. María Teresa García Besné
Secretaría de Extensión Universitaria

M. en S. Luis Alberto Fernández García
Secretaría Particular de Rectoría

Dra. Ma Guadalupe Flavia Loarca Piña
Dirección de Investigación y Posgrado

Dr. Manuel Toledano Ayala
Director Facultad de Ingeniería

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa
Jefe de Investigación y Posgrado
Facultad de Ingeniería

PädiUAQ: Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 1. Núm. 003, marzo de 2017, es una publicación semestral editada y publicada por la Universidad Autónoma de Querétaro, División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería. C.U. Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00, ext. 7035. Coordinación de edición: M.D.I. Alma Ivonne Méndez Rojas

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo
No. 04-2017-040313301800-203,
ISSN: En trámite

Ambos registros en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

QUEDA ESTRICTAMENTE PROHIBIDA LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL DEL CONTENIDO E IMÁGENES DE LA PUBLICACIÓN SIN PLENA AUTORIZACIÓN DE LA UNIVERSIDAD.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

FACULTAD
DE INGENIERÍA

COMITÉ EDITORIAL

Dr. Manuel Toledano Ayala
DIRECCIÓN

Dr. Victor Larios Osorio
EDITOR RESPONSABLE

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez
M.D.M. Carmen Sosa Garza
Dr. Jesús Jerónimo Castro
M.C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez
M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López
M.D.I. Alma Ivonne Méndez Rojas
M.D.I. Ivan Peñaloza Pineda
EDITORES ASOCIADOS

Cristian Emanuel Tovar Navarro
Hernández Gallegos Rodrigo Alonso
DISEÑO EDITORIAL

Salma Taíz Castillo Zapién
CORRECIÓN DE ESTILO Y REDACCIÓN

CON

NI

TE

DOS

PRESENTACIÓN

El mundo en el que habitamos parece depender cada vez en mayor medida del conocimiento científico y tecnológico, el cual ha transformado nuestra sociedad de una manera acelerada. Aquí caben las preguntas ¿cómo podemos contribuir a que los conocimientos que se generan y transmiten en las Instituciones Educativas realmente proporcionen las herramientas para mejorar nuestra sociedad? ¿cómo lograr que la educación sea un motor de movilidad social? ¿cómo reducir la brecha entre países desarrollados y en vías de desarrollo en el contexto educativo? ¿qué papel juega la ciencia, tecnología e innovación en las aulas? ¿cómo superar el aprendizaje científico a partir de la memorización de datos descontextualizados?.

La revista Pädi pretende generar un espacio para la propuesta, la crítica y la reflexión en un tema fundamental en el desarrollo de las sociedades: educación. En el entendido que la educación, la ciencia y la cultura son pilares que no se pueden estudiar de manera aislada. En esta publicación bi-anual, se podrán encontrar artículos inéditos relacionados con el quehacer docente en la formación de las competencias en los estudiantes de los distintos niveles educativos, sin perder de vista desde luego, la misma profesionalización del docente.

Sin lugar a dudas, es necesaria la reflexión, el análisis, la propuesta pero sobre todo la participación de todos para responder a estas y otras preguntas que nos encontramos en el día a día como docentes en nuestras instituciones. Bienvenidos aquellos que comparten la preocupación por mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Propongamos juntos una sociedad mejor, desde nuestro quehacer, desde nuestra trinchera; el ingenio para crear, no para destruir.

Dr. Manuel Toledano Ayala

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

CUENTOS Y PROYECTOS CIENTÍFICOS
UNA INVESTIGACIÓN ETNOGRÁFICA

Luz de Lourdes Álvarez Arquieta
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro.
luzdelourdes2@yahoo.com

RESUMEN

Este artículo es el informe de una investigación etnográfica que se realizó en un salón de clase, donde se enseñó a elaborar proyectos científicos utilizando cuentos fantásticos como los de Poe o Lu Sin; el método o procedimiento didáctico fue el de la educación lingüística. Se trabajó con nueve alumnos de la carrera de Ingeniería Agroindustrial quienes ya realizaban investigaciones y necesitaban elaborar informes. Se planteó la hipótesis de que usando esta didáctica en la preparación de los alumnos para activar un proceso mental con los cuentos les ayuda a comprender más fácilmente un proyecto o informe de investigación. Los resultados fueron buenos: se midieron con exposiciones de los alumnos en las que ellos usaban otros cuentos, con exámenes, con escritos, y todo esto se valoró con tablas que provee la educación lingüística; en algunos actos de los alumnos (acciones únicas o emocionales) se notó cierto desprecio por las actividades artísticas, en otros, un enorme aprecio. Esto llevó a la autora a plantearse nuevamente la dicotomía arte-ciencia, y concluyó con Nietzsche que ese juego, a través de la literatura que se propuso en esta clase es un intento del maestro por recobrar la relación natural con el conocimiento.

PALABRAS CLAVE

Educación lingüística, investigación etnográfica, proyectos científicos, cuentos fantásticos.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

Antecedentes, marco teórico, procedimiento, ejecución y/o resultados son conceptos propios de una investigación etnográfica que se realiza en un salón de clases, con los alumnos y el maestro (que a la vez es el investigador) como objetos (sujetos de estudio). Este artículo es el informe de una tarea de este tipo.

Los pensadores conciben modelos para conceptualizar la realidad, esto es lo que nos aporta la Didáctica de la Lingüística (Magos, 2001). Este método o procedimiento otorga libertad de creación, especialmente en la etapa de la **preparación**, durante el diseño de la unidad didáctica. En esta etapa los alumnos realizan una actividad que se "usa para activar el proceso mental propio del tema que vamos a tratar más adelante" (Magos, 2013); por ejemplo, clasificar un cúmulo de botones para enseñar lo que son las categorías. También hay mucha creatividad, en los estilos de aprendizaje para la formación del alumno del tipo **sensible**, que aprende con actividades que impliquen todo su ser y no sólo lo racional (Ramírez, 2010).

El gusto por el arte y la creatividad de la que escribe la llevó a la utilización de un salón de clases para emprender un viaje como el de Alicia, la de "A través del espejo" o "En el país de las maravillas", junto con sus alumnos, y entrar en ese viaje enamorados, como la protagonista del cuento fantástico, de la razón y el orden (Carrol, 1996). Por eso se preguntó cosas como la siguiente.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

¿Cómo utilizar "La carta robada" de Edgar Allan Poe (1956), un cuento de misterio y "El diario de un loco" de Lu Sin (1972), un cuento de terror chino, al enseñar a estructurar un artículo científico? Se concibió el propósito de usar el cuento, esa breve narración llena de símbolos, en la que la imaginación, las sensaciones y la lógica forman una trama fácil de entender para:

- Sacar al investigador que todas las personas llevan dentro y la fascinación por el misterio, en ese juego de creatividad de la literatura, para entrar luego en la ciencia, que es el conocimiento estructurado sistemáticamente o puramente racional.

- Distinguir los antecedentes, los objetivos, las hipótesis, la metodología y los resultados en ambos tipos de escritos, en este ejercicio del investigador que enseña a investigar.

- Poner en práctica el método de la Educación Lingüística.

- Todo esto se aplicó en una carrera de ciencias fácticas con resultados dignos de comentario.

ANTECE

En este curso se espera que el alumno aprenda a elaborar proyectos e informes científicos con una buena redacción utilizando conocimientos de gramática. Una forma tradicional de enseñar el tema, en contraste con lo que se acaba de exponer, sería la utilización de tres libros: el de Corina Schmelkes, Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis) (1998), uno o varios libros de redacción y uno de gramática. Se expondrían a lo largo del semestre, los alumnos estudiarían y se les examinaría sobre los contenidos; pero el procedimiento fue diferente. A continuación se mencionarán algunos antecedentes.

En esta clase se trabajó con nueve alumnos, de dos niveles, que estudian Ingeniería Agroindustrial. Por la diversidad en los cursos previos de los estudiantes, se tiene que hacer una clase que introduzca o refuerce conceptos tanto de investigación como de redacción.

Los alumnos de Ingeniería Agroindustrial necesitan saber redactar proyectos e informes de investigación, y solo tienen rudimentos de redacción. Deben mejorar sus habilidades para redactar, entender y ser capaces de seguir los formatos de la escritura científica, tanto de proyectos o protocolos como del informe final o tesis. Durante su carrera se les solicitan varios trabajos de este tipo y se titulan por medio de una tesis.

Estos alumnos ya participan como colaboradores de las investigaciones que hacen los profesores en el campus y su participación constituye una "subinvestigación" ligada a la del docente, por lo que se aplica el principio planteado por estos estudiosos venezolanos: "Se parte de la idea de enseñar a investigar investigando, con propósitos claros, en contextos reales, en procura de contribuir con el desarrollo de problemas de la sociedad" (Morales, 2005).

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Vivir una investigación a la vez que se escribe sobre ella ayuda en gran medida a comprender la materia, pero también como dicen Piaget y Chomsky, si los alumnos no tuvieran una noción de racionalidad o fueran capaces de articular datos, no sería posible enseñarles la importancia de una hipótesis o una investigación, o si no tuvieran la idea de planeación, la de un proyecto de investigación. Es decir, nada de esto sería posible, si no trajeran a un investigador dentro (Chomsky y Piaget, 1983) o si no tuvieran una fascinación por el misterio.

La bibliografía sobre la utilización de los cuentos en la enseñanza superior es muy limitada, aunque la hay muy abundante para su uso en los niveles básico, secundario o media superior. También es común su análisis en educación superior de literatura con las teorías de Vladimir Propp, por ejemplo. Solo hay un estudio en el que se propone la utilización del cuento en la educación superior, en forma similar a este texto, El cuento como estrategia didáctica para el desarrollo de competencias ciudadanas de Carlos Julio Jaramillo Zuluaga:

> …y tiene sentido en cualquier área. Su aplicación es útil para cultivar y despertar sentido en las diferentes disciplinas, de tal modo que -de acuerdo con las necesidades- se puede pensar en cuentos médicos, cuentos jurídicos o cuentos filosóficos. La aproximación pedagógica mediante las narraciones produce un ambiente en el aula que suscita la reflexión y crea un clima de confianza entre el docente y los estudiantes, de modo que se supera la distancia que creaba el estilo viejo de transmitir conocimientos que el docente sabe y los estudiantes ignoran (Jaramillo Zuluaga, 2012).

DENTES

OBJETIVOS

El objetivo general es que los alumnos conozcan los elementos que constituyen un proyecto o informe de investigación, sepan elaborar este tipo de escritos y aprendan la importancia de esta habilidad.

Los objetivos específicos implican que los alumnos aprendan a leer, escuchar, hablar y escribir el lenguaje propio de los proyectos o informes de investigación, utilizando la educación lingüística.

HIPÓTESIS

La utilización de la educación lingüística con todos sus recursos, entre ellos la preparación de los alumnos para activar un proceso mental con los cuentos, les ayuda a comprender más fácilmente un proyecto o informe de investigación y cómo elaborarlo.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PROCEDIMIENTO

Para que los alumnos se involucren con la materia que estudian, es necesario que la enseñanza se convierta en un proceso creativo y consciente que apele a todas sus facultades y en una expresión de su ser interno, como dice Nietzsche, que desarrolle su pasión de ser, que deje salir "las fuerzas espontáneas… creadoras de nuevas interpretaciones" (Nietzsche, 2003); que se enamore de lo que hace, como dice Magos (2014). En las actividades didácticas se incluyen algunas que despierten la imaginación de los alumnos y así se propicie la creatividad. Aquí podemos hablar de la utilización de cuentos como los mencionados de Poe y Lu Sin. Se comienza el curso, en la fase de **preparación** de la primera clase, se usa la lectura de Lu Sin, "El diario de un loco" para que los alumnos analicen el proceso de investigación de un demente que piensa que todos los que lo rodean son antropófagos. Clases después se utiliza "La carta robada" (1956), en la fase de **recepción**, para explicar los elementos de un proyecto o informe de investigación.

Antecedentes:

"La carta robada" es un cuento policiaco de Edgar Allan Poe que después inspiraría los de Sherlock Holmes. El Sherlock Holmes de Poe se llama Auguste Dupin.

Necesidad o problema:

Recuperar una carta robada por el Sr. T, que pone en riesgo la reputación de una dama honorable. El marco teórico es ético y de los tipos de inteligencia.

Objetivo (ideal):

Que la carta esté en las manos adecuadas.

Justificación:

El Sr. T. no tiene principios por lo tanto no debe tener la carta.

Hipótesis:

La carta está en manos del Sr. T (un matemático), quien no es muy inteligente según la policía y que sí lo es, según Dupin.

Metodología (de la policía):

Buscarla en todos los rincones posibles. Asaltar al Sr. T. para revisar si la lleva consigo.

Metodología (de Dupin):

En cuanto a su marco teórico es que: Los matemáticos y poetas son más inteligentes que los que solo son matemáticos. El Sr. T es matemático y poeta.

Hipótesis de Dupin:

La carta está en manos del Sr. T. quien sí es muy inteligente. Tiene que estar en un lugar obvio (lo que va más allá de la inteligencia de los policías).

Resultados:

Efectivamente la carta se encuentra entre las demás cartas de la casa con el sobre volteado al revés y un timbre y un sello falsos y diferentes.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Conclusiones:

La hipótesis de Dupin era correcta, la carta se encontraba en un lugar obvio y la inteligencia del Sr. T iba más allá de la de los policías. Era muy inteligente al ser poeta y matemático.

Sin embargo, de toda esa libertad al usar el arte para entender la ciencia, el proceso creativo de los estudiantes se somete a la disciplina de los límites. Como dice Freire ese maestro de la educación: "Y que a todo esto no le falte el gusto por la aventura, por la osadía, pero que igualmente no le falte la noción de límites, para que la aventura y la osadía de crear no se conviertan en irresponsabilidad licenciosa" (Freire, 2004).

Todos los conceptos de un proyecto o informe de investigación se explicaron a través de los dos cuentos "El diario de un loco" de Lu Sin y "La carta robada" de Edgar Allan Poe, pero se pueden usar otros cuentos. Los que más se prestan son los detectivescos o los de misterio; así los alumnos escogen diferentes cuentos para buscar en ellos antecedentes, objetivos, hipótesis, etc. y exponen en Power Point.

En el desarrollo de esta clase se utiliza, como ya dijimos, el método o procedimiento denominado **Didáctica de la Lingüística**, que aunque su nombre lo diga, no es sólo para enseñar lenguas sino para enseñar a **hablar, leer, escuchar y escribir** cualquier disciplina (Magos, 2001). Tiene conceptos para las etapas de la clase, los estilos de aprendizaje y los fenómenos que suceden en cada sesión.

Los conceptos para las etapas de la clase son: **preparación**, se practica el proceso mental; **introducción**, los alumnos expresan lo poco o mucho que saben del tema o realizan predicciones; **recepción**, se expone el tema; **reflexión,** se ejecutan ejercicios fáciles, producción, los alumnos hablan o escriben demostrando que lograron el aprendizaje; **repaso y refuerzo**, a partir de las equivocaciones se afina el conocimiento; **evaluación**, se repite todo el proceso con un tema diferente y con el propósito de calificar al alumno (Magos, 2013). Las etapas se plantean dentro de las **unidades** que se dividen en **actividades.**

A los diferentes estilos de aprendizaje se les denomina fourmat, 4mat, corresponden a los **sensibles**, aprenden con cosas que se relacionan con su vida; **lógicos**, necesitan que una autoridad lo haya dicho; **precisos**, prácticos e **innovadores**, requieren una experiencia nueva. Estos cuatro estilos se deben utilizar en el desarrollo de una unidad para el mejor aprovechamiento de los estudiantes que corresponden a cada uno. El análisis de los estilos de aprendizaje fue creado por Berenice McCarthy y se puede ver en el artículo de Ramírez Díaz sobre su utilización en una clase de física (2010).

Los conceptos para los fenómenos que suceden en cada sesión son: los **actos**, acciones únicas o emocionales; las **actividades**, trabajos cotidianos; los **significados**, evidencias escritas o verbales; las **participaciones**, convenios entre desiguales e iguales; **relaciones**, funciones entre desiguales e iguales; **situaciones**, contextos temporales. Estas categorías de Martínez Miguelez (2005) para la investigación etnográfica en general, fueron precisadas por el Dr. Magos para un salón de clase (2014).

EJE-CU-CIÓN

Para explicar la utilización de esta serie de elementos o conceptos a considerar en cada clase se darán dos ejemplos:

En la **Unidad I**, clase 1, en la fase de **preparación**, se hizo un ejercicio de **leer** en voz alta "El diario de un loco" de Lu Sin (1972). Esta clase estuvo dedicada a los alumnos **sensibles.** Las **actividades** fueron las siguientes: Se anotaron en el pizarrón criterios de comprensión y de lectura en voz alta; se les pidió a los alumnos que hicieran suposiciones sobre el contenido de un texto con ese título; los alumnos leyeron por secciones en voz alta; al terminar se hicieron comentarios sobre los criterios para la lectura de este tipo; al finalizar el cuento se hicieron preguntas para evaluar la comprensión del texto. En las **evaluaciones** se vieron algunos problemas de entonación en la lectura, pero una buena comprensión del texto. De acuerdo a las categorías de Miguelez, los resultados anotados corresponden a **significados.**

En la **Unidad** I -clase 2- en la fase de **producción**, se hizo el ejercicio de elaborar un juego de cartas con los conceptos principales del "Decálogo de la redacción" de Cassany (2003); esta clase estuvo dedicada a los alumnos **innovadores**. Las **actividades** fueron las siguientes: se **escriben** en tarjetas separadas los conceptos abstractos y sus definiciones, se decoran las tarjetas para hacer un juego de cartas como "La solterona". Se extrajo una definición para que el que tuviera la tarjeta del concepto sin pareja perdiera. En las observaciones se anota que un alumno expresó que le gustan estas clases porque hay diversas dinámicas. De acuerdo a las categorías de Miguelez, esto sería un **acto**.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

RESULTA-DOS

Respecto a los resultados, los esfuerzos que se hicieron para implementar la didáctica de la lingüística fueron los que a continuación se exponen. La producción escrita en cuanto a la subcompetencia ideativa mostró efectos relevantes en el orden de los párrafos en modo lógico y en cuanto a la subcompetencia pragmática, el alumno seleccionó y organizó los datos con base al objetivo que perseguía. El control de avances y resultados también se dio a través de un examen escrito sobre los conceptos principales de la investigación, objetivo, hipótesis, etc.; fue una prueba de opción múltiple, por un lado, y de base no estructurada por otro en la que los grados fueron buenos, los mínimos de 8 en una escala de 10 (Magos, 2003).

Cuando se revisaron los **actos** (acciones únicas o emocionales) de los alumnos se notó que en algunos de ellos había un cierto desprecio por las actividades que eran literarias o las que eran un juego y que servían como **preparación, recepción o producción.** Se enumeran los casos: una alumna se pone a hacer una tarea de otra materia cuando se les dice que dibujen una casa con sus muebles como **preparación** para explicar la unidad temática de cada párrafo (en un cajón de un mueble solo se pone ropa) o la unidad entre párrafos (las ollas y los cubiertos son cosas de la cocina); en el psicoanálisis (una práctica semejante a acostarse en el diván del psicoanalista en la que decían todo lo que pasara por su mente, respecto a los proyectos y su redacción) un alumno/a (porque el escrito fue anónimo) dice que la clase de redacción le quita tiempo para las matemáticas; otra alumna muestra aburrimiento y sus actividades en cuanto a la literatura son muy pobres, por ejemplo, su cuento para análisis es muy simple y no desarrolla el marco teórico.

Esta alumna comenta en una entrevista personal que no tiene gusto por el arte o la literatura. En otros actos había un enorme aprecio por estas disciplinas: cuando un alumno dice que le gusta la clase porque hay muchas dinámicas, u otra alumna pide que la clase de inglés se de igual, o cuando una tercera alumna expresa fascinación en su rostro porque se usa a Edgar Allan Poe para explicar una investigación científica.

Aunque hay conciencia, por parte de la autora, de que se está en lo cierto al aplicar estas actividades en clase desde el punto de vista de la didáctica (Magos 2013), esto la llevó a preguntarse de nuevo cuál era la relación entre el arte y la ciencia y más específicamente entre la literatura y la ciencia. ¿Alguna de ellas era superior a la otra? Se tenía la idea de que el análisis de la realidad a través de símbolos era más efectivo que a través de la razón pura, y puesto que la filosofía de Friedrich Nietzsche es la que practíca la autora, se abocó a buscar lo que él había escrito del tema, por supuesto, se topó con El nacimiento de la tragedia.

Parafraseando a Nietzsche se puede decir que el instinto salvaje que se muestra en lo dionisiaco y que se afina en lo apolíneo, lo bello que se expresa en símbolos es el proceso creativo para producir el arte y que un proceso puramente racional no aporta esa liga con el "el artista primordial del mundo" para verse a sí mismo objetivamente en relación con la realidad (Nietzsche, 2010). Ese juego, a través de la literatura o del dibujo, que se propuso en esta clase, fue un intento del maestro de recobrar esa relación natural con el conocimiento, incluso con el discurso espontáneo en el diván del psicoanalista. De esta forma se ratificó la utilización de la literatura para enseñar ciencia y se matizó la opinión, tal vez inconsciente, de los alumnos de que la ciencia es superior a la literatura.

CONCLUSIONES

Si se quisiera avanzar una investigación en este sentido, se podría hacer una, al indagar sobre el concepto que tienen los alumnos de la literatura. Uno de los alumnos, comentó que él es el polo opuesto de su hermano que es artista.

Y en un juego que utiliza los símbolos, el inconsciente y el arte -al igual que sus alumnos en clase- la que investiga, podría caracterizarlos a ellos y a sí misma como personajes de los cuentos de Alicia. Así a veces la autora sería Alicia, a veces la reina regañona, que corta cabezas, o a veces la regañona podría ser Azul; la duquesa que carga el hijo que llora podría ser Roja con sus síntomas de embarazo siempre presentes, también Don Quijote (el caballero), buscando lo correcto. Verde es Humpty Dumpty, sentado en una silla demasiado pequeña para él que mide dos metros, y Morado el dormilón de la mesa de té, que de pronto emite comentarios interesantes; Amarillo, la oruga, sabiamente interviniendo; Rosa, nuevamente Alicia mirando con fascinación lo que la rodea; Acua y Melón, los dos son gatos que sonríen, tal vez con cierta burla y Gris, el sombrerero loco con su espontánea bondad (Carrol, 1996).

Enseñar a redactar un proyecto de investigación a ingenieros agroindustriales con el método o procedimiento de la Educación Lingüística, utilizando como herramienta la literatura, les permitió a los alumnos captar fácilmente los conceptos de los antecedentes, los objetivos, la hipótesis, el marco teórico y/o los resultados, aunque existió en algún momento el choque de ambas áreas del conocimiento: la científica y el arte.

Los alumnos conocieron la importancia de saber elaborar proyectos o informes científicos al descubrir al investigador que todas las personas traen dentro, y aprendieron a leer, escuchar, hablar y escribir el lenguaje propio de esta tarea con la utilización de la Educación Lingüística.

Si la autora no hubiera cursado el diplomado de Educación Lingüística, hubiera seguido usando la literatura para enseñar a redactar proyectos de investigación, porque lo disfruta y sabe que debe usar múltiples recursos para enseñar… pero no lo haría de forma tan profunda, no estaría consciente de por qué lo hace y por qué sirve, ni lo podría conceptualizar.

BIBLIOGRAFÍA

Carrol, Lewis (1996) "Alice Adventures in Wonderland" y Through the Looking Glass" en The Complete Illustrated Works of Lewis Carrol, London, Chancellor Press, pp 17-233.

Cassany, Daniel (2003) La cocina de la escritura, México, Anagrama/SEP, pp 237-241.

Chomsky, Noam y Jean Piaget (1983) Teorías del Lenguaje. Teorías del aprendizaje. El debate entre Jean Piaget y Noam Chomsky, Centre Royaumont pour une Science de L'Homme, Organizado y recopilado por Massimo Piattelli-Palmarini, Barcelona, Grijalbo, p 188.

Freire, Paulo (2004) Cartas a quien pretende enseñar, Buenos Aires, Siglo XXI, p 140.

Jaramillo Zuluaga, C. J. (2012) "El cuento como estrategia didáctica para el desarrollo de competencias ciudadanas", Universidad de Manizales, Plumilla Educativa. Consultado el 12 de diciembre de 2017: http://dialnet.unirioja.es/descarga/artículo/4319802.pdf

Magos Guerrero, Jaime (2001) "La Educación lingüística, ¿una respuesta a las necesidades educativas de hoy...?", Temas de Actualización Docente 1, Querétaro, Edición CETIS 16, pp 39-100.

Magos Guerrero, Jaime (2003) La administración de la clase de lengua, Querétaro, Centro de Estudios Lingüísticos y Literarios de la Facultad de Lenguas y Letras de la Universidad Autónoma de Querétaro, p 4-5 y 12.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Magos Guerrero, Jaime y Alicia Sierra Díaz (2013) "El diseño de Unidades didácticas para la clase de lengua", Memorias del IX Foro de Especialistas en Lenguas, Internacional, Universidad de Chetumal y Facultad de Lenguas y Letras de la Universidad Autónoma de Querétaro, 14 p.

Magos Guerrero, Jaime (2014) Diplomado "Teoría y práctica de la educación lingüística en contextos universitarios", Querétaro, Universidad Autónoma de Querétaro.

Martínez Miguelez, Miguel (2005) El método etnográfico de investigación. Consultado el 12 de diciembre de 2005:
http://prof.usb.ve/miguelm/metodoetnografico.html

Morales, Oscar Alberto, Rincón, Ángel Gabriel y Tona Romero, José, "Cómo enseñar a investigar en la universidad". La Revista Venezolana de Educación (Educere) [online]. 2005, vol.9, no.29, pp. 217-225. ISSN 1316-4910. Consultado el 12 de diciembre de 2013. http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102005000200010&lng=es&nrm=iso

Nietzsche, Friedrich (2003) La genealogía de la moral, México, Editorial Tomo, p 452.

Nietzsche, Friedrich, (2010), El nacimiento de la tragedia, México, Editorial Tomo, p 44.

Poe, Edgar Allan, "La carta robada", en Cuentos completos 1, Prol. y trad. de Julio Cortázar, sin pie de imprenta, probablemente corresponde a la edición de la Universidad de Puerto Rico, en Río Piedras, de 1956, pp 503- 514. Ver pp 281-292 en la página de internet, que corresponde a la edición de Madrid, Alianza Editorial, 2002. Consultado el 27 de junio de 2014.

http://www.ead.df.gob.mx/cultura/circulo_lectura/sesiones/edgar_allan_poe/files/edgar%20allan%20poe%20-%20cuentos%20completos.pdf

Ramírez Díaz (2010) "Aplicación del sistema 4mat en la enseñanza de la física a nivel universitario", Enseñanza. Revista Mexicana de Física, México, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, 56(1) 29-40 junio 2010.

Schmelkes, Corina (1998) Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis), México, Oxford University Press, 206 p.

Sin, Lu (1972) "El diario de un loco", Novelas escogidas de Lu Sin, Pekín, Ediciones en Lenguas Extranjeras, 1972, 325 p.

Sin, Lu, "El diario de un loco", Biblioteca Digital Ciudad Seva. Consultado el 27 de junio de 2014. http://www.ciudadseva.com/textos/cuentos/otras/lusin/el_diario_de_un_loco.htm

REFERENCIAS

Carrol, Lewis (1996) "Alice Adventures in Wonderland" y Through the Looking Glass" en The Complete Illustrated Works of Lewis Carrol, London, Chancellor Press, pp 17-233.

Cassany, Daniel (2003) La cocina de la escritura, México, Anagrama/SEP, pp 237-241.

Chomsky, Noam y Jean Piaget (1983) Teorías del Lenguaje. Teorías del aprendizaje. El debate entre Jean Piaget y Noam Chomsky, Centre Royaumont pour une Science de L'Homme, Organizado y recopilado por Massimo Piattelli-Palmarini, Barcelona, Grijalbo, p 188.

Freire, Paulo (2004) Cartas a quien pretende enseñar, Buenos Aires, Siglo XXI, p 140.

Jaramillo Zuluaga, C. J. (2012) "El cuento como estrategia didáctica para el desarrollo de competencias ciudadanas", Universidad de Manizales, Plumilla Educativa. Consultado el 12 de diciembre de 2017: http://dialnet.unirioja.es/descarga/artículo/4319802.pdf

Magos Guerrero, Jaime (2001) "La Educación lingüística, ¿una respuesta a las necesidades educativas de hoy...?", Temas de Actualización Docente 1, Querétaro, Edición CETIS 16, pp 39-100.

Magos Guerrero, Jaime (2003) La administración de la clase de lengua, Querétaro, Centro de Estudios Lingüísticos y Literarios de la Facultad de Lenguas y Letras de la Universidad Autónoma de Querétaro, p 4-5 y 12.

Magos Guerrero, Jaime y Alicia Sierra Díaz (2013) "El diseño de Unidades didácticas para la clase de lengua", Memorias del IX Foro de Especialistas en Lenguas, Internacional, Universidad de Chetumal y Facultad de Lenguas y Letras de la Universidad Autónoma de Querétaro, 14 p.

Magos Guerrero, Jaime (2014) Diplomado "Teoría y práctica de la educación lingüística en contextos universitarios", Querétaro, Universidad Autónoma de Querétaro.

Martínez Miguelez, Miguel (2005) El método etnográfico de investigación. Consultado el 12 de diciembre de 2005: http://prof.usb.ve/miguelm/metodoetnografico.html

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Morales, Oscar Alberto, Rincón, Ángel Gabriel y Tona Romero, José, "Cómo enseñar a investigar en la universidad". La Revista Venezolana de Educación (Educere) [online]. 2005, vol.9, no.29, pp. 217-225. ISSN 1316-4910. Consultado el 12 de diciembre de 2013. http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102005000200010&lng=es&nrm=iso

Nietzsche, Friedrich (2003) La genealogía de la moral, México, Editorial Tomo, p 452.

Nietzsche, Friedrich, (2010), El nacimiento de la tragedia, México, Editorial Tomo, p 44.

Poe, Edgar Allan, "La carta robada", en Cuentos completos 1, Prol. y trad. de Julio Cortázar, sin pie de imprenta, probablemente corresponde a la edición de la Universidad de Puerto Rico, en Río Piedras, de 1956, pp 503- 514. Ver pp 281-292 en la página de internet, que corresponde a la edición de Madrid, Alianza Editorial, 2002. Consultado el 27 de junio de 2014.

http://www.ead.df.gob.mx/cultura/circulo_lectura/sesiones/edgar_allan_poe/files/edgar%20allan%20poe%20-%20cuentos%20completos.pdf

REFERENCIAS

Ramírez Díaz (2010) "Aplicación del sistema 4mat en la enseñanza de la física a nivel universitario", Enseñanza. Revista Mexicana de Física, México, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, 56(1) 29-40 junio 2010.

Schmelkes, Corina (1998) Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis), México, Oxford University Press, 206 p.

Sin, Lu (1972) "El diario de un loco", Novelas escogidas de Lu Sin, Pekín, Ediciones en Lenguas Extranjeras, 1972, 325 p.

Sin, Lu, "El diario de un loco", Biblioteca Digital Ciudad Seva. Consultado el 27 de junio de 2014.
http://www.ciudadseva.com/textos/cuentos/otras/lusin/el_diario_de_un_loco.htm

PERCEPCIÓN DE *ALUMNOS DE BACHILLERATO* ACERCA DE LA LÍNEA RECTA DESDE UN ENFOQUE SEMIÓTICO

César Olalde-Leyva
Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ingeniería, UAQ.
ing_cesaroleyva@hotmail.com

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

RESUMEN

Al finalizar el curso de Geometría Analítica en bachillerato es deseable que los estudiantes, desde un enfoque semiótico, reconozcan a objetos matemáticos, por ejemplo, la línea recta, en diferentes representaciones. Como representaciones se pueden considerar los dibujos que cargan con los significados del objeto, las ecuaciones que algebraicamente describen tales significados e incluso la propia definición del objeto. Para observar esto, se aplicó un sondeo, impreso e individual, a un grupo de estudiantes de bachillerato, quienes ya habían cursado Geometría Analítica. En este artículo se muestran los datos obtenidos e inferencias de los reactivos 1 y 2, en los cuales se les solicitó a los estudiantes que escribieran la definición de línea recta e hicieran representaciones de ésta. Según lo observado, en general consideran que la línea recta es una "sucesión infinita de puntos" y sobresalen las representaciones geométricas.

PALABRAS CLAVE

Semiótica, línea recta, definición, representación, dibujo, figura.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

ABSTRACT

At the end of the course of Analytical Geometry in high school is desirable that students, from a semiotic approach, recognize mathematical objects, for example, the straight line, in different representations. As representations can be considered the drawings that contain with the meanings of the object, the equations that algebraically describe such meanings and even the definition of the object. To observe this, a printed and individual survey was applied to a group of high school students who had already taken Analytical Geometry. This article shows the data obtained and inferences from question 1 and 2, in which the students were asked to write the definition of a straight line and make representations of it. According to the observed, in general they consider that the straight line is an "infinite succession of points" and prevail the geometric representations.

KEYWORDS

Semiotics, straight line, definition, representation, drawing, figure.

INTRO DUC- CIÓN

"El Álgebra no es más que Geometría y la Geometría no es más que Álgebra abstracta."
Sophie Germain.

Dentro del programa de estudios PRE09 (UAQ, 2009) como competencias disciplinares a desarrollar para la asignatura de Matemáticas IV (llamada Geometría Analítica) se busca que los estudiantes propongan explicaciones a los resultados que obtienen al seguir procedimientos matemáticos y que los contrasten con modelos establecidos o situaciones reales (p. 6). Es decir, el estudiante debe poder aplicar los conceptos matemáticos a situaciones fuera del aula, fuera de las instituciones educativas, donde se desenvuelve en situaciones en los que tiene que afrontar problemas reales que no son como los idealizados (debido a falta de recursos, herramientas, equipo, tiempo, etc.) que se presentan en los libros de texto.

Sin embargo, ¿por qué no se considera real lo que se suscita dentro del aula en una clase de matemáticas? Quizás más bien generaciones de profesores y estudiantes utilizando enseñanza-aprendizaje mecanizado fueron, en parte, los que volvieron irreal una clase de matemáticas, llamándose "clase tradicionalista" para que no se intuyera de otro mundo por su aparente carencia de realidad.

¿En cuál rama de las matemáticas fue más catastrófica la enseñanza-aprendizaje en clase tradicional? Villarroel y Sgreccia (2011) señalan que "de todas las ramas de la Matemática, la Geometría es una de las más intuitivas, concretas y ligadas a la realidad que conocemos. Por ello, ofrece numerosas posibilidades para experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, conceptos,

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

propiedades y problemas" (p. 73). Si se rescatan las palabras "numerosas posibilidades", entonces el aprendizaje de la Geometría no debería ser un proceso estático, tradicionalista, irreal, sino permitir un proceso de enseñanza-aprendizaje donde se interrelacionen las diferentes representaciones del objeto matemático en estudio, pudiendo moverse de una representación a otra sin perder de vista de que se habla del mismo objeto.

El diccionario de la lengua española (RAE, 2014) define "representar" como, entre otras denotaciones, "Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene" o "Ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente", por lo que las representaciones de los objetos matemáticos tienen que regirse por lo que dictan los conceptos mentales de los objetos, los cuales han ido evolucionando, reforzándose y complementándose, entre ellas, históricamente según las necesidades de manipulación del objeto geométrico, teniendo como flecha en el tiempo un inicio en la práctica apuntando hacia la abstracción teórica. La Geometría y el Álgebra encuentran su común en la algebratización de los objetos geométricos que, a nivel bachillerato, se aborda en la asignatura de Geometría Analítica.

Al ser en Geometría Analítica en la que se enfatiza el vínculo entre la representación algebraica y la representación geométrica de objetos matemáticos como recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola resulta importante que no se traten por separado como la solo presentación de una formula o ecuación que permita calcular un parámetro o característica de tales objetos. Generalizando, en nivel medio superior, la asignatura de Geometría Analítica es común que sea antecedida por cursos de Álgebra y Geometría (euclidiana y trigonometría). En la asignatura de Álgebra se estaría presentando principalmente a la graficación como un método de solución que permite encontrar los valores de la variable independiente para que se cumpla la igualdad. En Geometría y Trigonometría, se presentan rectas y puntos notables de figuras geométricas; por ejemplo, se presenta la figura llamada circunferencia, un punto llamado centro y la línea que los une llamada radio (o diámetro). Sin embargo, en Geometría Analítica, la graficación ya no debe ser tomada como un método de solución, sino más bien junto con la ecuación donde ambas representen el mismo objeto matemático, siendo por eso de que la graficación es un método de solución a una igualdad algebraica porque

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

se habla del mismo objeto. Tomando en cuenta estas aseveraciones, después de que el alumno de bachillerato haya cursado la signatura de Geometría Analítica ¿podrá reconocer objetos matemáticos, como línea recta o circunferencia, en diferentes representaciones?

¿Cómo utilizar "La carta robada" de Edgar Allan Poe (1956), un cuento de misterio y "El diario de un loco" de Lu Sin (1972), un cuento de terror chino, al enseñar a estructurar un artículo científico? Se concibió el propósito de usar el cuento, esa breve narración llena de símbolos, en la que la imaginación, las sensaciones y la lógica forman una trama fácil de entender para:

- Sacar al investigador que todas las personas llevan dentro y la fascinación por el misterio, en ese juego de creatividad de la literatura, para entrar luego en la ciencia, que es el conocimiento estructurado sistemáticamente o puramente racional.

- Distinguir los antecedentes, los objetivos, las hipótesis, la metodología y los resultados en ambos tipos de escritos, en este ejercicio del investigador que enseña a investigar.

- Poner en práctica el método de la Educación Lingüística.

- Todo esto se aplicó en una carrera de ciencias fácticas con resultados dignos de comentario.

TEORÍA SEMIÓTICA DE DUVAL

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Una manera de entender las representaciones de objetos matemáticos es la propuesta por Raymond Duval, quien según Font (2000) sus investigaciones sobre las representaciones "[…] se posiciona en el punto de vista representacionalista" (p. 17). Duval (1993) afirma que:

> Una escritura, una notación, un símbolo […] los trazos y las figuras representan objetos matemáticos […] La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas […] Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. (pp. 1-2)

Duval (1993, p. 2) distingue dos representaciones:

a) Representaciones mentales: cubren al conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que está asociado.

b) Representaciones semióticas: son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Señala Duval (1993) la existencia de una relación que se establece entre ambas representaciones ya que el desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones semióticas (p. 2). Además, la función de tratamiento solo puede ser efectuada por las representaciones semióticas.

Si el sujeto tiene en claro el concepto matemático del objeto que se está representado de manera escrita, gráfica, ilustrativa e inclusive verbal, no tendrá problemas en pasar de un registro a otro dado que el concepto del objeto se encuentra libre de ambigüedades y subjetividades. Duval (1993) lo plantea así:

De esta manera, Duval (1993) plantea una paradoja epistemológica en relación a las representaciones de los objetos matemáticos: no hay noesis sin semiosis, estableciendo dos condiciones para que un sistema semiótico funcione verdaderamente como representación:

a) "Que el objeto no sea confundido con sus representaciones, y

b) Que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones" (p. 3).

Así, por ejemplo, para los siguientes objetos matemáticos se muestra una representación correspondiente:

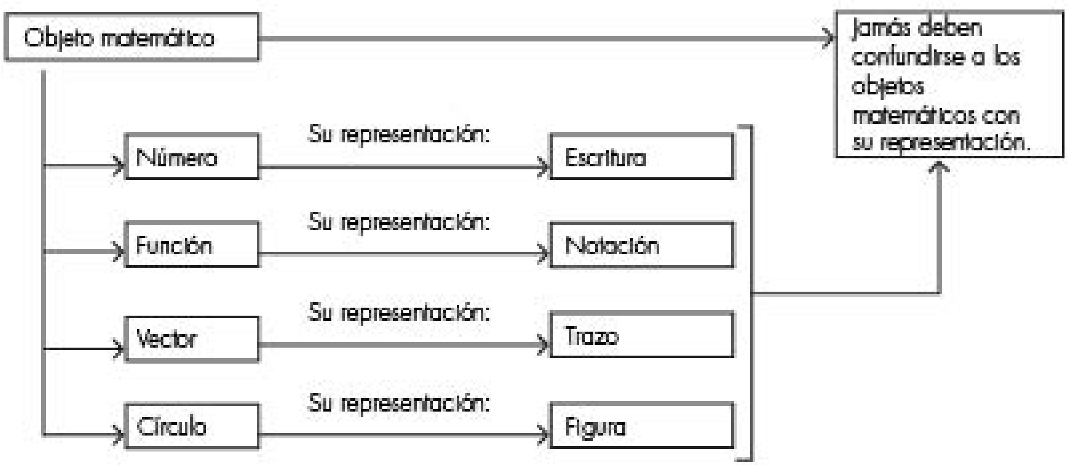


Tabla 1.
Ejemplos de representaciones de diferentes objetos.

Siguiendo este enfoque semiótico, se esperaría que los estudiantes de bachillerato, al finalizar el curso de Geometría Analítica, pudieran reconocer al objeto matemático en sus diferentes representaciones y sin llegar a confundirlo con éste. Por ejemplo, ¿qué representaciones reconoce el estudiante del objeto matemático llamado línea recta? O, aunque no se siguiera el enfoque semiótico ¿qué concepto de línea recta configura el estudiante después de cursar asignaturas de matemáticas hasta la Geometría Analítica? Cómo "concepto de línea recta" se hará referencia al entendimiento mental que el estudiante genera, validándolo dentro de un sistema axiomático, por la interacción con el objeto matemático. Entonces, teniendo esa inquietud es deseable la observancia mediante la aplicación de un sondeo.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

OBJETIVO

Recopilación de información que permita observar, de manera inmediata y de primera mano, la percepción de un grupo de estudiantes de bachillerato acerca de la definición y representaciones de la línea recta.

Es decir: A. Observar de manera inmediata al semestre en el que hayan cursado los estudiantes la asignatura de Geometría Analítica.

B. Observar de primera mano sin que el estudiante haya tenido preparación previa o tiempo de repaso a la presentación del sondeo, y ser aplicado el sondeo a estudiantes de bachillerato.

Con el sondeo no se buscó generalizar ni ser el grupo, a quién se le aplicó, una muestra que represente a las demás instituciones de educación media superior. La información mostrada en este artículo solo abarca los reactivo 1 y 2, de un total de 12, de un trabajo de investigación de posgrado que actualmente está llevándose a cabo.

SON-DEO

El sondeo fue aplicado a un grupo de estudiantes, del turno matutino, que estudian quinto semestre de un bachillerato público perteneciente a la Escuela de Bachilleres "Salvador Allende" adscrita a la Universidad Autónoma de Querétaro, bachillerato que sigue el plan de estudios PRE09. Los estudiantes no fueron notificados previamente a la aplicación del sondeo. El tiempo de aplicación fue de aproximadamente 50 minutos.

El objetivo enunciado se particularizó ya que el sondeo aplicado constó de 4 partes, de las cuales, se abordará la parte número dos, en la que se tuvo como intención observar la definición y registros de los objetos matemáticos línea recta y circunferencia, que el alumno concibe después de haber cursado las asignaturas de matemáticas Álgebra I, Álgebra II, Geometría y Trigonometría, y Geometría Analítica, según el plan de estudios PRE09.

Se muestra en este artículo la información arrojada por el Reactivo 1 y el Reactivo 2, que abarcaron a la línea recta. Las respuestas que se colocaron fueron del tipo abiertas, disponiéndoles a los estudiantes un recuadro en blanco para ello. Como instrucción, para todos los reactivos de la parte 2 del sondeo, se expresó la utilización de lápiz.

Antecediendo a la parte 2 del sondeo, en la parte número uno se le preguntó al estudiante su edad, semestre actual, si ya había cursado la asignatura de Geometría Analítica. De los 43 sondeos aplicados, dos de ellos fueron descartados por ambigüedad al indicar si ya habían cursado Geometría Analítica. En aproximadamente 87% de los estudiantes su edad correspondió a los 17 años, además se corroboró que eran estudiantes de bachillerato y que ya habían cursado Geometría Analítica.

PROCEDIMIENTO

El Reactivo 1 tuvo como indicación al estudiante: "Escribe el concepto de 'línea recta'". En la Tabla 1 se enlistan palabras notables con mayor frecuencia de repetición en las definiciones dadas por los estudiantes. Solo fueron contabilizadas las repeticiones entre sondeos, es decir, no se tomaron en cuenta las palabras que un mismo estudiante haya repetido dentro de su redacción; no se hizo distinción entre el singular y plural de una palabra, ni en el género, entre otras; en caso de ser un número se contabilizó escrito con letras o con su símbolo.

De los 41 sondeos, dos estudiantes no colocaron la definición de línea recta.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Como se observa en la Tabla 1, de los 39 alumnos que respondieron al Reactivo 1, en 35 sondeos se ocupó la palabra "punto" (en singular o plural) en la redacción de la definición; en 18 sondeos se incluyeron las palabras "infinito", "infinita" o "infinitamente"; y en 16 sondeos los estudiantes ocuparon la palabra "sucesión" para elaborar su definición.

Palabra	Número de repeticiones
Punto (s)	35
Infinito (s), Infinita, Infinitamente	18
Sucesión	16
Línea	5
Serie	5
Plano	5
Segmento	4
Seguidos	4
Recta	4
Dos (2)	4

Tabla 1.

Palabras notables con mayor frecuencia en las definiciones de línea recta.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

También hubo frases de las definiciones que, si bien no se repiten textualmente en los 39 sondeos de los estudiantes que respondieron al Reactivo 1, guardan palabras en común:

"[Trazo de puntos seguidos] van de un lado a otro."

"[Sucesión de puntos] que se extienden en dos direcciones contrarias."

"[Línea] que no tiene inicio o fin…"

"[Sucesión de puntos] de manera progresiva y seguidos."

"[Secuencia de punto] no importa que tanto se prolongue…"

"[Conjunto de puntos infinitos] no tiene principio…"

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Otras frases que guardan contexto en común se pudieron observar en 9 sondeos de los 39 estudiantes que respondieron al Reactivo 1:

“[Segmento de un punto a otro] que no tiene curvas.”

“[Es un segmento] que no tiene curvas ni ondas…”

“[Es un segmento] sin curvas…”

“[Es una línea que se extiende infinitamente] y no puede presentar curvas”

“[Es una sucesión infinita de puntos]… sin curvas…”

“[… es una serie de puntos]… no presenta depresiones ni curvas.”

“[Sucesión infinita de puntos] que no presentan curvatura alguna.”

“[Secuencia de puntos]… que no se curvean.”

“[Sucesión de puntos infinitos]… no tiene curvas o ángulos.”

La definición más concreta de los 39 sondeos fue "Sucesión de puntos", la cual expresaron dos estudiantes. La más extensa fue "Es un conjunto de puntos que se extiende infinitamente y abarca los números positivos y negativos. Es unidimensional". Otras definiciones, particulares, fueron:

"Sucesión infinita de puntos. La distancia más corta entre 2 puntos."

"Es una serie de puntos que ocupan un lugar en el espacio."

"Una serie de puntos que van ordenados y siguen un patrón."

"La unión de dos puntos."

"Es un segmento que une dos puntos."

Se tomará, a manera de propuesta, como definición de línea recta en Geometría Analítica: lugar en el plano tal que con dos puntos cualesquiera la pendiente es constante. Entonces, sean las siguientes inferencias acerca de la información obtenida en el Reactivo 1:

- En lo general, los alumnos tienen la concepción o percepción de que la línea recta es una sucesión infinita de puntos.

- Aunque la palabra "seguidos" fue utilizada en 4 definiciones y las palabras "indefinida" y "continuos" no tuvieron presencia sobresaliente, en 6 sondeos los estudiantes definieron que la línea recta se prolonga indefinidamente en cualquier dirección.

- Solo se presentó una definición que se aproximó al aspecto analítico: "Una serie de puntos que van ordenados y siguen un patrón". Ese patrón tiene su justificación analítica en que la pendiente cumple una igualdad para dos puntos cualesquiera de la serie de puntos. Visto de otra manera: de la pendiente, el patrón (el ordenamiento colineal de los puntos en una misma dirección) es su interpretación geométrica, la cantidad numérica que arroja la respectiva ecuación es su interpretación analítica; el patrón se cumple sin importar que segmento se tome de la línea recta y la cantidad numérica se cumple sin importar que par de puntos se consideren. Después de cursar Geometría Analítica ¿con qué percepción se queda el alumno del término pendiente de una recta? Haciendo una sugestión, pareciera que los estudiantes sustituyeran la palabra "patrón" por "sucesión", razón quizás por la cual en ninguna de las 39 definiciones aparezca la palabra "pendiente".

- Parece presentarse una clasificación de los trazos al dibujar una línea: líneas curvas y líneas rectas. De los 39 sondeos, dos estudiantes, para definir la línea recta, enfatizaron que es aquella que no tiene curvas o no se curvea.

- De los 39 sondeos, cuatro estudiantes incluyeron en su definición la palabra "segmento", cuando resulta que un segmento solo es una porción o tramo de la línea recta. Su análogo para la circunferencia es el arco.

Luego, en el Reactivo 2 se le pedía al alumno "Haz representaciones de 'línea recta'". Los 41 estudiantes respondieron a este reactivo. Se propone la siguiente semántica o clasificación a las respuestas dadas para el Reactivo 2:

a)Dirección del trazo.

b)Trazo comprendido entre dos puntos.

c)Explicitación de continuidad/infinitud.

d)Aprehensión perceptiva (Torregrosa y Quesada, 2007)

Para realizar los trazos, en las instrucciones generales previas a iniciar todo el sondeo, se les indicó a los estudiantes el material o herramientas que podían utilizar para responder el Sondeo. Regla o escuadra o incluso una credencial fueron indicados como instrumentos para efectuar trazos rectos. En la Tabla 2 se muestran algunas representaciones hechas por los estudiantes para línea recta, según la clasificación propuesta.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

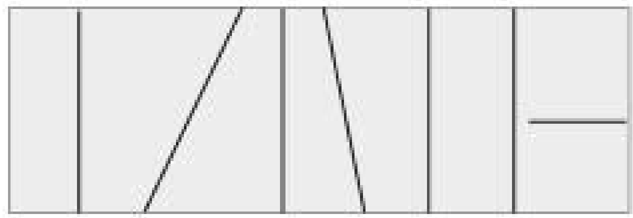
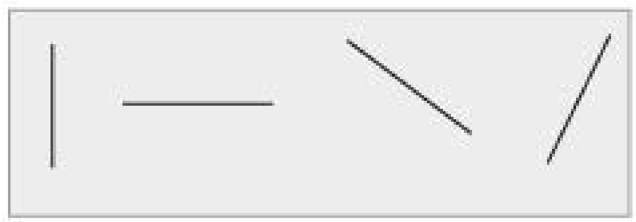
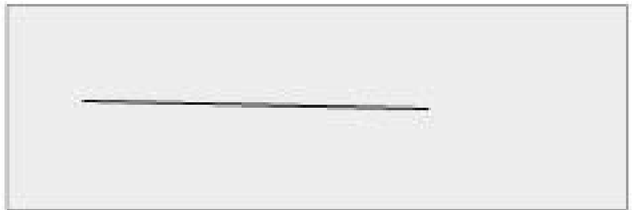
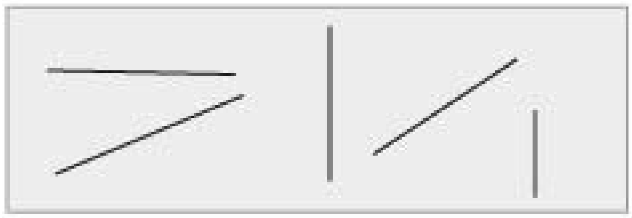
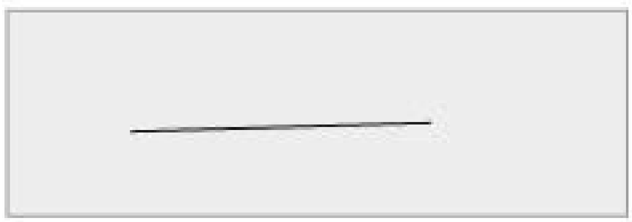
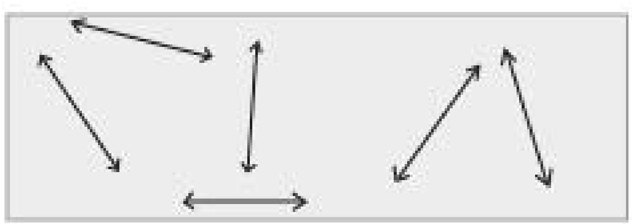
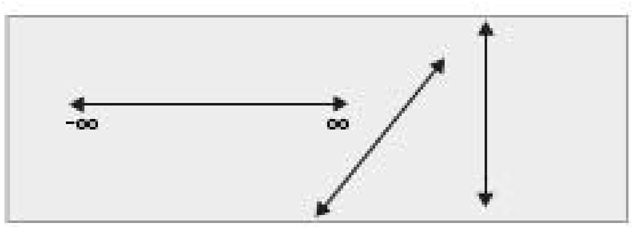
	Representaciones de línea recta
Dirección del trazo	
	
	

Tabla 2.
Algunas representaciones de la línea recta del Representaciones de línea recta del Reactivo 2.

Se hará distinción entre dibujoy figura. Torregrosa y Quesada (2007) expresan que dibujo"[...] es la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico" (p. 276).Por figura,Larios (2006b) señala que:

Tabla 2.

(Continuación)

	Representaciones de línea recta
Trazo comprendido entre dos puntos	
	
Explicitación de continuidad/ infinitud	
	
	

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Académicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

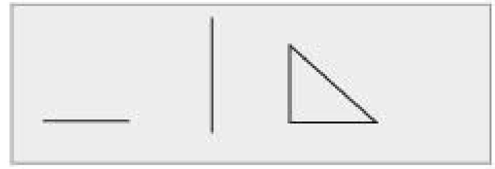
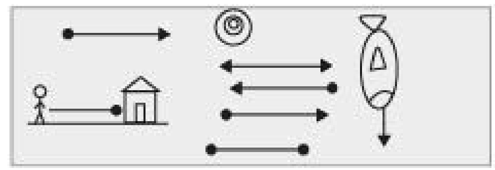
	Representaciones de línea recta
Aprehesión perceptiva -(Torregrosa y Quesada, 2007)	
	

Tabla 2.
(continuación.)

"[...] como no se puede acceder directamente a los objetos geométricos, se les representa por medio de dibujos, a los cuales se le asignan significados, que son las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación. Estos significados corresponden a las llamadas figuras [...]" (pp. 2-3).

Si se habla o se hace referencia o se representa a un objeto matemático es porque existe mentalmente su concepto, su idea, válido según el sistema axiomático que lo restrinja. Así, al exteriorizar el concepto que tiene el sujeto acerca del objeto, lo hace a través de representaciones. Estas representaciones cargan con los significados del concepto que constituyó el sujeto, en su mente, al interactuar con el objeto, significados válidos según el sistema en el cual fue forjado y sustentado. Por lo que, si bien toda representación en registro geométrico es dibujo, no todos los dibujos son figura [geométrica] de un objeto matemático.

Entonces, de la información obtenida en el Reactivo 2 se hacen las siguientes inferencias.

- Dirección del trazo: geométricamente, la pendiente de una línea recta es interpretada por el patrón que se aprehende de puntos colineales siguiendo una misma dirección; siendo que existen 4 direcciones, en el plano, sintetizadas en la Tabla 3.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Pendiente (m)	Valor	Ángulo con respecto de la horizontal y en sentido antihorario (θ)	Figura
Cero	------	$\theta = 0°$	Línea recta horizontal
Negativa	$-\infty < m < 0$	$90° < \theta < 180°$	Línea recta oblicua
Positiva	$0 < m < \infty$	$0° < \theta < 90°$	
Infinita	------	$\theta = 90°$	Línea recta vertical

Tabla 3.
Clasificaión de la pendiente .

Tabla 4.
Cantidad de trazos por pendiente..

Pendiente (m)	Cantidad de trazos (aprox.)
Cero	34 trazos
Negativa	27 trazos
Positiva	24 trazos
Infinita	25 trazos

De estas cuatro rectas, las que presentan una mayor dificultad para ser identificadas visualmente son las horizontales y verticales, por su subjetividad al no contar con un instrumento de verificación. Considerando un margen de error como para distinguir las cuatro direcciones, en la Tabla 4 se muestra la cantidad de trazos, de manera aproximada, por pendiente. Como se observa, en el sondeo se presentaron mayormente trazos horizontales.

Si bien resulta una infinitud de rectas en cualquier dirección, estas representaciones, en registro geométrico, hechas por los estudiantes, no serán consideradas representantes de la línea recta dado que, de entrada, todos los trazos corresponden a segmentos de recta. Salvo en un sondeo donde el estudiante realizó los trazos hasta la frontera del recuadro de respuestas: estos dibujos serían representantes de la figura línea recta, en geometría euclidiana.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

- Trazo comprendido entre dos puntos: de los 41 sondeos, 8 alumnos trazaron una línea delimitada por puntos. Si bien por postulados y definiciones euclidianas se involucran dos puntos con el trazado de la línea recta (o un segmento de ella) y que además se tiene la definición arquimediana como la distancia más corta entre dos puntos, estos 8 sondeos no serán considerados como representaciones de la línea recta, en registro geométrico, por ser más bien segmentos de línea recta.

- Explicitación de continuidad/infinitud: de los 41 sondeos, once de ellos, en lugar de estar delimitados por puntos explícitamente, los estudiantes intentaron evidenciar que la línea recta es una sucesión [de puntos] infinita. En nueve de los once sondeos, se indicaron los 18 extremos como flechas; y en tres de los once sondeos, se colocó el signo de infinito (∞), ya sea indicando la dirección infinito positivo (+∞), infinito negativo (-∞) o ambos.

- Aprehensión perceptiva (Torregrosa y Quesada, 2007): por aprehensión perceptiva se entiende como "[...] la identificación simple de una configuración [...] al ser el proceso más intuitivo" (p. 281). A manera de ejemplo, Torregrosa y Quesada muestran como la figura de un paralelogramo puede ser vista como el tejado de una casa o cuatro rayas dibujadas en el papel. Para las respuestas del Reactivo 2, la línea recta no fue la excepción: en un sondeo el estudiante dibujó un triángulo rectángulo, cuyos lados son segmentos de línea recta; en otro sondeo el estudiante dibujó una flecha lanzada a un blanco, un cohete cayendo verticalmente y un sujeto caminado horizontalmente hacia una casa, intuyendo aquí que el estudiante quiso mostrar como la flecha, el cohete y el sujeto siguen una trayectoria o dirección recta; y en un tercer sondeo se tuvo el dibujo de una flecha horizontal apuntando hacia ambas direcciones, marcando al centro de ella la posición del cero, intuyendo aquí que se trató de señalar a la recta numérica.

Solo en un sondeo de los 41, además de que el alumno trazó un segmento de línea recta horizontal la cual se incluyó en el conteo de la Tabla 4, como se observa la Figura 2, escribió la ecuación la cual es conocida como la ecuación pendiente-ordenada al origen de la línea recta, siendo esta ecuación una representación, en registro analítico, de las líneas rectas que intersectan al eje vertical de un Plano Cartesiano.

Figura 2.
Una representación de la línea recta en registro analítico.

CONCLUSIONES

Dado que no hubo aviso previo a la aplicación del sondeo, dentro de las instrucciones generales se expresó que los alumnos tuvieran sobre la butaca una regla o escuadra o una credencial. De esta manera, se cubría implícitamente tener una mayor probabilidad de ocupar alguno de estos instrumentos en el Reactivo 2 para hacer representaciones de la línea recta, además de que el sondeo era individual y no se permitía la comunicación entre los estudiantes. Haciendo un chequeo visual, se podría afirmar que casi la totalidad de las rectas fueron trazadas con instrumento.

En cuanto a las representaciones, si bien hubo respuesta en los 41 sondeos, todas ellas fueron dibujos, y los segmentos trazados con instrumento caerían en registro geométrico; siendo que solo en un sondeo el estudiante escribió la ecuación de la línea recta que cruza el eje y. Por ende, en este grupo de estudiantes impera la representación de la línea recta en registro geométrico, aun cuando la mayoría de las representaciones en este registro son de segmentos de línea recta, además de que en Geometría Analítica se solicita el uso de un marco de referencia.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

REFERENCIAS

CDuval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fuctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5 (1993), 37-65. Traducción para fines educativos (Hitt F., Ojeda A. M.). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 1997, México.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35.

Larios, O. V. (2006b). La influencia de la computadora como mediadora semiótica entre el conocimiento y el alumno: El caso de la Geometría. En Memorias del XXII Simposio Internacional de Computación en la Educación. México, D.F.: Sociedad Mexicana de Computación en la Educación e Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de: http://www.te.ipn.mx/somece2006memorias/autor/files/2_LariosOsorioVictor.pdf

Real Academia Española [RAE]. (octubre de 2014). Diccionario de la lengua española. Recuperado en enero de 2017, de http://www.rae.es/

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), 275-300.

Universidad Autónoma de Querétaro [UAQ]. (2009). Plan de Estudios PRE09. Escuela de Bachilleres "Salvador Allende".

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78, 73-94.

FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE: UN RECURSO PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA ENFOQUE SEMIÓTICO

Mariana Mejía-Llamas
Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ingeniería, UAQ.
marllamas93@hotmail.com

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

RESUMEN

En este trabajo se exponen algunas propiedades y aplicaciones de las figuras de ancho constante, así como algunas maneras de construirlas. Esto con el fin de mostrar que se puede acceder a conceptos muy interesantes (y que tienen aplicaciones reales) con tan sólo nociones básicas de Geometría, lo que permite que este tema se pueda abordar en un curso elemental de Geometría para enseñar de una manera atractiva conceptos tales como recta perpendicular, recta paralela, recta tangente, etc., a los estudiantes de dicha asignatura.

PALABRAS CLAVE

Figuras de ancho constante, líneas soporte, convexidad, triángulo de Reuleaux

ABSTRACT

In this work, some properties and applications of the figures of constant width are exposed, as well as how to build them. This in order to show that it's possible access to very interesting concepts (with real applications) with only basic notions of Geometry, which allows this topic to be addressed in a elementary course of Geometry to teach in an attractive way concepts such as straight perpendicular, straight parallel, tangent line, etc., to the students of this subject.

KEYWORDS

Figures of constant width, supporting lines, convexity, Reuleaux triangle.

El matemático húngaro G. Polya considera que uno de los requisitos para que el aprendizaje sea efectivo es que el aprendiz sienta un genuino interés en el material a ser aprendido. Así, es deber del maestro generar dicho interés en el concepto, en el tema, en la propia asignatura que va a enseñar a sus estudiantes, en palabras del propio Polya:

> El maestro debe considerarse a sí mismo como un vendedor: él desea vender algunas matemáticas a los más jóvenes. [...] Es su deuda como maestro, como vendedor del conocimiento, convencer al estudiante de que las matemáticas son interesantes, que el punto bajo discusión es interesante, que el problema que se supone debe realizar merece su esfuerzo. (Polya, 1981, p. 105).

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es entonces mostrar una forma en la que el maestro puede lograr que sus alumnos se interesen por el estudio de algunos conceptos básicos de Geometría euclidiana, conceptos como: recta tangente, rectas perpendiculares, circunferencia, ángulo, por mencionar sólo algunos. Lo creemos necesario ya que no es fácil que un alumno sienta disposición a aprenderlos debido, en gran parte, a lo abstracto que podrían resultarle. Quizá por la forma en que tradicionalmente se enseña Geometría euclidiana, en donde sólo se enuncian definiciones, axiomas y teoremas, el estudiante considera que dichos conceptos son sólo información inútil, sólo ideas vaporosas que nada tienen que ver con él y mucho menos con la realidad que le rodea, y que por tanto no merecen su atención.

La propuesta consiste en hacer uso del concepto de figura de ancho constante para motivar a estudiantes de bachillerato a aprender conceptos geométricos elementales de la asignatura de Geometría euclidiana.

Como se verá más adelante, las figuras de ancho constante tienen bellas propiedades y aplicaciones reales, las cuales indudablemente cautivarán a los estudiantes; además, demostrar dichas propiedades es relativamente sencillo, pues únicamente se necesitan nociones elementales de Geometría euclidiana (mismas nociones que son el objeto de enseñanza del maestro que imparte Geometría euclidiana a nivel Medio Superior). Considerando lo anterior, y con el fin de motivar al alumno a aprender conceptos elementales de Geometría euclidiana, proponemos que antes de la exposición formal de estos conceptos, el maestro comience con la presentación de algunas de las cualidades y aplicaciones de las figuras de ancho constante; y una vez obtenida la atención del alumno y generado su interés por saber más sobre estas figuras, se proceda a la demostración formal de algunas de sus propiedades. Los alumnos entonces querrán aprender esos conceptos elementales de Geometría euclidiana ya que son necesarios para poder demostrar las propiedades de las figuras que tanto los han fascinado.

Para el lector que hayamos logrado convencer de emprender la enseñanza de conceptos básicos de Geometría euclidiana partiendo del concepto de figura de ancho constante, se elaboró la sección Sobre figuras de ancho constante (p. 8). El objetivo de la sección es, primeramente, familiarizarlo con este concepto (si no está familiarizado ya). Así mismo, pretende mostrarle un par de aplicaciones reales de estas figuras, las cuales pueden utilizarse para atraer el interés de los estudiantes. Las aplicaciones que mencionamos en esa sección son: tapadera de alcantarilla y broca para perforar agujeros cuadrados, sin embargo no son las únicas. Por ejemplo, las figuras de ancho constante también se utilizan en algunos proyectores de cine o en el motor de émbolo rotativo.

Para presentar a los estudiantes dichas aplicaciones, se sugiere que el maestro utilice la herramienta didáctica de primer orden en la labor docente: la pregunta. A modo de ejemplo, considere las siguientes cuestiones:

- En la antigüedad, para trasladar enormes bloques de piedra, las personas usaban troncos de árboles, es decir, usaban rodillos circulares (rodillos cuya sección transversal es un círculo), ver Figura A. Cuando estos rodaban, el bloque era trasladado sin subir ni bajar, manteniéndose siempre a la misma altura. ¿Es posible que haya rodillos que tengan esa misma propiedad pero cuya sección transversal no sea un círculo, sino un triángulo o un cuadrado, por ejemplo?
- ¿Por qué las tapas de las alcantarillas son circulares? ¿Por qué no es recomendable una t

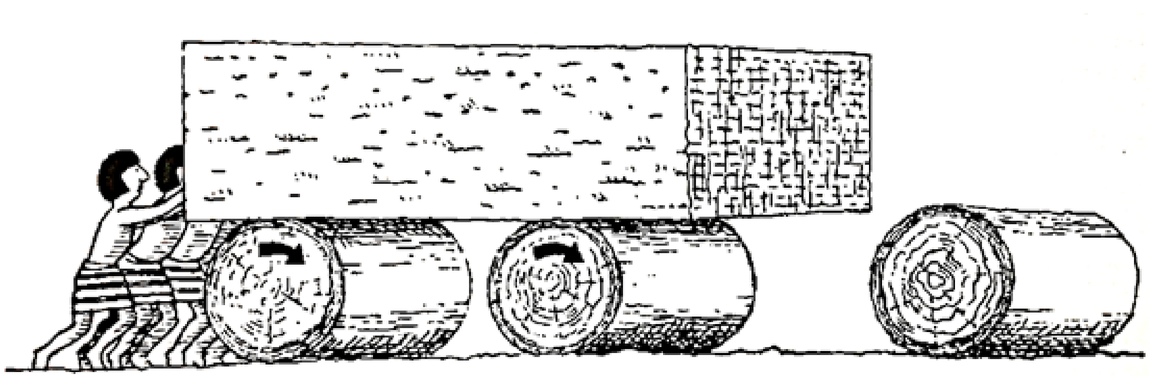


Figura A

(Fuente: Bolt, 1991)

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Observe que las cuestiones anteriores pueden despertar la curiosidad de los estudiantes ya que, al estar relacionadas con objetos o experiencias cotidianas para ellos, éstas les son significativas. Pero además, provocan una inquietud en el estudiante al plantearle situaciones "inconcebibles" o situaciones en las que no se habían detenido a pensar. (El concepto de figura de ancho constante hace posible la formulación de este tipo de preguntas).

Una vez conseguido el interés de los alumnos por conocer más sobre las figuras de ancho constante, se pasaría a enunciar y demostrar algunas de sus propiedades más interesantes. En la sección Sobre figuras de ancho constante, se muestran algunas formas de construir estas figuras, en particular se hace énfasis en la construcción que comienza con tres rectas que se intersectan mutuamente. Así mismo se hace la demostración de porqué esa construcción produce una figura de ancho constante (Demostración 1, p. 14); y se demuestra también que si la figura obtenida tiene ancho h entonces su perímetro será igual a πh (Demostración 2, p. 15). Lo anterior con el fin de mostrar al lector que, efectivamente, la demostración de propiedades relacionadas con las figuras de ancho constante únicamente involucra conceptos elementales de Geometría euclidiana, lo que hace posible que los estudiantes puedan realizarlas. Demostrar estas propiedades puede ser una actividad usada para dos propósitos:

- Que el alumno reafirme conceptos de Geometría elemental, considerando que ya domina conceptos tales como triángulo, circunferencia, ángulo, medida de un arco de circunferencia, etc.
- Que el alumno se interese por aprender algunos conceptos básicos de Geometría euclidiana, tales como: recta tangente, rectas paralelas, rectas perpendiculares; y no sólo los conceptos por sí mismos, sino también algunas relaciones que existen entre ellos (como que el radio de una circunferencia trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente).

De manera un poco más específica podemos decir qué conceptos elementales de Geometría euclidiana (si no todos, al menos sí los más importantes) involucra la Demostración 1 y cuáles involucra la Demostración 2.

Demostración 1	Demostración 2
Rectas paralelas, rectas perpendiculares, circunferencia, arco de circunferencia, recta tangente, punto de intersección, igualdad de segmentos, la propiedad de que el radio de una circunferencia trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente	Arco de circunferencia, medida de un arco de circunferencia, perímetro, ángulo, la propiedad de que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

El lector puede ya entonces desplegar su creatividad en la utilización de estas demostraciones para enseñar sus conceptos de Geometría euclidiana. Quizá podría proponer a sus alumnos demostrar por qué la construcción basada en un polígono regular con un número impar de lados (p. 16) crea una figura de ancho constante; o demostrar por qué su perímetro es πh, donde h es la diagonal mayor del polígono. Pero no sólo eso, podría también pedirles que calculen el área de una figura de ancho constante, por ejemplo, el área de un triángulo de Reuleaux de ancho h (p. 9), y una vez obtenida pedirles también que demuestren que: a pesar de que el círculo de diámetro h tiene el mismo perímetro que un triángulo de Reuleaux de ancho h, πh, su área es mayor. (El área de un círculo de diámetro h $\frac{\pi h^2}{4} \approx 0.7854\, h^2$ es ≈0.7854 h^2, mientras que la de un triángulo de Reuleaux de ancho h es $\frac{h^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \approx 0.7048\, h^2$).

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Hay que señalar que no sólo demostrando algunas propiedades de las figuras de ancho constante podemos abordar conceptos de Geometría euclidiana. El maestro puede diseñar preguntas o problemas relacionados con las figuras de ancho constate cuya resolución implique también el dominio o conocimiento de conceptos básicos de Geometría euclidiana. Algunos ejemplos de estas preguntas son:

- ¿Por qué la broca de Watts requiere un dispositivo que la haga girar describiendo una circunferencia?
- Diseñe un conjunto de rodillos que sea adecuado para trasladar una estructura cuya sección transversal sea la mostrada en la Figura B.
- Considere el método para construir figuras de ancho constante que parte de la intersección de tres rectas que se intersectan mutuamente. ¿Qué pasa si usa el método sólo para dos líneas rectas?

Figura B

(Fuente: Bolt, 1991)

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Estos problemas aparecen al final de la sección 8 del libro de Brian Bolt, Mathematics meets Technology (ver bibliografía).

Con todo lo dicho y con la pequeña sección que viene a continuación, esperamos haber podido mostrar al lector que es posible interesar a los alumnos por el estudio de la Geometría euclidiana (a nivel Medio Superior o incluso profesional) por medio de las figuras de ancho constante. El cual es un concepto lleno de aplicaciones ingeniosas y propiedades fascinantes que encantarán a los estudiantes. Por último, al realizar este trabajo deseábamos también incitar al maestro a buscar formas de motivar a sus alumnos por el estudio de su asignatura. Hay muchos otros conceptos matemáticos, con bellas cualidades capaces de asombrar y cautivar a cualquier persona, que pueden ser usados, no sólo para enseñar un objeto matemático, sino también como fuentes de ideas para enriquecer la enseñanza de muchas otras asignaturas.

FIGURAS DE ANCHO CONSTANTE

Supongamos que tenemos una figura plana, convexa y acotada Γ, y una dirección determinada t (Figura 1). Consideremos una recta l perpendicular a dicha dirección. Si proyectamos todos los puntos frontera de la figura, es decir, si trazamos rectas perpendiculares desde cada uno de estos puntos a la recta l, observamos que esta proyección forma un segmento AB en l.

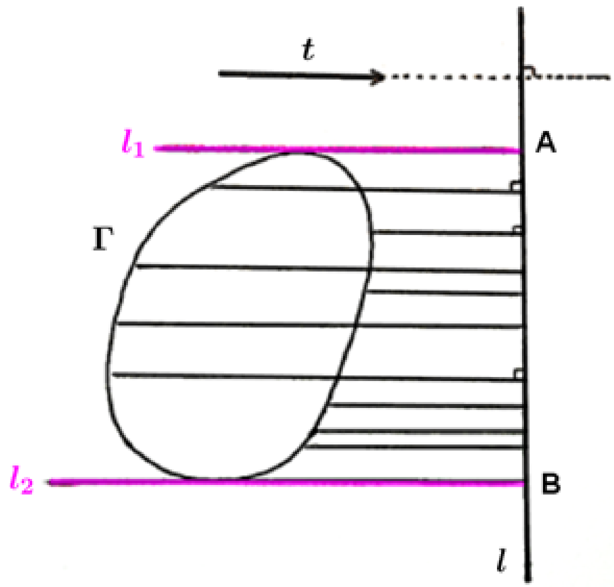


Figura 1

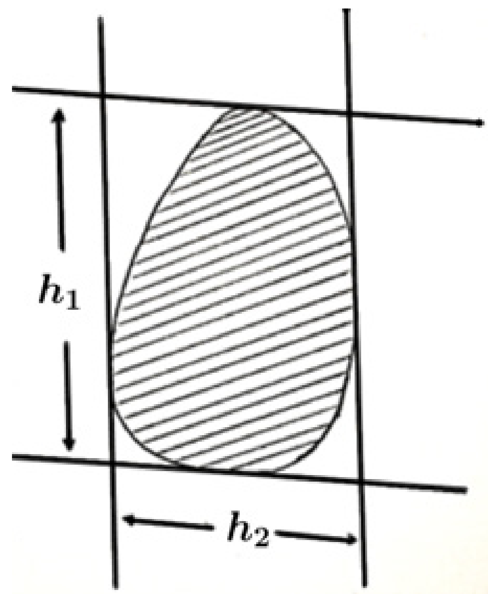


Figura 2

A la longitud del segmento AB se le conoce como el ancho de Γ en la dirección t. Las líneas de la proyección que pasan por A y B (l_1 y l_2, respectivamente) se llaman líneas soporte de Γ. Ya que estas líneas tocan a Γ únicamente en su frontera (i.e. no contienen ningún punto interior de Γ), cumplen que toda la figura se encuentra de un solo lado de estas líneas. Es claro por la construcción que en cualquier dirección dada se pueden trazar exactamente dos líneas soporte a una figura convexa y acotada, las cuales serán paralelas entre sí y paralelas a la dirección dada. Regresando a la definición que nos interesa, observamos que el ancho de la figura puede ser diferente dependiendo de la dirección (Figura 2). A las figuras convexas y acotadas que mantienen el mismo ancho en todas las direcciones se les llama figuras de ancho constante.

¿Puede pensar en alguna figura que tenga ancho constante? Quizá al lector la figura que le vino de inmediato a la mente fue el círculo, y efectivamente, el círculo es una figura de ancho constante cuyo ancho es igual a su diámetro. ¿Puede pensar en alguna otra? Esta tarea parece un poco más complicada, pero lo cierto es que existen una infinidad de figuras de ancho constante.

Después del círculo, la figura de ancho constante más simple es el triángulo de Reuleaux. Su construcción es bastante sencilla. Empezamos con un triángulo equilátero ABC de lado d y con centro en cada vértice trazamos arcos de circunferencia de radio d cuyos extremos sean los otros dos vértices restantes (Figura 3). Esta figura es de ancho constante ya que dada cualquier dirección, el par de líneas soporte paralelas a esa dirección cumplen que: una es tangente a uno de los arcos que conforman a la figura y la otra pasa por el vértice que le es opuesto [¿por qué? (*)]; teniéndose así que la distancia entre cualquier par de líneas soporte del triángulo de Reuleaux será siempre d.

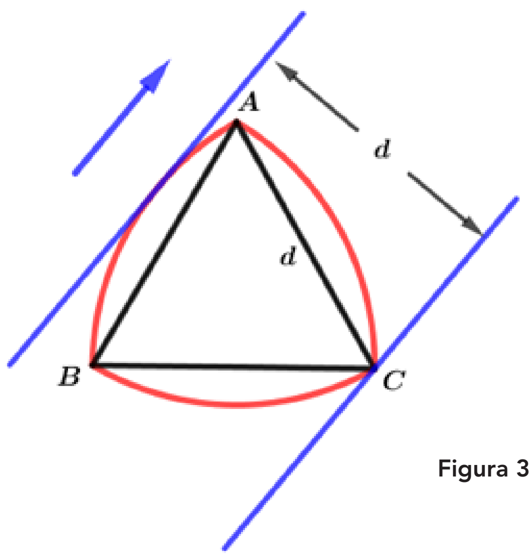
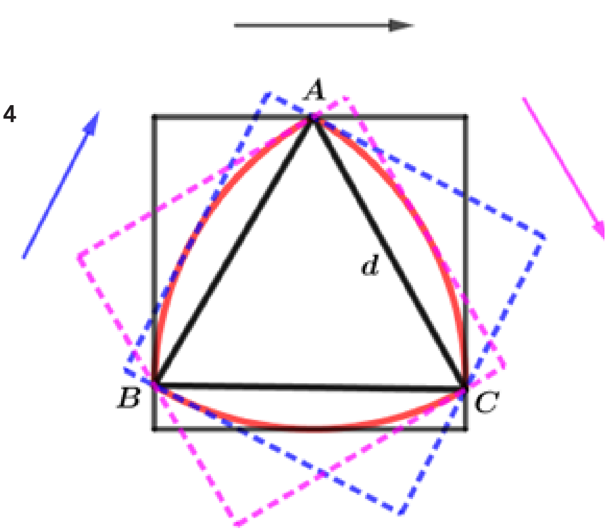


Figura 3

Figura 4



PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

El triángulo de Reuleaux recibe su nombre del ingeniero y matemático alemán Franz Reuleaux, quien probó que en cualquier dirección siempre es posible encontrar un cuadrado que circunscriba a la figura y que tenga uno de sus lados paralelo a esa dirección (Figura 4). Lo anterior es fácil de ver, supongamos que tenemos una figura convexa y acotada Γ, sabemos que en cualquier dirección existen exactamente dos líneas soporte paralelas a ésta, si trazamos otro par de líneas soporte perpendiculares a las primeras, obtendremos un rectángulo (Figura 5). Pero si Γ tiene ancho constante, digamos d, entonces obtendremos un cuadrado de lado d. (Así, esta propiedad no es única del triángulo de Reuleaux sino que todas las figuras de ancho constante la cumplen).

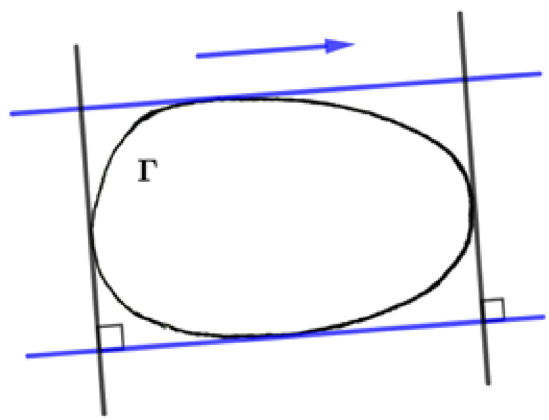


Figura 5

Dicho en otras palabras, Reuleaux mostró que esta figura puede rotar dentro de un cuadrado tocando en todo momento sus cuatro lados (Figura 6).

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

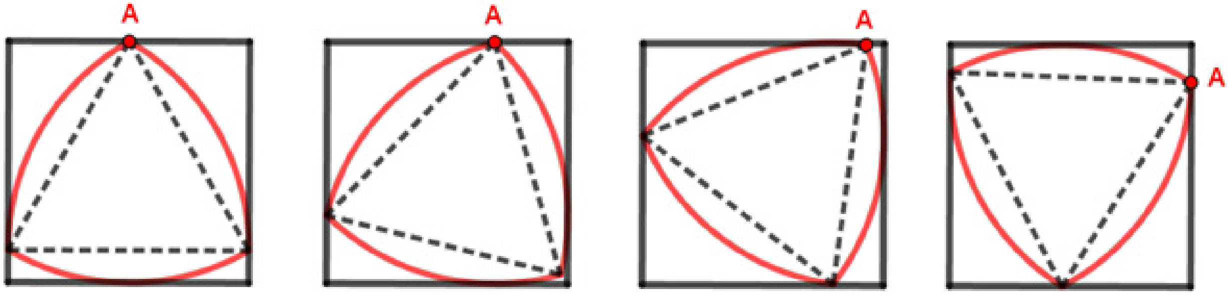


Figura 6

Es precisamente a esta propiedad a la que se debe una de las aplicaciones más ingeniosas del triángulo de Reuleaux: perforar agujeros cuadrados. En 1914, el ingeniero británico Harry James Watts ideó una broca con forma de triángulo de Reuleaux para tal fin. La sección transversal de dicha broca es un triángulo de Reuleaux al que se le han quitado tres regiones para permitir una salida a las virutas del material que se está perforando (Figura 7). Para hacer las perforaciones, esta broca se monta en un dispositivo que la hace girar (describiendo una circunferencia) dentro del hueco cuadrado de una placa metálica que le sirve de guía y que está colocada sobre el material que se desea perforar (Figura 8).

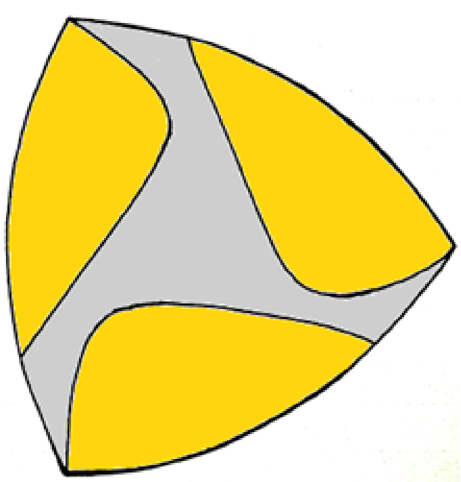


Figura 7

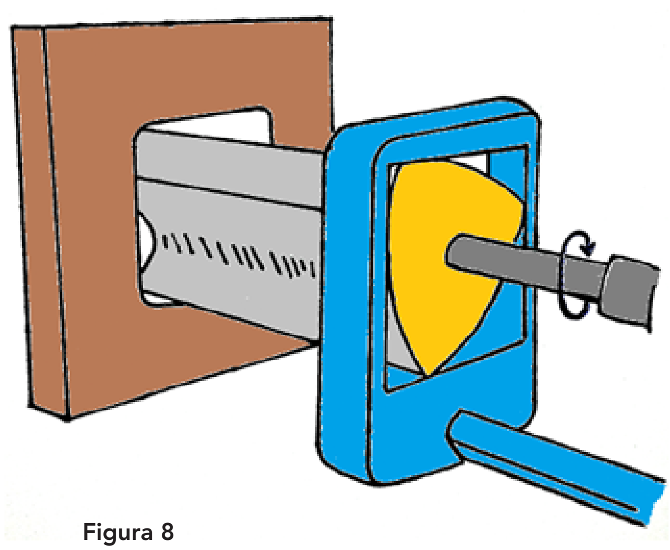


Figura 8

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Académicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Otra de las aplicaciones de las figuras de ancho constante, y en particular del triángulo de Reuleaux, ha sido en el diseño de tapas de alcantarillas. Una de las razones por la que las tapas de las alcantarillas son circulares es para que, cuando se lleguen a retirar, no se vayan a ir accidentalmente por el agujero. Sea cual sea la posición de la tapa circular, ésta jamás caerá debido a que es una figura que tiene ancho constante (Figura 9).

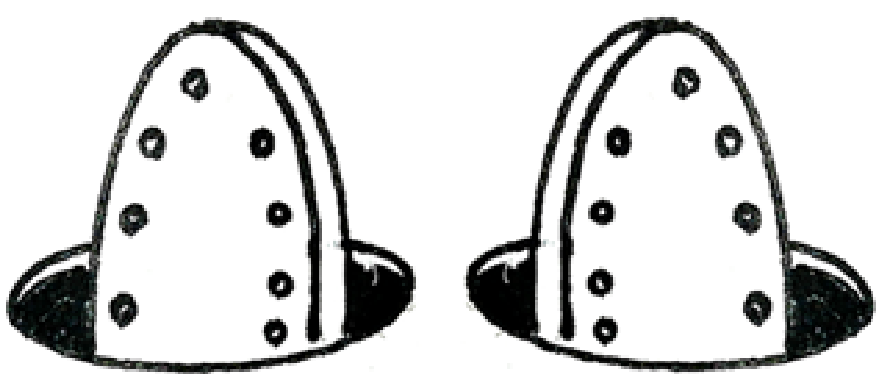


Figura 9

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

¿Por qué no sería muy recomendable construir una tapa de alcantarilla cuadrada? Piense en que si en un momento se tuviera la necesidad de retirar la tapa y por algún descuido, al querer volver a colocarla en su lugar, uno de sus lados tomara una posición perfectamente vertical y sobre la diagonal del cuadrado, irremediablemente caería al hoyo (Figura 10). Y esto se debe a que el cuadrado no tiene ancho constante, pues recuerde que la diagonal del cuadrado es mayor que su lado (Figura 11).

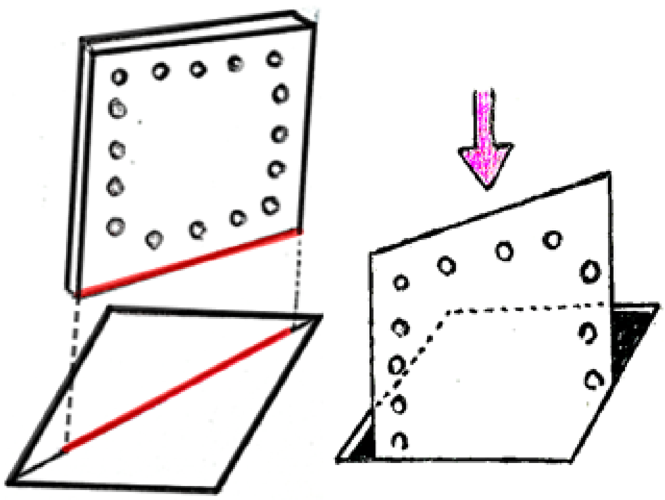


Figura 10

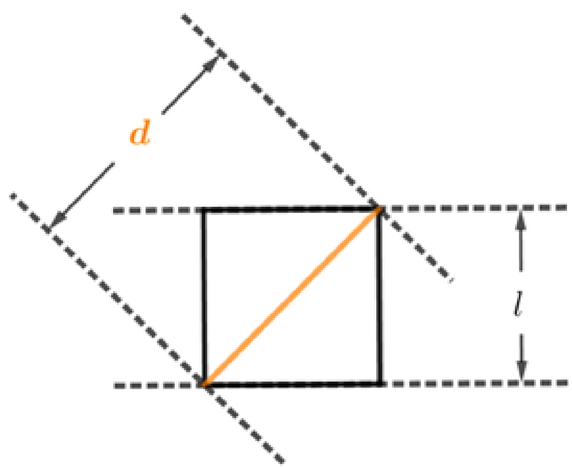


Figura 11

Entonces para que una tapa de alcantarilla sea adecuada únicamente se necesita que tenga ancho constante. Así, una tapa en forma de triángulo de Reuleaux es igual de eficiente que una tapa circular. De hecho hay ciudades que han adoptado esta forma para el diseño de las tapas de sus alcantarillas, por ejemplo en la Figura 12 se muestra una tapa de alcantarilla de San Francisco, Estados Unidos.

Figura 12

Quizá a estas alturas el lector ya esté un poco impaciente al notar que únicamente se ha hablado del triángulo de Reuleaux a pesar de que se dijo que había una infinidad de figuras de ancho constante. Hay muchas formas de construirlas, pero por lo pronto vamos a mostrar una manera de obtenerlas a partir de un triángulo que no necesariamente sea equilátero, y que nos servirá de pretexto para hablar sobre más propiedades de las figuras de ancho constante. Tracemos tres líneas rectas que al intersectarse formen un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ (Figura 13). Sobre la recta AB escogemos un punto D que no esté sobre el segmento AB y trazamos un arco con centro en A y que vaya desde D hasta la recta AC; sea E el punto donde se intersectan. Ahora, con centro en C trazamos un arco que vaya desde E hasta la recta BC; sea F el punto donde se intersectan. Si continuamos con este procedimiento, es decir, conectando los arcos uniendo el extremo de uno con la línea inmediata (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) median una figura cerrada Φ la cual tendrá ancho constante.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

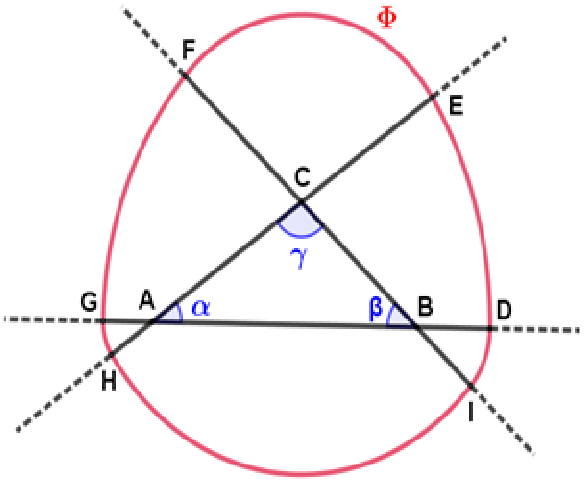


Figura 13

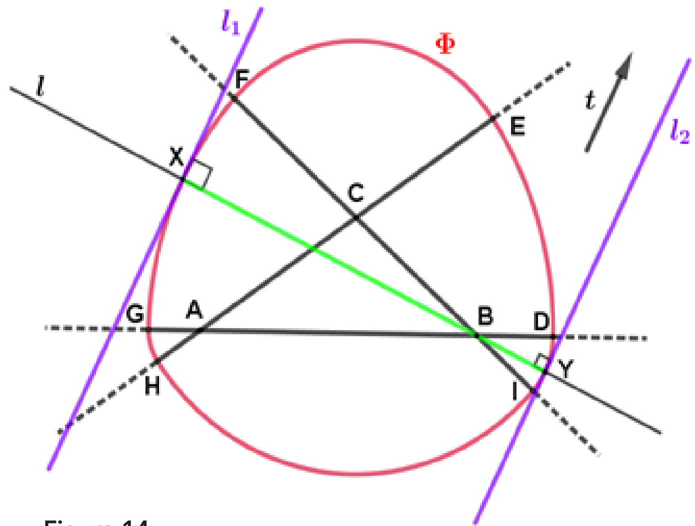


Figura 14

Podemos demostrar este hecho fácilmente. Consideremos una dirección arbitraria t (Figura 14). Habíamos visto que en cualquier figura convexa y acotada se pueden dibujar exactamente dos líneas soporte paralelas a cualquier dirección dada. Así, existen dos líneas soporte de Φ paralelas a t. Es claro que siempre podemos trazar una recta paralela a esta dirección t y que sea tangente a alguno de los arcos de Φ. Supongamos que dicha recta es tangente al arco $\widehat{GF}$ en un punto X. Ésta sería nuestra primera línea soporte l_1. Si trazamos la recta l que pasa por X y el vértice B, entonces l intersecta al arco $\widehat{ID}$ en un punto Y. Tracemos la recta l_2 que es tangente al arco $\widehat{ID}$ en Y. Se tiene que l es perpendicular a l_1, pues XB es radio de la circunferencia que forma el arco $\widehat{GF}$, pero también l es perpendicular a l_2 pues BY es radio de la circunferencia que forma el arco $\widehat{ID}$. Entonces $l_1 \perp l_2$ y por lo tanto la segunda línea soporte es l_2 y el segmento XY es el ancho de Φ [siguiendo esta idea puede contestar la pregunta (*), p. 9].Observamos que XY=GD=FI (si la recta l_1 no hubiera sido tangente al arco $\widehat{GF}$, sino al arco opuesto $\widehat{ID}$ se tendría el mismo resultado).

Si la recta l_1 no hubiera sido tangente al arco $\widehat{GF}$ sino que hubiera sido tangente al arco $\widehat{FE}$ o al $\widehat{ED}$, entonces siguiendo el mismo procedimiento anterior llegaríamos a que el ancho de Φ es FI=HE y HE=GD, respectivamente. Es decir que FI=HE=GD, y por tanto el ancho de la figura es el mismo en cualquier dirección, es decir, que la figura tiene ancho constante.

Es claro que conforme las tres rectas de las que parte la construcción varían de inclinación, se conseguirán diferentes figuras de ancho constante, que serán distintas tanto en forma como en tamaño, y por tanto, serán diferentes también en cuanto a su perímetro. Si restringimos nuestra atención a aquellas que tienen el mismo ancho h, una pregunta interesante que podríamos hacernos es: ¿cuál de todas las figuras de ancho igual a h, que se basan en triángulos, tiene mayor perímetro?

Para responder la pregunta regresemos a la Figura 13 y supongamos que Φ tiene ancho h. Para calcular el perímetro Φ basta con sumar las medidas de los arcos que la conforman, es decir

$$Perimetro\ \Phi = \widehat{DE} + \widehat{EF} + \widehat{FG} + \widehat{GH} + \widehat{HI} + \widehat{ID}$$

Por otro lado, si $\alpha = \sphericalangle CAB, \beta = \sphericalangle ABC$ y $\gamma = \sphericalangle BCA$, se tiene que

$$\widehat{DE} = \frac{\alpha}{180^\circ}\pi(AB + BD), \qquad \widehat{EF} = \frac{\gamma}{180^\circ}\pi(CE), \qquad \widehat{FG} = \frac{\beta}{180^\circ}\pi(BC + CF),$$

$$\widehat{GH} = \frac{\alpha}{180^\circ}\pi(GA), \qquad \widehat{HI} = \frac{\gamma}{180^\circ}\pi(HA + AC) \quad y \quad \widehat{ID} = \frac{\beta}{180^\circ}\pi(IB)$$

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Así,

$$Perimetro\ \Phi = \frac{\alpha}{180^\circ}\pi(GA + AB + BD) + \frac{\beta}{180^\circ}\pi(IB + BC + CF) + \frac{\gamma}{180^\circ}\pi(HA + AC + CE)$$

$$= \frac{\alpha}{180^\circ}\pi(GD) + \frac{\beta}{180^\circ}\pi(IF) + \frac{\gamma}{180^\circ}\pi(HE)$$

Pero $GD = IF = HE = h$, pues Φ tiene ancho constante. Entonces

$$Perimetro\ \Phi = h\pi\left(\frac{\alpha}{180^\circ} + \frac{\beta}{180^\circ} + \frac{\gamma}{180^\circ}\right) = h\pi.$$

CONCLUSIONES

Hemos mostrado entonces que todas las figuras trazadas mediante esta construcción y que poseen ancho h, tendrán irremediablemente perímetro hπ. Nótese que éste también es el perímetro de un círculo de diámetro h, y de hecho todas las figuras de ancho constante h, independientemente de la forma en que se construyan, tendrán perímetro hπ; a este resultado se le conoce como el Teorema de Barbier.

No crea el lector que únicamente comenzando a partir de triángulos se pueden construir figuras de ancho constante, hay muchas otras maneras de construirlas, una de ellas es comenzando con un polígono regular y seguir la idea de la construcción del triángulo de Reuleaux, es decir, trazando

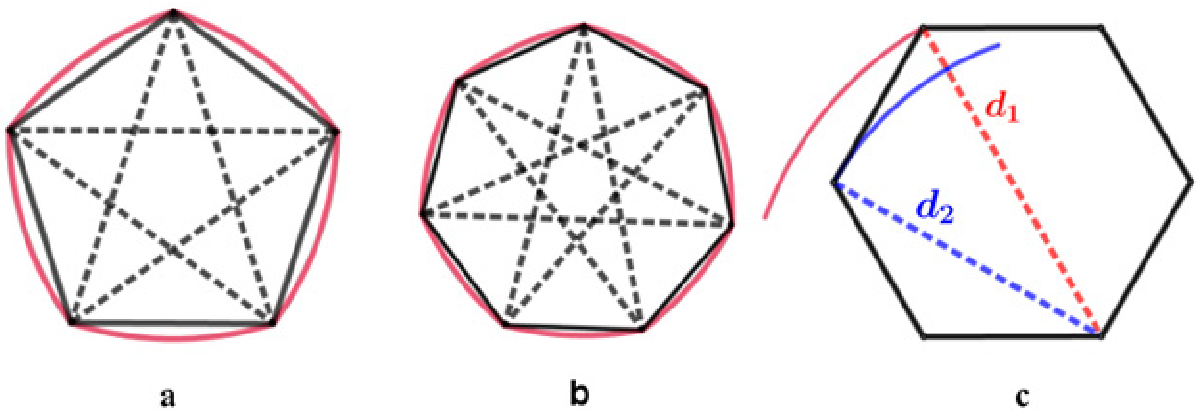


Figura 15

Las figuras así construidas tendrán ancho constante igual a la longitud de la diagonal mayor del polígono regular de la que partieron. Es claro que estas figuras tienen ancho constate, pues dada cualquier dirección, el par de líneas soporte paralelas a esta dirección cumplen que: una es tangente a uno de los arcos de la curva y la otra pasa por el vértice opuesto a dicho arco (¿por qué?).

Esta construcción es válida sólo para polígonos regulares con un número impar de lados, pues cada vértice del polígono debe conectar a los dos que le son opuestos mediante un arco, lo cual es posible únicamente si las diagonales que van desde un vértice a los otros dos que le son opuestos tienen la misma longitud (Figura 15 c).

También se pueden construir figuras de ancho constante partiendo de polígonos irregulares que tengan lados de igual longitud o partiendo de un número cualquiera de rectas que se intersecten mutuamente, pero dejamos al lector el investigar éstos y otros métodos para trazar sus figuras de ancho constante, pues hemos llegado al término de nuestro recorrido por el mundo de estas figuras. No hace falta decir que dicho mundo es muy basto y que lo que aquí se expuso fue sólo un pequeño vistazo que tuvo como finalidad mostrar que se puede acceder a conceptos interesantes y a sus aplicaciones (que son por lo demás curiosas) con nociones de Geometría Elemental, es decir, con el manejo de conceptos básicos como: recta paralela, recta perpendicular, triángulo equilátero, circunferencia, etc.; y con teoremas sencillos como el que dice que "el radio de una circunferencia trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente". Teniéndose así que es posible reforzar y aprender esos conceptos elementales de Geometría de una manera diferente y atractiva para los estudiantes de dicha asignatura.

Figuras de ancho constante: Un recurso para la enseñanza de conceptos básicos de Geometría euclidiana

Yaglom, I.M., Boltyanskii V. G. (1961). Convex Figures.

Montejano Peimbert, Luis. (1998). Cuerpos de ancho constante. Universidad Nacional Autónoma de México. Fondo de Cultura Económica, México.

Polya, George. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. John Wiley & Sons.

Bryant John, Chris Sangwin. (2008). How round is your circle? Princeton University Press.

Bolt, Brian. (1991). Mathematics meets Technology. Cambridge University Press.

REFERENCIAS

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PROPUESTA PARA EL MÉTODO DE REDUCCIÓN EN BACHILLERATO

Daniela HERNÁNDEZ-JARAMILLO
División de Investigación y Posgrado, Facultad de Ingeniería
danielahjaramillo@hotmail.com

RESUMEN

En el presente artículo se desarrolla una descomposición genética propuesta del método de reducción, utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Primero se da una introducción a la teoría APOE y con base en esta se desarrolla una descomposición genética. Después se describen las características de los sistemas y los estudiantes considerados para el trabajo y se hace el desarrollo, paso a paso, de la descomposición genética. El artículo representa un extracto de un trabajo de investigación para una tesis de maestría, cuyo objetivo es diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Por lo anterior, este trabajo deja la puerta abierta a realizar la validación de la descomposición genética y, posteriormente, la propuesta didáctica basada en la misma.

PALABRAS CLAVE

APOE, descomposición genética, método de reducción, sistema de ecuaciones lineales

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

ABSTRACT

On this paper we present the development of a proposed genetic decomposition for the elimination method, used to solve linear equation systems. First we start with an introduction to APOS theory, explaining how this is the basis for the development of genetic decompositions. Later we described the characteristics of the systems and the students considered for the paper y we present, step by step, the formation of the genetic decomposition. This paper represents an extract of a research work for a master s thesis, which objective is to design a teaching sequence for the learning of the solution set of lineal equation systems, using APOS theory as a theoretical and methodological framework. Therefore this paper leaves the door open to validate de genetic decomposition and, later, to elaborate a teaching proposal.

KEYWORDS

APOS, elimination method, genetic decomposition, linear equation systems.

INTRODUCCIÓN

La finalidad del presente trabajo es presentar el desarrollo de una descomposición genética propuesta para el método de reducción para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Este artículo surge como un extracto de un trabajo de tesis de maestría, cuyo alcance es mayor, en el cual se busca realizar el diseño y validación de cuatro descomposiciones genéticas para cuatro distintos métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y, utilizar dichas descomposiciones como base para el diseño de una propuesta didáctica. En el presente trabajo, debido al espacio del mismo, solo se aborda el diseño de la descomposición y algunas pautas para su validación.

De acuerdo con Zill y Dewar en su libro Álgebra, trigonometría y geometría analítica (2012), un sistema de ecuaciones consta de dos o más ecuaciones, donde cada una de ellas tiene al menos una variable. Si estas ecuaciones son lineales, entonces el sistema también es lineal. Para un sistema de n ecuaciones con n variables, la solución del mismo estará formada por los valores de las n variables, que satisfacen cada ecuación del sistema.

Losplanesyprogramas de la Subsecretaría de Educación Básica (SEP, 2017) en México, señalan que los alumnos comienzan el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en el segundo año de secundaria, entre los 12 y 13 años de edad. Cuando llegan al nivel bachillerato, entre 15 y 16 años, los estudiantes retoman estos temas.

En el programa de matemáticas I de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEP, 2017) publicado en julio del 2017 y aplicable para las generaciones 2017 – 2020 y subsecuentes, se dedica

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

un bloque con un total de catorce horas, del primer semestre de bachillerato para la enseñanza de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución analíticos y gráficos. De acuerdo con el programa anterior para matemáticas I de bachillerato (SEP, 2013), los métodos de solución se dividían en tres apartados: numéricos, algebraicos y gráficos.

Dado que los nuevos programas no detallan cuáles son los métodos analíticos, en este artículo se hace la suposición de que, los métodos analíticos mencionados en el nuevo programa 2017 incluyen los métodos numéricos (método de Cramer) y los métodos algebraicos (igualación, reducción y sustitución).

Para la propuesta de descomposición genética presentada en este artículo, se toma el método de reducción por considerarse que, analizándolo desde la perspectiva de la teoría APOE, este método es el que requiere del estudiante la construcción de una mayor cantidad de conceptos matemáticos que, además, deben interactuar entre sí. Es decir, este método permite, a la vez que se analiza el concepto matemático en sí, observar a mayor profundidad el diseño de una descomposición genética.
Los sistemas de ecuaciones lineales considerados son sistemas cuadrados de dos o tres incógnitas, no homogéneos, con coeficientes k bien definidos y que pertenecen a los reales. Además, la descomposición genética está elaborada pensando en estudiantes regulares de primer semestre de bachillerato en México, es decir, jóvenes entre los 15 y 16 años que han concluido la educación secundaria y, por lo tanto, ya han estudiado tópicos introductorios al álgebra.

MARCO TEORICO

APOE, por sus siglas Acción, Proceso, Objeto y Esquema, es una teoría constructivista basada en los trabajos realizados por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico del niño. El constructivismo sustenta sus bases en el concepto de la abstracción reflexiva, idea que Dubinsky, creador de la teoría APOE, usa para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008).

Dubinsky (1996) menciona:

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones. (p. 32 – 33)"

En esta reflexión se mencionan las construcciones mentales acción, proceso, objeto y esquema, las cuales son los elementos más importantes de la teoría.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Según Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller en su libro APOS Theory (2014) un concepto matemático se concibe primero como una acción, esto quiere decir que es una transformación de un objeto matemático externo. Una acción es externa debido a que cada paso de la transformación que realiza el estudiante debe realizarse de manera explícita y guiada por instrucciones específicas y consecuentes, donde cada paso que realiza pide la siguiente acción. Se dice además que la acción es muy mecánica y repetitiva ya que el alumno aún no imagina o absorbe la esencia del concepto matemático.

Ya que el individuo tiene un concepto matemático como una construcción mental acción puede abstraerlo y convertirlo en un constructo mental proceso. Existen dos maneras de llegar a la estructura mental proceso: la interiorización y la coordinación. Cuando las acciones son repetidas por el estudiante y este logra reflexionar sobre lo que está haciendo, las acciones dejan de ser externas y se convierten en internas; esta característica de imaginar los pasos dejando de ser mecánicos se conoce como interiorización. Una acción interiorizada es una estructura mental proceso.

La siguiente abstracción mental es la encapsulación. La encapsulación ocurre cuando el individuo es capaz de ver una estructura dinámica, como lo es un proceso, como una estructura estática a la cual se le pueden aplicar acciones (Dubinsky et al., 2014). Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown (2005) proporcionan una explicación más amplia:

> Si uno se da cuenta del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y puede realmente construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación), entonces decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. (p.339)

Existen otras abstracciones reflexivas que son: des-encapsulación, coordinación y reversión, las cuales ayudan al individuo a crear nuevas estructuras mentales. La colección de las acciones, procesos y objetos como construcciones mentales de un concepto matemático específico forman un esquema. Según Piaget (Piaget y García, 2004) existen tres niveles de esquema: nivel intra, donde las construcciones mentales que conforman el esquema no interactúan entre ellos; nivel inter, donde las estructuras mentales que conforman el esquema sí interactúan entre ellos para crear nuevas construcciones; y el esquema nivel trans, donde los constructos mentales de un concepto matemático interactúan con constructos mentales de otros conceptos matemáticos y hasta con conceptos que no tienen que ver directamente con la matemática.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

La teoría APOE describe las diferentes estructuras mentales que va formando el estudiante cuando aprende un nuevo concepto matemático, este mapa que desarrolla el alumno le permite al profesor diseñar programas de formación permanente que contemplen estos aspectos. Badillo (2003) menciona: "Esto implica introducir al profesor de matemáticas en una reflexión didáctica y epistemológica de los conceptos matemáticos a enseñar" (p. 12), por lo que esta propuesta debe considerar al constructo descomposición genética como un elemento principal de los programas de formación; esto debido a que la organización del contenido a enseñar permitiría estructurar el concepto matemático y diseñar actividades y tareas que ayuden a la formación de las construcciones mentales (Badillo, 2003).

La descomposición genética consiste en diseñar un camino viable en términos de estructuras mentales y abstracciones reflexivas, para que un estudiante pueda seguirlo para la construcción del concepto matemático de manera exitosa. Se debe mencionar que no existe una única descomposición genética para un concepto matemático, se pueden crear diferentes descomposiciones ya que un estudiante puede aprender el concepto de diferentes maneras. (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010)

En el artículo se presenta una propuesta de descomposición genética, la cual sería un pilar crucial, ya que permite un análisis teórico del objeto matemático, lo que ayuda a la reflexión por parte del docente para poder mejorar y orientar sus actividades en el salón de clases desde un punto de vista cognitivo y didáctico. (Gutiérrez y Valdivé, 2012)

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL MÉTODO DE REDUCCIÓN

En esta sección del artículo se expone la descomposición genética propuesta para el método de reducción. Es importante recordar que, de acuerdo con la teoría APOE, siempre deben existir conocimientos previos que permitan la construcción de los nuevos conceptos, por ello la explicación de la descomposición genética del método de reducción comienza estableciendo los conceptos previos que el estudiante necesita, ya que estos son esenciales para iniciar la construcción del nuevo conocimiento, en este caso para llegar a la solución de un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de reducción.

Antes de trabajar con sistemas de ecuaciones lineales el estudiante debe haber construido el esquema de ecuación lineal. Este esquema es el que le permite identificar una ecuación lineal, con una dos o tres incógnitas, y hacer una distinción entre esta y las ecuaciones cuadráticas que también ha estudiado previamente (identificación de ecuaciones lineales como un proceso). Dentro de este esquema también es importante que el estudiante sea capaz de interpretar un problema planteado en forma de enunciado y, a partir de él, proponer una ecuación lineal que satisfaga la información dada y que le permita calcular el o los valores solicitados (interpretación de ecuaciones lineales como un proceso). Lo anterior a su vez quiere decir que el estudiante debe ser capaz de trabajar con una ecuación lineal, haciendo despejes y sustitución de valores que le permitan llegar a determinar el valor de la o las incógnitas de la ecuación (despeje de ecuaciones lineales como un proceso). También, el estudiante reconoce cuándo la solución a la ecuación es única y cuándo el conjunto solución es infinito y las implicaciones analíticas que esto tiene en un problema.

Si el estudiante demuestra que posee estos constructos mentales, es posible que se le introduzca un nuevo concepto: sistemas de ecuaciones lineales.

En primera instancia, este concepto será intuitivo, el estudiante comprende que al poner juntas un par, o más, de ecuaciones lineales, está formando un sistema; sin embargo no es capaz de entender cómo es que estas ecuaciones se relacionan entre sí. En este momento diremos que el alumno ha construido la acción sistema de ecuaciones lineales, como se muestra en la figura 1.

El siguiente es un **ejemplo** de problema planteado como enunciado:

> "Anabel pagó $145 por 3 cajas de palomitas y 2 vasos de refresco. Claudia compró 5 cajas de palomitas y 7 vasos de refresco y tuvo que pagar $315. ¿Cuál es el precio de cada caja de palomitas y vaso de refresco?".

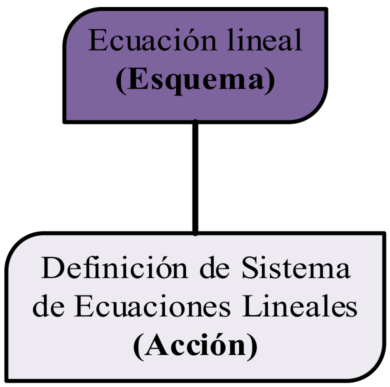


Figura 1.

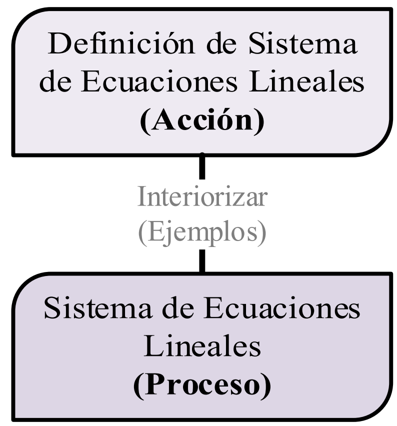
Sistema de ecuaciones lineales, acción.

Esta acción puede ser interiorizada para llegar a un estado de construcción proceso. Esta interiorización se dará a través de ejemplos en los que el estudiante, a partir de un problema dado como enunciado, tenga que plantear más de una ecuación que le permita representar la información dada y llegar a determinar los valores que se le soliciten. Cuando el estudiante sea capaz de hacer y explicar estos planteamientos, está mostrando que entiende la manera en que se pueden relacionar las ecuaciones en un sistema, es decir, ha llegado a un estado de construcción proceso de este concepto. La figura 2 ilustra esta interiorización.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Otro concepto previo importante que el alumno debe haber construido antes de este trabajo es el esquema de expresiones algebraicas. Este esquema puede considerarse muy amplio, dependiendo de la perspectiva desde la que se analice, por ello es importante señalar que, en este caso, son dos procesos derivados de este esquema los que resultan de gran importancia y sin los cuales el estudiante no podrá proceder con el método de reducción.

Figura 2.
Sistema de ecuaciones lineales, proceso.



El primero del que hablaremos es el concepto de igualdad de expresiones algebraicas. Al llegar a un estado de construcción proceso de este concepto, el estudiante entiende el concepto de igualdad de expresiones como una equivalencia entre ellas. Es decir, el alumno puede identificar cuando dos expresiones son iguales o cuando una igualdad está siendo cumplida, aún si las expresiones involucradas no están expresadas en términos exactamente iguales. Por ejemplo, el estudiante reconoce que $1 = 0.3 + 0.5 + 0.2$, o que $a+b/2=0.5b+a$. Este proceso le permitirá, no solo trabajar el método en sí, sino llegar más adelante a conclusiones necesarias cuando el conjunto solución de un sistema sea vacío o infinito.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

El segundo concepto es el de simplificación de expresiones algebraicas. Cuando el alumno esté en un estado de construcción proceso de este concepto significa que él es capaz de utilizar reglas de manipulación de expresiones, que ha construido dentro del mismo esquema de expresiones algebraicas, para simplificar una expresión hasta dejarla en su forma irreducible. Este conocimiento le será necesario para la aplicación del método y para encontrar la solución al sistema cuando esta sea única. La figura 3 muestra el esquema de expresiones algebraicas y los dos procesos derivados de él.

Los dos procesos mostrados en la figura 3 pueden ahora coordinarse para llevar a la construcción de un nuevo proceso. Esta coordinación se dará a través de las reglas para la manipulación de expresiones algebraicas que el estudiante ya conoce y a partir de ella se construirá el proceso de reducción de expresiones algebraicas.

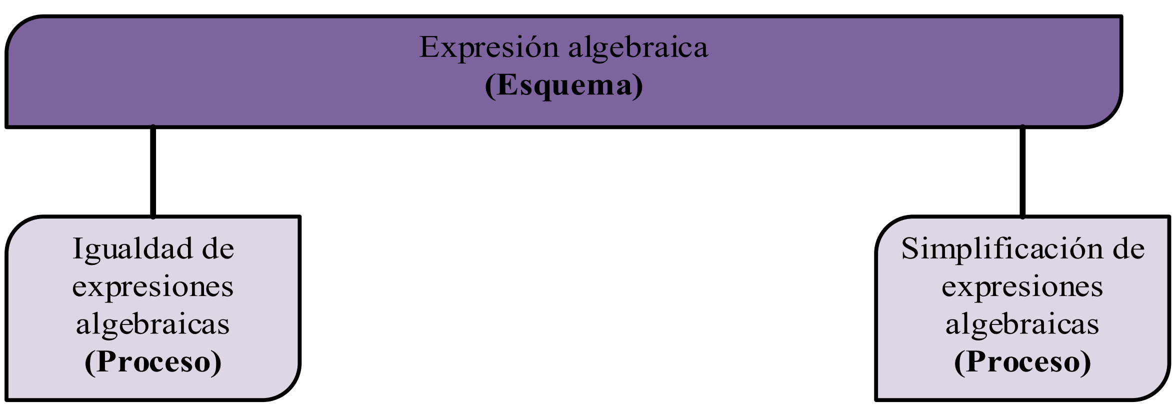


Figura 3.
Expresión algebraica, esquema.

Al construir este proceso el estudiante es capaz de manipular una expresión algebraica para sumarla, restarla, dividirla o multiplicarla con otra expresión o con un número real k y simplificarla hasta dejarla irreducible. Este será el proceso clave que le permitirá al estudiante aplicar el método de reducción, ya que este consiste precisamente en manipular una serie de expresiones, en este caso ecuaciones lineales, para eliminar una de las incógnitas. La figura 4 muestra la coordinación de la cual surge este proceso.

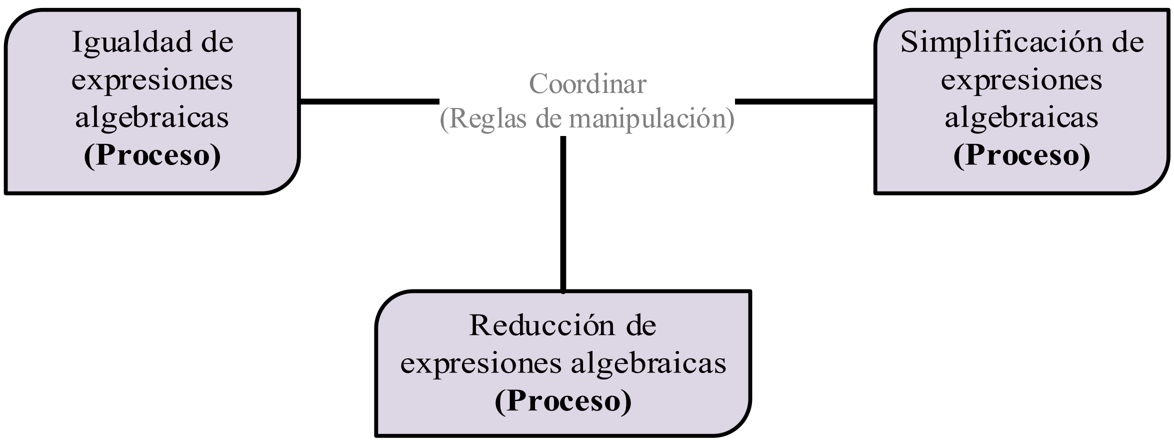


Figura 4.
Coordinación a través de reglas de manipulación.

Una vez que se ha construido este proceso, y como el estudiante ya ha construido también el concepto de sistema de ecuaciones lineales, es posible que coordine estos dos procesos a través de la aplicación del método de reducción, como se muestra en la figura 5.

Figura 5.
Coordinación por método de reducción.

En este punto es importante hacer una distinción acerca del sistema con el que se esté trabajando, pues el proceso que surja a partir de esta coordinación será diferente si el sistema tiene solución única o si su solución es vacía o infinita.

Se tomará primero el caso de un sistema con solución única. Cuando el estudiante haga la coordinación de la figura 5, es decir, cuando el estudiante aplique el método al sistema dado, ya sea un sistema de 2x2 o de 3x3, lo que obtendrá será una ecuación lineal -de una o dos incógnitas dependiendo del tamaño del sistema- que será equivalente al sistema original. Entonces, a partir de la coordinación de la figura 5 el estudiante debe construir la ecuación lineal equivalente como un proceso. Al hacer dicha construcción, mostrada en la figura 6, el alumno identifica que esa ecuación está relacionada con el sistema original y que, a partir de ella podrá determinar los valores de las incógnitas del sistema.

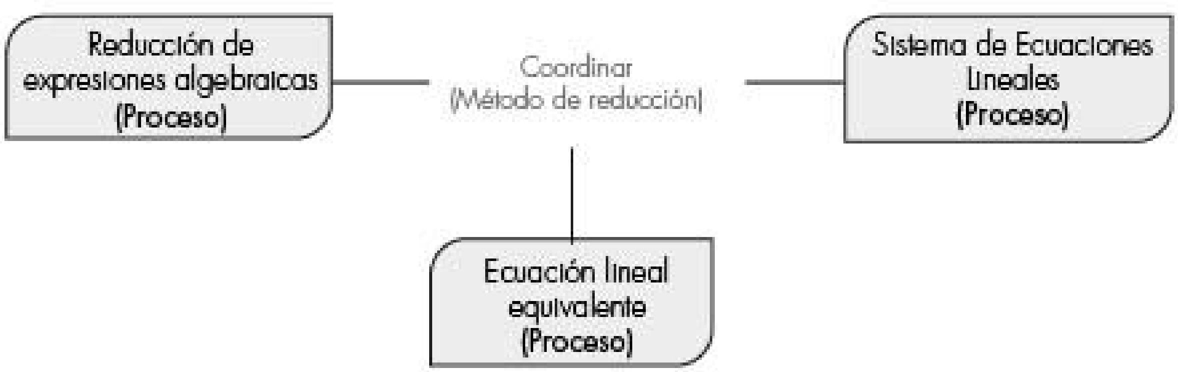


Figura 6.
Ecuación lineal equivalente, proceso.

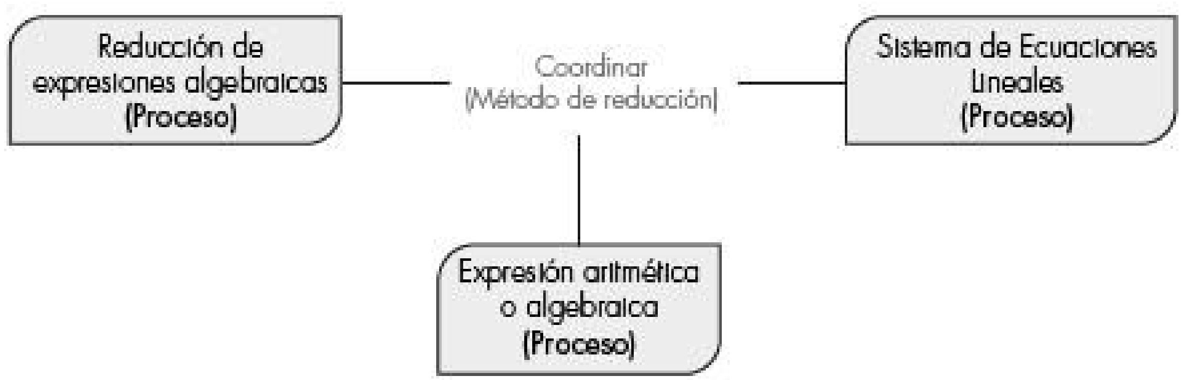
Para poder determinar esos valores, el estudiante debe coordinar el proceso de ecuación lineal equivalente con otro proceso que ha construido previamente. El de reducción de expresiones algebraicas. Esta coordinación se dará a través de la sustitución y comprobación; es decir, el estudiante irá reduciendo la ecuación o las ecuaciones lineales equivalentes hasta determinar el valor de la primera incógnita, el cual después usara para sustituir en la ecuación lineal equivalente o en el sistema original para determinar el valor de la segunda incógnita, y así sucesivamente hasta determinar todos los valores que buscaba. Cuando haya encontrado el valor de todas las incógnitas, el estudiante los sustituirá en el sistema original para comprobar que sus cálculos sean correctos y que esos tres valores satisfacen a todas las ecuaciones lineales del sistema. Es decir, de esta coordinación, el estudiante construirá el proceso de solución única, como se muestra en la figura 7.

Figura 7.
Solución única, proceso.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Ahora se hablará del caso de sistemas con solución vacía o soluciones infinitas. Al realizar la coordinación de la figura 5, es decir, al aplicar el método de reducción, el estudiante no podrá llegar a una ecuación lineal equivalente como en el caso anterior, si no que obtendrá una expresión, que puede ser aritmética o algebraica. El estudiante entonces necesita el proceso de expresiones aritméticas o algebraicas, el cual se construye a partir de los conocimientos que el estudiante ya tiene sobre expresiones algebraicas. Este proceso le permite al estudiante reconocer que la expresión a la que se enfrenta es precisamente eso, una expresión y no una ecuación. Esta construcción se muestra en la figura 8.

Figura 8.
Expresión aritmética o algebraica, proceso.



A partir de esta construcción, el estudiante buscará simplificar la expresión hasta dejarla irreducible y al hacerlo se enfrentará a una expresión del tipo 9=4, x=3x, 2=2, h=h, etc. Entonces el estudiante necesitará coordinar esta expresión aritmética con un proceso que ha construido previamente, el de igualdad de expresiones, para determinar si la igualdad se está cumpliendo o no. Esta coordinación se puede hacer a través de dos mecanismos mentales distintos, el de verdad o el de contradicción.

Cuando el estudiante encuentre una expresión que sea contradictoria (9=4, x=3x) podrá concluir que el sistema no tiene solución, es decir, su conjunto solución es vacío. El estudiante podrá llegar a esta conclusión debido a que, cuando construyó el proceso de sistemas de ecuaciones lineales, comprendió que para que el sistema tenga solución debe haber al menos un par o triada de valores que satisfagan todas las ecuaciones del sistema a la vez y, en este caso, dado que no es posible encontrar ni siquiera uno de esos pares o triadas, se concluye que el sistema no tiene solución, permitiendo que el estudiante construya el concepto de solución vacía como un proceso, tal y como se muestra en la figura 9.

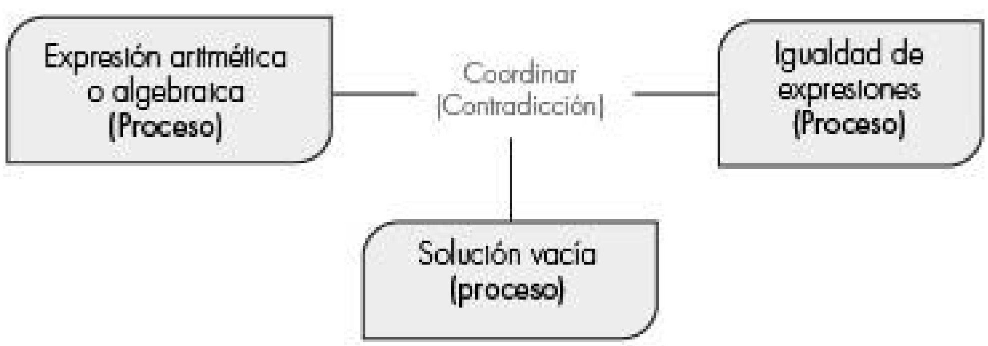


Figura 9.

Solución vacía, proceso.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Por otro lado, cuando el estudiante encuentre una expresión que represente una verdad (2=2, h=h) podrá concluir que el sistema con el que está trabajando tiene infinitas soluciones, esto debido a que en el esquema de ecuación lineal el estudiante ya ha trabajado con ecuaciones con soluciones infinitas y comprende este concepto y lo que implica al momento de resolver una ecuación. Así el estudiante llegará a construir el concepto de soluciones infinitas como un proceso, entendiendo que esto significa que si se tiene una igualdad es porque existen infinitos pares o triadas de valores que satisfacen a todas las ecuaciones lineales del sistema. Esta construcción se muestra en la figura 10.

Figura 10.

Soluciones infinitas, proceso.

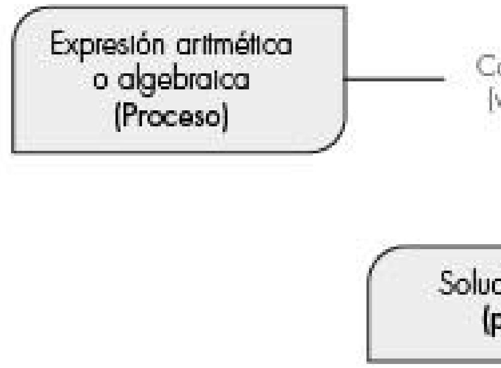
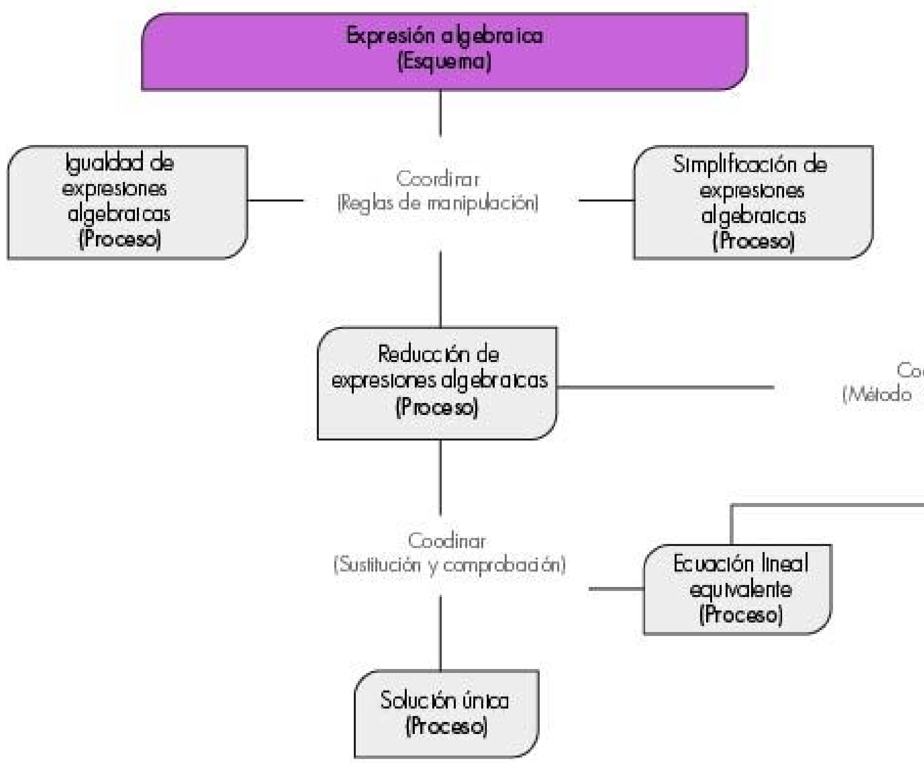
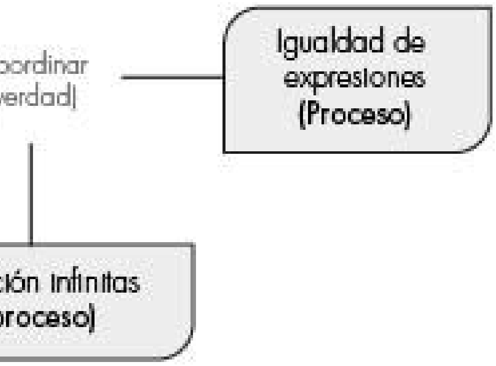


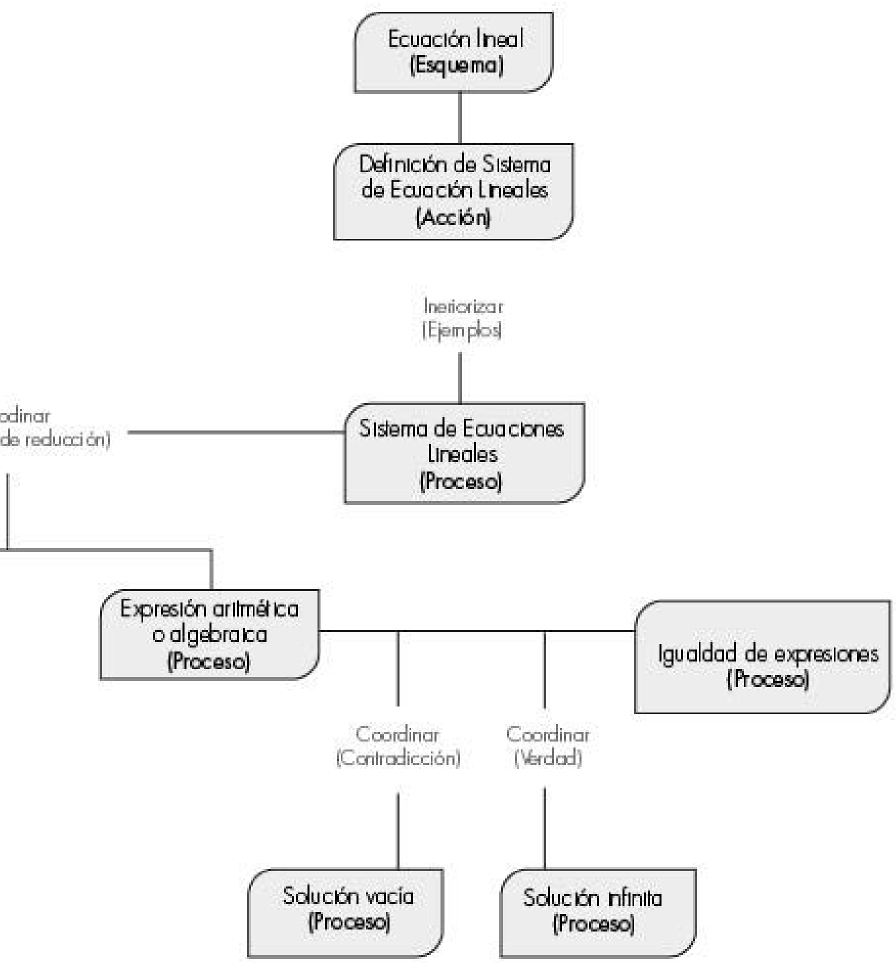
Figura 11.

Descomposición genética, metodo de reducción.



PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.


oordinar
verdad)
Igualdad de expresiones (Proceso)
ción infinitas
proceso)


Ecuación lineal (Esquema)
Definición de Sistema de Ecuación Lineales (Acción)
Ineriorizar (Ejemplos)
odinar
de reducción)
Sistema de Ecuaciones Lineales (Proceso)
Expresión aritmética o algebraica (Proceso)
Igualdad de expresiones (Proceso)
Coordinar (Contradicción)
Coordinar (Verdad)
Solución vacía (Proceso)
Solución infinita (Proceso)

VALIDACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

Actualmente, como parte del desarrollo de un trabajo de tesis de maestría, se está realizando la validación de la descomposición genética presentada en este artículo. Para realizar esta validación se dividió la descomposición genética en dos secciones: conocimientos previos y métodos de reducción. Las preguntas diseñadas para evaluar conocimientos previos permitirían observar si el estudiante tiene los constructos base necesarios para el aprendizaje del método de reducción. Las preguntas diseñadas para evaluar el método de reducción permitirían observar si los alumnos efectivamente desarrollan el método como se explica en la descomposición genética y si logran llegar a una conclusión acerca de la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Se recomienda que estos instrumentos se apliquen por separado pues, si el estudiante no tiene éxito al demostrar que posee los constructos previos, es altamente probable que tampoco tenga éxito en la aplicación del método, pues de acuerdo con la teoría APOE el estudiante no puede aprender sin una base de conocimientos previos sólidamente construidos.

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

Instrumento 1: Conocimientos previos

Como se mencionó, este instrumento busca evaluar los elementos de la descomposición genética que se consideran conocimientos previos, que el alumno debe haber construido antes de trabajar con sistemas de ecuaciones lineales y su solución. El instrumento consiste en seis preguntas que permitirán evaluar los seis constructos mentales mostrados en la figura 12.

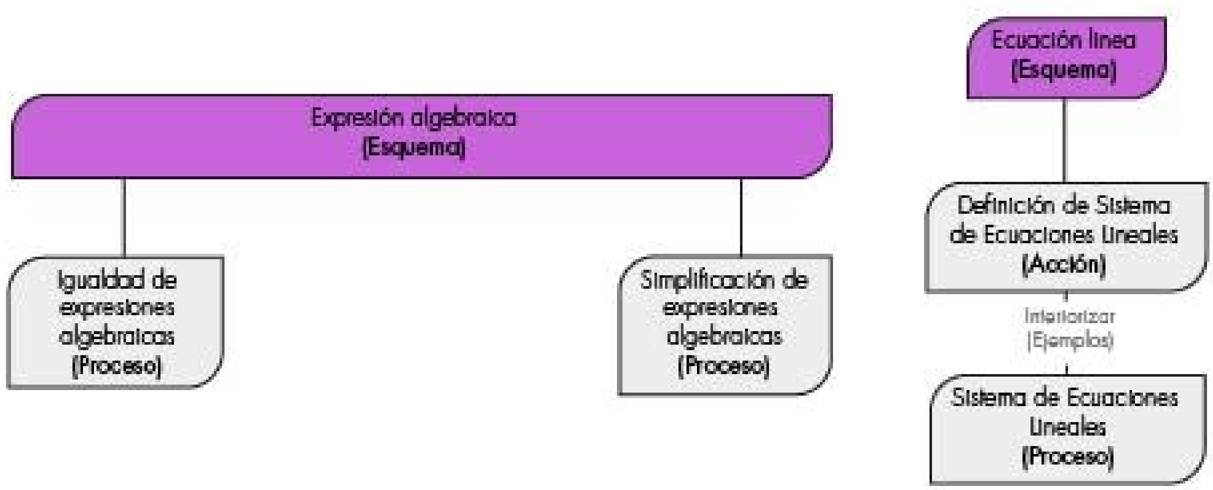


Figura 12.
Constructos evaluadas en el instrumento 1.

Instrumento 2: Método de reducción

Este instrumento está diseñado para evaluar la aplicación del método de reducción en la solución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados de dos y tres incógnitas. Es necesario que el instrumento incluya al menos un sistema con solución única, uno con solución vacía y uno con soluciones infinitas. Esto con la finalidad de observar todos los constructos incluidos en la descomposición genética, que son los mostrados en la figura 13.

Se recomienda que el sistema con solución única sea un sistema de 3x3, ya que, a diferencia de un sistema de 2x2 permitiría observar con mayor profundidad el manejo algebraico de los estudiantes.

Los sistemas sin solución y con soluciones infinitas pueden ser sistemas de 2x2, ya que en este caso la parte más importante a analizar es la coordinación entre los procesos de expresión aritmética o algebraica e igualdad de expresiones, mostrados en las figuras 9 y 10, dejando un poco de lado el manejo algebraico.

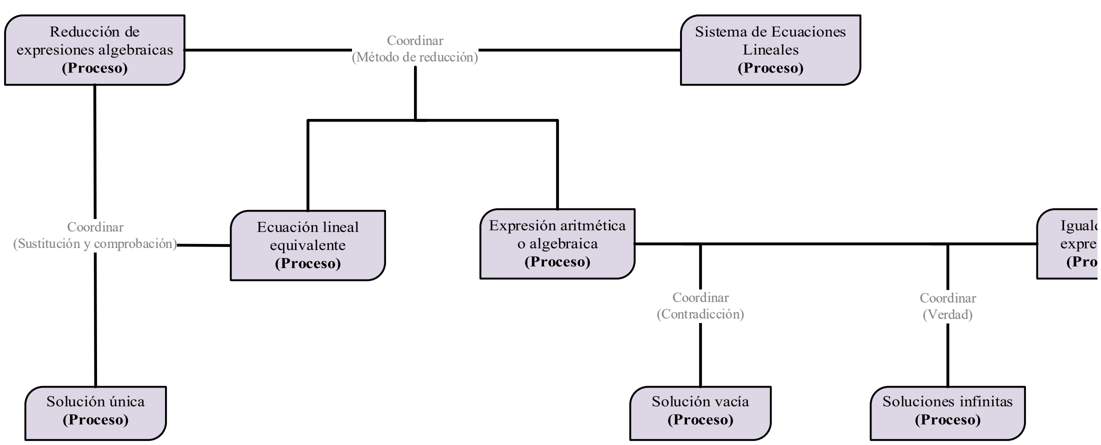


Figura 13.

Constructos evaluados por la figura 12.

Para el análisis de las respuestas del estudiante se recomienda elaborar rúbricas, en las cuales se describa lo que se espera que el estudiante demuestre en cada estado de construcción de un concepto. Con base en los resultados obtenidos al analizar las respuestas de los estudiantes, se podrá determinar si la descomposición genética se valida o se refina.

CONCLUSIONES

Es importante recordar que lo que se presenta en este trabajo es la primera versión de la descomposición genética. Antes de poder utilizarla como base para el diseño de secuencias de enseñanza o de instrumentos de evaluación, es necesario evaluar la descomposición por sí misma. El diseño de los instrumentos para la validación de las de composiciones genéticas queda a criterio del investigador, quien siempre debe tomar en cuenta que es indispensable evaluar todos los constructos de la descomposición. Al aplicar y analizar los instrumentos existen dos posibles resultados: por un lado, la descomposición genética puede ser validada tal y como fue planteada o, puede que necesite hacerse una refinación de la misma, ajustándose a los constructos que los estudiantes demuestren.

La elaboración de una descomposición genética requiere amplios conocimientos del concepto matemático a estudiar y siempre tener presente el contexto en el que será estudiado, las riquezas y limitaciones del mismo.

El diseño y validación de una descomposición genética es una herramienta poderosa, ya que nos permite visualizar cuáles de los constructos matemáticos que el investigador plantea realmente están en juego cuando el estudiante aprende, cuáles no logran desarrollarse a su potencial requerido y cuáles se desarrollan más allá de lo previsto. Es importante analizar cómo la información obtenida de una investigación de este tipo permitiría influir de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York, EEUU: Springer.

Baldillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación matemática., 8(3), 24 – 41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 1. Educations studies in mathematics, 58, 335 – 359.

Gutiérrez, L. y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto de derivada. Gestión y gerencia, 6(3), 104 – 122.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación matemática, 20(2), 65 – 89.

Piaget, J. y García, R. (2004). Psicogénesis e historia de la ciencia. D.F, México: Siglo XXI Editores.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(1), 89 – 112.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. D.F., México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.

Secretaría de Educación Pública (2017). Aprendizajes

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

esperados, Matemáticas Secundaria 2°. Obtenido de Aprendizajes Clave para la Educación Integral: http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html

Subsecretaría de Educación Pública. (2013). Materiales de apoyo para procesos de evaluación al SPD. Matemáticas. Obtenido de Subsecretaría de Educación Media Superior. Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico: http://cosdac.sems.gob.mx/maespd/index.php/ctr/matematicas

Subsecretaría de Educación Media Superior (2017). Programas de estudios: Matemáticas I. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de (2017): http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/primer-semestre/MATEMATICAS-I.pdf

RE
FE
REN
CIAS

PÄDI: Revista de Proyectos y Textos Academicos. Año 2. Núm. 003, abril de 2018, ISSN en trámite.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería