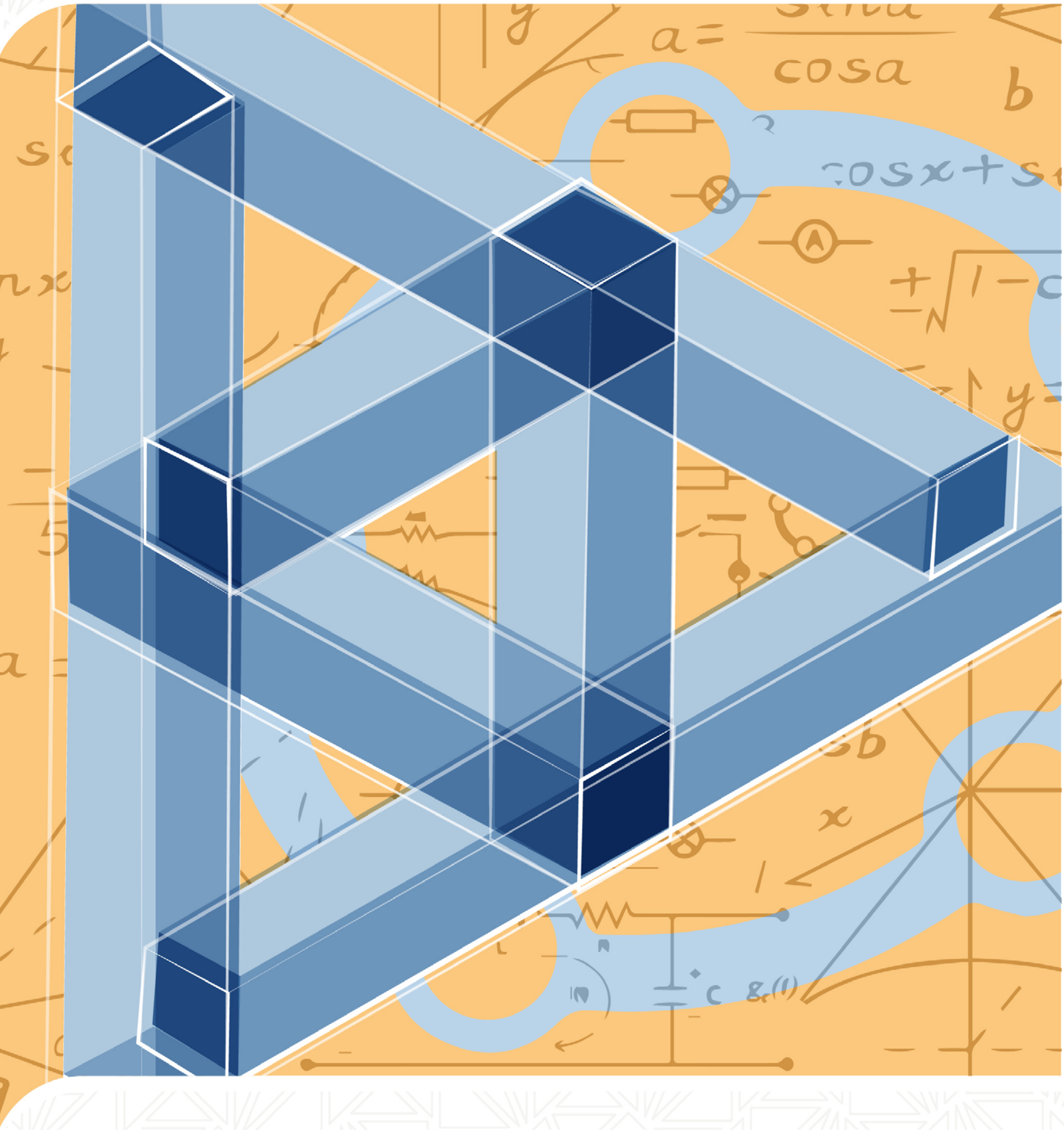
PädiUAQ

15

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

ISSN: 2954-4025



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ENERO-JUNIO 2025

VOLUMEN 8, **NÚMERO** 15

DIRECTORIO

PädiUAQ, Vol. 8, Núm. 15, enero-junio 2025, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., C.P. 76010. Tel. (442) 1921200 ext. 6023, http://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padi uaq@uaq.mx. Editor responsable: Víctor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-0404 13274400-102, ISSN: 2954-4025, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número: Víctor Larios Osorio, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, Qro. Fecha de última modificación: 31 de julio de 2025.

Esta revista está actualmente registrada en el Directorio de Latindex.

PädiUAQ
Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

EQUIPO EDITORIAL

CONTENIDO

EDITORIAL

¿Qué nos ofrecen la neurociencia y otras disciplinas para la enseñanza de las matemáticas?
Víctor Larios Osorio

ARTÍCULOS

1. Visualizando la función derivada en un ambiente de geometría dinámica
José David Zaldívar Rojas
Samantha Analuz Quiroz Rivera

2. Implementación de una propuesta didáctica de trigonometría diseñada en GeoGebra
Florencia Díaz Landaverde
Cecilia Hernández Garciadiego

3. Diseño de una interfaz de usuario para la modelización y análisis de circuitos eléctricos como un proceso de aprendizaje
Ignacio Mejía Ugalde
Jesús Eduardo Hinojos Ramos

ARTÍCULOS POR INVITACIÓN

4. Modelado matemático en la formación del docente de matemáticas
Jesús Antonio Larios Trejo

5. Subjetividad y experiencia. Formar(se) para enseñar matemáticas
Luis Manuel Aguayo Rendón
Ivette Anel Delgado Valdez

RINCÓN MATEMÁTICO

Funciones continuas y sus derivadas
Jesús Jerónimo Castro
Víctor Larios Osorio

EDITORIAL | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

¿Qué nos ofrecen la neurociencia y otras disciplinas para la enseñanza de las matemáticas?

What do neuroscience and other disciplines offer us for the teaching of mathematics?

Víctor Larios Osorio*

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*vil@uaq.mx

EDITORIAL

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Larios Osorio, V. (2025). ¿Qué nos ofrecen la neurociencia y otras disciplinas para la enseñanza de las matemáticas? *PädiUAQ, 8*(15), 1-6.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

EDITORIAL

Muchas de las especies de animales parecen tener curiosidad por el entorno que las rodea. En realidad, la mayoría de ellas interactúan con él y se adaptan al paso del tiempo de una u otra manera. Pero si atendemos el caso particular de los humanos, hemos trascendido esa interacción con el medio a un nivel diferente que el resto de los seres vivos del planeta. Los saberes y tecnologías que hemos desarrollado han sido compartidos y heredados a lo largo del tiempo entre individuos y comunidades.

También desde hace mucho tiempo, se ha tratado de explicar el origen de ese conocimiento: cómo lo generamos, cómo aprendemos y cómo nos diferenciamos en ese aspecto de los animales. En esos intentos se encuentran subyacentes las ideas relacionadas con lo que nos hace ser humanos y lo que nos diferencia de los demás seres vivos. Con esta intención, en el último par de cientos de años se han realizado experimentos con animales que nos resultan familiares, ya sea por la cercanía que tenemos (las especias domesticados) o por el parecido físico que compartimos (como los primates no humanos).

No vamos a ser exhaustivos al respecto en este espacio, pero en el caso en específico de los primates, Lev S. Vygotski (1979) hizo referencia a investigaciones psicológicas donde se compararon las conductas de niños en etapas prelingüísticas y personas privadas de lenguaje, y se observó que las actividades prácticas de los individuos involucrados eran similares a las de los monos (p. 45). Vygotski señalaba que, si bien su investigación acerca de los procesos psicológicos superiores estaba orientada a esclarecer problemas similares, sus premisas eran distintas, pues presuponían una relación entre los procesos del desarrollo lingüístico y del uso de las herramientas, que en estudios previos se consideraban independientes. Esta base le permitió entender y describir las formas de inteligencia práctica específicamente humanas:

> El momento más significativo en el curso del desarrollo intelectual, que da luz a las formas más puramente humanas de la inteligencia práctica y abstracta, es cuando el lenguaje y la actividad práctica, dos líneas de desarrollo antes completamente independientes, convergen. Aunque durante su período preverbal el uso que el pequeño hace de los instrumentos sea comparable con el de los monos, tan pronto como el lenguaje hace su aparición junto con la utilización de los signos y se incorpora a cada acción, esta se transforma y se organiza de acuerdo con directrices totalmente nuevas. El uso específicamente humano de las herramientas se realiza, pues, de este modo, avanzando más allá del uso limitado de instrumentos entre los animales superiores. (pp. 47-48)

De esta manera, planteó que los niños pueden dominar su conducta y su entorno con ayuda del lenguaje, desarrollan estrategias para resolver problemas o retos, planean acciones para el futuro y avanzan en su desarrollo intelectual a lo largo de su vida. Asimismo, desde un punto de vista antropológico, Caleb Everett (2019) propone una relación entre el lenguaje y la cooperación social, y parece poner en duda cuál de estos dos procesos es consecuencia del otro:

> Lo que nos hace criaturas lingüísticas no es tanto que estemos provistos de manera innata de un conjunto específico de habilidades lingüísticas, sino que seamos capaces de cooperar y colectivizar nuestras capacidades cognitivas, muchas de las cuales son evidentes en otros simios más desconectados. (p. 28)

No obstante, Everett enfatiza la importancia del lenguaje, puesto que "da forma a cómo pensamos, incluso facilitando ciertos tipos de pensamiento no lingüístico" (2019, p. 29). En este momento existe un aspecto destacable: los trabajos mencionados se basan en la observación de las conductas (individuales y grupales) y en descripciones expresadas de manera verbal, escrita o pictórica por los mismos individuos. Es innegable que existe una limitación al respecto, ya que no podemos hurgar en la mente de las demás personas (estudiantes incluidos) de manera directa, sino que debemos conformarnos con medios indirectos para obtener información. Esto ha sido tema de debate filosófico desde hace milenios, y fue uno de los motivos que llevó a plantear la dualidad cuerpo-mente e, incluso, resultó en experimentos en que literalmente se hurgó en el cerebro de algunas personas.

Ahora disponemos de herramientas tecnológicas no invasivas que nos permiten observar el funcionamiento de los órganos de nuestros cuerpos, como en lo referente a la tecnología para las IRMf (Imagen por Resonancia Magnética funcional, o fMRI en inglés). Dicha tecnología permite ver las regiones activas del cerebro

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

cuando se llevan a cabo tareas específicas (como oír, hablar, escribir, contar, etcétera), en función de las variaciones del flujo sanguíneo en tiempo real. Con ayuda de esta tecnología algunos neurocientíficos han recopilado una amplia gama de datos sobre el cerebro y su funcionamiento prescindiendo de las descripciones (o intentos) por parte de los individuos involucrados.

Stanislas Dehaene (2021), al implementar esta tecnología con niños pequeños, ha mostrado que, desde el nacimiento, el cerebro puede reconocer vocales y consonantes, y es capaz de categorizar los sonidos a fin de aprender un idioma. De tal forma, se evidencia que el cerebro puede plantear las bases para la comunicación oral; en otras palabras, tenemos una tendencia instintiva de hacerlo:

> Lo que es innato en nosotros es el instinto de aprender una lengua, sea cual sea; se trata de un instinto tan irreprimible que el lenguaje aparece de forma espontánea en el transcurso de algunas generaciones en los humanos que carecen de él. (p. 111)

Al parecer, las observaciones de Vygotski y otros investigadores de hace más de un siglo, que tienen el respaldo teórico de la psicología y la antropología, están siendo confirmadas ahora que podemos "ver" el funcionamiento del cerebro. Pero hay que decirlo, esto se refiere al lenguaje hablado, mas no al escrito.

En cuanto al tema de las matemáticas, el mismo Dehaene (2016, 2021) ha estudiado aspectos relacionados con el aprendizaje de la aritmética. Se sabe que algunos animales (no solo los primates) tienen una capacidad básica de conteo, e incluso se han detectado en monos y cuervos los llamados *circuitos cerebrales* para los números, pero también se ha notado que los recién nacidos humanos no parten de una situación de *tabula rasa*:

> Sus cerebros albergan "neuronas numéricas" que se comportan de manera similar [a las observadas en otros animales]: son sensibles a cantidades específicas de objetos [...] Los conceptos de objeto y de número son características fundamentales de nuestro pensamiento, forman parte del "núcleo de conocimientos" con que llegamos al mundo y que, por sus combinaciones, nos permite formular razonamientos más complejos. (p. 101-102)

Y en este punto cabe una aclaración similar al caso de la relación entre el lenguaje hablado y el escrito. Mientras que los humanos tenemos la noción intuitiva de cantidad (o de "número", como sostiene Dehaene) desde el nacimiento, el empleo de los numerales (los números expresados con símbolos) no es innato, sino que se desarrolla con el tiempo y está influenciado por el ambiente social. Como lo detallaría Everett (2019):

> A pesar de lo que una vez pensamos, los números no son conceptos que tenga la gente de manera natural y de nacimiento. Mientras que las cantidades y los conjuntos de elementos podrían existir independientemente, al margen de nuestra experiencia mental, los números son una creación de la mente humana, un invento cognitivo que ha alterado para siempre la forma como vemos y distinguimos las cantidades. (p. 18)

Tiene sentido pensar que, pese a la capacidad de desarrollar lenguajes e intuir la noción de cantidades desde los primeros días de vida, tenemos que aprender a leer y a escribir bajo una dirección (ya sea externa o interna) específica. Y de igual forma se requiere una dirección específica de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, que comienza con la aritmética, y sin la cual es imposible avanzar a niveles más abstractos.

Llegados aquí, la neurociencia nos proporciona algunas pistas al respecto, ya que al poder identificar cuándo y cuánto se activa el cerebro al aprender, se pueden establecer correlaciones entre esas activaciones y las actividades realizadas por el individuo. Dehaene (2021), con tal propósito, plantea que el aprendizaje descansa sobre cuatro pilares:

- La atención, comprendida en este caso como el “conjunto de mecanismos mediante los cuales el cerebro selecciona una información, la amplifica, la canaliza y la profundiza” (p. 203).
- El compromiso activo, es decir, el individuo debe tomarse con iniciativa y seriedad su aprendizaje, generando modelos mentales del mundo exterior y comparando sus predicciones contra los estímulos que percibe a través de sus sentidos.
- La retroalimentación ante el error. Se considera que fallar forma parte del proceso de aprendizaje, por lo tanto, la evaluación de los tropiezos y una retroalimentación apropiada le permiten al individuo tener información sobre cómo mejorar.
- La consolidación del conocimiento, lo cual permite liberar recursos de la corteza cerebral que se pueden utilizar para otros procesos cognitivos.

Es interesante señalar que estos puntos no solo no se contraponen a muchas de las posturas en la educación, sino que las apoyan con observaciones empíricas. Dicha evidencia, al igual que en el caso del desarrollo del lenguaje, trasciende la observación de la conducta externa del individuo, pues incluye el funcionamiento del sistema que controla el pensamiento y la conducta. Recordemos, además, que no todo lo que se piensa se actúa. Sin embargo, Dehaene no plantea que estos cuatro pilares funcionen de manera automática, en cambio deben orientarse y planificarse. Una atención mal orientada, la idea de que la curiosidad se activa con solo poner al individuo en una situación específica, una evaluación que no proporcione retroalimentación adecuadamente o repeticiones sin sentido son algunos de los casos en que el aprendizaje podría verse perjudicado. Por lo tanto, con estas consideraciones se puede observar que la planificación en la educación también se vuelve necesaria, pese a que eso requiere abandonar, aunque sea parcialmente, la intuición, lo cual presenta un reto en sí (Geary, 2013).

En conclusión, la neurociencia y otras disciplinas, como la psicología cognitiva y la antropología, nos proporcionan información sobre cómo funciona y se desarrolla el cerebro cuando se prepara para aprender y cuando aprende. Tal conocimiento nos da pistas de qué situaciones, estímulos o procesos se llevan a cabo a nivel biológico en el cerebro y cómo se relacionan con los entornos físico y social del individuo. Estas pistas pueden ser tomadas en cuenta por los profesores en el diseño de actividades escolares. Se trata de un proceso continuo que persigue la mejora del aprendizaje de los estudiantes en las escuelas, sin importar el nivel educativo ni el entorno social, económico o físico.

Referencias

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático*. Siglo Veintiuno Editores.

Dehaene, S. (2021). *¿Cómo aprendemos?* Siglo Veintiuno Editores.

Everett, C. (2019). *Los números nos hicieron como somos*. Editorial Crítica.

Geary, D. C. (2013). El cerebro primitivo en las aulas modernas. *Mente y Cerebro*, (60), 28-33.

Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Editorial Crítica.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Recibido el 1 de noviembre de 2023, aceptado el 2 de octubre de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Visualizando la función derivada en un ambiente de geometría dinámica

Visualizing the derivative function in a dynamic Geometry Environment

José David Zaldívar Rojas*
Samantha Analuz Quiroz Rivera

Universidad Autónoma de Coahuila,
Coahuila, México

*david.zaldivar@uadec.edu.mx

01

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Zaldívar Rojas, J. D. y Quiroz Rivera, S. A. (2025). Visualizando la función derivada en un ambiente de geometría dinámica. *PädiUAQ, 8*(15), 1-19.

Resumen

Se describe una propuesta para trabajar la función derivada, la cual en los cursos de Cálculo rara vez recibe una reflexión de suficiente profundidad. Esta escasa atención deriva principalmente de la preferencia que se brinda a las habilidades procedimentales sobre los significados conceptuales. La alternativa se plantea a través de una construcción dinámica en GeoGebra, en la cual se conjugan elementos de la visualización y el razonamiento covariacional como argumentos que justifican la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada). El significado que se rescata en la propuesta es que la derivada de una función sobre un punto puede comprenderse bien como la pendiente de la recta tangente en dicho valor. En ese sentido, construir una dupla punto-pendiente de la recta tangente como objeto multiplicativo posibilita la covariación entre dichas relaciones y la significación de la derivada como una función en sí misma. Esto podría comprobar visualmente ciertas relaciones, a saber, en las funciones polinomiales o en las trigonométricas. Se espera que la propuesta conforme una referencia de cómo la integración de tecnologías digitales en el aula puede profundizar los significados de la noción derivada y ser provechosa para la comunidad docente.

Palabras clave: cálculo, derivada, didáctica de las matemáticas, GeoGebra, razonamiento covariacional, visualización matemática.

Abstract

A proposal for the teaching of derivative functions, which in many Calculus courses does not receive a reflection of enough depth, is presented. This lack of attention is usually due to the primordial place that procedural skills occupy over conceptual meanings. An alternative is proposed by means of a GeoGebra dynamic construction, where the elements of visualization and covariational reasoning are combined as arguments that consolidate the relationship between the local (derivative at a point) and the global (derivative function). The essence of the proposal is that the derivative of a function at a given point can be seen as the slope of the tangent line at any given value. In that context, the construction of a duo point-slope of the tangent line as a multiplicative object enables the covariation among these relations and the conception of the derivative as a function in itself. This could visually prove certain relations, specifically in polynomial or trigonometric functions. The proposal is expected to become a point of reference of digital technology integration into the classroom to enhance the meanings of the notion of derivative, and a valuable tool for the teaching community to exploit.

Keywords: calculus, derivative, didactics of mathematics, GeoGebra, covariational reasoning, mathematical visualization.

Introducción

Los obstáculos e inconsistencias dentro del aprendizaje y la enseñanza escolar del cálculo son bien reconocidos por la investigación en educación matemática (Artigue, 1998), de forma específica, las dificultades cognitivas de los alumnos, la pesada carga conceptual de los contenidos, las estrategias pedagógicas limitadas, así como los escasos materiales disponibles. Algunas obras, por su parte, discuten los fundamentos sobre los cuales se debe basar un curso de cálculo (Rasmussen *et al.*, 2014; Tall, 1990; Sánchez Matamoros *et al.*, 2008; Thompson y Harel, 2021).

Las dificultades en el aprendizaje de los alumnos son notorias cuando se enfrentan al concepto de derivada de una función, debido a que la enseñanza de este contenido exige un enfoque que relacione los objetos matemáticos con situaciones dinámicas. Empero, se fomentan prácticas vinculadas al desarrollo procedimental y algorítmico, al seguimiento de reglas; ese acercamiento opaca la comprensión de dicho objeto al no establecer conexiones con otras instancias o disciplinas donde este adquiera significados (Vrancken y Engler, 2014; Berry y Nyman, 2003; Antonio *et al.*, 2019).

Como una forma de encarar la situación, se ha abogado por un enfoque del cálculo y la derivada a través de ejemplos concretos relacionados con contextos que posibiliten ver la aplicación de los conceptos y su interconexión. Es recomendable evitar el formalismo excesivo y dar espacio a la intuición de las ideas fundamentales, así como aplicar representaciones que resalten el lenguaje gráfico, integrar tecnología para visualizar los conceptos e incorporar formas innovadoras para evaluar (Thompson y Harel, 2021; Berry y Nyman, 2003; Larios *et al.*, 2021; Briceño *et al.*, 2018).

Los apartados subsecuentes abordan problemáticas correspondientes a la noción de función derivada. Posteriormente, se sintetizan trabajos que han explorado la necesidad de integrar la visualización y las tecnologías en el diseño de actividades en los cursos de cálculo.

Enseñanza y aprendizaje del cálculo: una breve revisión

El alumnado con frecuencia encuentra dificultades cuando ingresa a un curso de cálculo. Artigue (1998) las agrupa en tres categorías:

- **La complejidad de los objetos matemáticos.** Conceptualmente hablando, los números reales, las funciones y las sucesiones resultan complejas. Como ejemplo, la concepción de número real de los alumnos en ocasiones es inadecuada.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

- **La conceptualización del límite.** Esta noción central es dificultosa, tanto conceptual como operativamente.
- **La relevancia de movilizar el pensamiento algebraico y numérico.** Dado que los cursos se organizan alrededor de las ideas de función y procesos variacionales, se requiere promover un tipo de pensamiento funcional.

Por su parte, Thompson y Harel (2021) discuten las ideas esenciales del cálculo y su relación con las dificultades mencionadas. Argumentan que los profesores, al priorizar la algoritmia, las habilidades procedimentales y la memorización, omiten la comprensión en cuanto a los significados de los objetos con que trabajan y limitan las posibles formas de pensar para futuros aprendizajes. Los autores insisten en la importancia de trabajar con las nociones de variable, función, acumulación y razón de cambio. Afirman que la primera determina la comprensión de la variación; en cuanto a la segunda, la declaran un fundamento del cálculo y aseveran que se debe relacionar con la covariación, entendida como el cambio simultáneo de dos variables.

Al respecto, Carlson *et al.* (2002) sostienen que el razonar covariacionalmente las funciones prepara de manera adecuada a los alumnos para enfrentarse a conceptos más complejos. En ese contexto, Thompson y Harel (2021) realzan la razón de cambio (relacionada con el concepto de derivada) como significado que permite atender aplicaciones científicas (por ejemplo, la densidad como una razón de cambio de la masa con respecto al volumen). Aunque esta noción está vinculada al concepto de derivada, la mayoría de los estudiantes no comprende el significado cuantitativo de la misma en términos de razones de cambio promedio e instantánea. Esta dificultad suele originarse en la escasa comprensión del concepto de razón como relación multiplicativa, que debería haberse dominado en niveles previos.

Otros trabajos, como los de Rasmussen *et al.* (2014) y Tall (1990), notan anomalías en el aprendizaje del cálculo: desde las dificultades cognitivas de los alumnos, el rol de las representaciones y el lenguaje, y la relevancia del pensamiento covariacional, hasta la necesidad de estrategias de enseñanza innovadoras. Un aspecto en que la mayoría de los reportes concuerdan es la necesidad de incorporar las conexiones gráficas y diversas representaciones con el propósito de profundizar la comprensión de los conceptos vinculados.

En síntesis, la mayoría de los estudiantes puede lograr un dominio razonable de técnicas y desarrollos algebraicos dentro del cálculo (que ya podría considerarse suficiente debido al número de contenidos a desarrollar). No obstante, aún se enfrentan a obstáculos en cuanto a los significados relacionados con dicha asignatura, en particular con la noción de derivada (Sánchez Matamoros *et al.*, 2008; García y Dolores, 2016; Antonio *et al.*, 2019).

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión del concepto de derivada

La enseñanza de la derivada a menudo se centra en procesos formales de construcción y validación anclados en algoritmos. Como resultado, aunque los estudiantes pueden realizar operaciones ligadas con dicha noción, a menudo son incapaces de atribuirle un significado amplio. Pocas veces el contexto didáctico relacionado con la derivada se corresponde con los problemas que le dieron origen o con la formación de ideas variacionales y de cambio, las cuales tienen una naturaleza visual e intuitiva primordial (Vrancken y Engler, 2014; Cantoral *et al.*, 2018; Antonio *et al.*, 2019; Sánchez Matamoros *et al.*, 2008).

Por ejemplo, Sánchez Matamoros *et al.* (2008) afirman que, a pesar de la correcta aplicación de las reglas de derivación, no se profundiza el significado de la derivada ni como expresión analítica o límite del cociente incremental, ni como la pendiente de la recta tangente en un punto. Los matices de significados se aprecian en relación con las características de los problemas planteados, ya sea desde una perspectiva analítica y gráfica, una local y global, o una ligada con el empleo de derivadas sucesivas y la regla de la cadena. Los autores tipifican las dificultades en torno a la derivada en las siguientes:

- Aquellas que tratan con la razón de cambio y su vínculo con el cociente incremental.
- Los sistemas de representación utilizados.
- Lo local y lo global, es decir, la relación formada entre la derivada en un punto y la función derivada.
- El desarrollo del esquema y las aplicaciones de la derivada.

El presente trabajo se centra en el tercer aspecto: la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$. Esta determinación atiende a la necesidad de aportar a la comprensión de la noción, no solo desde un punto de vista algorítmico, sino uno conceptual. Ponderar dicho tópico permitiría a los estudiantes entender a la derivada en un contexto amplio e intuitivo. Esto podría ser útil en aplicaciones más avanzadas: las derivadas sucesivas o aproximaciones en series de potencias (como polinomios de Taylor). Además, comprender la derivada como función habilitaría a los estudiantes a entablar conexiones profundas entre conceptos para afrontar problemas más desafiantes en campos como la ingeniería y la física (Larios *et al.*, 2021; Berry y Nyman, 2003; Thompson y Harel, 2021).

Aunque se reconoce la importancia de la función derivada en diversas aplicaciones y contextos, así como para entender las relaciones covariacionales entre cantidades y en la acumulación, dicha noción no está exenta de problemáticas. La principal

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

abarca la naturaleza altamente simbólica de los cursos escolarizados, misma que provoca un alineamiento en lo procedimental, relegando el desarrollo de la intuición imprescindible para visualizar conexiones entre una función y su derivada (Thompson y Harel, 2021). Las tareas se limitan a calcular la derivada de una función como objetivo, sin apreciar que el resultado mismo es una función en sí: una que sintetiza la variación de la función original a lo largo de todo su recorrido. Comprender ese hecho permitiría caracterizar cómo los cambios en una función afectan a su derivada y viceversa. Este aspecto angular para el entendimiento de las representaciones gráficas desarrolla una idea holística del cálculo, contraria a la visión utilitaria y de simple memorización que en la actualidad predomina. Por otro lado, Sánchez Matamoros *et al.* (2008) indican que comprender la derivada en un punto no implica necesariamente asimilarla como una función. Como ejemplo, los alumnos tienden a equiparar la expresión simbólica y la gráfica de $f'(x)$ con la ecuación y la gráfica de la recta tangente, respectivamente.

El objetivo en la presente es favorecer la comprensión de la función derivada, a través de una postura basada en la visualización y la construcción de la gráfica de dicha función. El eje determinante es que la gráfica de una función derivada se construya desde la covariación entre la abscisa de un punto y el valor de la pendiente de la recta tangente. A tal fin, se esbozan los elementos a relacionar en un ambiente de geometría dinámica, poniendo énfasis en los elementos constitutivos de la construcción de la función derivada, aspectos en ocasiones relegados en la literatura, pero de relevancia para la comunidad docente que busca propuestas innovadoras para replicar en sus aulas. En las siguientes secciones se discuten los elementos teóricos que sustentan la propuesta y el protocolo de la construcción geométrica realizada en GeoGebra. La intención es que pueda ser utilizada por la comunidad docente cuya intención sea generar una explicación más significativa e intuitiva de la derivada e incluso justificar algunas relaciones y resignificar teoremas importantes.

Marco conceptual: visualización y covariación en la construcción de ideas relacionadas con la derivada

El pensamiento visual es decisivo para el aprendizaje del cálculo (Arcavi, 2003; Hitt, 2003; Zimmermann y Cunningham, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Vinner, 1989; Cantoral y Montiel, 2014). De hecho, es complicado concebir un curso exitoso de esta asignatura que no utilice la visualización de los conceptos que se trabajan, sobre todo si el objetivo es promover la comprensión del contenido.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Aunque un enfoque visual resulta importante didácticamente, se presentan dificultades para interpretar, convertir y comprender las representaciones gráficas de la derivada (Briceño *et al.*, 2018; Vrancken y Engler, 2014; Berry y Nyman, 2003). Estas problemáticas se deben a que la visualización relacional en matemáticas le exige más a la cognición que lo procedimental y algorítmico (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Además, en ocasiones se consideran las representaciones visuales como "menos legítimas" dentro de la práctica matemática (Arcavi, 2003).

La importancia de la visualización obedece a que es un proceso del pensamiento matemático (Cantoral y Montiel, 2014) que motiva el descubrimiento y la creatividad. Más que solo apreciar imágenes, se trata de profundizar en los significados, ya que sirve como una guía en la resolución de problemas. Posibilita comprender cómo las ideas pueden representarse simbólica, numérica y gráficamente, y relacionar estas representaciones. Asimismo, ayuda a elegir un enfoque adaptable a ciertos problemas, ilustrar resultados abstractos y recuperar los fundamentos que se omiten en procedimientos que recaen en lo formal (Arcavi, 2003; Zimmermann y Cunningham, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Acuña, 2012).

La visualización matemática se caracteriza como un campo multifacético que promueve la representación gráfica de las ideas matemáticas: desde dibujar simples figuras asociadas a la resolución de problemas, hasta interpretarlas y usarlas con la intención de comprender (Zimmermann y Cunningham, 1991). Desde su perspectiva, Cantoral y Montiel (2014, p. 14) describen la visualización como una habilidad para representar, transformar y reflejar información visual. En el presente manuscrito se considera la definición de Arcavi (2003):

> La visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, figuras y diagramas en nuestra mente, sobre el papel o a través de recursos tecnológicos, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionando y desarrollando ideas previamente desconocidas avanzando en la comprensión. (p. 217)

La visualización matemática se considera una habilidad, un producto y un proceso (Acuña, 2012) que debe fomentarse en los estudiantes, ya que promueve la comprensión profunda de ideas matemáticas y permite el uso de las gráficas para argumentar. Por otra parte, el razonamiento covariacional es esencial en la comprensión de ideas del cálculo (Martínez Miraval y García Rodríguez, 2022). Carlson *et al.* (2002) lo definen como "las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 354). Así, se refiere a la coordinación

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

conceptual del cambio en una de las variables con los cambios en otra, clave para analizar situaciones dinámicas e interpretar y representar información a través de gráficas de funciones.

De manera general, interpretar la covariación requiere imaginar dos cantidades que varían en simultaneidad: visualizar una imagen sostenida de los valores de las dos cantidades cambiando conjuntamente. Esto implica agruparlas para conformar un objeto multiplicativo que incorpore los atributos de ambas variables. A pesar de su importancia, el razonamiento covariacional enfrenta obstáculos en su desarrollo, enseñanza y aplicación por parte de los estudiantes. Por ejemplo, abundan las dificultades en la formación de imágenes de razones de cambio que varían, así como al representar puntos de inflexión o variaciones incrementales o decrecientes de situaciones dinámicas funcionales (Carlson *et al.*, 2002). La instrucción en estos casos tiene que colocar a los alumnos en situaciones donde sea necesario este razonamiento, por ejemplo, aquellas que involucren la interpretación y la construcción de gráficas de funciones.

La finalidad de incorporar la visualización matemática y la covariación obedece a que ambos elementos permiten la construcción de un esquema de la derivada que ilustre la relación entre lo local (derivada en un punto: $f'(a)$) y lo global (función derivada: $f'(x)$) (Sánchez Matamoros, 2008), en tanto un objeto multiplicativo (Carlson *et al.*, 2002). En suma, la finalidad es visualizar la coordinación entre dos variables: la abscisa de un punto sobre la gráfica de una función y la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto. Comprender cómo estas dos cantidades covarían permite identificar un patrón gráfico de la función derivada.

Para tal efecto, la propuesta planteada en estas líneas toma en consideración la integración de la geometría dinámica a través de GeoGebra. La intención es apoyar a los estudiantes a visualizar y manipular la derivada de una manera concreta y comprensible. El objetivo de incorporar este componente tecnológico es prevenir que se empleen estas herramientas digitales de manera pasiva; por el contrario, se busca que su implementación activa estimule el desarrollo de habilidades de razonamiento (Martínez Miraval *et al.*, 2023).

Aspectos metodológicos: diseño de la propuesta didáctica

En las últimas décadas, con los avances tecnológicos, se ha popularizado entre las propuestas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el aprovechamiento de los recursos digitales. Esta practica permite tratar conceptos abstractos desde

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

un punto de vista intuitivo que promueve la comprensión de las nociones. En este sentido, el desarrollo de las tecnologías digitales y su implementación en el aula han impactado benéficamente en la enseñanza, estableciendo nuevas formas de trabajo y trayectorias de aprendizaje.

Es evidente que la tecnología y su inclusión en la educación matemática moldean el diseño de ambientes didácticos, el trabajo matemático desempeñado por los estudiantes y las prácticas de enseñanza (Hoyles y Lagrange, 2010). A pesar de ello, la integración de las tecnologías en el aula de matemáticas aún presenta ciertos obstáculos; ahí yace la importancia de hacer un uso reflexivo de la misma, ya que su empleo por sí solo no resolverá los problemas en el aprendizaje (Sutherland y Rojano, 2014). Diversos autores mencionan que las dificultades para introducir tecnología en el salón de clases son los prejuicios del profesorado, la ausencia de apoyo, las restricciones curriculares, las limitaciones de infraestructura y acceso a recursos, la renuencia de los estudiantes y la infinidad de opciones disponibles hoy en día (Hoyles y Lagrange, 2010; Sutherland y Rojano, 2014; Thurm y Barzel, 2022; Drijvers, 2015; Hitt, 2003; Dussel y Trujillo, 2018).

Como se aprecia, la integración de la tecnología está matizada entre sus posibilidades y dificultades. En síntesis, la literatura reconoce tanto el potencial benéfico, como los desafíos de dicha combinación. La revisión deja ver que, mientras estos recursos pueden proveer nuevas formas de enseñar y aprender, también plantean obstáculos en términos de promover un pensamiento crítico, garantizar que los alumnos no se limiten a copiar y pegar información de Internet, y prevenir que se encuentren ante “cajas negras”. El rol docente es determinante, ya que debe adaptar, crear, significar y evaluar alternativas de enseñanza organizadas alrededor de las nuevas herramientas y formas de construcción.

Resulta imprescindible plantear opciones concretas de recursos didácticos para apoyar la práctica del profesorado. Es por ello que la construcción que se propone en adelante considera la inclusión de GeoGebra, un instrumento didáctico que se espera usar como herramienta de mediación semiótica (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008). Este posicionamiento bajo una perspectiva semiótica exige atención en la producción y transformación de signos durante el trabajo del alumnado con el artefacto. Cabe mencionar que en el presente manuscrito se proponen solamente los fundamentos de una construcción dinámica, y se considera que la propuesta podría implementarse sobre la estructura de una secuencia de enseñanza como una iteración de un ciclo didáctico en el sentido que le dan Mariotti y Maffia (2018).

La investigación se inscribe en un paradigma interpretativo y un enfoque cualitativo. Se empleó una técnica de análisis documental que permitió delimitar la problemática y proponer las categorías teóricas que se utilizaron en el diseño.

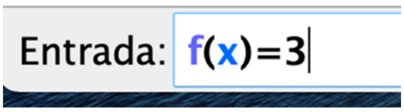
PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Protocolo de construcción de la función derivada en el software GeoGebra

Diversas investigaciones han demostrado el efecto positivo de la incorporación de ambientes de geometría dinámica y de cálculo algebraico en la enseñanza matemática. Un caso concreto de este tipo de recursos es GeoGebra, el cual goza de popularidad como una herramienta de autor para la creación y diseño de recursos educativos digitales e interactivos para el aprendizaje. Entre sus ventajas, promueve la visualización, la articulación dinámica dentro de diversos registros de representación y modelación y, a su vez, brinda experiencias de aprendizaje interactivas y atractivas, además de tener un impacto positivo en la comprensión conceptual de los estudiantes (Del Río, 2020; Fatih, 2017).

La razón de la elección de GeoGebra atiende a que permite visualizar la coordinación de cambios simultáneos entre dos variables, lo cual a su vez genera que la derivada se comprenda dentro de un proceso dinámico (Martínez Miraval *et al.*, 2023). El software también asegura que se integren al menos dos registros de representación y pone énfasis en las variables empleadas, su covariación y el establecimiento de un objeto multiplicativo para construir la gráfica de una función derivada a partir de cualquier otra. En las Tablas 1 y 2 se detalla el protocolo de construcción que se propone incluir en una hoja de trabajo para el alumno:

Tabla 1.
Protocolo de construcción en GeoGebra. Fase 1: creación de la casilla de entrada para la función. Fuente: elaboración propia.

Instrucción	Imagen de referencia
Usar la barra de entrada de GeoGebra y proponer una función cualquiera.	
Del menú, elegir la herramienta de “Casilla de entrada” y dar clic sobre cualquier parte del ambiente gráfico desplegado en pantalla.	

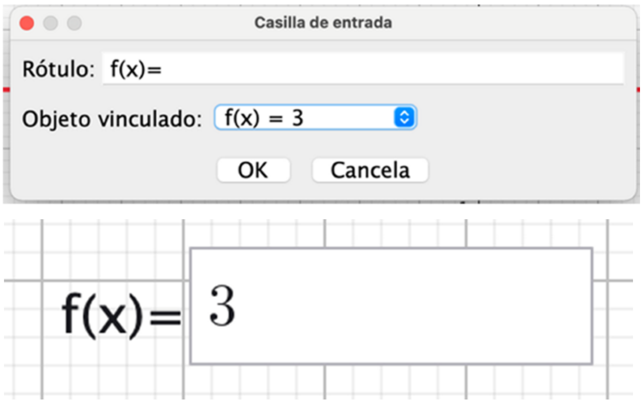
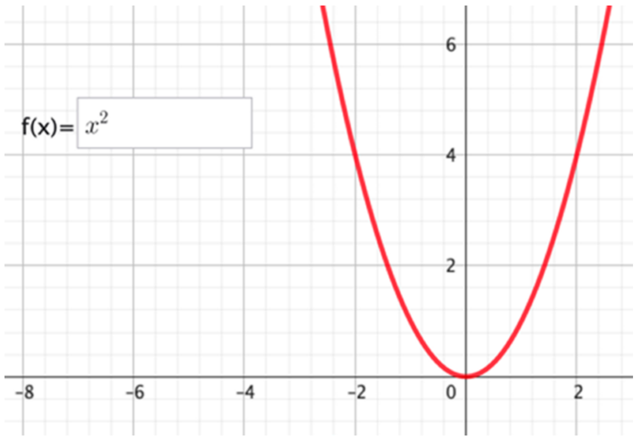
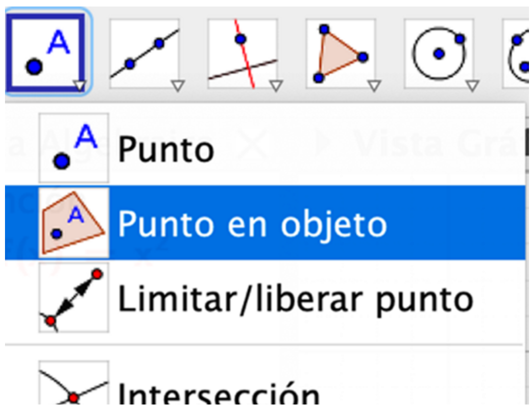
Instrucción	Imagen de referencia
Completar de la siguiente forma: Rótulo: en este espacio es posible cambiar la regla de correspondencia de la función. Dadas las particularidades de GeoGebra, la construcción mantendrá sus características adecuándose a la nueva regla. Objeto vinculado: seleccionar la función *f(x)* que se escribió al inicio. GeoGebra solo despliega los objetos válidos, así que no hay confusión en esos términos. Luego de poner la información, dar clic en el botón “OK”. Se despliega la siguiente información en la pantalla gráfica.	
Se puede modificar a conveniencia la entrada de la regla de correspondencia algebraica sin necesidad de escribir en la barra de entrada.	

Tabla 2.

Protocolo de construcción en GeoGebra. Fase 2: construcción del objeto multiplicativo. Se explican los pasos para construir el punto que permitirá visualizar la covariación entre la derivada en un punto y la función derivada. Fuente: elaboración propia.

Instrucción	Imagen de referencia
Con la herramienta de “Punto”, seleccionar la opción de “Punto en objeto”. Dar clic sobre el eje *X* en el ambiente gráfico desplegado en pantalla. Se verá un punto *A* sobre el eje horizontal del plano cartesiano y no se podrá “sacar”.	

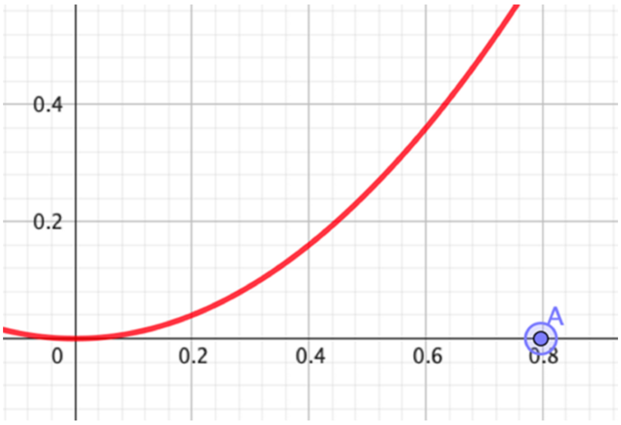
PädiUAQ \| Vol. 8 Núm. 15 \| enero-junio \| Facultad de Ingeniería \| Universidad Autónoma de Querétaro \| ISSN: 2954-4025

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Instrucción	Imagen de referencia

El punto se puede visualizar, y moverse libremente, sobre el eje *X*, es decir, es un objeto independiente.

A partir del punto, se generan otros objetos dependientes.

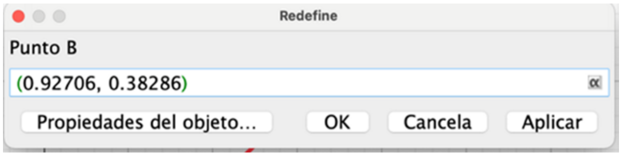


Ahora se dan los pasos para elaborar la imagen de la abscisa del punto *A* con respecto a la función *f* dada en un principio.

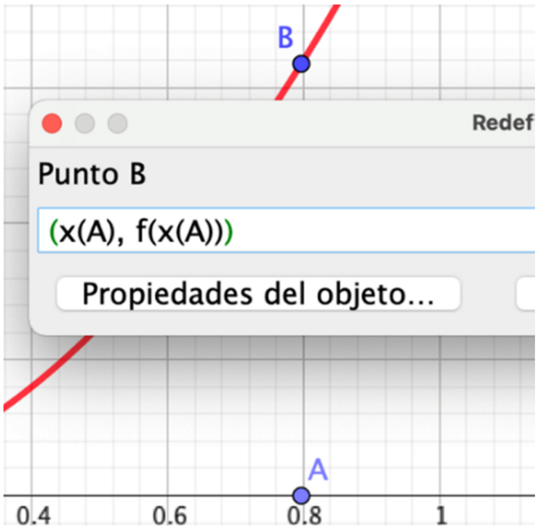
Para ello, se propone un punto *B* que tenga las siguientes características: la abscisa de *B* será igual a la abscisa de *A*, mientras que la ordenada de *B* será la imagen bajo *f* de la abscisa de *A*. Para tal fin, es necesario dar un punto sobre el plano y redefinirlo. Las instrucciones para la redefinición se muestran en la imagen.

Al momento de dar clic a “Aplicar” en dicho recuadro de redefinición de *B*, este se colocará sobre la gráfica de *f*. Además, *B* será dependiente de *A*. Este último se puede mover para visualizar cómo *B* recorre la misma abscisa que *A*, pero sobre la curva *f*.

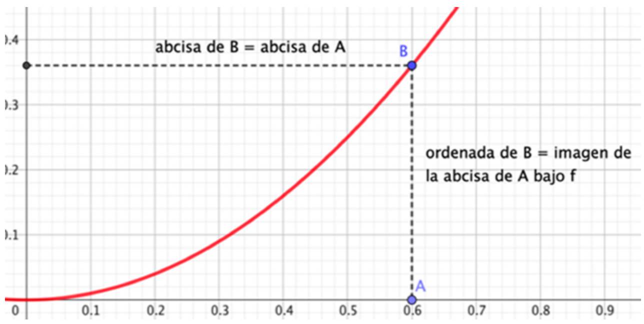
Con la intención de visualizar las componentes verticales y horizontales de esta imagen, se recomienda trazar marcas que permitan determinar la abscisa y la ordenada del punto *B*.



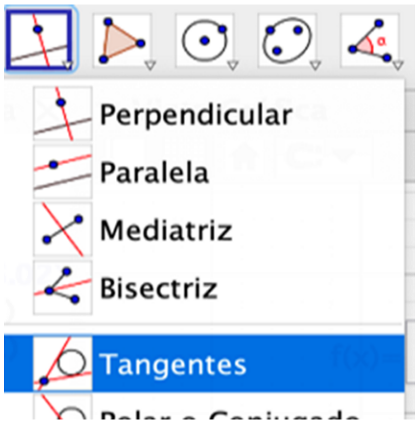
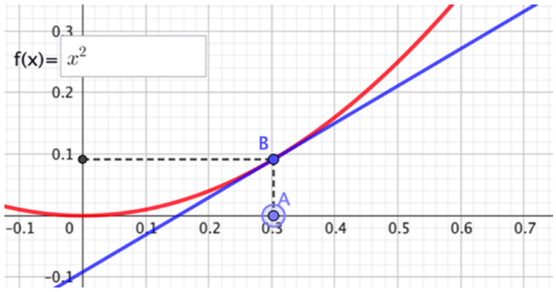
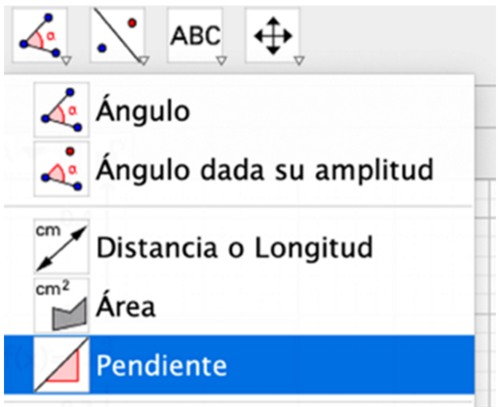
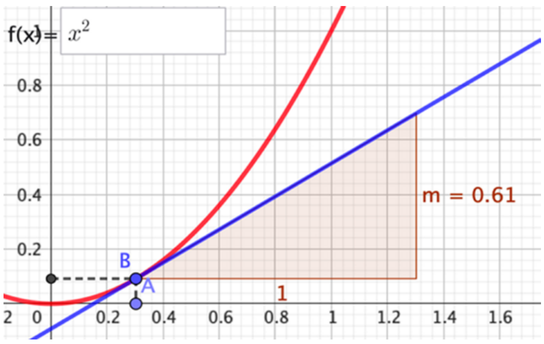
Y se redefine como:



(A) significa “abscisa del punto *A*”.

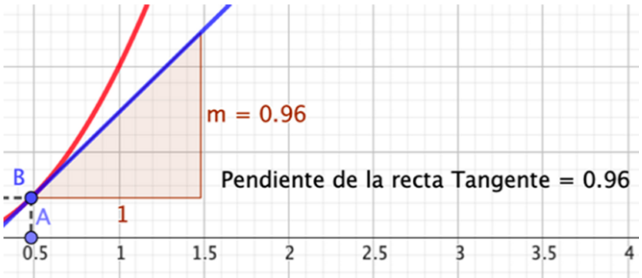


PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Instrucción	Imagen de referencia
Con la herramienta “Tangentes”, se construye la recta tangente a la curva que pasa por el punto *B*.	
La construcción se muestra en la imagen de referencia de este apartado. En este paso, se espera que el estudiante sea capaz de visualizar la dependencia de toda la construcción respecto a la ubicación del punto *A*. Dicho punto se puede mover sobre el eje *X*, con lo cual la recta tangente se adecua a la gráfica de la función dada y al valor de la abscisa de *A*, siempre y cuando se cumplan las condiciones de derivabilidad.	
Una vez construida la recta tangente, se recurre un significado esencial: la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Para establecer dicha relación se usa el comando de “Pendiente” y se solicita el valor correspondiente de la recta tangente en el punto *B*. Tal como se aprecia en la imagen de referencia, el comando anterior dibuja un triángulo rectángulo, en el cual uno de los catetos vale *1* y el otro *m*, es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto *B*. Es posible explorar las posibilidades del punto *A* para obtener diferentes valores de *m* y establecer conjeturas de en qué condiciones es positiva, negativa o cero, siempre aludiendo al comportamiento de la gráfica de la función dada al inicio.	 

Instrucción	**Imagen de referencia**

Para apoyar la visualización de la pendiente de la recta tangente, se sugiere activar una línea de texto para indicar el valor de *m* (ver imagen de referencia). De igual manera, es recomendable utilizar la herramienta "Ocultar" para realizar lo correspondiente con el triángulo donde aparece *m*, sin perder de vista este valor.



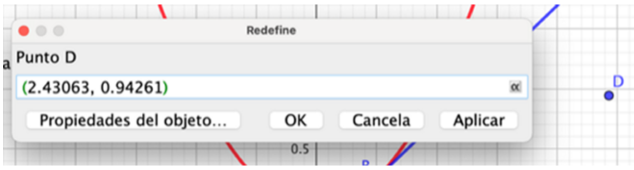
En este paso se define el objeto multiplicativo que evidencia la covariación entre la abscisa de *A* y el valor de la pendiente de la recta tangente (*m*). Es necesario definir el par ordenado *(abscisa de A, f′(abscisa de A))*.

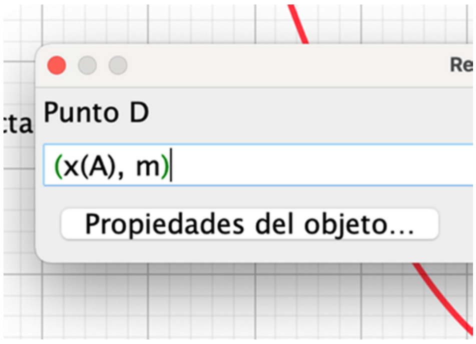
Lo anterior representa, en términos de la revisión de literatura, una relación entre la derivada de un punto y la función derivada.

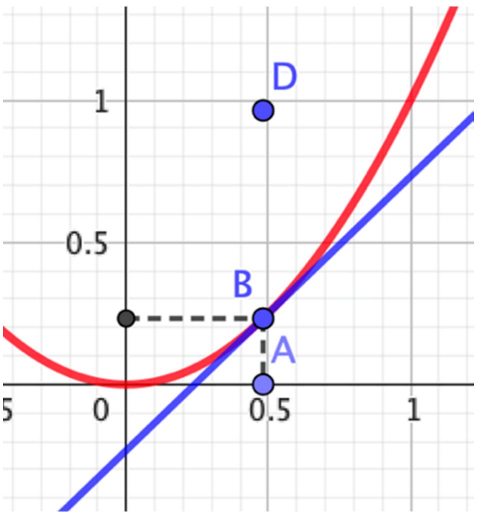
El par ordenado que se construye permite generar una nueva gráfica de la función de las pendientes de las rectas tangentes asociadas a la gráfica de la función de inicio y que depende del valor de la abscisa de *A*.

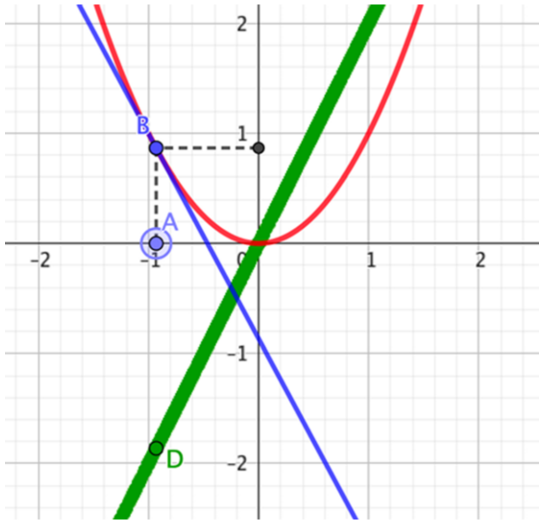
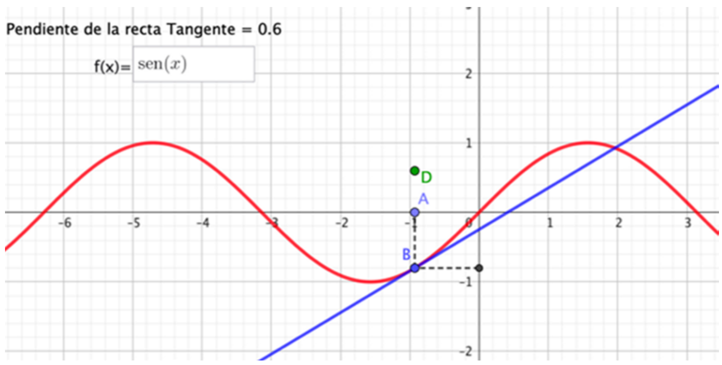
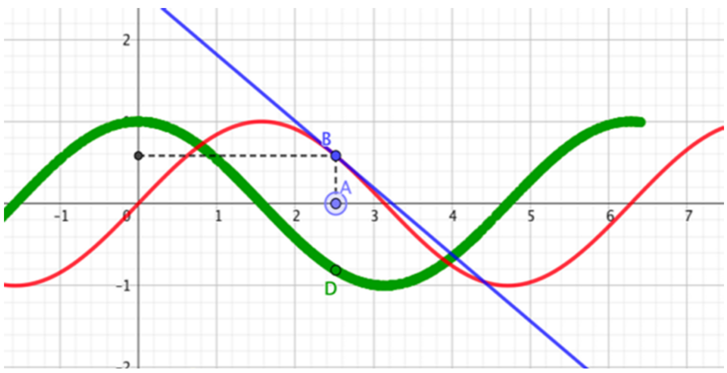
Para dicho punto, se usa una vez más la redefinición de cualquier punto que se ubique en el plano con la instrucción *(x(A, m))*.

El valor de *m* es la pendiente que se guarda en el protocolo de construcción de GeoGebra, es decir, *m = f′(x(A))*.







Instrucción	Imagen de referencia
Con la intención de visualizar la covariación entre la abscisa de *A* y el valor de la pendiente, se puede mover el punto *A* y observar el comportamiento de *D*. Con la intención de apreciar patrones, se sugiere solicitar el "rastro" de *D* y observar el comportamiento de este cuando se hace variar *A*. La gráfica de la imagen de referencia corresponde a la función derivada de *f*.	
Dentro de la exploración, se puede modificar la función en la casilla de entrada y observar que la construcción se mantiene y que el punto *D* ahora tendrá otro comportamiento. Es posible explorar diferentes polinomios, e incluso justificar por qué la derivada de una función constante es igual a cero o que una regla de correspondencia de la forma *f(x)* + *c*, con *c* constante, tiene una gráfica derivada igual a la de *f(x)*. La construcción permite justificar las reglas de derivación de funciones trascendentes (ver imagen de referencia).	 El coseno como la derivada de la función seno. 

Reflexiones finales

A la luz del análisis llevado a cabo, la enseñanza del cálculo a menudo privilegia aspectos lógicos formales y dedica demasiado tiempo al desarrollo de habilidades algorítmicas y algebraicas, dejando de lado la formación de ideas variacionales. De igual forma, se observó que la integración de tecnología, como un software de geometría dinámica, resulta beneficiosa para el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, su uso indiscriminado tiene efectos negativos en las concepciones desarrolladas por los estudiantes. Por tanto, es apremiante que los profesores tengan un conocimiento preciso sobre cómo emplear estas herramientas de forma efectiva.

La alternativa desarrollada en este manuscrito busca contribuir a la discusión de un significado importante: el relacionado con la noción de función derivada. Por esa razón, se propone integrar la visualización y la covariación como fundamentos de la construcción en GeoGebra. El aspecto central de la construcción en dicho software es definir el objeto multiplicativo que emerge de la covariación y visualización del par ordenado *(abscisa de A, f' (abscisa de A))* y significarlo como una nueva función. Saldanha y Thompson (1998), como se citó en Thompson y Carlson (2017), dejan claro este aspecto cuando mencionan:

> Pensar en la covariación como la coordinación de sucesiones encaja bien con el empleo de tablas para presentar estados sucesivos de una variación. Encontramos que es útil extender esta idea y considerar posibles fundamentos para la habilidad de una persona para apreciar la covariación. Con ello, nuestra noción de covariación es la de una persona teniendo en mente una imagen sostenida de los valores (magnitudes) de dos cantidades simultáneamente. Eso implica conjuntar las dos cantidades, de manera que, bajo la comprensión de una persona, un objeto multiplicativo se forma por los dos anteriores. Como objeto multiplicativo, una persona puede rastrear cualquier valor de la cantidad con la consciencia inmediata, explícita y persistente de que, en cualquier instante, la otra cantidad también tiene un valor. (p. 426)

La visualización actúa cuando el alumno es capaz de reconocer que la construcción representa un patrón de ajuste que mantiene relaciones y da soporte a la argumentación respecto a las reglas de derivación, por ejemplo, de las funciones trascendentes. Incluso, con la construcción se puede analizar la noción de que, cuando se trabaja con polinomios, el grado de la función derivada se reduce, es decir, si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{(n-1)}$. De igual modo, es posible reflexionar acerca

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

de por qué la derivada de $f(x) = e^x$ coincide con la misma función, trazando en GeoGebra las imágenes de la abscisa del punto A sobre el eje X y comparando con el valor de la pendiente de la recta tangente (Figura 1).

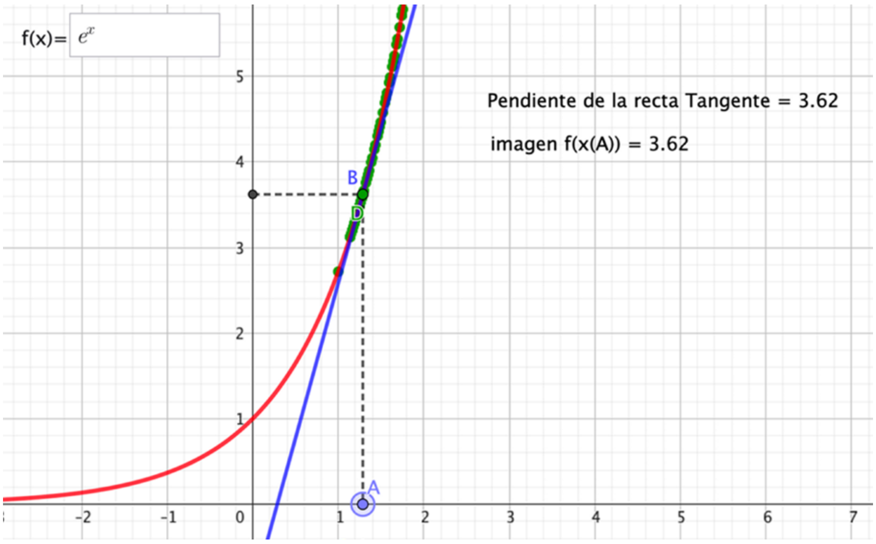


FIGURA 1.
La función exponencial y su función derivada coinciden.

Cabe mencionar que la propuesta se ha trabajado de manera interna con grupos de estudiantes de nivel superior, resaltando como una herramienta que permite la discusión de ejemplos diversos a través de lo visual. No obstante, se plantea la necesidad de llevar a cabo implementaciones sistemáticas con la intención de recabar evidencia empírica al respecto de las técnicas instrumentadas y/o los procesos de mediación semiótica que emplean los alumnos al momento de trabajar con la construcción. Están por definirse también las posibilidades y los alcances en lo que respecta a funciones derivables o no derivables en un punto (Figura 2). Dicha prospectiva da paso a validar la construcción a través de la evolución de los significados personales emergentes relacionados con la compleción de una tarea a la construcción o el desarrollo de signos compartidos asociados tanto al uso del artefacto como al concepto matemático a aprender (Mariotti y Maffia, 2018).

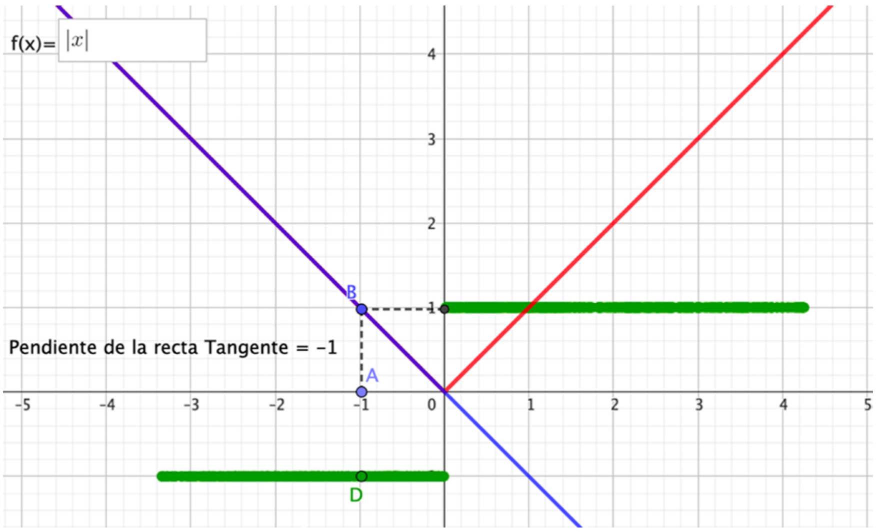


FIGURA 2.
Función derivada de la función valor absoluto.

Por último, la construcción dinámica pretende subsanar ciertas dificultades del aprendizaje y la enseñanza de la noción de derivada debidas a su pesada carga algorítmica y enfoque centrado en la formalidad del límite. La innovación didáctica que se presenta integra dos elementos esenciales del pensamiento matemático: la visualización y el razonamiento covariacional, y representa un aporte a investigaciones que promueven la comprensión de las nociones del cálculo y la variación como fundamento de la derivada (Antonio *et al.*, 2019). De igual forma, apunta a resarcir inconsistencias marcadas por Sánchez Matamoros *et al.* (2008) en cuanto a que se reduce la gráfica de *f'(x)* a la de la recta tangente. Se resalta cuán necesario es entablar un diálogo entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada) para dilucidar el esquema de la derivada a través de una construcción de geométrica dinámica. La evidencia empírica generada con estudiantes de nivel medio superior o superior representa un momento necesario de la propuesta con la intención de verificar las hipótesis realizadas.

Referencias

Acuña, C. M. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. Gedisa.

Antonio, R., Escudero, D. I. y Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258-280. https://doi.org/10.24844/EM3101.10

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. D. English, M. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 746-783. Routledge.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior,* 22(4), 479-495. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Briceño, E. C., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y su Enseñanza. 10*(1), 31-48.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual.* Pearson.

Cantoral, R., Moreno Durazo, A. y Caballero Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 77-89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Del Río, L. S. (2020). Recursos para la enseñanza del Cálculo basados en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1), 120-131. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p120-131

Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). En S.J. Cho (Ed.) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Dussel, I. y Trujillo, B. F. (2018). ¿Nuevas formas de enseñar y aprender? Las posibilidades en conflicto de las tecnologías digitales en la escuela. *Perfiles Educativos*, *40*(Especial), 142-178. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2018.Especial.59182

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America.

Fatih, M. (2017). The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78. https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67

García, M. A. y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12*(46), 49-70.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 213-223.

Hoyles, C. y Lagrange J.B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Larios, V., Páez, R. E. y Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática,* (20), 105-124.

Mariotti, M. y Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (4), 50-64. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1

Martínez Miraval, M. A. y García Rodríguez, M. L. (2022). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria*, *15*(4), 105-118. https://doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Martínez Miraval, M. A., García Cuéllar, D. J. y García Rodríguez, M. L. (2023). Covariational Reasoning and Instrumented Techniques in the Resolution of an Optimization Problem Mediated by GeoGebra. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 12*(1), 56-81. https://doi.org/10.17583/redimat.11419

Rasmussen, C., Marrongelle, K. y Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507-515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Sánchez Matamoros, G., García Blanco, M. M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. RELIME-*Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sutherland, R. y Rojano, T. (2014). Technology and Curricula in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 602-604). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_154

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus, 12*(3 y 4), 49-63.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. y Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 507-519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Thurm, D. y Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 41-63. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 149-156.

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 449-468. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization? En. W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). Mathematical Association of America.

Recibido el 12 de enero de 2024, aceptado el 24 de agosto de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Implementación de una propuesta didáctica de trigonometría diseñada en GeoGebra

Implementation of a trigonometry didactic proposal designed in GeoGebra

Florencia Díaz Landaverde*
Cecilia Hernández Garciadiego

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*florencia.diaz@uaq.mx

02

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Díaz Landaverde, F. y Hernández Garciadiego, C. (2025). Implementación de una propuesta didáctica de trigonometría diseñada en GeoGebra. *PädiUAQ*, *8*(15), 1-14.

Resumen

Se presentan los resultados de la implementación de una propuesta didáctica en el campo de trigonometría diseñada en el software GeoGebra. Se implementó con estudiantes del bachillerato Plantel Concá de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), así como alumnos de primer semestre de la Licenciatura en Animación Digital (LAD) perteneciente a la Facultad de Ingeniería. En ambos niveles se integró el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) a la enseñanza de la trigonometría. La propuesta constó de dos situaciones, en que se planearon actividades sustentadas en la teoría de situaciones didácticas. El estudio se propone demostrar cómo a partir de la intervención didáctica apoyada en GeoGebra, y de las situaciones planteadas, es posible originar un ambiente de aprendizaje para la construcción y el análisis de las funciones trigonométricas. Según los datos obtenidos, los estudiantes de bachillerato relacionaron con precisión los conceptos de la trigonometría; asimismo, entendieron el proceso de construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas gracias al software GeoGebra; por otra parte, los alumnos de licenciatura reafirmaron sus conocimientos respecto a esta área.

Palabras clave: funciones trigonométricas, GeoGebra, intervención didáctica, teoría de situaciones didácticas, TIC, trigonometría.

Abstract

The results of the implementation of a didactic proposal in the field of trigonometry, designed using GeoGebra software, are presented. It was carried out with high school students from the Conca campus of the Autonomous University of Queretaro (AUQ), and a group of first-semester students of the Degree in Digital Animation (DDA) belonging to the Faculty of Engineering of AUQ. At both levels, information and communication technologies (ICT) were incorporated into the teaching of trigonometry. The proposal consisted of two scenarios with activities based on the Theory of Didactical Situations (TDS). This study aims to demonstrate how, through the didactic intervention supported by GeoGebra and the proposed scenarios, it is possible to establish a learning environment for the construction and analysis of trigonometric functions. According to the data gathered, the high school students accurately related the concepts of trigonometry; similarly, they understood the process of constructing trigonometric function graphs thanks to the GeoGebra software. On the other hand, the undergraduate students reinforced their knowledge in this area.

Keywords: trigonometric functions, GeoGebra, didactic intervention, theory of didactic situations, ICT, trigonometry.

Introducción

La trigonometría es una rama de las matemáticas que a los estudiantes les resulta ardua (De Kee *et al.*, 1996; Maldonado, 2005), quizás debido a su complejidad, su vínculo con numerosos tipos de fenómenos y sus interconexiones con otras disciplinas (Brown, 2005). Dicha dificultad podría perjudicar las diferentes vías del entendimiento y la representación de sus fundamentos (Martín, 2013), tales como los modos de acercamiento y las nociones correspondientes a circunferencia goniométrica (o unitaria), triángulos rectángulos y funciones trigonométricas. Con base en ese impedimento, se percibe un elevado índice de alumnos que carecen de los aprendizajes requeridos (OECD, 2019), lo cual indica que son insuficientes las capacidades de los estudiantes de nivel bachillerato en los ejes matemático y de razonamiento. Ante un problema matemático, tal laguna les impide formular y argumentar la solución utilizando un lenguaje verbal y la terminología correspondiente, menos aún interpretar gráficas. A su vez, cuando avanzan a un nivel educativo superior, la trigonometría les presenta un desafío colosal.

La enseñanza de la trigonometría desempeña un papel decisivo en el currículo escolar en nivel secundaria. Empero, León (2011) refiere que en el ámbito escolar es común encontrar actividades relacionadas con la trigonometría desprovistas de significado para el estudiante. Tal como afirma Maldonado (2005), durante la educación secundaria, la enseñanza de esta materia se limita, en preocupante medida, al cálculo de razones para un ángulo particular. Del mismo modo, los conceptos de ángulo y razón trigonométrica son de significado confuso. De Kee *et al.* (1996) reportan que la comprensión de algunos conceptos como seno y coseno no terminan de asentar en los estudiantes, quienes tienen dificultades para distinguir los triángulos rectángulos de otros tipos. Por otra parte, tampoco diferencian entre una relación trigonométrica y una proporcional: aplican las razones trigonométricas a triángulos no rectángulos, y no se profundiza el concepto de función trigonométrica (Maldonado, 2005).

Resulta propicia la enseñanza en el nivel básico para que los alumnos comprendan los principios de la trigonometría y sean capaces de adentrarse en el estudio de la misma durante el nivel medio superior. Bajo esa premisa, el docente debe emprender la búsqueda de estrategias didácticas que contribuyan a perfeccionar su método (Solanilla, 2015), de modo que su enseñanza sea motivadora y aproveche los recursos tecnológicos a su alcance (Miranda, 2015). En últimas, el objetivo consiste en que los pupilos se apropien de los conocimientos. Por dichos motivos se ha incorporado sistemáticamente en la educación el uso de las TIC (tecnologías

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

de la información y comunicación), las cuales ofrecen experiencias de aprendizaje significativo (Zengin *et al.*, 2012). De la misma manera, como lo señala Donoso (2011), utilizarlas resulta eficaz para la comprensión de ejercicios, la resolución de problemas y el fomento de la creatividad. En consecuencia, se ha considerado implementarlas como método evaluativo de la comprensión trigonométrica en alumnos de niveles superior y medio superior.

En la actualidad, la forma de aprender ha cambiado y resulta necesario modificar en respuesta las técnicas de enseñanza (Marcilla de Frutos, 2013). Este artículo busca introducir una propuesta didáctica de trigonometría basada en actividades y desarrollada con el software GeoGebra. Esta plataforma permite al alumno descubrir fenómenos matemáticos, de modo que pueda visualizar la trigonometría de forma didáctica y fortalecer sus destrezas. Al mismo tiempo, al profesor le ofrece una herramienta para crear actividades que incorporan múltiples representaciones de conceptos matemáticos (Rojano, 2003).

La propuesta aborda lo referente a segmentos, líneas y ángulos, para luego formar triángulos rectángulos, analizar sus vértices y formular las razones trigonométricas; luego se abre el camino al círculo unitario y a las funciones trigonométricas. El propósito es presentar los resultados de la implementación didáctica, en aras de evidenciar que el diseño y la aplicación de la propuesta didáctica favorecen la enseñanza-aprendizaje en temas complejos, como es la instancia específica de la trigonometría.

Marco teórico

Este trabajo se basa en la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau, la cual es un modelo constructivista amplio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Conforme a Olguín (2016), es un referente que hace posible el diseño de una secuencia didáctica y su análisis enfocado a la investigación. En la TSD intervienen elementos como el saber-enseñar, y actores como el alumno, quien debe construir su conocimiento, y el profesor, que facilita el medio para ello. La TSD está sustentada en una concepción constructivista en el sentido piagetiano del aprendizaje:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1986, como se citó en Olguín, 2016, p. 27)

Por tanto, hay que considerar lo ya descrito por Rotaeche (2008), que una situación didáctica se considera como la organización del medio efectuada por el profesor. La intención es que el estudiante aprenda un contenido determinado y comprenda las interacciones entre los actores del sistema didáctico, caracterizadas por los contratos didáctico, pedagógico y escolar. En suma, debe existir un compromiso recíproco entre el docente y alumno que establezca los objetivos y contenidos del curso, el método de enseñanza y la forma de evaluación (Brousseau, 1986).

De acuerdo con Chavarría (2006), las situaciones didácticas se refieren al contexto donde el docente presenta el medio para que el alumno construya su conocimiento, donde interactúan los elementos del triángulo didáctico. Están orientadas a desembocar en una situación a-didáctica: un proceso donde el estudiante confronta un problema y lo resuelve sin la intervención del docente, construyendo con autonomía su conocimiento. La situación didáctica se desenvuelve en las siguientes fases: la situación-problema (o acción), donde el estudiante interactúa con el medio didáctico para llegar a la resolución de problemas y adquirir conocimientos (Castro *et al.*, 2018); la formulación, que se trata de enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado y hacerlos partícipes del proceso (Chavarría, 2006); la validación, la cual corresponde al momento donde se evalúa el producto obtenido. Asimismo, la fase final de institucionalización representa la generalización de las actividades y producciones de los estudiantes, donde ellos toman el objeto del conocimiento (Castañeda *et al.*, 2012). Se obtienen conclusiones a partir de las producciones de los alumnos, estableciendo relaciones con el acervo cultural. Es así que, en el diseño de la propuesta didáctica, se adoptó como directriz el postulado de Brousseau, y se aplicaron los conceptos de razón y función trigonométricas, así como de círculo unitario.

Metodología

La intervención se ejecutó en dos grupos de estudiantes:

- El primero, de 16 a 18 años de edad, perteneciente al cuarto semestre de la Escuela de Bachilleres del Plantel Concá.
- El segundo, de 18 a 19 años, perteneciente al primer semestre de la Licenciatura en Animación Digital (LAD).

La muestra total fue de 29 alumnos; ambos programas educativos se desenvuelven en la Universidad Autónoma de Querétaro. Acerca de los tiempos para la implementación de la propuesta didáctica, se realizaron dos fases: la primera de forma presencial con los alumnos de bachillerato y la segunda en modalidad virtual con los de LAD.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Propuesta didáctica

El término *intervención didáctica* se entiende como la labor del profesor desde una postura de mediador y facilitador del aprendizaje del pupilo (Universidad de Granada, s. f.). Su finalidad es la transformación de la práctica, la innovación por medio de la cual los estudiantes logren el aprendizaje (Pérez, 1997). De esta manera, la importancia de aprender a enseñar se manifiesta en la formación y práctica del docente, en su preparación y compromiso. A través de la reflexión posterior, identificará las áreas de oportunidad de su alumnado, y en consecuencia podrá trabajar para alcanzar niveles satisfactorios de enseñanza y aprendizaje (Rodríguez, 2017). Esas son las directrices que guían el diseño y la implementación de la propuesta didáctica destinada al tema de funciones trigonométricas. Para llevarla a cabo, se plantearon dos situaciones:

1) Calcular las funciones trigonométricas de algunos ángulos a partir de la definición basada en el círculo trigonométrico, con ayuda del software en la computadora.
2) Identificar las gráficas correspondientes a cada función trigonométrica por medio del análisis de sus rasgos particulares.

Cada intervención se abordó en un lapso predefinido de 50 minutos. En cada una de las situaciones se instauraron secciones de inicio, desarrollo y cierre. Se abrió con actividades introductorias de los conceptos para inducir al alumno a la comprensión del tema. Posteriormente, en la etapa de desarrollo, se realizaron acciones detonadoras para motivar y captar la atención del participante conforme al objetivo de la situación; para concluir, se llevaron a cabo las tareas de cierre, donde se cotejaron los conocimientos previos con los aprendizajes logrados tras la compleción de las etapas anteriores.

Actividades de introducción

Los estudiantes trabajaron sobre la actividad respondiendo a preguntas introductorias acerca de la definición de *ángulo* (Figura 1) y las características del círculo unitario a partir de sus conocimientos previos o de la visualización de construcciones preestablecidas. También se les cuestionó respecto a los términos *periodo* y *amplitud* de una función trigonométrica (Figura 2). Estas tareas corresponden a la *situación-problema* o *acción* de la TSD.

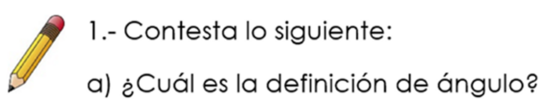


FIGURA 1. Definición de conceptos como actividad de inicio.

FIGURA 2.
Actividad de inicio.

Responde los siguiente:

a) ¿Qué entiendes por periodo en una función trigonométrica?

b) ¿A qué se le llama amplitud en una función trigonométrica?

Actividades de desarrollo

A partir de construcciones hechas en el software, los estudiantes contestaron las preguntas indicadas en cada una de las actividades de la propuesta didáctica (Figura 3). Esta etapa alude a la *formulación* de la TSD.

Realiza lo siguiente:

16.- Construye las gráficas de las funciones trigonométricas. Primeramente, crea un nuevo punto D, el cual puedes indicar en la ventana de entrada como D=$(\alpha, \mathrm{sen}(\alpha))$.

Responde los siguiente:

g) A partir del trazo formado, ¿Qué pasará con el punto D al mover el deslizador?

FIGURA 3.
Actividades
de desarrollo.

Además de realizar las construcciones y dar respuesta a las preguntas, los estudiantes interactuaron en el software, desplazando líneas perpendiculares para observar el ángulo comprendido entre los catetos y la dimensión de cada uno de estos en el triángulo rectángulo (Figura 4). La aplicación hace posible desplazar los vértices A y C para modificar el valor de α (ubicado en la intersección de los segmentos AD y AC) y sus respectivas relaciones trigonométricas, al igual que la longitud de AC y CD.

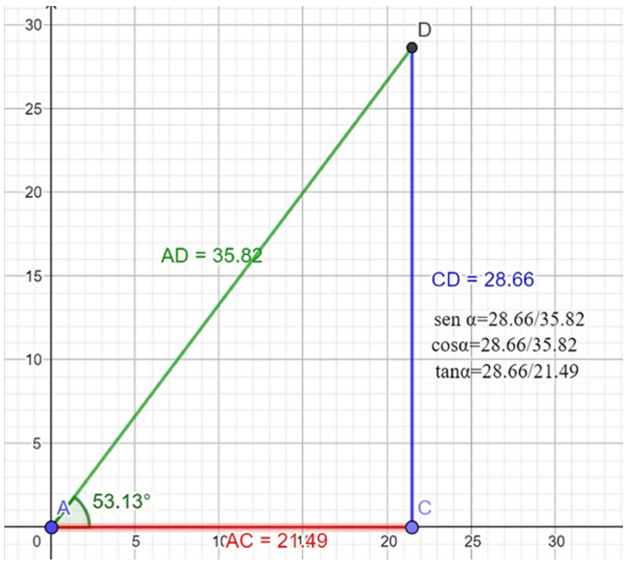


FIGURA 4.
Construcciones
hechas de acuerdo
con la situación 1.

La Figura 5 corresponde a la realización de construcciones considerando valores de ángulos. Gracias a la animación en el software, fue posible apreciar cómo cambiaban el signo y valor de las funciones trigonométricas. Se muestran un ángulo de referencia y uno normal. El deslizador verde de α adopta valores de 0 a 90°; el rojo asigna a β valores de 0 a 360°.

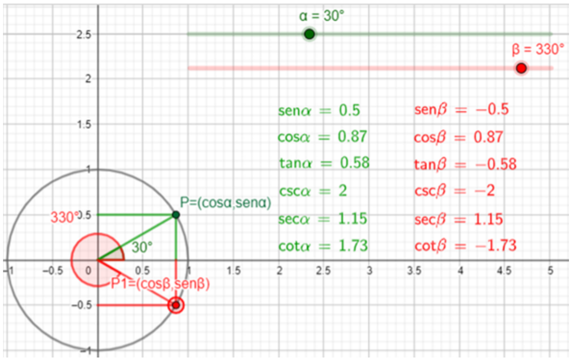


FIGURA 5. Construcciones hechas de acuerdo con la situación 2.

Actividades de cierre

En última instancia, para evaluar el cumplimiento del objetivo propuesto de cada situación, estas se realizaron mediante la versión en línea de GeoGebra. Para tal fin fueron diseñadas como lecciones con indicaciones precisas, y se proporcionaron a los estudiantes las ligas correspondientes a las actividades con el código de acceso necesario (Tabla 1).

TABLA 1. Ligas de acceso para las actividades de cierre.

SITUACIÓN 1	
Actividad 1	https://www.geogebra.org/classroom/ch4jq92h
Actividad 2	https://www.geogebra.org/classroom/xceufaa2
Actividad 3	https://www.geogebra.org/classroom/nbvwqhft
SITUACIÓN 2	
Actividad 1	https://www.geogebra.org/classroom/mqfa7bws
Actividad 2	https://www.geogebra.org/m/pwhhpmzc

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Resultados y discusión

En adelante se describen las respuestas emitidas por los estudiantes de ambos niveles educativos y se comparan con las esperadas. Se evalúa el desempeño en función de la concordancia entre ambos tipos, y el análisis respeta el orden de las situaciones indicadas en la propuesta didáctica.

En algunos reactivos, respondieron según sus nociones previas adquiridas en el nivel medio superior, como fue el caso de la definición de *ángulo* (Figura 6). Evocaron términos como *intersección de recta* o *segmentos*, además de la clasificación basada en la medida de los ángulos. Sin embargo, algunos conceptualizaron el ángulo necesariamente como parte de una figura geométrica; otros participantes también requirieron visualizar las construcciones antes de emitir sus definiciones. En la instancia ilustrada en la Figura 6, además de reconocer que la unidad de medida de los ángulos en el sistema sexagesimal son los grados, el participante afirma correctamente que una revolución corresponde a 360°.

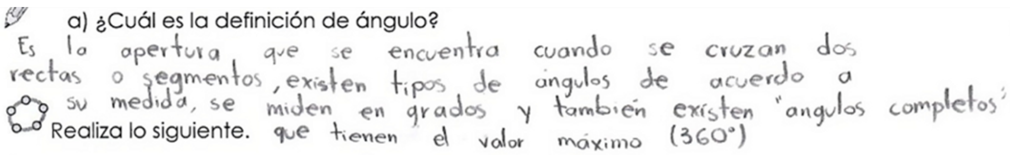


Figura 6. Definición de ángulo según un participante.

En las construcciones presentadas, la mayoría identificó que correspondían a la clasificación de triángulo rectángulo; no obstante, algunos expresaron otras categorizaciones que, aunque correctas, no conservaban relevancia en la tarea actual (Figura 7). Un alto porcentaje de estudiantes no avistó que en un triángulo rectángulo hay dos ángulos agudos y uno recto, en cambio aludieron a un solo tipo, tal como se observa en la Figura 8.

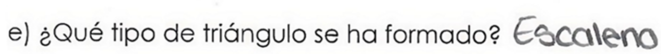


Figura 7. Identificación del tipo de ángulo.

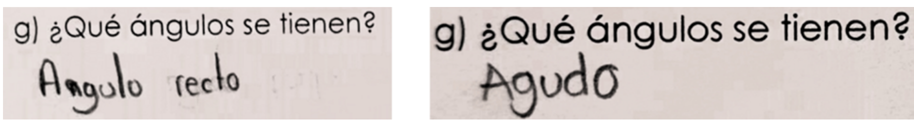


Figura 8. Identificación de un solo ángulo en un triángulo rectángulo.

La actividad 3 de la situación 2 requería visualizar el círculo unitario y evaluar las coordenadas de un punto *P*. Pese a que algunos estudiantes estaban en nivel superior, tuvieron dificultad para percatarse de que las coordenadas del punto *P* eran (cos α, sen α) (Figura 9); es decir, no advirtieron que las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo en el círculo unitario equivalen a las funciones seno y coseno del ángulo α.

Figura 9. Valor numérico de la abscisa del punto *P*.

d) ¿Cuál es la abscisa del punto P? x= .77

De forma paralela, en la actividad referente a evaluar el valor natural y los signos de las funciones trigonométricas de la situación 2, mostraron dificultad para discernir entre el ángulo normal y el de referencia (Figuras 10 y 11). La omisión resulta comprensible, al menos para los alumnos de bachillerato, ya que abordaron el curso de trigonometría superficialmente, dada la modalidad de las clases durante la pandemia de covid-19.

Figura 10. Definición incompleta de *ángulo normal*.

i) ¿Cuál es el ángulo normal?
Es aquel que se encuentra o inicia en las x positivas
pág. 7

Figura 11. Definición de ángulo de referencia.

PROPUESTA DIDÁCTICA DE TRIGONOMETRÍA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA

j)¿Cuál es el ángulo de referencia? Se mide del eje de la x al ángulo

Una vez que construyeron las gráficas de las funciones trigonométricas, fueron capaces de identificar y comprender las características de las funciones mediante la animación, así como observar el correlato gráfico en el software (Figura 12). No obstante, es claro que algunos estudiantes no dilucidaron por completo cómo indicar las características de la gráfica, por ejemplo, señalar si existen asíntotas o definir el dominio, los intervalos de incremento o disminución, y la amplitud de cada onda (Figura 13).

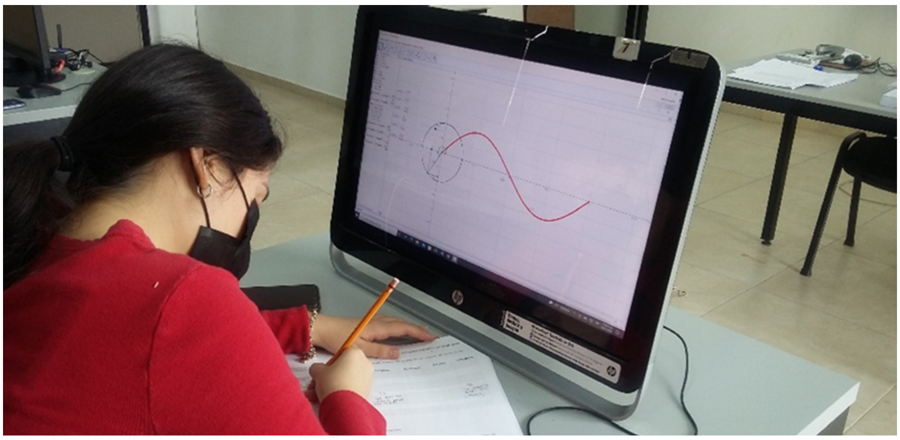


Figura 12. Animación de la función seno.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Instrucciones: Llena la tabla con la información obtenida a partir del análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas.

Pregunta	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
¿Cuál es el punto máximo y mínimo de la gráfica?	max => 1 Min => -1	max => 1 min => -1	No existe	max => -1 min => 1	max => -1 min => 1	No existe
¿En qué intervalos la gráfica crece y decrece?	Crece de 0 a $\frac{1}{2}\pi$ y de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π Decrece de $\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$	Crece de π a 2π y decrece de 0 a π	crece de π a			
¿Cuál es el dominio de la función?	Para todos los números reales	Para todos los numeros reales				
¿La función tiene asíntotas?	No tienen	No tienen	Si tiene	Sí tiene	Si tiene	Si tiene
¿Por qué?						
¿Cuál es el periodo de la función?	Cada π	Cada π	Cada π			
¿Cuál es la amplitud?						

FIGURA 13. Características de las funciones trigonométricas.

Cabe destacar que los participantes de LAD ostentan una noción más acertada de lo que es *periodo*. Por su parte, los alumnos de bachillerato describieron con mayor precisión las características de las gráficas; la mayoría de los estudiantes definieron la *amplitud* (Figura 14) como un concepto que refiere a la distancia entre el eje de las abscisas y el punto más alto de la onda. En contrapartida, un grupo reducido refirió a la cresta de una onda (“el punto máximo”) y su valle (“el punto mínimo”). En este sentido, la primera descripción fue la más satisfactoria.

b) ¿A qué se le llama amplitud en una función trigonométrica?
La distancia del punto máximo al punto mínimo, la amplitud es la altura de la onda.

FIGURA 14. Definición de amplitud en una función trigonométrica.

Por último, se presentan los resultados de las actividades de cierre (Figura 15) correspondiente a las situaciones. Se observa que la participación de ambos grupos en las actividades fue menguante, en especial la de los estudiantes de LAD, debido a la modalidad en que se llevó a cabo la propuesta didáctica, como se mencionó anteriormente.

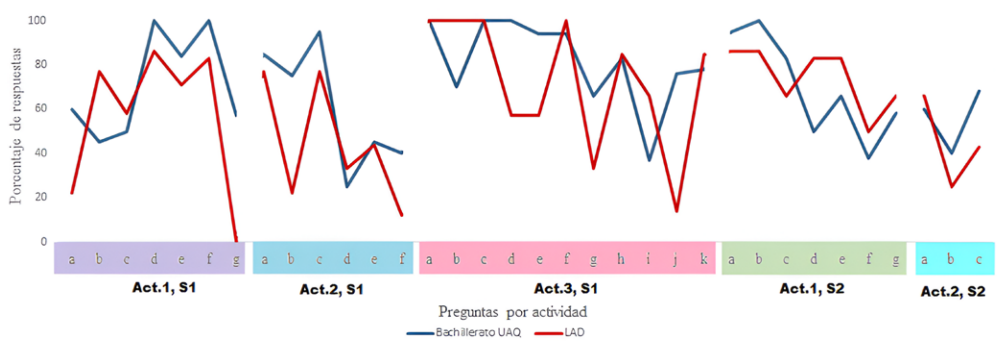


FIGURA 15. Resultados de las actividades de cierre.

En el caso de los alumnos de bachillerato, la interacción con las construcciones fue clave, pues les permitió visualizar la relación de los segmentos del triángulo rectángulo y los ángulos que lo conforman. De la misma manera, pudieron comprobar cómo a medida que se abren o cierran los ángulos se alteran las coordenadas del punto P, y corroborar los signos en los diferentes cuadrantes para cada de una de las funciones. Desde esta perspectiva, la interacción logró su cometido: permitir a los estudiantes complementar su conocimiento en trigonometría.

Conclusiones

Los resultados permiten concluir que el grupo de bachillerato fue más acertado al contestar las preguntas indicadas en el desarrollo de actividades por cada situación. Es destacable que la interacción con el software les permitió asimilar con mayor claridad cómo se construyen las gráficas de las funciones trigonométricas mediante rectas, segmentos, puntos, ángulos y círculos unitarios. Conviene resaltar que la participación del grupo en modalidad presencial fue fructífera, en virtud de que siguieron las indicaciones de la propuesta, realizaron por sí mismos las construcciones en GeoGebra y participaron activamente, pese a que desconocían el uso de la plataforma. El empleo de la tecnología permeó de manera positiva el proceso de enseñanza-aprendizaje del pupilo. Si bien la actividad goza de instrucciones específicas, fue preciso cuestionar a los participantes para fomentar su exploración e interacción con la plataforma. De esa manera, lograron discernir consideraciones particulares en trigonometría, por ejemplo, la correspondencia de valores naturales de los ángulos notables o los signos de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes.

En términos del nivel educativo de los participantes, se percibió una diferencia actitudinal importante entre los dos grupos. Por un lado, los bachilleres mostraron un involucramiento proactivo en las tareas; por el contrario, los alumnos de LAD manifestaron un escaso compromiso y renuencia a desarrollar las actividades. En otro sentido, las modalidades empleadas fueron un factor prominente en los resultados. Con respecto al grupo de estudiantes de bachillerato, las actividades presenciales ayudaron a mantener orden en el aula, agilizaron los cuestionamientos y permitieron orquestar respuestas concretas, e incluso respetar los tiempos designados para cada sesión. En el caso del grupo de LAD, que se desenvolvió en modalidad virtual, se detectó poca disposición en los tiempos de entrega y en la seriedad al responder los reactivos; aunado a esto, no se realizaron las actividades de cierre por completo.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

La implementación de esta propuesta didáctica ha develado áreas de oportunidad para la práctica docente; integrarla como parte del desarrollo de las clases podría facilitar el abordaje de la trigonometría, de forma específica el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas. La meta es que exista una comprensión profunda del tema desde el nivel medio superior, ya que fue evidente que los alumnos de licenciatura aún atraviesan atolladeros en esta materia. Para continuar y expandir el estudio de este tema, se sugiere enriquecer el acervo de actividades realizables en GeoGebra a fin de asociar las características de las funciones trigonométricas con temas pertenecientes a otras disciplinas. De tal manera, sería posible dotar de sentido a las matemáticas en el contexto cotidiano. Como planteamiento final, quizás pueda establecerse una comunidad de docentes que compartan dicho material de forma libre, siempre que se atribuyan los créditos pertinentes a los autores y se realice sin fines de lucro.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine* [Tesis de doctorado, Illinois State University]. https://www.proquest.com/openview/2f8f9e2a6508f98b8e-8b382a0109daca/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Castañeda Alonso, A., Rosas Mendoza, A. y Molina Zavaleta, J. G. (2012). La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula. *Perfiles Educativos*, *34*(135). https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2012.135.29169

Castro López, C. E., Arteaga Moreno, J. A. y Ricaurte Urbano, L. A. (2018). *Situaciones didácticas en la enseñanza de las razones trigonométricas en estudiantes de grado décimo* [Tesis de maestría, Universidad del Cauca]. http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/395

Chavarria, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(2).

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 19-27.

Díaz Fernández, M. T. (2014). *Enseñanza de trigonometría en 4º de la ESO con GeoGebra* [Tesis de maestría, Universidad Internacional de la Rioja]. https://reunir.unir.net/handle/123456789/2426

Donoso, C. (2011). *Introducción al Nuevo Bachillerato Ecuatoriano*. https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2013/03/SiProfe-BGU-Introduccion.pdf

Herrera, H. (2013). *Enseñanza de los conceptos básicos de la trigonometría mediante el uso de la tecnología informática* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21149

León, C. E. (2011). El paso de la razón a la función trigonométrica: revisión de algunos elementos históricos en la construcción de la función trigonométrica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 371-378). Universidad Pedagógica Nacional.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica* [Tesis de maestría]. Cinvestav-IPN.

Marcilla de Frutos, C. (2013). *Las TIC en la didáctica de las matemáticas* [Tesis de maestría, Universidad de Burgos]. https://riubu.ubu.es/bitstream/handle/10259.1/182/Marcilla_de_Frutos.pdf;jsessionid=B4CDC475A0AF18F67F11917D28C36EDB?sequence=1

Martín, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica* [Tesis de maestría]. Universidad de Granada.

Martínez, J. y Martínez, G. (2007). La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores a 360º y sus funciones trigonométricas: un estudio en el nivel medio superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1214333/Mart25C325ADnezLadid25C325A1cticaALME2007.pdf

Miranda, L. I. (2015). *Uso de Recursos Educativos Abiertos en el aprendizaje de las funciones trigonométricas* [Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de Monterrey y Universidad Autónoma de Bucaramanga]. https://repository.unab.edu.co/bitstream/handle/20.500.12749/3136/2015_Tesis_Miranda_Huertas_Liliana_Isabel.pdf?sequence=1&isAllowed=y

OECD (2019). Resultados PISA 2018 [Archivo PDF]. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/programmes/edu/pisa/publications/national-reports/pisa-2018/featured-country-specific-overviews/PISA2018_CN_MEX.pdf

Olguín, G. (2016). *Una propuesta didáctica para la construcción de las funciones trigonométricas seno y coseno* [Tesis de maestría, Universidad de Los Lagos]. https://edumat.ulagos.cl/wp-content/uploads/2019/02/Gonzalo-Olgu%C3%ADn.pdf

Pérez, M. Á. (1997). La intervención didáctica como alternativa para transformar la práctica. *Educar. Revista de Educación/Nueva Época*, (1).

Rodríguez, H. (2017). Importancia de la formación de los docentes en las instituciones educativas. *Ciencia Huasteca Boletín Científico de la Escuela Superior de Huejutla, 5*(9). DOI: 10.29057/esh.v5i9.2219

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, *33*, 135-165. DOI: 10.35362/rie330914

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Aportaciones para un diseño escolar.* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional.

Solanilla, O. (2015). *Implementación de herramientas didácticas y tecnológicas para mejorar el nivel de aprendizaje de la trigonometría* [Tesis de maestría, Universidad del Tolima]. https://repository.ut.edu.co/entities/publication/138bc0eb-1452-48dd-a1c1-62ca9e6a2078

Torres, D. y Montiel, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática*, *33*(3), 202-232. DOI: 10.24844/em3303.08

Universidad de Granada (s. f.). *Intervención didáctica*. PID-Prácticum E.F. https://www.ugr.es/~rescate/practicum/intervencion_didactica.htm

Zengin, Y., Furkan, H. y Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 31*, 183-187. DOI: 10.1016/j.sbspro.2011.12.038

Recibido el 26 de enero de 2024, aceptado el 24 de septiembre de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Diseño de una interfaz de usuario para la modelización y análisis de circuitos eléctricos como un proceso de aprendizaje

Design of a user interface for the modeling and analysis of electrical circuits as a learning process

Ignacio Mejía Ugalde[1]*
Jesús Eduardo Hinojos Ramos[1,2]

[1]Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

[2]Instituto Tecnológico de Sonora, Sonora, México

*ignacio.mejia@uaq.mx

03

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Mejía Ugalde, I., Hinojos Ramos, J. E. y Mejía Ugalde, M. (2025). Diseño de una interfaz de usuario para la modelización y análisis de circuitos eléctricos como un proceso de aprendizaje. *PädiUAQ, 8*(15), pp. 1-20.

Resumen

La presente investigación se propone determinar las habilidades de pensamiento abstracto lógico (HPAL) desarrolladas por alumnos de educación superior; para alcanzar esa meta, se creó un software enfocado en la simulación de circuitos eléctricos compatible con los procesos de aprendizaje de nivel universitario, con el fin de caracterizar acciones cognitivas y metacognitivas exhibidas por los participantes al operarlo. En ese sentido, se usan métodos constructivos de modelización matemática dinámica en el ámbito de la metacognición desde una perspectiva de linealización (MDL). La ventaja de este diseño infraestructural yace en que la interfaz constituye una opción asequible y versátil, porque se ha programado en lenguaje C# de código abierto, ya sea para ejecutarse en la red o bien instalarse desde sistemas operativos convencionales. El trabajo desempeñado por los estudiantes durante las pruebas preliminares fue satisfactorio. Se les presentó una novedosa interfaz de usuario instalable en Windows o accesible vía navegadores web. Los resultados permitieron evaluar el progreso de las habilidades del pensamiento y generar métodos y estrategias de enseñanza-aprendizaje. Así, su análisis, argumentación e interpretación de los circuitos eléctricos constituyen un aporte significativo para la docencia en general y la matemática educativa en particular.

Palabras clave: didáctica de las ciencias, habilidades de pensamiento abstracto lógico, metacognición desde una perspectiva de linealización, modelos matemáticos, secuencia didáctica, software didáctico.

Abstract

This research work focuses on characterizing the abstract logical thinking skills (ALTS) developed by college students; to that end, an electrical circuits simulation software compatible with the learning process of university level students was created; moreover, the cognitive and metacognitive actions exhibited by the participants when operating it were characterized. Dynamic mathematical constructive modeling techniques are employed in the field of metacognition from a perspective of linearization (MPL). An advantage of such an infrastructure design is that the interface deployed is considered affordable and versatile, since it is programmed in open source language (C#) to be accesed online or installed on conventional operating systems. The participants' performance along the preliminary tests was satisfactory. They were presented with a novel user interface executable on Windows or accessible via web browsers. The results made it possible to rate the development of thinking skills and to establish teaching-learning methods and strategies. Their evaluation, argumentation and interpretation represent a meaningful contribution to teaching in general and to educational mathematics in particular.

Keywords: science didactics, abstract logical thinking skills, metacognition from a linearization perspective, mathematical models, didactic sequence, didactic software.

Introducción

Las tecnologías de la información y comunicación posibilitan el intercambio entre docentes y estudiantes, propiciando el fortalecimiento de habilidades y competencias disciplinares dentro de varias áreas del conocimiento (Stošić *et al.*, 2020; Ergashev *et al.*, 2021). A lo largo de la década de 2010, Internet se ha expandido de forma exponencial (Sulakono *et al.*, 2020; Ejiyi *et al.*, 2021) y predominan las aplicaciones y los sistemas digitales en el mercado (Xu *et al.*, 2020; Marakana *et al.*, 2021). Por tanto, se requiere que los profesionales de la educación se pongan a la vanguardia de los procesos de aprendizaje de las ciencias. Asimismo, es necesario definir estrategias de enseñanza precisas, como el establecimiento de mecanismos de información pública a distancia, en concordancia con las recomendaciones de la UNESCO (2022). Los proyectos de aprendizaje efectivos y flexibles deben ponerse en marcha, tanto dentro como fuera de línea, en temas específicos del dominio disciplinar del docente según sus objetivos educativos definidos (Duarte *et al.*, 2021; Sansolis y Leonoras, 2021).

Por otra parte, realizar simulaciones de circuitos eléctricos a través de secuencias didácticas beneficia a los estudiantes que cursan materias de ingeniería como Electromecánica, Electrónica o Control, pues nutre las habilidades técnicas y pragmáticas, y ensancha el conocimiento referente a sistemas eléctricos y electrónicos. No obstante, para que el conocimiento trascienda el dominio teórico es necesario que el estudiante interactúe con el equipo de laboratorio tanto en software como en hardware. De tal modo, adquirirá destreza para desenvolverse en situaciones prácticas, relacionando los conceptos abstractos con circunstancias del mundo real, incluyendo el análisis e interpretación de secuencias lógicas y didácticas (Coughlan, 2020).

En palabras de Lee y Sim (2021), las aplicaciones en móviles y ordenadores para la educación de las ciencias exactas ofrecen oportunidades de enseñanza y aprendizaje adaptables a los requisitos pedagógicos. Los trabajos de Sansolis y Leonoras (2021) se centran en las habilidades desarrolladas por los estudiantes mediante las tecnologías de información (TI); en su investigación encontraron, por lo menos, 15 diferencias significativas en aspectos psicométricos y cognitivos a través de secuencias didácticas enfocadas en el aprendizaje de las modelizaciones matemáticas. En trabajos de Ejiyi *et al.* (2021) diseñaron una aplicación escolar que mejora los procesos de aprendizaje y de planificación, con el fin de compararla con las alternativas comerciales, como apps enfocadas en la metacognición, en virtud de mejorar los procesos de aprendizaje y planificación escolar de los alumnos. Algunas indagaciones, como las de Akmar *et al.* (2021) y de Bakar *et al.* (2021),

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

proponen la generación de interfaces flexibles para desarrollar habilidades en los procesos de aprendizaje en campos de la ciencia y la tecnología, como es el caso de la ingeniería matemática de la modelización.

De esta manera, hay trabajos enfocados en los métodos de modelado matemático de solución de circuitos RLC (resistor, inductor y capacitor). Las leyes de Kirchhoff sustentan la modelización de circuitos equivalentes por medio de programación no lineal para estimar parámetros de tensión y corriente dentro del dominio de Laplace (Bocanegra *et al.*, 2020). A la par, técnicas como la de Astorga (2014) trazan la representación gráfica de las armónicas de tensión y corriente utilizando el modelado de la función de transferencia entre los datos originales y el valor teórico obtenido a partir de la función no lineal considerada (Fiallos, 2021).

El aprendizaje basado en modelizaciones matemáticas posibilita precisar el comportamiento de un sistema real eligiendo diferentes alternativas de diseño, como los modelos de regresión lineal para sistemas de primer orden (RL), o la múltiple en los sistemas eléctricos, entre ellos los lineales y exponenciales (RLC) (Gu, 2011; Popa, 2017; Sudarno y T Widiharih, 2021); asimismo, las regresiones en sistemas dinámicos permiten describir la evolución de dichos sistemas en su función del periodo de tiempo (Dijkstra y Henseler, 2021; Ren *et al.*, 2021). A todo esto, la respuesta tentativa a la pregunta de investigación es que, en comparación con una enseñanza tradicional, los estudiantes de ingeniería logran una comprensión más acertada del modelado matemático a partir de la aplicación de una infraestructura experimental diseñada específicamente para ese fin.

En lo subsecuente, se propone la creación de una infraestructura experimental accesible para la modelación matemática de circuitos eléctricos que sirva en los procesos de enseñanza-aprendizaje en la educación de nivel superior. Tal plataforma debe facilitar la identificación y potencialización del desarrollo de habilidades del pensamiento abstracto lógico, como el análisis dinámico del problema real contextualizado en secuencias didácticas.

Marco teórico conceptual

La presente investigación se basa en cuatro conceptos centrales; el primero es la situación real del problema, donde se diseña y estudia un problema contextualizado referente a las ciencias exactas en una secuencia didáctica. En segundo lugar, el modelo real del problema se enfoca en realizar la representación matemática del sistema acorde con la situación real. En tercero, el modelado matemático del problema radica en la habilidad de formular soluciones a partir del razonamiento y la comparación de las expresiones matemáticas del comportamiento de un sistema mecánico o eléctrico (Kaiser y Brand, 2015). Por último, las actividades cognitivas y metacognitivas en los estudiantes enlistan y evalúan las operaciones mentales a partir de las cuales ellos generan estrategias autónomas de aprendizaje; de ese modo es posible observar el equilibrio enseñanza-aprendizaje (Niss, 2017; Niss y Blum, 2020).

Se parte de un modelo que representa matemáticamente el comportamiento del sistema concorde a la situación real del problema a analizar. De acuerdo con Kaiser y Brand (2015), formular y solucionar problemas del mundo real facilita el desarrollo de nuevas maneras y métodos de simulación que sirven de instrucción a los estudiantes en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Las habilidades del pensamiento abstracto lógico (HPAL)

La aplicación de estrategias pedagógicas basadas en las HPAL ha sido angular para nutrir la capacidad de los alumnos al resolver problemas cotidianos mediante el modelado matemático. Jaramillo y Puga (2016) apuntalan que el ciclo de la construcción y reconstrucción del conocimiento se orienta a las destrezas y los *procesos cognitivos* que forman el pensamiento lógico abstracto mediante actividades académicas donde se evalúan las aptitudes. Bajo esta perspectiva, la medida del pensamiento abstracto corresponde a las destrezas cognitivas de síntesis, deducción, asociación e interpretación de fenómenos (Tolan *et al*., 2021). Paralelamente, los *procesos cognitivos* como relacionar, evaluar, deducir, identificar e inferir en tareas diarias son estrategias que permiten estimular un aprendizaje significativo en los estudiantes (Akpur, 2021).

Modelación matemática

La modelación es una estrategia de formulación y diseño de algoritmos matemáticos enfocados en comprender a profundidad qué ocurre en un sistema (Bossio *et al*., 2023). Asimismo, su práctica amplía la percepción y facilita la transferencia de habilidades elementales hacia los alumnos (Fonseca, 2023). En el marco institucional, tal estrategia admite acciones realistas y abiertas, y otorga una metodología para que los profesores conciban cómo aplican los alumnos el pensamiento crítico en la solución de problemas (Marbouti y Strobel, 2013).

Los procesos transitorios de primer y segundo orden de circuitos eléctricos son cognoscibles a partir de ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo (Bueno Hernández *et al*., 2020). Los modelos no lineales describen el comportamiento e incluso estiman la evolución de un sistema real en un periodo de tiempo, para

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

lo cual existen varias alternativas de diseño (Dijkstra y Henseler, 2021; Ren *et al.*, 2021). En otras palabras, las concepciones del proceso de modelado matemático (MM) integradas en secuencias didácticas ayudan a consolidar el conocimiento disciplinar en circuitos eléctricos (CDCE) (Recio, 2018; Bravo y Rodríguez, 2020).

Se dice que un modelado matemático está bien estructurado cuando los alumnos realizan el desglose de un sistema real siguiendo una secuencia didáctica. Esbozan una resolución impresa a lápiz y papel (RILP), a partir de la cual reciben una retroalimentación al instante que tiene por base la solución del modelado propuesto (SMP) en cada etapa del ciclo de modelado: diseño, modelación e implementación (Abassian *et al.*, 2020).

Consideraciones metodológicas y teóricas

Consideraciones metodológicas

Se propone un estudio cualitativo basado en dos estrategias: la primera utiliza, a lo largo de una secuencia didáctica, una infraestructura experimental ligada a la enseñanza de las ciencias exactas para el modelado matemático; la segunda continúa con el método tradicional para la solución de secuencias didácticas. Ambas modalidades usan los métodos constructivos de modelización que conceden realizar una intervención didáctica regida por el dominio de la teoría HPAL. La presente está perfilada a académicos de las ciencias exactas interesados en identificar las HPAL de sus educandos, con el fin de generar estrategias pedagógicas de naturaleza cognitiva, a través de la modelización y el análisis dinámico de problemas reales contextualizados.

Para este propósito, se contemplaron cuatro sesiones de 60 minutos (por secuencia), donde participaron voluntariamente cuatro alumnos, uno por cada módulo. La actividad fue organizada en un escenario de construcción social orientado a la modelización y el análisis dinámico desde una perspectiva de linealización (MDL) en circuitos eléctricos de primer y segundo orden. La finalidad fue comparar el proceso educativo del conocimiento disciplinar matemático en la interfaz de usuario en oposición a la enseñanza tradicional en términos de las HPAL exhibidas por los voluntarios.

En la gestión y el registro de datos se consideraron dos cartas: la primera, dirigida a los participantes, concierne a la confidencialidad e indica los tiempos y las

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

sesiones a realizar; la segunda atañe al consentimiento informado, donde los participantes proporcionaron su información personal y declararon a consciencia su disposición a involucrarse en el experimento. Para el caso de la infraestructura experimental (interfaz), la información se almacenó al final de cada secuencia de manera automática; en cambio, para el método tradicional fueron los participantes quienes realizaron los registros.

Consideraciones teóricas: diseño de instrumentos

Se adoptaron tanto las técnicas de investigación cualitativa descritas por Del Río (2011) y Sánchez *et al.* (2021), como el análisis de contenido cualitativo de los estudios de marcos de codificación y modelado de Lu y Kaiser (2022). Ambos se operacionalizaron para determinar las acciones y los procesos llevados a cabo por los estudiantes por medio de instrumentos de recolección y análisis de datos (Tabla 1). El primero es la interfaz de usuario referida en la Introducción; programada en lenguaje C-Sharp (C#), sirve para crear secuencias didácticas, las cuales contienen modelaciones matemáticas orientadas por la teoría HPAL. De igual manera, se incluye una guía de observación como instrumento para la categoría actitudinal (A) bajo el formato de secuencia didáctica basada en las HPAL; se focaliza en procesos cognitivos como la relación, la evaluación, la inferencia y la deducción en las tareas de aprendizaje durante la construcción y reconstrucción del conocimiento.

La categoría procedimental (P) refiere a las habilidades y los procesos cognitivos para formular y ejecutar una modelación matemática mediante la abstracción y el uso de herramientas matemáticas. Se evalúa por medio de una lista de cotejo en dos fases: diseño para el modelado y contenido matemático, e implementación y análisis de resultados para resolver la situación de un problema real. Por último, los logros de aprendizaje se determinan mediante un cuestionario de la categoría conceptual (C); se valora el tratamiento y la captura de datos con la ayuda de un procesador de textos de licencia libre integrado en la interfaz de usuario.

TABLA 1.
Instrumentos para la toma de datos. Fuente: elaboración propia.

CATEGORÍA	INSTRUMENTO	DESCRIPCIÓN	JUSTIFICACIÓN
Actitudinal (A)	Guía de observación	Se emplea para obtener información sobre una actividad o fenómeno.	Funge como una herramienta efectiva para la implementación de secuencias didácticas.
Procedimental (P)	Lista de cotejo	Identifica las habilidades a evaluar en el proceso de aprendizaje.	Define los indicadores y los procesos clave del aprendizaje proyectado.

Categoría	Instrumento	Descripción	Justificación
Conceptual (C)	Cuestionario	Son pruebas de validación que consisten en una serie de preguntas específicas.	Establece los logros de aprendizaje, los criterios de evaluación y los niveles de satisfacción.

Desarrollo de la infraestructura experimental

C-Sharp (C#) es un lenguaje orientado a objetos que combina las mejores características de sus predecesores, como Java, JavaScript, Visual, Visual Basic o C++. Su compilador, Visual Studio, incluye .NET FRAMEWORK SDK (offline con kit de desarrollo de software) y ASP.NET (paquetes de servicios activos online). Para el soporte del software se emplearon Moodle LMS (sistema de código libre dedicado a la gestión del aprendizaje) y el motor SQL Server Management Studio 18.0, sobre el cual se montó una base de datos en línea. De igual modo, el script, que contiene un código estructurado del software, puede correr en una página web o instalarse en sistemas operativos Windows o Mac como indica la ISO/IEC/IEEE 24774:2021. Aspectos del sistema como la arquitectura de la interfaz, los procedimientos y la representación matemática son esenciales al crear secuencias didácticas para el modelado del problema contextualizado a analizar mediante las acciones metacognitivas.

Construcción de secuencias didácticas en la interfaz

La comunicación simultánea entre el software Simulink (extensión de MathWorks MATLAB) y el hardware Arduino Nano se logró mediante la paquetería ArduinoI/O; este arreglo en C# constituye la interfaz de usuario para la modelación matemática (Figura 1). En suma, la adquisición de datos, su procesamiento y la devolución de resultados se organizan en tres bloques:

- *Adquisición.* Pone su atención en la recepción de datos, tales como variables dependientes e independientes, escalones unitarios, resistencia (R), inductor (L) y capacitor (C).
- *Procesamiento.* Delimita la función de transferencia de salida, las armónicas en procesos transitorios de circuitos eléctricos RLC en el dominio del tiempo, la frecuencia natural (fn) y el coeficiente de amortiguamiento (δ). Para ello, se desarrolla un modelado dinámico desde una perspectiva de linealización (MDL), aplicando la transformada de Laplace para el circuito a partir de ecuaciones diferenciales (Kú *et al.*, 2008).
- *Resultados numéricos y gráficos.* Despliega los valores del modelado, el factor de amortiguamiento (δ), la frecuencia natural (fn) y la respuesta de simulación.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

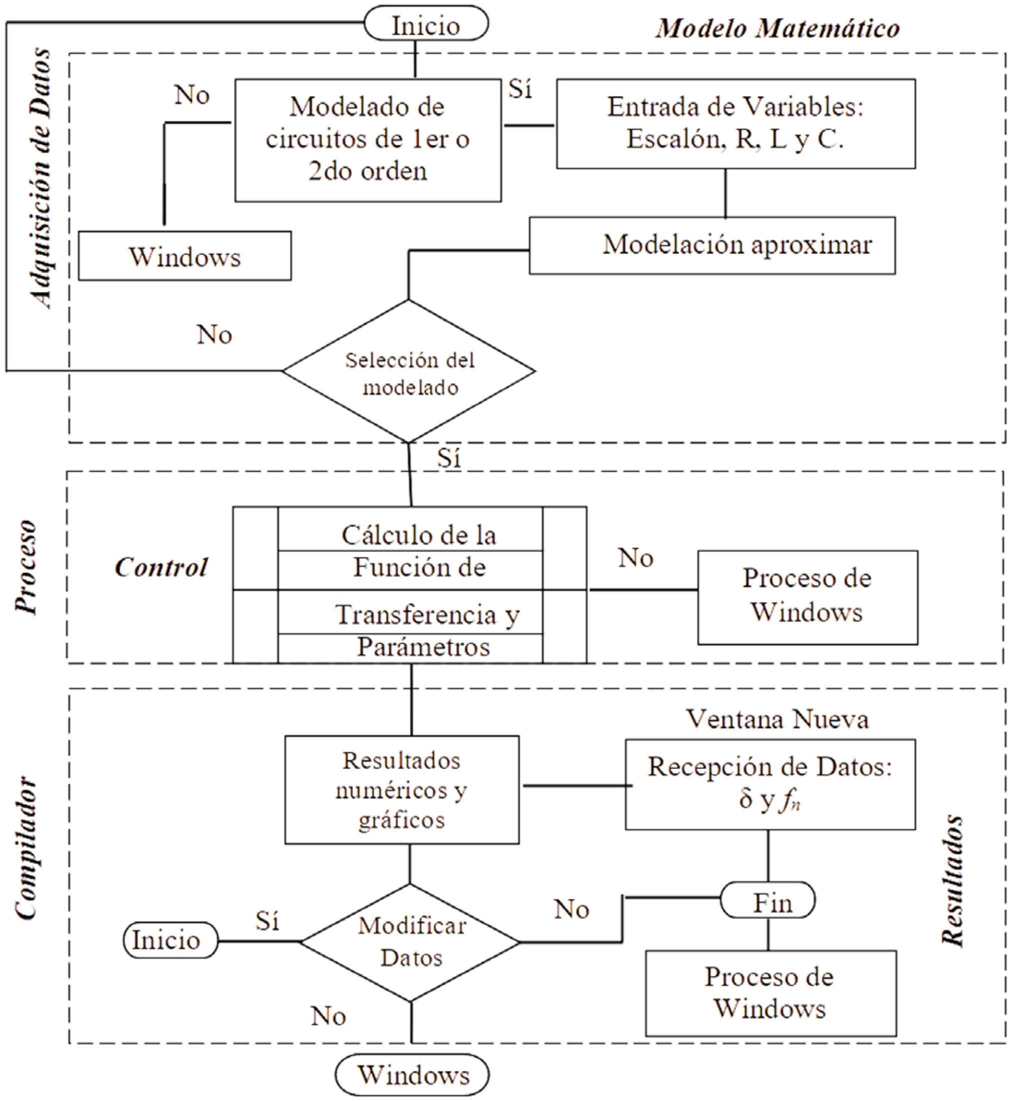


FIGURA 1.

Bloques de la secuencia de flujo para una modelización matemática.

Programación e implementación de secuencias didácticas

El proceso se realiza dentro de la interfaz y consiste en estructurar dos secuencias didácticas mediante modelizaciones matemáticas de un problema real con enfoque en la enseñanza-aprendizaje.

Primera secuencia didáctica. Examinar el comportamiento de la función de transferencia de salida y de las armónicas de circuitos eléctricos en el domino del tiempo, en procedimientos transitorios de circuitos eléctricos RLC (resistor, inductor y capacitor) de segundo orden (Tabla 2).

Actividad 1. Implementar de manera experimental un circuito eléctrico de segundo orden compuesto por un resistor, un inductor y un capacitor. Del mismo modo, en el circuito, la resistencia y el inductor se conectarán en serie, mientras que el capacitor se acoplará en paralelo (Figura 2).

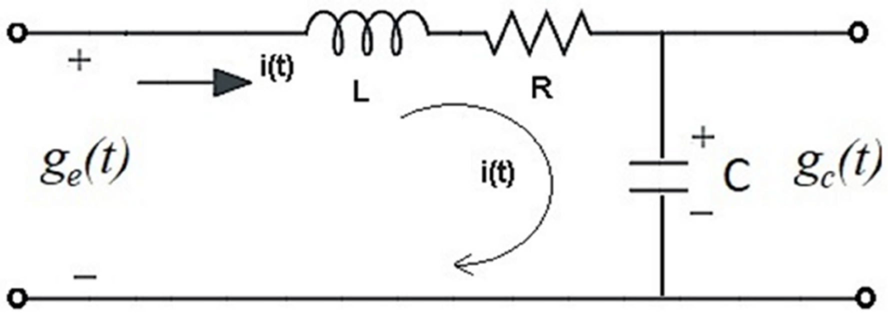


FIGURA 2.
Circuito RLC
de segundo orden.

Modelado. Realizar la modelización del circuito RLC mediante ecuaciones diferenciales basadas en la ley de voltajes de Kirchhoff para un circuito de segundo orden. Las variables consideradas son: resistor (*R*), inductor (*L*), capacitor (*C*), voltaje de entrada $g_e(t)$ y voltaje de salida en el capacitor $g_c(t)$.

TABLA 2.
Primera secuencia didáctica. Fuente: elaboración propia.

RESOLUCIÓN IMPRESA A LÁPIZ Y PAPEL	RESOLUCIÓN ANTE LA INTERFAZ (GUÍA)
Pregunta 1. Determina la caída de voltaje para el circuito eléctrico de segundo orden RLC.	*Resolución 1.* La caída de voltaje alrededor de un lazo cerrado debe ser igual a cero. $$g_e(t) - L\frac{d_i(t)}{dt} - i(t)R - \frac{1}{c}\int i(t)dt = 0 \quad (1)$$
Pregunta 2. Transforma la ecuación obtenida al dominio de Laplace.	*Resolución 2.* La Ecuación (*1*) convertida al dominio de Laplace es: $$G_e(s) - LI(s) - I(s)R - \frac{1}{Cs}I(s) = 0 \quad (2)$$
Pregunta 3. Calcula la corriente de entrada en dominio de frecuencia.	*Resolución 3.* Al despejar de la Ecuación (*2*) la corriente de entrada *I(s)* resulta: $$I(s) = \frac{G_e(s)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \quad (3)$$
Pregunta 4. Obtén el voltaje en la salida del capacitor en el dominio del tiempo.	*Resolución 4*. Por tanto, el voltaje de salida del capacitor es igual a: $$G_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad (4)$$
Pregunta 5. Aplica en el capacitor la transformada de Laplace al voltaje de salida.	*Resolución 5.* Al transformar a frecuencia y despejar la corriente *I(s)* se tiene: $$I(s) = \frac{G_o(s)}{\frac{1}{s}} \quad (5)$$
Pregunta 6. Encuentra la razón del voltaje de entrada con respecto al de salida.	*Resolución 6.* La razón del voltaje de entrada con respecto al voltaje de salida se calcula con: $$\frac{E_o(s)}{G_e(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \quad (6)$$

RESOLUCIÓN IMPRESA A LÁPIZ Y PAPEL	RESOLUCIÓN ANTE LA INTERFAZ (GUÍA)
Pregunta 7. Define la función de transferencia *F(s)*.	*Resolución 7.* La función de transferencia *F(s)* sería: $$F(s)=\frac{\frac{1}{CL}}{S^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{CL}} \quad (7)$$
Pregunta 8. Determina la función de transferencia que incluye los parámetros de frecuencia natural (*fn*) y el factor de amortiguamiento *(δ)* del circuito eléctrico.	*Resolución 8.* La transferencia en función de la frecuencia natural (*fn*) y el factor de amortiguamiento (*δ*) del RLC es: $$F(s)=\frac{{f_n}^2}{S^2+2\delta f_n S+{f_n}^2} \quad (8)$$
Pregunta 9. Calcula los parámetros del circuito eléctrico de acuerdo con las siguientes expresiones: $$\delta=\frac{\delta f_n}{\delta f_n}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},\delta f_n=\frac{R}{2L},f_n=\sqrt{\frac{1}{CL}}$$	*Resolución 9.* Para calcular los parámetros del circuito eléctrico se usan las siguientes expresiones: $$\delta=\frac{\delta f_n}{\delta f_n}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},\delta f_n=\frac{R}{2L},f_n=\sqrt{\frac{1}{CL}} \quad (9)$$
Pregunta 10. Determina la respuesta de un circuito de segundo orden en el dominio del tiempo ante un escalón unitario.	*Resolución 10.* La respuesta de un circuito de segundo orden en el dominio del tiempo ante un escalón unitario.

Segunda secuencia didáctica. Analizar el comportamiento de la corriente en función del tiempo *i(t)* dentro de un circuito RL conectado en serie (Tabla 3).

Actividad 2. Analizar el comportamiento del término transitorio en la función *i(t)* a partir de la armónica generada por el circuito de primer orden, e identificar los valores de la resistencia y el inductor (Figura 3).

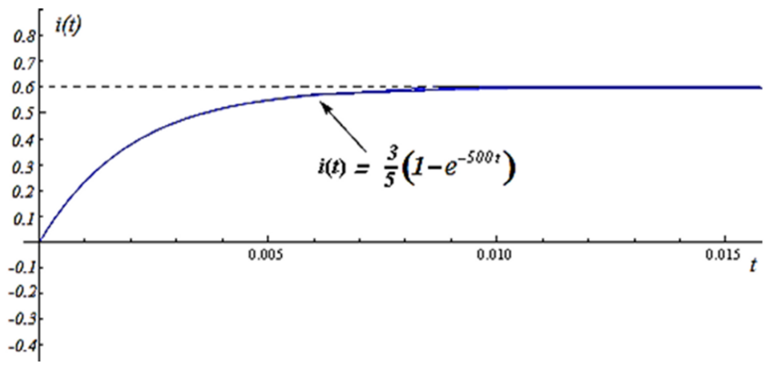


FIGURA 3.
Circuito eléctrico de primer orden, tipo *RL*.

Modelado. Modelar los parámetros a raíz de la armónica del RL mediante ecuaciones diferenciales. Las variables son: *R*, *L*, voltaje de entrada *E(t)* y voltaje de salida en el inductor $g_l(t)$.

Tabla 3.

Segunda secuencia didáctica. Fuente: elaboración propia.

RESOLUCIÓN IMPRESA A LÁPIZ Y PAPEL	RESOLUCIÓN ANTE LA INTERFAZ (GUÍA)
Propuesta 1. Desglosar el comportamiento de la armónica de la función de la corriente. $$i(t) = \frac{3}{5}(1 - e^{-500t})$$	*Propuesta 1*. Desglosar el comportamiento de la armónica de la función de la corriente. $$i(t) = \frac{3}{5}(1 - e^{-500t})$$
Proceso 1. Fase de diseño. Proceso de modelación matemática, así como del contenido matemático.	*Proceso 1*. Para la fase de diseño, se parte de la armónica de la Figura 3. Su función general se compone de dos soluciones: $$y = y_c + y_p = i(t) = Ce$$ Asimismo, el circuito de primer orden RL en serie tiene la forma: $$L\frac{di}{dt} + iR + 0\frac{1}{C}q = E(t)$$
Proceso 2. Fase de implementación y análisis de resultados. Lo conforman la implementación del diseño y la resolución de la situación-problema para una modelación matemática.	*Proceso 2*. Fase de implementación y análisis de resultados. Los ejes coordenados en el dominio del tiempo son *t* para las abscisas e *i(t)* para las ordenadas; es decir, la armónica se extiende desde *(*0,0*)* hasta *(*∞, *i(t))*. Si $i(t) = -\frac{3}{5}e^{-500t} + \frac{3}{5}$, entonces, cuando $t \to \infty$, $i(t) = \frac{3}{5}$. Para esta armónica de corriente en función del tiempo, el término $-\frac{3}{5}e^{-500t}$ se denomina *transitorio*, ya que a medida que el tiempo transcurre, la forma de onda se estabiliza en una constante de corriente $i(t) = \frac{3}{5}$.

Una vez diseñadas las secuencias en la interfaz, se implementan con estudiantes a fin de fomentar un proceso de aprendizaje. El experimento consistió en la realización de prácticas divididas en seis fases:

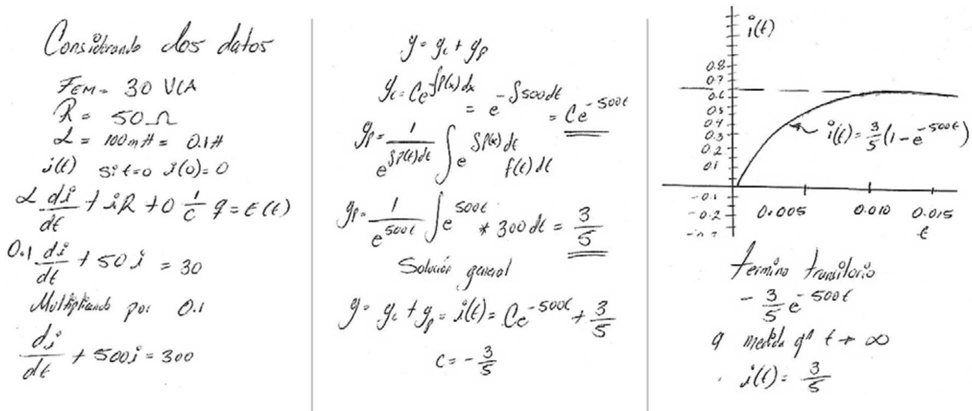
1) *Introducción al manejo de componentes eléctricos y hardware.* Conexión y simulación de circuitos eléctricos de primer y segundo orden aplicando las leyes de Kirchhoff en la modelización de arreglos RL, RC y RLC.
2) *Repaso del modelado mediante software.* Los temas abordados fueron las funciones de transferencia entrada-salida en circuitos eléctricos, el comportamiento del voltaje y la corriente, las constantes de tiempo y las respuestas de sistemas de primer y segundo orden.
3) *Modelado de la función de transferencia.* Identificación de la respuesta de circuitos eléctricos para los sistemas de primer (RL o RC) y segundo orden (RLC), configuración de hardware, software, así como la validación del modelo en el dominio del tiempo.
4) *Interpretación de resultados*. Se estudiaron los gráficos de la modelización del comportamiento del RLC en el dominio del tiempo ante el estímulo de un escalón unitario.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

5) *Comunicación de la interfaz de usuario.* Se realiza a través de Simulink de Matlab mediante una tarjeta de control.
6) *Conexión directa entre el software (la interfaz experimental) y el hardware (los componentes eléctricos y la tarjeta de control).* Se entabla de formas física y simulada.

Las prácticas fueron desarrolladas de forma mixta: se realizaron de forma virtual la introducción, el manejo y el diseño de la plataforma; se llevaron a cabo en modo presencial el ensamble, las conexiones y la implementación física. En las etapas físicas, los estudiantes usaron capacitores, resistencias e inductores de diferentes denominaciones en el diseño de circuitos de segundo orden; así, fueron capaces de generar los tres tipos de respuesta: sistema amortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

Con base en una de las propuestas de diseño RL (Figura 4) y los datos proporcionados, los estudiantes consiguieron desglosar el comportamiento del circuito (Figura 4A). Para resolver el sistema (Figura 3), algunos optaron por aplicar ecuaciones diferenciales a una ecuación lineal homogénea estándar (Figura 4B), en lugar de recurrir al método de Laplace ejecutado por la plataforma experimental. Al final del modelado, lograron identificar el término transitorio que forma parte del comportamiento de la función de corriente; dedujeron que, cuando *t* tiende a infinito, la corriente se fija en 3/5; en otras palabras, la armónica se estabiliza (Figura 4C).



A) Desglose del comportamiento del circuito *RL*.

B) Forma estándar de la ecuación lineal homogénea

C) Comportamiento de la función de corriente *i(t)*

FIGURA 4. Modelado del comportamiento de la función de corriente *i(t)* de un circuito *RL*.

Discusión de resultados

En lo que respecta a la relación con las acciones cognitivas para la generación de estrategias de enseñanza-aprendizaje y con base en los análisis de las secuencias didácticas, los datos del desempeño de los alumnos se organizaron dentro de tres modalidades. La nomenclatura se desglosa como sigue: SMP (solución del modelado propuesto), RMI (resolución mediante la interfaz) y RILP (resolución impresa a lápiz y papel). Puede apreciarse que los participantes tuvieron mayor dificultad para dilucidar sus respuestas y modelados en el rubro RILP con respecto al SMP (Tabla 4).

Tabla 4.

Modalidades registradas bajo ítems en la organización de datos. Fuente: elaboración propia.

		Estudiante 1			*Estudiante 2*			*Estudiante 3*			*Estudiante 4*			*Promedio por modalidad*
Ítems	*Modalidades evaluadas*	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	Mod. / Prom.
Actividad 1. Comportamiento de la función de transferencia	1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	RMI: A, RIL: A
	2	A	A	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	RMI: A, RIL: B
	3	A	A	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	RMI: A, RIL: B
	4	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B	B	RMI: B, RIL: B
	5	A	B	A	A	B	B	A	B	B	A	B	B	RMI: B, RIL: B
	6	A	A	B	A	B	B	A	B	B	A	B	A	RMI: B, RIL: B
	7	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B	B	RMI: B, RIL: B
	8	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	RMI: A, RIL: A
	9	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B	B	RMI: B, RIL: B
	10	A	B	B	A	B	B	A	A	B	A	B	B	RMI: B, RIL: B
Actividad 2. Desglose del comportamiento de la armónica.	1	A	A	B	A	B	B	A	A	B	A	A	B	RMI: A, RIL: B
	2	A	B	B	A	B	B	A	A	B	A	A	B	RMI: A, RIL: B
Promedio		12A	6A 6B	3A 9B	12A	5A 7B	2A 10B	12A	12A 5B	2A 10B	12A	6A 6B	3A 9B	

Nota: Nomenclatura: B solo responde; A analiza y modela correctamente el problema. Modalidades: solución al modelado propuesto (SMP), resolución mediante la interfaz (RMI), resolución impresa a lápiz y papel (RILP).

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

El desglose considera los elementos descritos en el marco teórico, incluyendo el descriptivo y el restrospectivo. En cuanto a la categoría A, la actividad 1 (Tabla 5) se evaluó en función de la construcción y reconstrucción del conocimiento (A1), el pensamiento abstracto (A2) y los procesos cognitivos (A3).

Tabla 5.
Categoría actitudinal (A): guía de observación. Fuente: elaboración propia.

	Estudiante 1			Estudiante 2			Estudiante 3			Estudiante 4			Promedio por modalidad
Modalidades evaluadas / Parámetros a evaluar	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	Prom. / Mod.
(A1) Construcción y reconstrucción del conocimiento	3	3	1	3	2	2	3	3	3	3	3	3	RMI: 2.75 RILP: 2.25
(A2) Pensamiento abstracto (velocidad de síntesis e interpretación de la información)	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	RMI: 3 RILP: 2
(A3) Procesos cognitivos (relacionar, evaluar, deducir, identificar e inferir en tareas de aprendizaje)	3	3	2	3	3	2	3	3	1	3	2	2	RMI: 2.75 RILP: 1.75
Promedio	3	3	1.7	3	2	2	3	3	2	3	2.7	2.4	

Nota: Nomenclatura: 1, deficiente; 2, regular; 3, eficiente.

En la categoría A, el aspecto A1 mantiene un balance en las tres modalidades registradas (SMP, RMI, RILP), a diferencia del A3, que presenta carencias en la modalidad RILP. En el aspecto A2 se observó un desempeño general superior a los aspectos A1 y A3, debido a las habilidades y destrezas propias de la formación académica de los participantes.

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Tabla 6.

Categoría conceptual (C): para el cuestionario. Fuente: elaboración propia.

	Estudiante 1			Estudiante 2			Estudiante 3			Estudiante 4			Promedio por modalidad
Modalidades evaluadas / Parámetros a evaluar	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	SMP	RMI	RILP	Prom. / Mod.
Abstracción del estudiante													
(C1) Habilidad al modelar	3	3	2	3	3	2	3	3	3	3	2	3	RMI: 2.75 RILP: 2.5
(C2) Pensamiento para recrear y realizar una modelación matemática	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	2	RMI: 3 RILP: 2.5
(C3) Abstracción en los procesos de construcción y del modelado del sistema	3	3	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	RMI: 3 RILP: 2.5
(C4) Lógica aplicada	3	3	2	3	2	3	3	3	3	3	3	3	RMI: 2.75 RILP: 2.75
Interpretación del estudiante													
(C5) Acción (acciones tomadas)	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3	2	RMI: 2.75 RILP: 2.25
(C6) Proceso (procesos desarrollados)	3	3	2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	RMI: 2.5 RILP: 2
(C7) Objeto (uso de herramientas y habilidades certeras)	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	3	2	RMI: 3 RILP: 2.25
Promedio total	3	2.8	2.4	3	2.7	2.3	3	3	2.4	3	2.7	2.4	

Al analizar el cuestionario para la categoría C (Tabla 6), se evaluaron las destrezas del estudiante: la abstracción, es decir, la lógica aplicada para diseñar y ejecutar el modelado del sistema; la interpretación, en otras palabras, las acciones tomadas, los procesos desarrollados y la aplicación certera de herramientas y habilidades. Es crucial señalar que los resultados de la segunda destreza están por debajo del estándar con respecto a la primera y que, de las tres modalidades, hay más insuficiencia en los métodos tradicionales RILP debido a varios factores, entre los que predomina la desconcentración de los participantes.

Tabla 7.

Categoría procedimental (P): lista de cotejo. Fuente: elaboración propia.

	Estudiante 1			Estudiante 2			Estudiante 3			Estudiante 4			Promedio por modalidad
Modalidades evaluadas / Parámetros a evaluar	SRD	FD	FI	SRD	FD	FI	SRD	FD	FI	SRD	FD	FI	Prom. / Mod.
(1) Noción de modelación matemática respecto a la situación-problema	3	2	3	3	2	2	3	2	3	3	2	3	FD: 2 FI: 2.75
(2) Proceso de cognición desarrollado durante la modelización matemática	3	2	3	3	2	2	3	2	3	3	2	3	FD: 2 FI: 2.75
Promedio	3	2	3	3	2	2	3	2	3	3	2	3	

Nota: Nomenclatura para máximos valores permisibles por categoría: 1, deficiente; 2, regular; 3, eficiente. Sistema real desglosado (SRD), fase de diseño (FD), fase de implementación (FI).

Conviene señalar la categoría P, que contempla la lista de cotejo y la actividad 2 (Tabla 7). Los parámetros a evaluar son la noción de modelación matemática respecto a la situación-problema y el proceso de cognición desarrollado durante la modelización matemática. Se toman en consideración las fases de diseño (FD) y de implementación (FI); la modalidad control se denomina sistema real desglosado (SRD). De forma similar, se observó que para los estudiantes existen obstáculos en la primera fase cuando no cuentan con una interfaz de usuario o software, empero, una vez que proceden a la implementación, la dificultad disminuye, potencializando al máximo sus habilidades matemáticas.

La validación funcional de las secuencias didácticas se ejecuta a través de los instrumentos de análisis y recolección de datos en la interfaz de usuario. Tal como lo indican Vesga y De Losada (2018), "se requiere incorporar cambios en los diseños curriculares de los docentes de acuerdo a los fines de la educación matemática". El presente estudio se basa en la solución a un modelo propuesto (SMP), con el propósito de proveer un desarrollo a nivel de competencia en los estudiantes.

En palabras de Mentzer *et al.* (2014), puede decirse que el modelado matemático predictivo es esencial para el diseño de secuencias en estudiantes en formación; por ende, coinciden con Lu y Kaiser (2022) en sus trabajos acerca del modelado matemático basado en las habilidades que muestran los estudiantes en la

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

resolución de problemas. En los procesos cognitivos, la investigación de Hidayat *et al.* (2018) mostró que los logros en la metacognición, que incluyen la estrategia cognitiva y la autoevaluación, tienen un efecto positivo en las competencias del análisis y el entendimiento del modelado matemático. En esta investigación referente a los procesos cognitivos, se evaluó el rendimiento del modelado involucrando diversos componentes, como la creatividad y la originalidad, con el fin de potencializar las habilidades de pensamiento que pueden desarrollar los pupilos.

Conclusiones

El objetivo principal del estudio consistió en determinar los procesos de cognición que pueden desarrollar los estudiantes de educación superior mediante modelizaciones matemáticas conforme a la teoría HPAL. Tras el análisis de sus respuestas al modelado matemático propuesto, se puede afirmar que se cumplió con el objetivo, ya que fue posible categorizar las habilidades del pensamiento generadas en el proceso, tanto con el uso de una infraestructura experimental como a través del método tradicional de enseñanza-aprendizaje. En específico, se caracterizaron las acciones cognitivas y metacognitivas ejecutadas por los estudiantes con la implementación de una comparativa que permitió detectar y registrar las HPAL en el marco de cada modalidad empleada. Según los resultados empíricos, se determinó que los logros en la metacognición en la enseñanza tradicional no superaron el desempeño apoyado por la infraestructura experimental, sobre todo en la fase de diseño e implementación al momento del análisis y entendimiento del modelado matemático de los participantes. La categorización de las actividades de análisis, interpretación y argumentación expuesta por los alumnos en el aula aportó una contribución valiosa a la matemática educativa. Este trabajo exhibe cómo en la educación superior actual, la rápida mutabilidad del conocimiento y el uso generalizado de la tecnología demandan nuevas nociones y métodos vanguardistas para planificar y organizar sesiones en clase; en última instancia, esta modernización educativa se traduce en instruir a los educandos a tomar la iniciativa y proactividad en su formación.

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Akmar, N., Nadhirah, N., Tasneem, A., Sabrina, I. y Nasuha, F. (2021). Design and development EduPocket A+. *Momentum: Physics Education Journal*, *5*(1), 94-100. https://doi.org/10.21067/mpej.v5i1.5700

Akpur, U. (2021). The Predictive Level of Cognitive and Meta-Cognitive Strategies on Academic Achievement. *International Journal of Research in Education and Science*, *7*(3), 593-607. https://doi.org/10.46328/ijres.1444

Astorga, J. M. (2014). Aplicación de modelos de regresión lineal para determinar las armónicas de tensión y corriente. *Ingeniería Energética*, *35*(3), 234-241. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5131934

Bakar, Z., Salim, F., Zainuddin, N., Noor, N. y Mohemad, R. (2021). Analysis of Web-based Learning Interface Design based on Experts Verification for Higher Education. *JOIV International Journal on Informatics Visualization*, *5*(2), 134-138. https://doi.org/10.30630/joiv.5.2.410

Bocanegra, S., Montoya, O. y Molina Cabrera, A. (2020). Estimación de parámetros en transformadores monofásicos empleando medidas de tensión y corriente. *Revista UIS*, *19*(4), 63-76. https://doi.org/10.18273/revuin.v19n4-2020006

Bossio, J. L., Santa Ramírez, Z. M. y Jaramillo, C. M. (2023). Un análisis sobre las barreras de la modelación matemática en la práctica educativa del profesor de básica primaria. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (68), 255-285. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/1368

Bravo, J. y Rodríguez, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática en la carrera de ingeniería informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33*(1), 400-409. https://www.clame.org.mx/documentos/alme33_1.pdf

Bueno Hernández, R., Naveira Carreño, W. y González Hernández, W. (2020). Los conceptos matemáticos y sus definiciones para la formación de los ingenieros informáticos para la sociedad. *Universidad y Sociedad*. Revista Científica de la Universidad de Cienfuegos *12*(6), 444-452. http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v12n6/2218-3620-rus-12-06-444.pdf

Coughlan, T. (2020). The use of open data as a material for learning. *Educational Technology Research and Development*, 68, 383-411. https://doi.org/10.1007/s11423-019-09706-y

Del Río, O. (2011). El proceso de investigación: etapas y planificación de la investigación. En L. Vilches (Coord.), *La investigación en comunicación. Métodos y técnicas en la era digital* (pp. 67-96). Gedisa.

Dijkstra, T. y Henseler, J. (2015). Consistent Partial Least Squares Path Modeling. *MIS Quarterly, 39*(2), 297-316. https://www.jstor.org/stable/26628355

Duarte, D. M., Pedro, L. y Santos, C. (2021). The use of mobile applications in higher education classes: a comparative pilot study of the students' perceptions and real usage. *Smart Learning Environments, 8*, art. 14. https://doi.org/10.1186/s40561-021-00159-6

Ejiyi, C., Deng, J., Ejiyi, T., Salako, A., Ejiyi, M. y Anomihe, C. (2021). Design and Development of Android Application for Educational Institutes. *Journal of Physics: Conference Series*, 1769, 1-8. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1769/1/012066/meta

Ergashev, J., Ergasheva, M. y Samatova, G. (2021). Application of Information and Communication Technologies in Solving Geometric Problems. *Annals of the Romanian Society for Cell Biology*, *25*(3), 4191-4197. http://annalsofrscb.ro/index.php/journal/article/view/1909

Fiallos, G. (2021). La Correlación de Pearson y el proceso de regresión por el Método de Mínimos Cuadrados. *Ciencia Latina. Revista Multidisciplinar*, *5*(3), 2491-2509. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i3.466

Gu, C. (2011). QLMOR: A Projection-Based Nonlinear Model Order Reduction Approach Using Quadratic-Linear Representation of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, *30*(9), 1307-1320. https://doi.org/10.1109/TCAD.2011.2142184

Hidayat, R., Zulnaidi, H. y Syed Zamri, S. (2018). Roles of metacognition and achievement goals in mathematical modeling competency: A structural equation modeling analysis. *PLoS one, 13*(11), e0206211. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0206211

Jaramillo, L. y Puga, L. (2016). El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophia. Colección de Filosofía de la Educación*, (21), 31-55. https://doi.org/10.17163/soph.n21.2016.01

Kaiser, G. y Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. En G. A. Stillman, W. Blum y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 129-149). https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, *20*(2), 65-89. https://www.redalyc.org/pdf/405/40512062004.pdf

Lee, K. y Sim, J. (2021). Design and Development for Mobile Adaptive Layer in Mobile Learning Applications. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, *10*(2), 550-556. https://www.ijert.org/research/design-and-development-for-mobile-adaptive-layer-in-mobile-learning-applications-IJERTV10IS020242.pdf

Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling work as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM-Mathematics Education, 54*, 67-81. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4

Marakana, M., Parmar, A. y Shah, P. (2021). A Smart Android Application with Machine Learning Extension to Operate Computer and IoT Devices. En *2021 2nd International Conference for Emerging Technology (INCET)* (pp. 1-5). https://doi.org/10.1109/INCET51464.2021.9456382

Marbouti, F. y Strobel, J. (2013). Prototyping an Interactive Application to Support Collaborative Open-Ended Problem Solving for Precollege Students. En *2013 ASEE Annual Conference & Exposition* (pp. 23.1005.1-23.1005.8).

Mentzer, N., Huffman, T. y Thayer, H. (2014). High school student modeling in the engineering design process. *International Journal of Technology and Design Education, 24*, 293-316. https://doi.org/10.1007/s10798-013-9260-x

Niss, M. (2017). Obstacles Related to Structuring for Mathematization Encountered by Students when Solving Physics Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1441-1462. DOI: 10.1007/s10763-016-9754-6

Niss, M. y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Fonseca, S. (2023). Experiencias Docentes Metodología para la enseñanza de la modelación matemática de problemas de la profesión, vía ecuaciones diferenciales. *Pensamiento Matemático*, *13*(1), 25-37.

Popa, C. R. (2017). High output dynamic range exponential function synthesizer. *Microelectronics Journal*, *63*, 123-130. https://doi.org/10.1016/j.mejo.2017.03.013

Ren, Y., Allenmark, F., Müller, H. J. y Shi, Z. (2021). Variation in the "coefficient of variation": Rethinking the violation of the scalar property in time-duration judgments. *Acta Psychologica, 214*, art. 103263. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2021.103263

Recio, R. (2018). ¿Cómo cambiar las creencias y el pensamiento utilizando los contenidos de la modelación matemática en la formación de ingenieros? *Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma*, *14*(5), 106-117. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6759989

Sánchez, M., Fernández, M. y Díaz, J. (2021). Técnicas e instrumentos de recolección de información: análisis y procesamiento realizado por el investigador cualitativo. *Revista Científica UISRAEL, 8*(1), 107-121. https://doi.org/10.35290/rcui.v8n1.2021.400

Sansolis, E. B. y Leonoras, C. S. (2021). Viability of a technology-based education afterschool program. *Technium. Social Sciences Journal*, *19*. https://techniumscience.com/index.php/socialsciences/article/view/3170

Stošić, L., Dermendzhieva, S. y Tomczyk, L. (2020). Information and communication technologies as a source of education. *World Journal on Educational Technology: Current Issues*, *12*(2), 128-135. https://doi.org/10.18844/wjet.v12i2.4815

Sudarno y T Widiharih (2021). Determination parameter of exponential function based positive number. *Journal of Physics: Conference Series, 1943*, art. 012152. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1943/1/012152

Sulakono, B., Sarkum, S., Munandar, M., Masrizal, M. e Irmayani, D. (2020). The Diversity of Labuhanbatu Community Culture in Android-Based Applications. *International Journal of Advances in Data and Information Systems, 1*(2), 60-68. https://doi.org/10.25008/ijadis.v1i2.182

Tolan, S., Pesole, A., Martínez Plumed, F., Fernández Macías, E., Hernández Orallo, J. y Gómez, E. (2021). Measuring The Occupational Impact of AI: Tasks, Cognitive Abilities and AI Benchmarks. *Journal of Artificial Intelligence Research*, *71*, 191-236. https://doi.org/10.1613/jair.1.12647

UNESCO (2022). *Educación superior*. https://www.unesco.org/es/higher-education

Vesga, G. y De Losada, M. (2018). Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en ejercicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 243-267. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6909

Xu, Q., Wang, N., Tian, B., Xing, L. y Bai, W. (2020). *Challenges and Countermeasures of Education in the Era of Big Data*. En *PICEIT 2020: Proceedings of the 2020 9th International Conference on Educational and Information Technology* (pp. 215-218). https://doi.org/10.1145/3383923.3383964

Artículo invitado. | Recibido el 10 de abril de 2025, aceptado el 10 de abril de 2025. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Modelado Matemático en la formación del docente de matemáticas

Mathematical Modeling in the training of mathematics teachers

Jesús Antonio Larios Trejo*

Universidad de Colima, Colima, México

*jesus_larios@ucol.mx

04

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Larios Trejo, J. A. (2025). Modelado matemático en la formación del docente de matemáticas. *PädiUAQ, 8*(15), 1-18.

Este artículo fue invitado por el comité editorial y, en consecuencia, está exento de revisión por pares a doble ciego. Su contenido es responsabilidad exclusiva de los autores.

Resumen

El modelado matemático proporciona a los futuros docentes una comprensión práctica de los conceptos matemáticos, permitiéndoles aplicarlos por medio de actividades que refieran a distintos campos del conocimiento, a fin de instruir en matemáticas de forma efectiva. La enseñanza de esta disciplina debe trascender la simple memorización de fórmulas e implicar al estudiantado en la resolución de problemas reales a través de modelos matemáticos. Este trabajo exhibe la aplicación de un experimento en el cual se involucra la química con el fin de desarrollar habilidades de modelado por medio de un enfoque de experimentación y descubrimiento. Se tratan la propuesta y las actividades, junto a otros requisitos para poder ejecutarlas con los profesores en formación dentro de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas impartida en la Universidad de Colima, México. Es necesario resaltar que el modelado matemático promueve la formación del pensamiento crítico y las habilidades analíticas en los docentes en formación, preparándolos para enfrentar los diversos desafíos que pueden suscitarse en el aula. Se concluye que la integración del modelado matemático en los programas de formación docente es elemental, pues contribuye a incrementar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en niveles educativos básicos y superiores. Su impacto es incluso más beneficioso cuando se entabla una conexión estrecha con otras disciplinas.

Palabras clave: didáctica, enseñanza de las matemáticas, experimento, modelado matemático, profesor de matemáticas, transversalidad de las ciencias.

Abstract

Mathematical modeling provides future professors with a practical comprehension of mathematical concepts, allowing them to apply these notions through activities that connect with other areas of knowledge in order to teach mathematics effectively. The teaching of this discipline should go beyond the memorization of formulas and involve students in solving real-world problems through mathematical models. This paper presents the application of an experiment that incorporates chemistry with the aim of developing modeling skills by applying a methodology focused on experimentation and discovery. The proposal, activities, and elements deployed for its implementation with preservice teachers in the Bachelor's Degree in Mathematics Education imparted at the University of Colima, Mexico, are detailed. It is important to highlight that mathematical modeling promotes the development of critical thinking and analytical skills in preservice teachers, setting them up for the challenges that may occur in the classroom. The study concludes that integrating mathematical modeling into teacher education programs is essential, as it contributes to the quality of mathematics education at both basic and higher levels. And its effects are more beneficial insofar as strong links are established with other disciplines.

Keywords: didactics, mathematics teaching, experiment, mathematical modeling, mathematics teacher, transversality of sciences.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Conociendo el contexto del proyecto

El plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas (LEM) de la Universidad de Colima busca ofrecer una formación integral con perspectiva humanista, que abarque tanto el campo disciplinar como las competencias específicas. En consecuencia, se enfoca en generar ciudadanos comprometidos con su desarrollo personal, así como con su entorno social, al tiempo que responde las necesidades primarias del sistema educativo. A partir de lo anterior, la LEM tiene por objetivo:

> formar profesionales con competencias que les permitan identificar y resolver problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para ejercer la docencia, desarrollar proyectos, generar ambientes de aprendizaje, utilizar elementos técnico-metodológicos y medios didácticos innovadores, que promuevan la alfabetización matemática, con alto sentido de responsabilidad social. (Universidad de Colima, 2015, p. 49)

Entre enero y julio de 2024, en el sexto semestre, se ofertó la asignatura optativa de Modelado matemático, con el objetivo de:

> [contribuir] al desarrollo de competencias que permiten identificar y resolver problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para ejercer la docencia con base en el análisis y resolución de situaciones de diversos contextos utilizando diversos pensamientos matemáticos. (Universidad de Colima, 2015, p. 181)

La formación de docentes en matemáticas debe contemplar el desarrollo de habilidades de modelado matemático, puesto que resultan fundamentales para su práctica profesional. Contar con estos elementos en el programa formativo les permitirá a los profesores, a la postre, encaminar a sus estudiantes en la resolución de problemas del mundo real (Pollak, 2007). De este modo, se busca promover situaciones que sean familiares para el alumnado de los distintos niveles educativos.

Tales habilidades se fortalecen al introducir al futuro profesor de matemáticas en situaciones de modelado. Como lo apuntalan Kaiser y Schwarz (2006), “los futuros docentes deben experimentar el proceso de modelización matemática para poder comprender y enseñar cómo las matemáticas pueden aplicarse a problemas del mundo real” (p. 89). Por tal razón, además de las asignaturas de corte disciplinar, resulta imperativo integrar materias de enfoque pedagógico en las que se vinculen las estrategias de enseñanza con la disciplina matemática.

Marco teórico

Modelación matemática

El modelado matemático tiene un propósito patente en los distintos niveles educativos durante la formación básica o media superior, pero también ostenta prominencia en áreas como las ingenierías y las licenciaturas. Su valor radica en que permite captar la atención de los pupilos hacia nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, acercándolos a contextos más contundentes para ellos. Por dicha razón, se promueve emplear escenarios reales que aprovechen el potencial del modelado matemático para que el alumno comprenda y resuelva problemas de su entorno, favoreciendo el aprendizaje sobre la pertinencia de las matemáticas (Kaiser y Stender, 2013).

Según Pollak (1977), la modelación hace posible visualizar los problemas y motiva a la comunidad educativa a solucionar situaciones cercanas a su entorno. Por su parte, Greefrath y Vorhölter (2016) describen la modelación como un proceso cíclico que abarca tres momentos: el mundo real, el mundo matemático y el regreso al mundo real. Además, Blum (2015) enfatiza que "la modelización matemática no es solo una herramienta para resolver problemas, sino un medio para establecer una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y su aplicación en contextos diversos" (p. 187).

Para el abordaje del modelado, Blum y Leiß (2007) proponen el siguiente procedimiento cíclico:

a) Comprender la instrucción y la situación real (modelo de situación).
b) Formular suposiciones y simplificar el modelo de la situación (construcción de un modelo real).
c) Matematizar el modelo real, es decir, elaborar un modelo matemático en función de la información obtenida.
d) Trabajar dentro del modelo matemático (resolución de los procesos matemáticos).
e) Interpretar la solución (el problema no se resuelve solamente con un número, sino mediante una reflexión sobre la situación).
f) Validar la solución interpretada (corroborar resultados y conclusión).
g) Exponer el resultado, presentando el proceso y los hallazgos.

Es menester enfatizar que se trata de un mecanismo cíclico: la situación o la reflexión pueden acarrear un nuevo proceso de modelación. Tras revisar a diversos

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

autores que abordan el proceso del modelado matemático, se identifican varios puntos de coincidencia:

- *Comprensión del problema:* Blum y Niss (1991) mencionan que, en un primer momento, se debe comprender la situación problemática y definir claramente los objetivos a alcanzar. En esta primera fase se identifican y enmarcan las tareas dentro de un contexto del mundo real, se recopilan datos relevantes, se clarifican las necesidades y se determina el propósito del modelado.
- *Construcción del modelo:* según Lesh y Doerr (2003), en esta etapa, a partir de la información recabada, se construye un modelo mediante la representación matemática de la situación real. A tal efecto, los sujetos deben disponer de la información, plantear ecuaciones, identificar variables y establecer las relaciones matemáticas que puedan proporcionar sentido a la problemática.
- *Resolución del problema:* es el momento donde se aplican los conocimientos matemáticos disponibles, lo cual implica el conocimiento del algebra, cálculo, estadística u otros recursos pertinentes que habiliten comprender el fenómeno o la situación planteada. Pollak (2007) sostiene que la resolución del modelo es una secuencia ciclica de prueba y refinamiento orientada a alcanzar resultados satisfactorios.
- *Interpretación de los resultados:* Kaiser y Stender (2013) explican que interpretar los resultados es fundamental para que el modelo sea funcional. No se trata únicamente de obtener soluciones o realizar proyecciones, sino de contextualizar su significado en el marco de la situación planteada.
- *Validación del modelo:* Blum y Leiß (2007) subrayan que la validación es primordial, ya que asegura que el modelo sea aplicable para la situación planteada, pero que además sea capaz de adaptarse a diferentes variables y predecir comportamientos. Es en este momento cuando se comparan las predicciones del modelo contra la realidad con el fin de evaluar su precisión y fiabilidad.
- *Refinamiento y reiteración:* Los modelos requieren, frecuentemente, ajustes y mejoras. Este paso consiste en revisar los procesos previos, realizar modificaciones necesarias y plantearse preguntas orientadas a esclarecer desde el modelo hasta su aplicación.
- *Comunicación del modelo:* Blum y Borromeo (2009) destacan la importancia de transmitir los resultados de forma clara y comprensible a públicos académicos y no especializados. La finalidad es que los hallazgos puedan entenderse con precisión y contribuyan a la comprensión de situaciones de todo tipo.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Tales pasos ofrecen una estructura general para abordar problemas de modelado matemático, al mismo tiempo que facilitan una revisión sostenida del modelo y de la situación planteada. La enseñanza en la modelización matemática se basa en tres pilares clave: algebraico, numérico y gráfico, mediante los cuales se pueden visualizar los diferentes aspectos del problema. Dichos enfoques impulsan a los los alumnos a experimentar con diferentes representaciones de una misma situación, lo que enriquece su comprensión y su capacidad de resolución. Además, al favorecer la internalización profunda de los conocimientos matemáticos, incentivan a los estudiantes a contemplar los problemas a partir de múltiples puntos de vista, aspecto esencial para su desarrollo cognitivo y su capacidad para aplicar el conocimiento en contextos del mundo real. Conforme a ello, Blum (2015) enfatiza que la modelización matemática debe concebirse como una actividad cognitiva crucial, orientada a la creación de herramientas que permitan al alumnado entender y manejar de manera eficaz las situaciones reales, presentes o futuras.

Según Blum, el propósito de esta actividad es fomentar una competencia matemática relevante, valiosa para la cultura y la sociedad, al tiempo que compatible con los fines educativos. Tal visión cognitiva de la modelización refuerza la importancia de integrar estas actividades en la formación docente, ya que prepara a los futuros maestros para guiar a sus alumnos en la asimilación y aplicación de las matemáticas de manera que impacte en su vida cotidiana y en su relación con el mundo.

Proyectos educativos

En la revisión literaria se advierte que, al abordar el modelado, se apuntala consistentemente la participación activa tanto de la comunidad estudiantil como del profesorado, lo cual se relaciona con un aprendizaje sustentado en la construcción del conocimiento. Empero, el modelado puede articularse dentro de un enfoque de aprendizaje basado en proyectos, una de las líneas promovidas actualmente por la Secretaría de Educación Pública en México. En tal sentido, Guerrero y Terrones (2003) establecen que:

> Los proyectos permiten a los alumnos desarrollar competencias, así como habilidades específicas para planificar, organizar y llevar a cabo una tarea común en entornos reales. Así, se organizan en equipos de trabajo, asumen responsabilidades individuales y grupales, realizan indagaciones o investigaciones, solucionan problemas, construyen acuerdos, toman decisiones y colaboran. (p. 53)

Por otro lado, Maass y Engeln (2018) refieren que los diseños de proyectos enfocados en los experimentos de enseñanza se resumen en tres puntos:

- La enseñanza se orienta a que el tema de investigación tenga relevancia para los estudiantes y su vida cotidiana; por ello, los entornos de aprendizaje deben ser auténticos y estar conectados con la realidad.
- Se fomenta que los alumnos observen fenómenos, formulen sus propias preguntas, seleccionen herramientas pertinentes, realicen experimentos, busquen explicaciones, interpreten y evalúen soluciones; dentro de este proceso, los estudiantes asumen un rol activo en su propio aprendizaje.
- La dinámica del aula se transforma; en lugar de estar centrada en el docente, se centra en el estudiante, promoviendo su participación activa y autonomía en el proceso educativo.

Según Santana Ortega *et al.* (2018), la experimentación en matemáticas implica realizar actividades físicas que permitan a los pupilos interactuar directamente con sistemas experimentales, ya sea en contextos químicos o físicos. Dicha interacción favorece la construcción del conocimiento matemático y el fortalecimiento de las habilidades del pensamiento científico. Por otra parte, complementan esta visión al destacar que el aprendizaje debe analizarse en contextos específicos y utilizando estrategias y herramientas que integren los procesos de aprendizaje, enseñanza y evaluación de forma articulada.

La investigación de diseño en la enseñanza y el modelado matemático presenta características fundamentales orientadas a optimizar el aprendizaje del alumnado. Conforme a Blum (2015), el centro debe ser el estudiante, y la gestión del aula debe potenciar el tiempo, los recursos y fomentar el trabajo colaborativo. Dicha perspectiva promueve un entorno social e intelectualmente estimulante, dentro del cual los errores se resiginifican como oportunidades de aprendizaje. Así, se refuerza la idea de que una respuesta incorrecta puede ser la puerta correcta a nuevas preguntas.

Además, es menester que los estudiantes se mantengan cognitivamente activos. Dicho aspecto implica trascender la observación e involucrarse de manera consciente y reflexiva en el proceso de modelado, asegurando un equilibrio entre la autonomía del alumno y la guía del profesor. La metacognición ocupa un papel angular en esta causa, ya que abre el análisis de las propias estrategias de aprendizaje y ajustarlas para desarrollar una comprensión más profunda. El empleo de ejemplos variados, asimismo, tanto en el ámbito matemático como en contextos reales, resulta esencial para evitar la dependencia de un solo escenario y favorecer la transferencia del conocimiento a múltiples situaciones.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Otro aspecto destacado es la necesidad de fomentar soluciones individuales a las tareas, lo cual diversifica los enfoques y permite comparaciones desde un nivel metacognitivo. Tal perspectiva favorece la diferenciación interna en el aula y refleja la naturaleza dinámica y plural de las matemáticas. Cabe añadir que las competencias en modelado se desarrollan progresivamente, comenzando desde la educación primaria y extendiéndose de manera continua mediante una práctica repetitiva e integrada que busca un equilibrio entre las subcompetencias y la competencia global en modelado.

La evaluación debe alinearse con los objetivos del modelado y sus aplicaciones, empleando métodos variados para llevar a cabo un diagnóstico de las fortalezas y las áreas de oportunidad del estudiantado. Por consecuencia, el presente enfoque implica también la adquisición paralela de competencias, creencias y actitudes hacia las matemáticas. Por ende, las tecnologías digitales y computadoras se consolidan como herramientas dentro de la actividad de modelado, ampliando el ciclo tradicional al incorporar un tercer ámbito: el mundo tecnológico.

Diversos estudios de caso han demostrado que una enseñanza de calidad puede expandir las creencias del alumnado sobre las matemáticas y fortalecer su capacidad para comprender y aplicar modelos correspondientes. Investigar el diseño de la enseñanza del modelado constituye un acercamiento integral que exige la activación cognitiva y metacognitiva. Asimismo, la incorporación de contextos variados y auténticos, la promoción de soluciones individuales y la integración de tecnologías digitales resultan imperativas para el asentamiento de competencias a largo plazo.

Metodología

La presente investigación de corte exploratorio permite describir y analizar cómo se adquieren los conocimientos matemáticos mediante la observación y la aplicación de una secuencia didáctica. A través de una aproximación cualitativa, se buscó describir los resultados tras la ejecución con alumnos de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, de la Facultad de Ciencias de la Educación. Participaron activamente 18 alumnos del sexto semestre, quienes desempeñaron las actividades propuestas durante tres semanas de clases. En dicho periodo, se llevó a cabalidad una secuencia de fases que facilitaron observar el proceso de modelado matemático correspondiente a la cristalización de sales minerales. El análisis de los datos consistió en la descripción de cada una de las fases implementadas en la secuencia didáctica.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Diseño y ejecución de la creación de las “rocas mágicas”

Se diseñó una secuencia didáctica orientada al desarrollo de un modelo que integra conocimientos de ciencias naturales y matemáticas. Para ello, se optó por la ejecución de experimentos con la ayuda del kit *Magic Rocks*, comercializado por el Instituto Smithsonian. Este material permite cultivar cristales, lo que resulta atractivo para niños y niñas al posibilitar la creación de un jardín de cristales brillantes. La secuencia se esquematiza en la Figura 1.

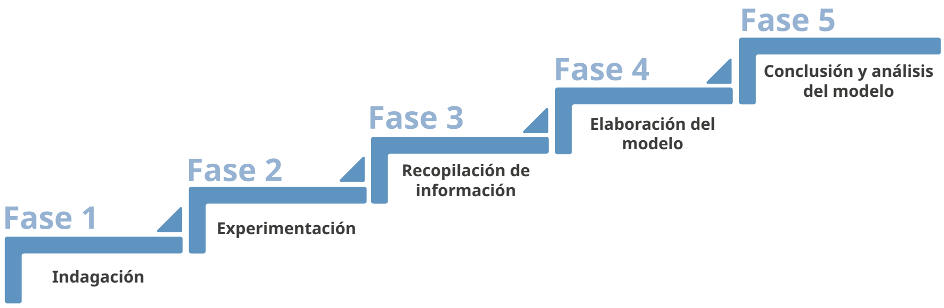


FIGURA 1. Proceso del modelado con énfasis en química.

Fase 1: Indagación

El experimento base propuesto se denomina “Cultivo de rocas mágicas” y tiene como propósito que infantes y adultos observen en tiempo real la formación de cristales (Figura 2). Esta actividad representa un ejemplo del proceso de cristalización, un fenómeno natural en el que las partículas disueltas en una solución o en un material fundido se organizan de manera estructurada y repetitiva, dando lugar a la configuración de cristales tras un tiempo dado. Tal lapso será aprovechado por los alumnos para observar y medir el crecimiento de los cristales, considerando variables como la temperatura y las cantidades de solución empleada. El kit *Magic Rocks* es apto para comunidades estudiantiles de diversas edades y contiene los elementos indispensables para ejecutar el procedimiento de forma segura y controlada, entre ellos:

1) *Sales metálicas:* pequeños fragmentos que se colocan en el fondo del recipiente y actúan como puntos de nucleación, semillas desde las cuales emergen y crecen los cristales.
2) *Imagen de fondo:* ilustración decorativa que permite observar la formación de los cristales y ofrece un contraste visual que resalta el fenómeno.
3) *Solución mágica:* mezcla saturada de compuestos químicos que, bajo las condiciones adecuadas, inicia el proceso de cristalización.
4) *Silicato de sodio:* componente clave que regula la velocidad y la forma del crecimiento cristalino; da pie a una formación estructurada y observable.

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

5) *Hoja de etiquetas:* conjunto de elementos adicionales con los cuales identificar, clasificar y organizar los materiales y las sustancias utilizadas.
6) *Tanque para cultivo:* recipiente transparente destinado a contener el proceso de cristalización. Debe estar limpio y seco para evitar contaminaciones, y ser resistente a altas temperaturas, ya que se requiere agua caliente para activar la reacción.
7) *Instructivo:* aunque el docente proporciona las indicaciones para la elaboración del experimento, el kit también incluye un manual detallado. El instructivo garantiza que cualquier participante que desee realizar la actividad de forma autónoma pueda hacerlo sin riesgo de sufrir daño.

FIGURA 2.
Reverso del kit *Magic Rocks* del Smithsonian.

Los futuros docentes de matemáticas llevaron a cabo un proceso de investigación previa en el cual se les solicitó indagar y reflexionar acerca de los fenómenos que estaban por observar. Esta fase resultó de suma importancia para comprender la base científica que sustenta la cristalización, es decir, el vínculo entre conceptos químicos y matemáticos. En principio, la etapa se orientó en dos sentidos: la comprensión de la naturaleza del experimento y del proceso químico que se realizó, y la aplicación en contexto del fenómeno de cristalización.

Primero, los alumnos tenían que averiguar en qué consiste y cómo se manifiesta la cristalización en la naturaleza. En dichas búsquedas recurrieron a fuentes como libros de química y biología, así como a videos del propio experimento. El acceso a las fuentes fue libre, por lo que los participantes podían aprovechar motores de búsqueda y todo recurso a su alcance. También se les asignó identificar ejemplos de cómo se llevan a cabo dichos procesos de cristalización. Después, se profundizó en conceptos como *solubilidad*, *saturación*, *nucleación* y *crecimiento cristalino*, que más adelante servirían como variables para comprender el fenómeno. Además, se analizaron las condiciones necesarias para la formación de cristales, incluyendo los factores que controlan su tamaño y estructura.

La comunidad estudiantil investigó ejemplos donde este proceso ocurre de manera natural o industrial. Se relacionó el experimento con contextos reales, como la formación de cristales de sal en cuerpos de agua evaporados, la cristalización del azúcar en la elaboración de caramelos o su aplicación industrial en la extracción minera. El objetivo fue conocer el fenómeno, registrarlo y compararlo con lo experimentado. Al final, estas observaciones serían socializadas con el grupo.

A partir de este proceso de indagación fue posible estructurar el experimento y reflexionar sobre cómo diseñar una estrategia didáctica basada en la investigación y la experiencia directa. Así, los futuros docentes integraron una visión interdisciplinar donde ciencias como las matemáticas, la química y la pedagogía se enlazan, brindando herramientas para enseñar fenómenos científicos a través de experiencias prácticas y visuales.

Fase 2: Experimentación

Con la información recopilada, los futuros docentes de matemáticas debieron generar las condiciones necesarias para la ejecución del experimento. Además de seguir las indicaciones del instructivo, analizaron todas las variables involucradas en el proceso. Para ello, los equipos realizaron las siguientes acciones:

Preparación del área de trabajo

Los alumnos identificaron el espacio más adecuado para realizar el experimento, asegurándose de que contara con iluminación tenue, ventilación (debido al uso de químicos volátiles) y una superficie firme donde apoyar el recipiente. Se optó por una mesa estable que evitara movimientos bruscos, ya que se precisa inmovilidad durante la cristalización. Para proteger la superficie de trabajo, se dispuso una hoja de papel aluminio —aunque también puede utilizarse un mantel plástico como alternativa práctica— para evitar daños por derrames de la solución.

Preparación de la solución y activación del proceso

Los alumnos colocaron agua en un recipiente de cristal y la calentaron hasta que alcanzó la temperatura idónea para disolver la solución incluida en el kit (para garantizar precisión, fue imprescindible el empleo de un termómetro). El contenedor

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

de cristal fue elegido tanto por su capacidad térmica como por su transparencia, la cual facilita la observación del proceso. Cabe notar que puede dividirse la solución en varios recipientes pequeños para comparar el crecimiento de los cristales bajo diferentes condiciones térmicas.

Una vez que el agua estuvo caliente, se vertió la solución proporcionada en el kit dentro del recipiente de cristal. Antes de agregar las piedras, fue necesario mezclar de manera constante para asegurar que la disolución fuera transparente y homogénea; al final, estas actuaron como núcleos, permitiendo que los cristales comenzaran a formarse y crecer sobre su superficie.

Observación del proceso de cristalización

Tras colocar la solución y las piedras en el interior del recipiente, los alumnos debieron monitorear y registrar los cambios que se producían dentro del contenedor en distintos momentos. El recipiente fue dispuesto donde pudiera observarse sin sufrir movimientos bruscos ni interrupciones. Se procuró que el espacio estuviera protegido de la luz solar directa para evitar interferencias en el proceso.

A medida que la solución perdía temperatura y el agua se evaporaba, los compuestos en la solución comenzaron a cristalizarse sobre las piedras. Durante las primeras horas, los participantes atestiguaron la formación inicial de los cristales, documentaron el proceso con fotografías y registraron sus observaciones en intervalos regulares. Se lograron reconocimientos de patrones de crecimiento (la altura de los cristales en relación con el tiempo transcurrido), lo que facilitó contrastar los datos con las predicciones realizadas en la fase de investigación.

Transcurridas varias horas de monitoreo, los cristales alcanzaron su crecimiento máximo, determinado por el nivel del agua en el recipiente. Las piedras yacieron en la solución hasta que los cristales se solidificaron por completo. Al concluir, los alumnos analizaron las propiedades físicas de los cristales formados, como textura y estructura.

En este caso, el experimento empleó cristales de sal metálica en una solución de silicato de sodio, un material comúnmente conocido como “agua de cristal” o “vidrio líquido”. La cristalización ocurre de la siguiente manera:

1) La solución de silicato de sodio alcanza un estado de saturación; en ese momento, las partículas disueltas comienzan a unirse en una estructura ordenada.
2) Los excesos de soluto se depositan sobre las piedras metálicas, posibilitando el crecimiento de los cristales.

3) El tiempo de exposición y las condiciones ambientales influyen directamente en la forma y el tamaño de los cristales obtenidos.

Comprender este proceso permitió a los equipos comparar los resultados entre sí, analizando qué factores pudieron haber influido en el crecimiento de los cristales, como la temperatura del agua, el tipo de recipiente o la preparación del área de trabajo. Entre las variables clave identificadas se destacan:

1) *Temperatura de la solución:* una mayor temperatura favorece una cristalización más abundante.
2) *Tiempo de reposo:* con el tiempo, los cristales tuvieron oportunidad decrecer con mayor solidez y uniformidad.
3) *Distribución de las piedras:* aunque los kits incluían cantidades similares de material, se observó que los equipos que distribuyeron las piedras con mayor espacio entre sí, o que emplearon fragmentos más grandes, obtuvieron cristales con mayor dureza y mejor formación (Figura 3).

FIGURA 3. Evidencia del experimento.

Fase 3: Recopilación de información

Los equipos asumieron la responsabilidad de recolectar la información necesaria para revisar el comportamiento del proceso de cristalización. Uno de los factores fue la temperatura del agua, la cual disminuía progresivamente hasta alcanzar la del ambiente, afectando de manera visible el crecimiento de los cristales en los recipientes. Con el fin de sondear estos cambios, los equipos establecieron intervalos regulares de tiempo y utilizaron instrumentos de medición, como termómetros digitales. Asimismo, registraron el desarrollo de los cristales en términos de altura, grosor y patrones de crecimiento en distintas zonas del recipiente.

Cada equipo determinó sus propias estrategias para la recopilación de datos, seleccionando las variables que consideraron más relevantes. Algunos se enfocaron en medir la altura del crecimiento cristalino, mientras que otros optaron por registrar la temperatura a intervalos de 3 o 5 minutos. También hubo equipos que eligieron identificar cambios más prolongados, realizando mediciones cada 10 o 12 minutos. Además, los equipos consideraron otros factores de análisis como:

1) La velocidad de cristalización en diferentes zonas del tanque.
2) La intensidad y uniformidad del color de los cristales.
3) La regularidad morfológica de los cristales de acuerdo con las condiciones del entorno.

Después, los equipos analizaron las variables que obtuvieron para establecer los modelos matemáticos que describieran la relación entre ellas y el crecimiento cristalino, así como los patrones formados en las estructuras. Con base en estos análisis, elaboraron diversos gráficos ilustrativos (Figura 4).

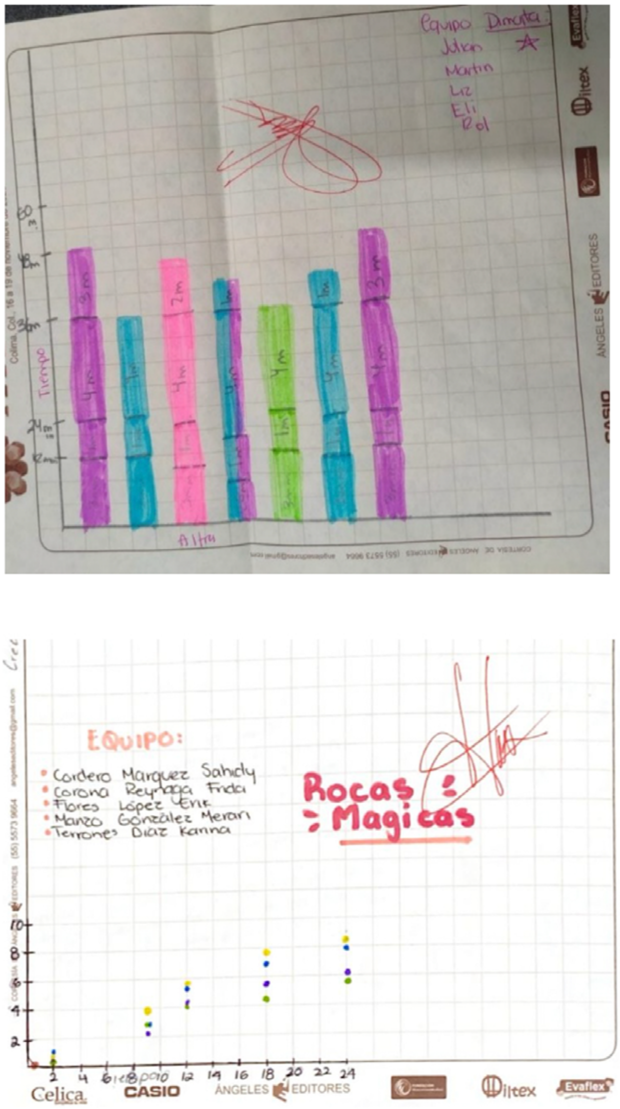


Figura 4. Registros de información.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Fase 4: Elaboración del modelo

Para darle un sentido matemático al experimento, los alumnos debieron estipular las variables a considerar:

- *Variable independiente:* aquella que puede ser manipulada o controlada por los estudiantes durante el experimento; por ejemplo, el tiempo transcurrido o la temperatura del agua.
- *Variable dependiente:* corresponde al resultado que se observa y mide a lo largo del experimento, en este contexto, el tamaño o la altura alcanzados por los cristales.

A fin de orientar al estudiantado en el análisis matemático del experimento, se pueden plantear preguntas que les permitan reflexionar sobre los elementos involucrados. Por ejemplo, ¿qué sucede si se aumenta o disminuye la temperatura inicial del agua?, ¿cómo influye el tiempo de exposición en la formación de los cristales?, ¿se pueden establecer patrones de crecimiento con base en los datos recopilados?, ¿el crecimiento de los cristales sigue una tendencia lineal o no lineal?

Una vez determinadas las variables, cada equipo organizó sus mediciones en una tabla donde registraron el tiempo transcurrido y la altura de cada cristal. Con tal información, se procedió a trazar gráficamente los datos, empleando un software como GeoGebra o Excel para el modelado matemático. Estos programas hicieron posible ajustar los datos del experimento, contrastar diversos modelos, comparar ecuaciones representantes del crecimiento de los cristales y ajustar los parámetros para obtener una representación fiel del fenómeno.

A partir del uso de graficadores, los estudiantes pueden visualizar los datos y determinar la composición del modelado; si el comportamiento es lineal, adopta la forma $y = mx + b$; si se observa una relación exponencial, puede ajustarse con una expresión del tipo $y = ae^{bx}$.

Fase 5: Conclusión y análisis del modelo

Después del planteamiento del modelo, se procedió a cotejarlo con los datos del experimento y verificar su grado de ajuste. Esta comparación consideró todos los cristales formados en cada tanque, que contenía cinco o seis rocas. En esta fase, los equipos debían relacionar el ejercicio práctico con los conocimientos teóricos y formular conjeturas basadas en la observación, como las siguientes:

- Ocurren procesos similares en la formación natural de estalagmitas y estalactitas en cuevas como resultado del goteo de agua rica en minerales.

- Los depósitos salinos en zonas desérticas se forman porque la evaporación de lagos salados deja atrás cristales de sal acumulados.

Ejemplos como estos albergan comparaciones con fenómenos naturales generados en el entorno y facilitan formular hipótesis sobre las variables que son favorables para un crecimiento más acelerado o con una mayor solidez en los cristales. Esta etapa del experimento invita a una discusión en distintos ejes temáticos, como el patrón geométrico y la simetría de las estructuras cristalinas. Por último, el fenómeno de estudio puede modelarse a partir de ecuaciones, tales como el crecimiento cristalino en función del tiempo o las relaciones de proporcionalidad entre la cantidad del soluto y la formación de estructuras cristalinas.

Reflexiones finales

La modelación matemática se ha consolidado como una herramienta pedagógica de gran valor en todos los niveles educativos; desde la formación básica, donde introduce elementos de interpretación, hasta la superior, donde abre camino a la experimentación con problemas típicos de la ingeniería y la construcción. Su utilidad no se limita al aprendizaje de las matemáticas, ya que también brinda a los estudiantes la posibilidad de comprender conceptos abstractos y, en especial, aplicarlos a situaciones del mundo real. Esta capacidad de vincular teoría y praxis es lo que la convierte en una estrategia didáctica valiosa.

La enseñanza tradicional de las matemáticas suele centrarse en la memorización de fórmulas y la resolución de problemas tipo, lo que a menudo genera una desconexión entre el estudiante y la aplicabilidad real del conocimiento adquirido. Esta clase de educación ha sido superada por perspectivas más integrales, como la que propone la Nueva Escuela Mexicana, donde las matemáticas se entienden como una herramienta viable en diversos contextos cotidianos.

Faulkner *et al.* (2019) destacan que, al modelar situaciones del mundo real a través de las matemáticas —sin importar el área de estudio—, los alumnos desarrollan habilidades analíticas y de pensamiento crítico, esenciales para resolver problemas complejos y prácticos. Tal capacidad, además de fortalecer su proceso formativo, también contribuye a que reconozcan la relevancia de las matemáticas en su vida cotidiana y su crecimiento profesional. La verdadera importancia de la modelación matemática reside en la capacidad de vincular la teoría con la práctica, de manera que la comunidad estudiantil adquiera consciencia de cómo las matemáticas inciden en múltiples campos del conocimiento.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Bajo el enfoque STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas), como fue en el experimento realizado por los estudiantes de la LEM, el modelado se consolida como una herramienta que promueve una amplia gama de habilidades. A la vez que les ayuda a preparar recursos aplicables para su futura labor docente, también impulsa el pensamiento crítico y la reflexión sobre su desempeño profesional.

Como lo advierte Pollak (2007), enseñar no se limita a la trasmisión de conocimientos mediante un discurso; implica motivar a la comunidad escolar a, desde el interés propio, plantear situaciones, explorar problemáticas y construir escenarios que faciliten tanto la interpretación matemática como la comunicación efectiva de ideas. Dicho enfoque considera la comprensión de las matemáticas y también fortalece la habilidad para aplicarlas en contextos prácticos.

En esta línea, el modelado matemático debe considerarse una habilidad esencial en la formación docente, ya que permite a maestros y estudiantes explorar y resolver problemas auténticos. Dentro de este contexto educativo actual donde se valoran las habilidades prácticas y transferibles, la capacidad de modelar situaciones reales mediante las matemáticas se vuelve imprescindible. Asimismo, la instrucción de futuros docentes se enfoca en la enseñanza de las matemáticas de forma comprensible y aplicable, superando los métodos basados en la memorización de conceptos. Bajo esta premisa, se reconoce que el modelado matemático contribuye a generar experiencias de aprendizaje significativo.

Las demandas educativas actuales subrayan la necesidad de una formación interdisciplinaria en los docentes. En este sentido, es menester que los profesores de matemáticas adquieran la capacidad de indagar en procesos químicos, biológicos y físicos, con el fin implementar modelos que integren diversas áreas y respondan a contextos reales y complejos. Incorporar la modelación matemática en el currículo promueve una educación más completa y versátil, donde los estudiantes pueden reconocer la aplicabilidad de las matemáticas en su vida cotidiana y en su rendimiento profesional. Del mismo modo, esta práctica fomenta el desarrollo de habilidades críticas y analíticas para enfrentar un mundo cada vez más complejo y atravesado por la tecnología.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Referencias

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Mathematical Problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.) *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics*-ICTMA 12 (pp. 222-231). https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications*. Springer.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – Mathematics Education*, *38*, 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Faulkner, B., Earl, K. y Herman, G. (2019). Mathematical Maturity for Engineering Students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*, 97-128. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00083-8

Greefrath, G. y Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1

Guerrero, L. y Terrones, D. (2003). *Repertorio de estrategias pedagógicas*. PROMEB-Piura.

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *ZDM – Mathematics Education*, *38*, 196-208. https://doi.org/10.1007/BF02655889

Kaiser, G. y Stender, P. (2013). Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. Brown (Eds.) *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 277-293). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_23

Lesh, R. y Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Maass, K. y Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM – Mathematics Education*, *50*, 273-285. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0911-y

Pollak, H. (1977). The interaction between mathematics and other school subjects (including integrated courses). En H. Athen y H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (pp. 255-264).

Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling — a Conversation with Henry Pollak. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 109-120). Springer.

Santana Ortega, A., Gómez Blancarte, A. L. y López López, O. N. (2018). *Experimentación, modelación y simulación matemática en la formación de profesoras de telesecundaria*. Congreso Nacional de Investigación sobre Educación Normal. https://es.scribd.com/document/649174665/P042

Universidad de Colima (2015). *Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas*. Documento curricular. Versión impresa. México.

Artículo invitado | Recibido el 7 de mayo de 2025, aceptado el 7 de mayo de 2025. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Subjetividad y experiencia. Formar(se) para enseñar matemáticas

Subjectivity and experience. Training to teach mathematics

Luis Manuel Aguayo Rendón*
Ivette Anel Delgado Valdez

Universidad Pedagógica Nacional, Zacatecas, México

*laguayo@upn.mx

05

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Aguayo Rendón, L. M. y Delgado Valdez, I. A. (2025). Subjetividad y experiencia. Formar(se) para enseñar matemáticas. *PädiUAQ, 8*(15), 1-23.

Este artículo fue invitado por el comité editorial y, en consecuencia, está exento de revisión por pares a doble ciego. Su contenido es responsabilidad exclusiva de los autores.

Resumen

El texto explora las experiencias formativas iniciales de dos maestras de primaria en la enseñanza de matemáticas en México, destacando cómo la teoría didáctica y las prácticas educativas influyen en la construcción de su identidad profesional y de sus habilidades. Con base en entrevistas narrativas, se analizan los aspectos de su relación con las matemáticas, el despliegue de estrategias pedagógicas y la combinación integral de teoría y práctica a lo largo de su formación en escuelas normales. Ambas docentes describen como positiva su experiencia con las matemáticas desde temprana edad, las cuales facilitaron su paso por la formación docente. La resolución de problemas y la reevaluación de técnicas tradicionales jugaron un papel clave en su desarrollo, mientras que las estrategias basadas en la reflexión crítica y las experiencias prácticas (como juegos educativos y de validación teórica) destacaron en su entrenamiento. Se observa que, aunque las instituciones educativas proveían un marco teórico básico —específicamente la teoría de situaciones didácticas—, las limitaciones institucionales con frecuencia obstaculizaban la aplicación completa del conocimiento teórico. A pesar de estas restricciones, ambas docentes lograron incorporar dicha teoría en su práctica, modificándola y enriqueciéndola con sus propias experiencias. De tal manera, el estudio concluye que una formación inicial sólida sustentada en la combinación equilibrada tanto de teoría como de práctica y reflexión crítica es vital para construir una ecología institucional que permita el desarrollo eficaz de futuros docentes. De igual manera, se enfatiza la importancia de explorar más profundamente las experiencias subjetivas de los formadores y formados, especialmente en contextos de formación regular y cotidiana.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, experiencia, praxeología, profesores en formación, teoría didáctica, subjetividad.

Abstract

The article examines the initial training experiences of two primary school teachers in teaching mathematics in Mexico, emphasizing how didactic theories and educational practices influence the development of their professional identities and skills. Through narrative interviews, aspects such as their relationship with mathematics, the deployment of pedagogical strategies, and the incorporation of theory and practice into instruction in teacher schools are studied in depth. Both teachers gave an account of their positive experiences with mathematics from an early age, that enabled their learning during teacher training. Problem-solving and challenging the established techniques were instrumental in their development, while strategies based on critical reflection and practical experiences (such as ludic activities and theoretical validation) stood out in their training. It is observed that although educational institutions built a basic theoretical framework —the theory of didactic situations— institutional limitations often hindered the full application of theoretical knowledge. Despite these constraints, both teachers managed to infuse this theory into their professional work, adapting and improving it with their own experiences. The conclusion is that a solid initial training, based on a balanced amalgamation of theory, practice, and critical reflection, is essential to foster an institutional ecology that allows for the effective development of future teachers. Moreover, it emphasizes the importance of further exploring the subjective experiences of trainers and trainees, specifically in regular and daily training contexts.

Keywords: mathematics teaching, experience, praxeology, teachers in training, didactic theory, subjectivity.

Introducción

En México, la inclusión de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de educación primaria se remonta apenas a 1997, año en que las escuelas normales adoptaron planes de estudio innovadores tras una larga tradición conservadora de enseñanza. Los planes anteriores, de 1984, se proponían adiestrar profesores investigadores:

> ...sus contenidos se orientaron al estudio y manejo de técnicas de observación asociadas sobre todo con la investigación-acción, lo que implicó que el estudiante se acercara a la escuela no como un maestro en formación sino como un futuro investigador y obtuviera pocos elementos para la docencia. (SEP, 1997, p. 18)

En el sentido contrario, en el Plan 1997 el "profesor investigador" cedió su lugar al "profesor enseñante". Los contenidos sobre la investigación fueron sustituidos por los saberes didácticos, entre ellos los de la didáctica de las matemáticas en su vertiente francesa; y aunque desde esa fecha se han hecho varias modificaciones para equilibrar lo didáctico con lo matemático, la perspectiva didáctica continúa orientando la formación de profesores.

El enfoque didáctico estimuló el interés en el campo de la educación matemática porque colocó la formación de profesores como objeto de estudio emergente. Al respecto, aunque en el primer congreso internacional de la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas de 1969 se había detectado la formación del docente como uno de los problemas urgentes en educación matemática (Hernández *et al.* 2018), en la década de los 90 la investigación en México acerca de esta problemática aún era incipiente. Todavía en 2005 escaseaban investigaciones como la de Block *et al.* (1995), quienes analizaron cómo entienden los profesores la resolución de problemas, o la investigación de Ávalos (1997), quien se enfocó en cómo se transforman las concepciones de los docentes respecto a los contenidos geométricos; de igual manera, Guzmán Zazueta (2000) examinó qué factores asociados a la formación de profesores de nivel bachillerato influyen en la práctica, y Aguayo Rendón (2004) se centró en la transposición del saber didáctico en las escuelas normales. Para que la formación se constituyera como un objeto de estudio recurrente, dos autores fueron fundamentales, Brousseau y Shulman.

Brousseau (2000) señaló que la formación del profesor dependía de numerosos conocimientos, una saturación de saberes referenciales construidos desde diferentes posturas epistemológicas. Así, aunque la didáctica proporciona una ciencia integradora, el problema de la formación docente persiste ante la ausencia de un

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

método satisfactorio para transponer didácticamente una gama tan amplia de saberes. En específico, el autor sostiene que tal transposición debe erigirse sobre parámetros todavía desconocidos, por ejemplo, las condiciones en que este saber puede “vivir” en las aulas.

Por su parte, al estudiar el “proceso de desarrollo [...] desde un estadio de pericia como aprendices hasta su noviciado como profesores”, Shulman (2005, p. 6) estableció una tipología de conocimientos del profesor: *del contenido*, *didáctico*, *del currículo*, *didáctico del contenido*, *de los alumnos y sus características*, etcétera. De hecho, la influencia de su clasificación persiste en algunos planes de estudio latinoamericanos al día de hoy.

Ambos autores generan dos perspectivas contrastantes: la *aproximación cognitiva* de Shulman y la *aproximación epistemológica* de Brousseau. Shulman amplía los aspectos pedagógico-cognitivos al incluir componentes disciplinares (matemáticos), y profundiza en la formación de profesores, fundamentalmente mediante la noción de *conocimiento pedagógico del contenido.* En la contraparte epistemológica, es primordial el análisis de la matemática escolar a fin de elaborar modelos matemáticos alternativos que funjan como marco de referencia para formular y abordar problemas didácticos (Gascón, 2013).

El referente teórico más compatible con las ideas de Shulman es el denominado *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK, en inglés). Con la aproximación epistemológica se alinean diversas teorías de la tradición francesa, entre ellas, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), cimentada en la noción de *equipamiento praxeológico del profesor*; el enfoque ontosemiótico, con su *sistema de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas*, y la teoría socioepistemológica, cuyo objetivo es el empoderamiento del profesor.

Esta dicotomía teórica intensificó la investigación sobre la formación de profesores; hoy en día, su relevancia en Latinoamérica se ve reflejada en los trabajos presentados durante la Reunión Latinoamericana de Educación Matemática, RELME (Parra Zapata, 2023 y 2024), el Congreso del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Delgado Rebolledo y Zakaryan, 2023), y la Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM (Scott *et al.*, 2023). Resalta en las memorias de dichos eventos la abrumadora mayoría de trabajos categorizados bajo la etiqueta de *propuestas para la enseñanza*, que plantean tareas tanto para trabajar con alumnos como en la formación de profesores. En dichas propuestas se formulan situaciones concebidas en principio para introducir en clase un contenido matemático.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

En lo respectivo a la formación inicial, los trabajos del Congreso del MTSK pueden agruparse en cuatro categorías:

- Presentan maneras de observar los conocimientos de los profesores.
- Plantean tareas para la formación basadas en la reflexión individual o colectiva, según sea el caso.
- Proponen al MTSK como sustrato para la formación inicial de profesores.
- Proyectan maneras efectivas de desarrollar el conocimiento especializado de los profesores.

En el caso de la RELME, la mayoría de trabajos consisten en propuestas de enseñanza, aunque también se incluyen otros sobre el discurso matemático escolar y el pensamiento del profesor (creencias, concepciones y prácticas). En el caso de la CIAEM, además de tareas formativas, se incluyen estudios sobre el trabajo colegiado y la formación docente para enseñar matemáticas en la diversidad.

Tres elementos destacan en los trabajos revisados, además de la abundancia de propuestas de enseñanza y tareas de formación: la diversidad de marcos teóricos, una preeminencia del punto de vista de los formadores y la falta de análisis sobre la práctica de los formadores y sobre la subjetividad y experiencias de los formados. Esta última advierte de la necesidad de:

1) Constituir las prácticas de formación en objetos de estudio, dada la necesidad de institucionalizarlas.
2) Estudiar las experiencias que los profesores han tenido en los cursos para su formación.

Acerca de la subjetividad y prácticas de los formadores, está el trabajo de Jiménez y Sosa (2024), que explora sus creencias en cuanto a la enseñanza y aprendizaje matemáticos, y la relación entre sus ideologías y su actuación en el aula. Al respecto, Sosa (2024) indaga el MTSK como soporte del crecimiento profesional de una formadora de profesores de primaria. En cuanto a la subjetividad de los formados, Reis y Climent (2012) recuperan las narraciones de maestrantes en enseñanza de las ciencias y las matemáticas sobre diferentes dimensiones de la escuela. Martínez *et al.* (2013) abordan los componentes de la identidad del profesor de matemáticas de educación media superior en México. Lezama (2016), a partir de las experiencias relatadas por profesores de matemáticas de secundaria en México, reflexiona sobre la relevancia del trabajo colectivo y académico; por último, Salazar (2021) explora cómo se constituyen las subjetividades de los profesores de matemáticas de Colombia en el marco de sus experiencias y formación.

El presente trabajo se alinea con las investigaciones mencionadas, con el objetivo de explorar las trayectorias de formación de dos docentes, destacadas por su labor de enseñanza matemática a nivel primaria. Específicamente, se trata de recopilar, analizar e interpretar sus relatos a fin de recuperar los aspectos positivos de sus experiencias.

Marco teórico

El concepto de *formación* se ha acuñado desde perspectivas filosóficas o pedagógicas, pero en ambos casos se rechaza la idea de que un sujeto *forma* a otro. En su lugar, exaltan la subjetividad y la acción del formado como esenciales en su propio proceso de formación. Con base en esta idea, en lo sucesivo se plantea la noción de *formación* desde un enfoque teórico ligado a la educación matemática.

La formación desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Chevallard (2001) sostiene que las escuelas para alumnos y para profesores son “normales” porque crean e imparten normas: modos de pensar y actuar; las primeras, para la vida (entre ellas normas matemáticas); las segundas, para la enseñanza. Empero, una norma va más allá de una simple práctica, un *saber* o un *saber hacer*, como comúnmente se le conoce; lo que estas instituciones difunden son *praxeologías,* prácticas indisolubles de un cierto saber. De tal manera, estas praxeologías pueden ser matemáticas o de cualquier otra índole, en el caso de los alumnos; pero en lo que respecta a los profesores son, específicamente, didácticas. La incorporación del trabajo del formador a este modelo, por lo tanto, hace pensar en praxeologías de formación que se despliegan para que un futuro profesor reconstruya las praxeologías didácticas.

Ahora bien, desde la TAD se considera que una institución es formadora cuando su intencionalidad es didáctica, y que lo didáctico siempre remite al estudio, al hecho de que alguien estudie un objeto (o). Entonces, lo didáctico es consustancial al estudio; en términos simples, lo primero existe a consecuencia de lo segundo (Chevallard, 1997). Si al (o) se le añade un estudiante (x), se forma el sistema didáctico S (x;o); luego, cuando (x) es un investigador, su (o) es una pregunta abierta en la comunidad de conocimiento donde se sitúa; en contraste, si (x) es alumno, el objeto de estudio resulta una respuesta previamente elaborada para una cierta tarea problemática (Chevallard, 1998).

En el segundo caso, generalmente aparece otro elemento del sistema didáctico, porque el estudio es casi siempre una actividad colectiva que precisa la ayuda de

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

un director y un programa. Con el director del proceso de estudio o profesor (y), se forma un sistema S (x;y;o) que ayuda al alumno a estudiar el objeto. Así, el sistema se constituye como noción integradora que enfoca bajo una misma mirada ambos aspectos: el trabajo del profesor cuando enseña matemáticas y el del alumno cuando las aprende.

Sin embargo, tanto en el caso del alumno como en el del investigador, la palabra *estudio* se utiliza en un sentido amplio, que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje. Así, la enseñanza es un apoyo para que el sujeto adquiera un aprendizaje de un determinado objeto. Por tal razón, el estudio alude a todas las acciones que el alumno lleva a cabo para cumplir con las tareas que se le plantean.

Ahora bien, si se acepta que la formación de profesores es también un proceso de estudio, un futuro profesor examina un objeto (didáctico) intentando aportar respuestas previamente elaboradas para resolver tareas (didácticas). Por otro lado, el investigador analiza su objeto para responder a cuestiones didácticas que aún no tienen una respuesta definida. Cuando en la formación se apoya al estudiante (x) para que estudie un objeto matemático-didáctico (o), el formador (f) estructura un sistema didáctico de ayuda S (x;f;o) en el que se sitúa como director del proceso.

En correspondencia con las ideas de estudio y sistema de ayuda, la TAD retoma la noción de *dispositivo* como modelo de interacción entre el *saber* y el *hacer* del profesor. En los dispositivos se consideran situaciones que permiten generar y poner en acción los saberes construidos por formadores y formados, camino a la transformación del sujeto mediante la experiencia de formación (Olbrich, 2011). Dos son los dispositivos fundamentales en la TAD: el recorrido de estudio e investigación (REI), que es utilizado con estudiantes de distintos niveles escolares, y el recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores (REI-FP). El segundo, a su vez, se compone de cuatro módulos que dan cuenta de la naturaleza del proceso de estudio:

1) Vivir un REI en el rol de “aprendiz de matemáticas”.
2) Analizar el REI en el rol de “profesor analista”.
3) Diseñar un REI en el rol de “ingeniero diseñador”.
4) Gestionar o experimentar un REI en el rol de “profesor en acción”.

Los REI-FP se fundamentan en dos nociones: la primera es una renuncia a considerar que el formador moldea al futuro profesor transmitiéndole un objeto determinado; en ese sentido la noción de *recorrido de estudio* sustituye la postura objetivante por una dimensión subjetiva del individuo en el proceso. La segunda noción concierne a la experiencia, “vivir” un REI como parte del proceso formativo significa aceptar que se trata de una experiencia para el formado. En palabras de Dewey (2010), porque "la experiencia [... influye en la formación de actitudes de deseo y de propósito (ya que) tiene un aspecto activo que cambia en algún grado las condiciones objetivas bajo las cuales se ha tenido la experiencia" (p. 82).

Subjetividad y experiencia

Hay que desechar la tendencia a considerar al profesor como un actor desconectado del proceso, en cambio, se asume que los docentes son actores competentes y comprometidos. Son sujetos activos que no solo basan su práctica en la teoría, sino que también la convierten en un espacio de producción, reconstrucción y reaprovechamiento de los saberes generados en ella (Tardif, 2014). Desde esta idea, que está presente en la tradición de Dewey, Schön y Tardif y Shulman, para comprender la naturaleza de la enseñanza, es necesario recuperar el punto de vista de los enseñantes. Es en su subjetividad y experiencia donde se evidencian las formas como construyen su práctica, porque "hay una estructura permanente de referencia, a saber, la conexión orgánica entre la educación y la experiencia personal" (Dewey, 2010, p. 71).

Cuando la representación que "la sociedad" hace de los sujetos no es adecuada, los actores sociales se ven obligados a administrar simultáneamente varias lógicas de la acción para fracturar el estatus social que se tiene de ellos. En la medida en la que dichas lógicas no se adecuan a la realidad, la experiencia genera la acción, una capacidad crítica y una distancia en relación consigo mismos (Dubet, 2010). Esta distancia no es otra cosa que el principio de alteridad o de exterioridad de la experiencia, porque:

> La experiencia supone, ya lo he dicho, un acontecimiento exterior a mí. Pero el lugar de la experiencia soy yo. Es en mí (o en mis palabras, o en mis ideas, o en mis representaciones, o en mis sentimientos o en mis proyectos, o en mis intenciones, o en mi saber, o en mi poder, o en mi voluntad) donde se da la experiencia, donde la experiencia tiene lu-gar. (Larrosa, 2009, p. 16)

En ese sentido, apuntala Dubet (2010), la experiencia es asimismo una actividad cognitiva que permite construir, "verificar" y experimentar la realidad, porque organiza los fenómenos en virtud de las categorías del entendimiento y la razón. Es decir, "la experiencia social no es una forma de incorporar el mundo a través de las emociones y de las sensaciones, sino una manera de construir el mundo" (Dubet, 2010, p. 86). Esa construcción resulta de un movimiento de ida y vuelta, primero porque la experiencia supone una exteriorización, una salida de uno mismo que va al encuentro con los acontecimientos. Segundo, porque el acontecimiento afecta al experimentante, tiene efectos sobre él, en lo que es, piensa, sabe y quiere (Larrosa, 2009). Por último, la experiencia es subjetiva en tanto que su lugar es el sujeto, y por ello cada quien vive la propia, única e irrepetible.

Por lo general, se cree que el estatus del profesor constituye su identidad, que su subjetividad está dada por las expectativas sobre su trabajo, pero cuando se le da la palabra, revela una realidad diferente. Confirma que no es un personaje, sino un individuo independiente de su rol; su experiencia flota entre dos universos de referencia desalineados, cada uno con su lógica de acción: la que le adjudica la sociedad y la de su oficio. Por ello, cuando el profesor no reconoce en los alumnos las actitudes y las expectativas que corresponden al estatus, “viven el oficio como una experiencia íntima en la que los criterios de referencia y de reconocimiento están disociados del estatus. La lógica del oficio solo se hace posible cuando olvidan el estatus” (Dubet, 2010, p. 88).

Algo similar pasa en la formación de profesores, los estatus del formador y del formado imponen una cierta lógica de acción, pero a veces las expectativas son difíciles de cumplir. Entonces se abandonan esos roles en favor de la experiencia, ya que, bajo el “principio de transformación”, el formado es un sujeto abierto a la transformación de sí mismo y de sus palabras, sentimientos, representaciones e ideas. Por lo tanto, el resultado de la experiencia es la transformación del sujeto experimentante (Larrosa, 2009).

La formación entonces trata de que el formado viva el proceso como una experiencia en la que exista una transacción entre él y su ambiente. Dicha transacción consiste en que el individuo hable, por ejemplo, sobre algún punto o suceso, sobre el libro que está leyendo o los materiales de un experimento que está realizando. En esa interacción, tanto los interlocutores como los temas y objetos que discuten forman parte de la situación de formación. Puesto de otro modo, el ambiente será cualquier condición con la que el formado interactúa para crear una experiencia, y si el formado construye “castillos en el aire”, se encontrará interactuando con los objetos que edifica en su fantasía (Dewey, 2010 p. 86).

Metodología

La sociología de la experiencia se centra en la subjetividad de los actores, y su unidad de análisis esencial es la conciencia que los sujetos tienen del mundo y de sí mismos (Dubet, 2010). En este mismo sentido, Bruner (2006) pone su atención en la acción que se sitúa en el escenario cultural y en los estados intencionales interactuantes de los participantes. En su perspectiva, "… la realidad no reside en la cosa, ni en la cabeza, sino en el acto de discutir y negociar sobre el significado de esos conceptos" (Bruner, 2012, p. 128).

Bruner (2003) afirma que las narraciones conectan las experiencias pasadas con lo que podría acontecer, lo que le posibilita al sujeto imaginar y crear alternativas de cambio o *mundos posibles.* Las narrativas son secuencias organizadas de ejes temáticos elegidos y delimitados en términos temporales y espaciales para reflexionar y entender su significado según el contexto donde fueron experimentados. La narración, para Bruner (2003), es un modo de acudir en búsqueda del significado que un sujeto particular le atribuye al mundo y a la vida en el marco de una cultura específica, pero también "… es por la narración que la experiencia se vuelve un 'evento narrado'" (p. 49).

Bolívar *et al.* (2001) han considerado que la investigación biográfico-narrativa se ha constituido como forma legítima de construir conocimiento en la investigación educativa. De ese modo "la narración es un aprendizaje-en-acción [...] los relatos en sí mismos y las formas en que narran las vidas juegan un papel relevante en la forma en que las personas aprenden de su vida" (Bolívar, 2014, p. 721). En el campo de la educación matemática, Martínez *et al.* (2013) destacaron que en 2013 se comenzaron a estudiar y utilizar las narrativas para realizar estudios sobre la identidad de los profesores de matemáticas, sobre todo durante su formación.

Decisiones metodológicas

En correspondencia con los conceptos de formación, experiencia y subjetividad, los datos se recuperaron por medio de entrevistas a dos profesoras de educación primaria destacadas por su desempeño en la didáctica de las matemáticas. Se les pidió que narraran las experiencias que vivieron durante su formación inicial en torno a la enseñanza de las matemáticas. Las entrevistas se videograbaron a través de la plataforma de conferencias Zoom, y posteriormente se transcribieron y analizaron tomando como referencia el texto, construyendo categorías que emergieron de los mismos, es decir, no se utilizaron categorías preconcebidas.

Para el análisis de las narrativas se consideraron varios pasajes de su experiencia:

- la relación con las matemáticas antes de su formación
- las matemáticas de la escuela normal
- las estrategias de sus formadores
- el lugar de la teoría en su formación
- la manera en la que sus formadores articulaban la teoría y práctica

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Respecto a la noción de praxeología didáctico-matemática, las narraciones contemplaron los momentos de contacto con los objetos matemáticos, los principios y teorías didácticas, así como las maneras de articular esos saberes con la práctica de la enseñanza.

Los sujetos del estudio

Se entrevistó a dos profesoras que trabajan en escuelas de educación primaria del estado de Zacatecas, México, y que muestran una inclinación hacia la enseñanza de las matemáticas; para resguardar su privacidad, en lugar de usar sus nombres reales, se emplean las designaciones Fabiola y Celeste (F y C).

Fabiola se licenció en Educación Primaria en una Escuela Normal Urbana y tiene ocho años de servicio; además de su licenciatura, obtuvo dos grados de maestría y actualmente cursa estudios de doctorado. No en todos sus estudios ha seleccionado la enseñanza de las matemáticas como foco.

Celeste realizó sus estudios de licenciada en Educación Primaria en una Escuela Normal Rural; cuenta con nueve años de servicio en su trayectoria, y además de su licenciatura, posee un grado de maestría y actualmente cursa estudios de doctorado. Ha centrado todos sus estudios en la enseñanza de las matemáticas.

Resultados

La relación con las matemáticas. Redención contra *boundary crossing*

La transformación de la relación negativa que un sujeto tiene con las matemáticas para tornarla positiva recibe el nombre de *redención matemática*. Esta revaluación "no solo es un fenómeno contextual, sino que es intrínseca a la profesión docente" (Pérez Torres y García, 2024, p. 83). A pesar de que este fenómeno se da con relativa prevalencia, ni Fabiola ni Celeste necesitaron atravesar ese proceso:

> F: Mi relación con las matemáticas siempre fue positiva, yo fui una niña muy *nerd*, en todas las materias me iba bien, jamás tuve problemas con las matemáticas.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

> C: Siempre tuve una experiencia positiva con las matemáticas, desde la primaria, siento que tuve interés en esta área, también en secundaria y en bachillerato.

Lo que sus relatos revelan es que, al parecer, los alumnos no tienen una relación positiva ni negativa con las matemáticas en sí, sino con los modelos epistemológicos de la matemática escolar o del "cuestionamiento del mundo". Desde la TAD, el primero considera los objetos matemáticos como monumentos, a los cuales hay que acudir para admirarlos; el segundo postula la indagación como motor de los procesos de aprendizaje (Gascón y Nicolás, 2021). Como se puede ver en los siguientes pasajes, ambas entrevistadas tuvieron cercanía con los dos modelos:

> F: En sexto de primaria el maestro nos hacía resolver situaciones problema sin decirnos cómo. Yo me frustraba, no sabía qué hacer, estaba acostumbrada a que el maestro decía, "se hace así, este es el ejercicio", y siempre me iba bien. Pero llega ese maestro y no sabía cómo resolver los problemas, porque él quería que descubriéramos cómo hacerlo. Eso resultó muy frustrante, pero cuando ya había descubierto cómo, era muy gratificante. Pero tengo más marcados los recuerdos de mi frustración que los positivos. No volví a trabajar de esa manera hasta la normal.

> C: Me iba bien, pero no con la perspectiva de la resolución de problemas; era de "lo hacías bien o lo hacías mal". Recuerdo que mi maestro de quinto y sexto de primaria nos planteaba un problema, nos daba un tiempo para resolverlo y luego compartíamos la manera en que lo habíamos resuelto. En la secundaria cambió la dinámica, el docente se limitaba a poner un ejercicio para resolverlo y él nada más verificaba si estaba correcto o no. En bachillerato los maestros eran igual, explicaban el procedimiento, ponían el ejercicio, lo resolvíamos.

Más que una relación negativa o una redención, aparece en los relatos una especie de desajuste entre los modelos de matemática escolar. Frente a un nuevo modelo, los esquemas se desestructuran y deviene la frustración; lo notable es que esta sensación aparece con el modelo que pretende recuperar la naturaleza epistémica de las matemáticas, el cual desempata con las experiencias positivas vividas en el modelo monumentalista. Algo semejante encontraron Pérez Torres y García (2024): al no poder resolver los problemas que se les planteaban, los profesores presentaban emociones negativas, como estrés y ansiedad. Sin embargo, a pesar de ese desajuste temporal en la escuela primaria y de que en la escuela normal aparece una vez más la resolución de problemas, en el caso de Fabiola y

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Celeste, la relación no se torna negativa, sino que consolidan su relación positiva con las matemáticas.

> F: Tuve experiencias muy bonitas en la normal; recuerdo haber trabajado con la ahora doctora X. En una clase estudiamos la multiplicación, pasó a un compañero para resolverla y nos preguntaba, "¿por qué dejábamos ese espacio?". Nadie supo responder, pero como que mi cerebro dijo, "ufff claro, ¿por qué no lo había notado antes?". Era una idea muy afianzada desde que llegamos en la normal: esa idea del maestro tradicional, pero teníamos claro que debíamos de cambiar esa forma de memorizar algoritmos.

> C: Durante mi educación normal hubo influencia positiva en matemáticas, principalmente con dos formadores. Yo tenía mi experiencia como alumna, y al analizar las diferentes estrategias que usarían los alumnos y los errores que podían cometer, descubrí que desde la perspectiva del docente había un campo muchísimo más amplio. Lo que veía como algo malo lo comencé a ver como bueno.

En este punto cabría preguntar por qué el reencuentro con la resolución de problemas como modelo de matemática escolar no representó una nueva etapa de frustraciones. Castela (2016) sostiene que un individuo es un sujeto de la institución, y debe adaptarse a ciertas obligaciones contractuales para ocupar su lugar en ella. No obstante, a lo largo de su vida, ese mismo individuo es sujeto en varias instituciones, y realiza el *boundary crossing* (cruce de frontera) al evolucionar para adaptarse, aprender y ocupar una nueva posición en cada nueva organización. Asumir el rol de aprendiz de docente, como lo dice Celeste, las condicionó a acoplarse a la institución formadora de docentes, afianzando su relación positiva con las matemáticas. En ese tenor, Pérez Torres y García (2024) señalan que la redención matemática articulada desde el deseo de enseñar parece tener sentido solo para la población de docentes.

Las matemáticas de la formación

Ya se ha señalado que, desde la TAD, las escuelas normales difunden normas matemáticas y didácticas que no son tan solo prácticas o un *saber hacer*. En su lugar, se trata de praxeologías representadas mediante el modelo $[T / \tau / \theta / \Theta]$. Los dos primeros símbolos aluden al bloque técnico-práctico (o *saber hacer*), e incluyen un cierto tipo de tareas (T) y una técnica (τ) que permite resolverlas. Los dos últimos representan el bloque tecnológico-teórico (o *saber*); o sea, los discursos tecnológicos (θ) que justifican, explican y describen las técnicas utilizadas, y los discursos teóricos (Θ) que dan sentido integral al trabajo praxeológico (Chevallard, 1999).

Para iniciar el proceso praxeológico, se requiere un momento de encuentro con la praxeología matemática o didáctica a estudiar; en este caso, ambas profesoras manifestaron no haber tenido encuentro con objetos matemáticos nuevos.

> F: No aprendí nuevas matemáticas, eso sí: aprendí nuevas formas de pensar o entender las matemáticas.
>
> C: Creo que no aprendí nuevas matemáticas, más bien una forma distinta de verlas desde la perspectiva del docente, o sea, cómo enseñar o intentar enseñar las matemáticas.

Como se estableció antes, en la *aproximación epistemológica*, el análisis del conocimiento matemático es fundamental para cuestionar las matemáticas escolares y elaborar modelos alternativos para abordar problemas didácticos (Gascón, 2013). De tal manera, los señalamientos de las docentes advierten la ausencia de nuevas praxeologías matemáticas a estudiar, pero sí existió un cuestionamiento sobre el modelo matemático escolar. Asimismo, la actividad hacía énfasis en la dimensión tecnológica de la praxeología matemática, al sustentar razones por las que se utiliza determinada técnica para resolver las tareas.

Las estrategias de formación. Entre la praxis y el *logos*

Al igual que los profesores, los formadores son sujetos racionales que articulan su práctica con ciertos conceptos teóricos; para tal fin, señala Kuzniak (1994), hay distintas estrategias:

- *Las basadas en mostrar.* Mediante la observación, ponen al estudiante en contacto con su futuro medio de trabajo; les señalan la práctica que deben reproducir.
- *Las de homología.* Se apoyan sobre un modelo de imitación; los formadores enseñan de la misma manera en que desean que sus aprendices lo hagan.
- *Las basadas en la transposición.* Hacen énfasis en el saber didáctico como referencia para reflexionar acerca de las nociones didácticas que deben transponerse.

En este mismo sentido, Jiménez y Sosa (2024) detectan tres tendencias didácticas entre los formadores:

- *Instrumentalista,* donde el formado es un sujeto pasivo.
- *Platónica,* donde se da una construcción activa de la comprensión.
- *De resolución de problemas,* donde el formado hace una exploración autónoma basada en sus propios intereses.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Sobre las estrategias utilizadas por sus formadores, las profesoras señalan:

> F: Las actividades estaban centradas en lo lúdico y en comprender el porqué de las cosas. Eran como simular estar en el salón de clase con niños. Se trataba de vivenciar las mismas actividades o juegos que realizarían ellos. Luego reflexionábamos cómo íbamos a enseñar eso a los niños. Recuerdo que la formadora nos puso un jueguito que se llamaba "el cajero"; fue bonito comprender cómo el juego permite que los niños comprendan algunos conceptos matemáticos, como el valor posicional. A través de estos análisis pudimos reflexionar cómo enseñar esos contenidos y cómo nos podían apoyar los materiales. Así, vimos que el camino de la memorización no es el ideal.

> C: Se percibía que mi formador tenía muy bien organizadas sus clases. Los recursos que utilizaba, así como la variedad de estrategias, estaban divididos en varias áreas; en algunas planteaba situaciones problema, las resolvíamos y luego hacíamos un análisis sobre la estrategia que habíamos utilizado y las que pudieran utilizar los alumnos. Esa parte resultaba muy enriquecedora porque nos ofrecía un panorama de lo que enfrentaríamos en la práctica docente, de las posibles soluciones que darían los estudiantes y cómo poder intervenir frente a ellas. En otras diseñamos una situación, pero nos iba orientando en las fases del diseño.

Como se puede apreciar, en ambos casos la estrategia fundamental era la homología, "vivenciar" las actividades que realizarían los niños (resolver problemas y argumentar sus soluciones es propio de este tipo de estrategia). Aún así, tanto reflexionar acerca de la utilidad del juego como diseñar situaciones de enseñanza reflejan una estrategia de transposición porque se focalizan en el discurso tecnológico de una praxeología. Por otra parte, sirven para describir, facilitar, motivar y validar la técnica empleada para resolver una tarea didáctica (Castela y Romo, 2011); sin embargo, para que una técnica innovadora aparezca, se utilice, transmita y legitime, es indispensable que en la institución exista un discurso mínimo en torno a ella, de corte tecnológico (Chevallard, 1999).

Ahora bien, el proceso praxeológico estaría incompleto sin el discurso teórico, lo que no es un problema menor. Se tendría que dilucidar si las instituciones formadoras de profesores aceptan la existencia de ciertas teorías didácticas, de manera específica, aquellas que validen las técnicas y las tecnologías utilizadas. De no ser así, la discusión se limita al discurso tecnológico, a las razones sobre por qué utilizar una determinada técnica y no otras.

Desde la perspectiva de la TAD, la teoría es un *logos* racional, institucionalizado y que valida la tecnología de la técnica; no obstante, al aplicarla se convierte con frecuencia en un discurso evanescente, ausente o institucionalmente escondido (Castela, 2016). Por tal inconsistencia, es posible que en una institución formadora de profesores se tolere la ausencia de teorías didácticas y que las praxeologías queden varadas en el bloque técnico-práctico. Sobre la inclusión de la teoría en sus procesos de formación, las profesoras señalan:

> F: Trabajamos mucho con el libro de Isoda y Olfos y la teoría de las situaciones didácticas fueron las que más incorporamos. Leíamos los textos, hacíamos exposiciones y reflexionábamos sobre los conceptos. Fuimos a practicar con primer grado e hicimos una situación didáctica; seguimos al pie de la letra lo de las situaciones didácticas. De igual forma hicimos un ensayo con lo que sucedió en la validación de nuestra clase. La validación y la institucionalización me quedaron más grabados porque no sólo las hacíamos en las clases de matemáticas; bueno, también la institucionalización.

> C: El formador no se limitaba a darnos consejos; incluyó la teoría de las situaciones didácticas. A partir de eso analizamos en qué consistía cada fase, qué planteamiento podíamos hacer, si el planteamiento correspondía o no con la teoría. Y luego diseñamos las actividades para llevar a cabo la fase de acción, la validación, la formulación, qué realizan los alumnos en la fase de institucionalización, cuál es el papel del docente y el de los alumnos. Leíamos textos y luego los analizábamos.

A diferencia del bloque técnico-práctico, que surge y se consolida en el interior de las instituciones, el discurso teórico se genera fuera de ellas. Los sujetos deben buscarlo en la exterioridad. Lo notable en este caso es que, en los años estudiantiles de Fabiola y Celeste, el discurso teórico oficial que se impartía en las escuelas normales de México era el *estudio de clase*; el texto básico, el de Isoda y Olfos, y el discurso racional, la teoría de las situaciones didácticas. Aquel era el *logos* que los formadores de dos escuelas distintas encontraron fuera de la institución para darle sentido al trabajo praxeológico de formación. Del sentido que dicho *logos* otorgó al trabajo práctico, hablan las profesoras en los siguientes términos:

> F: Me fue bien en la práctica. Recuerdo que fue en segundo semestre, tres días de prácticas. Mi actividad incluía material, sopitas pintadas, cartulinas. Recuerdo que a los niños les gustó mucho. La actividad fue en equipo para que socializaran. Los niños sí platicaban, sí se apoyaban, y al final, en la validación, sí llegamos al punto que queríamos llegar. Sin embargo, no puedo asegurar que hayan aprendido o si ya

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

venían arrastrando el conocimiento como tal. Pero en esos tres días recuerdo que mi práctica fue fructífera.

> C: Considero que me fue bien en mis prácticas, porque les daba a los alumnos este espacio para la resolución de los problemas, para que formularan una estrategia de solución, aunque los alumnos no estaban acostumbrados, como que tenían esta resistencia a resolverlos y esa necesidad de aprobación. O sea que te exigían, "dígame si está correcto o incorrecto", y tenías que decir, "bueno, la estrategia es esta". En las primeras clases dices, "tal vez esto no está funcionando, esto no es lo que yo pretendo". Pero conforme avanzaba el tiempo, los niños entraban en esta dinámica de analizar sus respuestas, sus procedimientos y los de sus compañeros.

La dimensión institucional juega un papel protagónico en la formación inicial de profesores, pues tanto formadores como formados se encuentran ligados a las restricciones, condiciones y recursos que se despliegan en la actividad matemático-didáctica. Por consiguiente, desde la TAD, todo problema didáctico es un problema de ecología praxeológica que orbita en torno de las siguientes preguntas: ¿por qué motivo las cosas son como son en la contingencia institucional?, ¿qué condiciones se deben instaurar para que puedan coexistir las praxeologías en la institución? y ¿cómo el modelo epistemológico específico en una institución condiciona la organización del estudio? (Gascón, 2011).

Estas restricciones y condiciones institucionales que determinan el trabajo praxeológico en la formación se aprecian cuando las profesoras narran lo que ocurrió en la escuela normal después de sus cursos sobre enseñanza de las matemáticas:

> F: Las situaciones didácticas se quedaron muy tatuadas en mis planeaciones porque fue lo único que vimos. Fue un semestre muy fructífero. No hubo ningún otro referente [...] Nos casamos con situaciones didácticas. Y lo digo en plural porque fue generalizado en mis compañeros. Después, los formadores que nos daban las clases de observación y práctica docente nos revisaban más la forma que el fondo en nuestras planeaciones: que si cumpliamos con material didáctico, siempre era el material didáctico, y nos ponían una palomita, pero de fondo, realmente no nos revisaban.

> C: Después de los cursos de enseñanza de las matemáticas, en séptimo y octavo semestre, que era el periodo de la práctica intensiva, nuestro maestro de práctica nos pedía una metodología que estuviera acorde con cada disciplina. Para español eran los proyectos, para geografía

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

> era aprendizaje basado en problemas y para matemáticas la teoría de las situaciones didácticas sí era aceptada.

En el caso de Fabiola, las restricciones eran más fuertes, el modelo epistemológico para el estudio no estaba consensuado en la institución, y tampoco el discurso teórico. La observación de que "no hubiera ningún otro referente después" y que "se priorizara la forma sobre el fondo" implica que no todos los formadores estaban sujetos a las mismas normas y restricciones institucionales. Por el contrario, puede verse en el relato de Celeste que la dimensión institucional impone menos reservas para que puedan vivir las praxeologías matemático-didácticas, puesto que los formadores "pedían una metodología acorde con cada disciplina".

La teoría y la práctica, de la aplicación al sentido

Shulman (2005) advierte que es en la práctica de enseñanza donde los profesores ponen en juego una amalgama de conocimientos que los convierte en expertos. Se trata, entonces, no solo del lugar para aplicar la teoría, sino también de una fuente de conocimiento, donde surge una *sabiduría de la práctica*. Dicha noción se inscribe en la tradición de Dewey (acción-reflexión) y en la de Schön (profesor reflexivo), pero a diferencia de ellos, Shulman asigna un lugar preponderante al contenido de la materia y sus implicaciones en el acto de enseñar.

Tardif (2014), de igual forma, analiza la relación entre la práctica y el conocimiento; señala que el profesor no es un "idiota cognitivo", sino un actor racional que reflexiona y toma decisiones basadas en lo que le funciona en la práctica. A su vez, el formador, cuyos saberes son distintos, debe ser consciente de esa práctica para ayudar al profesor a enriquecerla. Sobre la manera como sus formadores articulaban sus saberes conceptuales con la práctica, Fabiola y Celeste relatan:

> F: Articulábamos lo estudiado en las clases con la práctica en los ensayos de final del curso. Tenían inicio, desarrollo y el cierre. En el desarrollo teníamos que hacer nuestro registro de clase y compararlo con la teoría. Por ejemplo, en el semestre veíamos los niveles de Van Heile y analizábamos lo que decía el alumno para ver en qué nivel se ubicaba. También veíamos lo de las situaciones didácticas; revisábamos el registro de nuestra clase y decíamos, "esto demuestra cómo fue la validación entre los equipos, y aquí al final de la clase se ve la institucionalización con los niños".
>
> C: El formador se acercaba a observar nuestras prácticas y, una vez que terminaba, nos realizaba algunas observaciones. Grabábamos en

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

> video nuestras clases, después hacíamos un registro, y durante la clase los compañeros ponían un fragmento de su registro. Todos lo analizábamos: el diseño de la clase, la puesta en práctica. De igual forma las fases de la teoría de las situaciones didácticas: lo que realizaron los alumnos, la intervención del docente en cada fase, si la intervención del docente y del alumno correspondían con la teoría o no.

Climent *et al.* (2013) denuncian la falta de una práctica real sobre la cual reflexionar colaborativamente en el aula formativa inicial; sostienen que, como respuesta, en la última década, se intensificó la investigación sobre lo que los estudiantes para maestro aprenden con el uso de videos de clases. Empero, ya en 2013, los formadores de Fabiola y Celeste habían resuelto esa carencia y utilizaban videograbaciones de la práctica de los formados para interpretar sus acciones a la luz de la teoría sobre las situaciones didácticas. El hecho revela que reconocían la importancia de contar con un discurso teórico para la formación y articularlo con la práctica, no ajena, sino propia.

Además, en ninguno de los dos casos se advierte que los formadores desplegaran un modelo limitado a la aplicación de la teoría; prefieren desarrollar la capacidad de los profesores en ciernes para interpretar las situaciones de enseñanza y detectar qué fenómenos del aula repercuten en el desempeño del alumnado, desde una perspectiva basada en la didáctica de las matemáticas (Llinares *et al.*, 2008). El discurso teórico, el *logos* racional que no se genera en la institución, permite a los formados dar sentido al proceso praxeológico completo: determinar el porqué de ciertas tareas; justificar, explicar y validar las técnicas para su resolución, pero también respaldar sus justificaciones. Teorizar el discurso tecnológico es necesario para asignar sentido a las acciones de alumnos y docentes en cada fase, y para verificar si las intervenciones de ambas partes corresponden con la teoría o no.

La indeleble huella de la formación

Las investigaciones sobre la formación inicial de profesores generalmente se limitan a probar una situación o tarea formativa específica o a recabar los relatos de las experiencias de los profesores en un espacio contingente de formación (curso, taller, posgrado). Aún así, un análisis completo debe profundizar en las cuestiones siguientes: ¿qué queda después de las experiencias vividas en el proceso de formación inicial regular y cotidiano en dos escuelas normales?, ¿qué sobrevive de esas experiencias en la práctica de las profesoras nueve años después? Al respecto, las participantes señalan:

> F: Sigo trabajando de forma parecida. La clase del cajero se me quedó muy grabada; la he estado trabajando de primero a sexto grados. He utilizado ese juego para que los niños comprendan el porqué de las cosas, pero tengo que confesar que sigue siendo complicado. Los niños se cansan, los veo y me veo a mí de chiquita, llorando porque no podía con lo que me solicitaba el maestro. Hay ocasiones en las que pienso, "bueno está bien, paremos aquí y vamos a tomarnos un respiro, vamos a hacer otra actividad", aunque no he llegado a la validación o la institucionalización. Pero esa clase es lo que más se me quedó grabado y es la huella de mi formación, definitivamente.

> C: Siento que actualmente, como maestra, tengo huellas de mi etapa como estudiante de la normal, están muy presentes. Mi formación influyó demasiado en la manera como soy docente ahora; sigo trabajando muchas cosas de aquellas dinámicas, aunque he incluido otras también, pero la mayor parte de mi práctica está basada en la teoría de las situaciones didácticas.

Fabiola y Celeste son profesoras que se distinguen por su labor para ser mejores cada día; en el caso de la primera, esa búsqueda la ha conducido a completar dos maestrías y un doctorado; en la segunda, una maestría y un doctorado. No obstante, en el paso por sus posgrados, no volvieron a estudiar con profundidad el *logos*, la teoría que orientó sus interpretaciones sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela normal. Una se decantó por la relación entre la tecnología informática y la enseñanza, y posteriormente por otros aspectos de la educación matemática ligados a la inclusión. Otra siguió el camino de la investigación documental sobre el saber (matemático) a enseñar y sobre los conocimientos del profesor. Sus trayectos revelan que, aún hoy, su labor como maestras está marcada profundamente por sus experiencias durante la escuela normal, y esto da cuenta de cuán esencial es la formación inicial en la construcción identitaria del docente y la praxis en el aula.

Conclusiones

El presente estudio se basa en un acercamiento particular a dos profesionales de la enseñanza matemática. El enfoque puede parecer limitado por el tamaño de la muestra; sin embargo, la experiencia, aunque única, característica e inseparable del individuo, puede dejar lecciones de naturaleza colectiva.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Una relación positiva con las matemáticas es un factor que favorece la construcción identitaria del "buen profesor de matemáticas"; no obstante, está sujeta a las condiciones y exigencias contractuales que estipulan las instituciones formativas, y a la capacidad de cada sujeto para adaptarse a ellas. Esta dinámica no es exclusiva de los docentes en ciernes, pues todo individuo pasa por varias instituciones en su vida escolar, pero estas presiones son distintas en los docentes en formación porque el escenario en el que se desenvolverán como profesionales es el mismo donde construyeron su representación sobre lo que implica ser docente: las escuelas de educación básica.

Las experiencias presentadas dan cuenta del papel fundamental de la teoría para que los profesores en formación otorguen sentido lo mismo a las tareas y a las técnicas que a los otros aspectos significativos de la enseñanza. También, articular el discurso racional les permite comprender que hay relaciones entre teoría y práctica más allá del modelo aplicativo de la segunda basada en la primera. En suma, el estudio profundo de una teoría proveniente de la didáctica de las matemáticas parece ser una necesidad imperante en la formación inicial.

Un sistema de estudio conjunta a un profesor en formación, una relación positiva con las matemáticas y a un formador que considere el proceso praxeológico completo, pero tales elementos parecen ser insuficientes para la formación inicial de los profesores como profesionales competentes. También es necesario trascender el nivel del formador como mero individuo y estructurar una ecología institucional, condiciones propicias en toda la institución que favorezcan el desarrollo de praxeologías matemático-didácticas que sean parte de un proceso de formación tal como lo exigen las circunstancias actuales.

Finalmente, urgen más investigaciones que recuperen las experiencias que formadores y formados viven en situaciones "regulares"; es decir, también se necesitan trabajos sobre la formación de profesores, cuyo enfoque investigativo se aleje de los espacios contingentes de formación.

Referencias

Aguayo Rendón, L. M. (2004). El "saber didáctico" en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación. *Educación Matemática, 16*(3), 29-57. https://doi.org/10.24844/EM1603.02

Avalos, A. (1997). Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización. *Educación matemática, 9*(2). 154-163. https://doi.org/10.24844/EM0902.10

Block, D., Dávila, M. y Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática, 7*(3), 5-26. https://doi.org/10.24844/EM0703.01

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38. https://santic.cl/mt-content/uploads/2023/04/brousseau_didactica-en-matematica.pdf

Bruner, J. (2003). *La fábrica de historias. Derecho, literatura, vida.* Fondo de Cultura Económica.

Bruner, J. (2006). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Alianza.

Bruner, J. (2012). *Realidad mental y mundos posibles. Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia.* Gedisa.

Bolívar, A. (2014). Las historias de vida del profesorado: voces y contextos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *19*(62), 711-734. https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v19n62/v19n62a4.pdf

Bolívar, A., Domingo, J. y Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación.* Guía para indagar en el campo. La Muralla.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29. https://doi.org/10.24844/em2802.01

Castela, C. y Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 79-130. https://www.researchgate.net/publication/350941039_Des_mathematiques_a_l'automatique_etude_des_effets_de_transposition_sur_la_transformee_de_Laplace_dans_la_formation_des_ingenieurs

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(1), 17-54. https://www.researchgate.net/publication/268000164_Familiere_et_problematique_la_figure_du_professeur

Chevallard, Y. (1998). Sur l'inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français [Archivo PDF]. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_formation_premiere_des_enseignants.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente [Archivo PDF]. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Osca.pdf

Climent, N., Romero Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), 13-36. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000100002

Delgado Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (Eds.) (8-10 de noviembre de 2023). *Actas VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. https://www.pucv.cl/uuaa/actas-vi-cimtsk

Dewey, J. (2010). *Experiencia y educación.* Biblioteca Nueva.

Dubet, F. (2010). *Sociología de la experiencia.* Editorial Complutense.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (3), 69-87. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.42

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática, 33*(1), 7-40. https://doi.org/10.24844/em3301.01

Guzmán Zazueta, M. L. (2000). Formación, concepciones y práctica de los profesores de Matemáticas. *Educación Matemática, 12*(2), 139-140. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/2/13Guzman.pdf

Hernández, J., Reyes Gasperini, D., Ibarra, S., Aké, L., Angulo, R. y Lezama, F. (2018). Algunas perspectivas teóricas utilizadas para la formación y desarrollo profesional de profesores de matemáticas en México. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 80-98. https://www.researchgate.net/publication/334624922_Algunas_perspectivas_teoricas_utilizadas_para_la_formacion_y_desarrollo_profesional_de_profesores_de_matematicas_en_Mexico

Jiménez Ávila, W. J. y Sosa, L. (2024). Creencias y actuación en el aula de los formadores de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas. 42*(3), 185-202. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5985

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Kuzniak, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré* [Tesis de doctorado, Universidad de París]. https://theses.hal.science/tel-01251462v1

Larrosa, J. (2009). Experiencia y alteridad en educación. En C. Skliar y J. Larrosa (Comp.), *Experiencia y alteridad en educación*. Homo Sapiens Ediciones.

Lezama Andalón, J. (2016). Experiencia docente en matemáticas: narrativas para la construcción de un discurso académico. *Perfiles Educativos, 38*, 87-100. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982016000500087&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512064004

Martínez, G., Lezama Andalón, J. y Sánchez, M. (2013). Las identidades como profesor de matemáticas a través de narrativas autobiográficas. Un estudio de caso. En *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*.

Olbrich, M. y Paredes, S. (2011). Dispositivos de formación profesional: diálogos entre el campo de la investigación y de la formación profesional. *Memoria académica del VIII Encuentro de Cátedras de Pedagogía de Universidades Nacionales Argentinas, 8, 9 y 10 de agosto de 2011, La Plata.* https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.987/ev.987.pdf

Parra Zapata, M. M. (Coord.) (2023). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 36, Número 1.* https://clame.org.mx/documentos/alme36_1.pdf

Parra Zapata, M. M. (Coord.) (2024). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *Volumen 36, Número 2.* https://clame.org.mx/documentos/alme36_2.pdf

Pérez Torres, B. y García, M. (2024). Un estudio de la redención matemática en docentes mexicanos. *Educación Matemática, 36*(3), 65-86. https://doi.org/10.24844/EM3603.03

Reis, P. y Climent, N. (2012). *Narrativas de profesores: reflexiones en torno al desarrollo personal y profesional.* Universidad Internacional de Andalucía.

Salazar Amaya, C. (2021). *Narrativas de profesores de matemáticas sobre su experiencia profesional y de formación: aproximación a las subjetividades emergentes* [Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/28824

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (2023). *Educación Matemática en las Américas 2023. Formación continua y desarrollo profesional*. Comité Interamericano de Educación Matemática. https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/10/2023-Volumen4-Tema-3-Provisional.pdf

Secretaría de Educación Pública (1997). *Plan de estudios. Licenciatura en Educación Primaria. Programa Para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales*. Versión final para consulta. México.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-30. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/19743/19229

Sosa Guerrero, L. (2024). El modelo MTSK como soporte de crecimiento profesional del formador. *PNA Revista en Didáctica de la Matemática, 18*(5), 523-549. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29828

Tardif, M. (2014). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Narcea.

Recibido el 25 de septiembre de 2024, aceptado el 28 de octubre de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Funciones continuas y sus derivadas

Continuous functions and their derivatives

Jesús Jerónimo Castro*
Víctor Larios Osorio

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*jesus.jeronimo@uaq.mx

RINCÓN MATEMÁTICO

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?
Jerónimo Castro, J. y Larios Osorio, V. (2025). Funciones continuas y sus derivadas. *PädiUAQ, 8*(15), 1-12.

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Resumen

La derivada de una función denota un concepto central del cálculo que se estudia en los niveles de educación media superior y superior en México. Este concepto está íntimamente ligado con la noción de función y resulta de amplia utilidad en numerosos escenarios que se solucionan al desglosar el cambio de las variables involucradas. En específico, la derivada permite estudiar el desplazamiento y la velocidad, optimizar funciones y obtener líneas rectas. La investigación aquí presentada se concentra en los conceptos de función, derivada, interpretación geométrica y determinación de máximos y mínimos. Su meta principal es demostrar algunas propiedades de estos tipos de funciones a través de teoremas y plantear problemas y ejercicios vinculados con estos conceptos. De tal modo, se busca que los lectores encuentren interesante y útil el abordaje teórico de las derivadas y su aplicación en situaciones prácticas.

Palabras clave: cálculo, educación matemática, derivada de una función, función continua, interpretaciones de la derivada de una función, matemáticas.

Abstract

The derivative of a function is a central concept that is approached in the upper secondary and higher education levels in Mexico. This concept is closely linked to the principle of function and instrumental in numerous situations where it is essential to analyze the changes of the variables involved. As an example, derivatives are crucial in the study of motion and velocity, the optimization of functions and obtaining straight lines. This didactic dissertation focuses on the concepts of function, derivative, geometric interpretation and determination of maxima and minima. The main goal is to demonstrate a few properties of this function type through theorems and to lay out a set of problems and exercises associated to these concepts. Hopefully, our readers will find interest and usefulness in the theoretical study of derivatives and their application in practical situations.

Keywords: calculus, mathematics education, derivative of a function, continuous function, interpretations of the derivative of a function, mathematics.

PädiUAQ

Funciones continuas y teorema del valor intermedio

El concepto de *función*, en específico el de *función continua,* es fundamental en el cálculo de variables reales. Afirmamos que una función $y = f(x)$ tiene continuidad si su gráfica es una curva conexa, en términos prácticos, si podemos dibujarla sin despegar el lápiz del papel. Por ejemplo, las funciones $y = 2x + 1$, $y = x^2 - 2$, $y = x^3 - 2x$ son continuas (Figura 1), mientras que las funciones cuyas gráficas aparecen en la Figura 2 no lo son.

FIGURA 1. Gráficas de algunas funciones continuas.

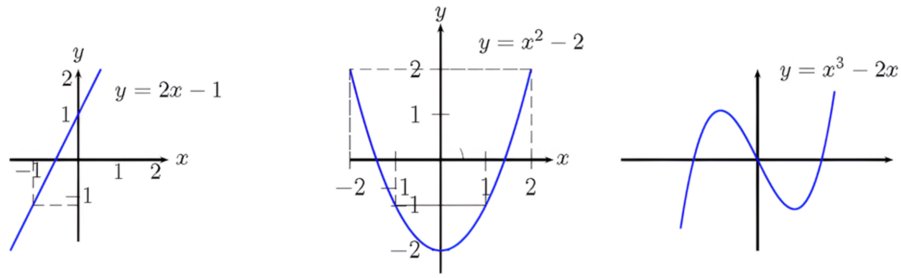
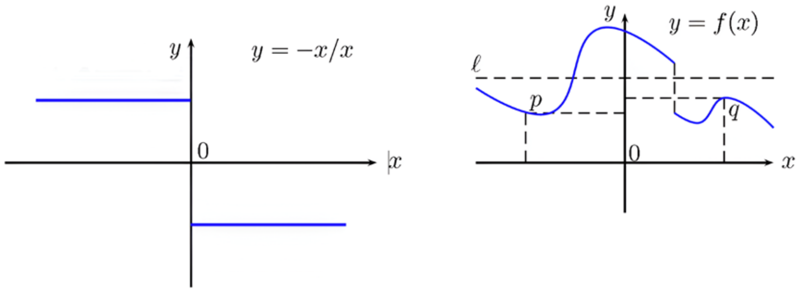


FIGURA 2. Gráficas de algunas funciones con discontinuidades.



Podemos dar la idea de la noción de continuidad sin hacer uso de las propiedades de las gráficas. Sea x_0 un valor de la variable x y sea x_1 un valor cercano a x_0; la función f es continua si, cuando x_1 se aproxima a x_0, el valor absoluto de la diferencia $f(x_1) - f(x_0)$ es arbitrariamente pequeño.

Definición 1.1. Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si para todo número ε positivo existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ cada vez que $| x_1 - x_0 | < \delta$. Si para todo x en un intervalo $[a, b]$ la función $y = f(x)$ es continua en x, decimos que la función es continua en el intervalo $[a, b]$. Utilizando la noción de límites podemos enunciar la definición de continuidad de la siguiente manera.

Definición 1.2. Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, toma en $x = a$ el valor A y para $x = b$ el valor B; entonces, para cada valor M entre A y B existe por lo menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M$ (Figura 3).

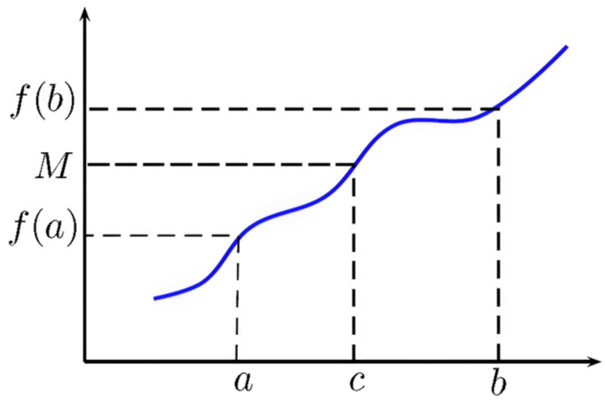


FIGURA 3.
Gráfica de $f(x)$.

Geométricamente, el teorema es obvio. Afirma que si una curva continua, la cual es la gráfica de una función $y = f(x)$, atraviesa un par de puntos $P(x = a, y = A)$ y $Q(x = b, y = B)$ dispuestos en diferentes lados de una línea ℓ paralela al eje x, necesariamente interseca la línea ℓ. Las funciones con discontinuidades no necesariamente manifiestan esta propiedad, las gráficas de las funciones ilustradas en la Figura 2 son un ejemplo. De este modo, tenemos uno de los teoremas más importantes sobre funciones continuas.

Teorema 1.1. Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y λ es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = \lambda$.

Como un primer ejemplo de aplicación de este teorema, veremos el siguiente.

Ejemplo 1.1. Un corredor a campo traviesa recorre seis kilómetros en 30 minutos. Probar que en algún momento en el transcurso de la carrera recorrió un kilómetro en exactamente cinco minutos.

Demostración. Si denotamos por x la distancia recorrida, medida en kilómetros desde el punto de partida, para cada x en $[0, 5]$, $f(x)$ denota el tiempo empleado para el kilómetro desde el punto x hasta el punto $x + 1$. La función f es continua. Sabemos que $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 30$. No todos los $f(0), \ldots, f(5)$ son menores que 5 y, análogamente, no todos son mayores que 5. Por lo tanto, existen puntos a y b en $[0, 5]$ tales que $f(a) \leq 5 \leq f(b)$. Por consecuencia del teorema del valor intermedio, existe un c entre a y b tal que $f(c) = 5$; es decir, el kilómetro desde c hasta $c + 1$ se recorrió en exactamente 5 minutos.

Ejemplo 1.2. Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

domingo a las 8:00 de la mañana desciende corriendo la montaña. Tarda 20 minutos para subir y solo 10 en bajar. En un momento del camino cuesta abajo, se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demuestra que el hombre está en lo cierto (Larson y Edwards, 2010, p. 82).

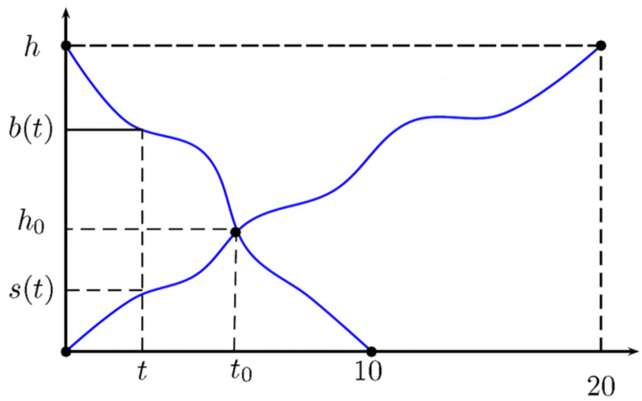


Figura 4. Las gráficas de los recorridos se cruzan.

Demostración. Expresemos con la variable t el tiempo transcurrido y consideremos la altura en que se ubica a cada momento sobre el eje y. Sea $s: [0, 20] \rightarrow [0, h]$, donde h denota la altura de la montaña, la función de subida $s(t) = c$ significa que en el momento t el hombre se encuentra a una altura de c metros. De una manera análoga, definimos la función de bajada $b: [0, 10] \rightarrow [0, h]$. Claramente, ambas funciones son continuas, entonces también la función f tal que $f(t) = b(t) - s(t)$ es continua. Dado que $f(0) = b(0) - s(0) = h - 0 = h > 0$ y $f(10) = b(10) - s(10) = 0 - s(10) < 0$, tenemos, por el teorema del valor intermedio, que existe un $t_0 \in [0, 10]$ tal que $f(t_0) = 0$. De esto se sigue que $b(t_0) = s(t_0)$, es decir, en el momento t_0 el hombre se encontraba ambos días a la misma altura.

Como un ejemplo más de la aplicación del teorema del valor intermedio, probaremos la siguiente afirmación:

Ejemplo 1.3. Cada ecuación cúbica con coeficientes reales tiene al menos una raíz real, a diferencia de las ecuaciones cuadráticas, las cuales no necesariamente tienen raíces reales.

Demostración. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nuestra ecuación cúbica. Esta puede escribirse de manera más conveniente como:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \text{ (con } p = b/a,\ q = c/a,\ r = d/a\text{)}$$

así que investigamos la función $y = x^3 + px^2 + qx + r$, o escrita de manera diferente:

$$y = x^3(1 + p/x + q/x^2 + r/x^3)$$

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Esta función tiene continuidad. Siempre que el valor absoluto de x sea mayor que $max\left\{3|p|, \sqrt{|3q|}, \sqrt[3]{|3r|}\right\}$ tenemos que:

$$\left|\frac{p}{x}\right| = \frac{|p|}{|x|} < \frac{|p|}{|3p|} = \frac{|p|}{3|p|} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{q}{x^2}\right| = \frac{|q|}{|x^2|} < \frac{|q|}{\left|\left(\sqrt{|3q|}\right)^2\right|} = \frac{|q|}{|3q|} = \frac{|q|}{3|q|} = \frac{1}{3}$$

y

$$\left|\frac{r}{x^3}\right| = \frac{|r|}{|x^3|} < \frac{|r|}{|(\sqrt[3]{|3r|})^3|} = \frac{|r|}{|3r|} = \frac{|r|}{3|r|} = \frac{1}{3}$$

Además, como:

$$\left|\frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3}\right| < \left|\frac{p}{x}\right| + \left|\frac{q}{x^2}\right| + \left|\frac{r}{x^3}\right| < 1$$

se sigue que:

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0$$

Esto quiere decir que el signo de $x^3\left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3}\right)$ lo determina el signo de x^3, ya que:

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0$$

siempre que $|x| > |3p|, |\sqrt{|3p|}, |\sqrt[3]{|3r|}$. Es decir, si:

$$a = max\left\{|x| > |3p|, |\sqrt{|3p|}, |\sqrt[3]{|3r|}\right\}$$

para $x < -a$ tenemos que $f(x) < 0$, y para $x > a$ tenemos que $f(x) > 0$.

Por el teorema del valor intermedio, tenemos que existe un punto $x_0 \in [-a, a]$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir x_0 es una raíz real de $f(x)$.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Prueba que f tiene un punto fijo en $[0, 1]$, es decir, que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Ejercicio 1.2. Sean A y B dos ciudades conectadas por dos caminos distintos. Supongamos que dos carros pueden viajar desde A hasta B sobre caminos distintos de manera que siempre mantienen una distancia entre ellos que no excede un kilómetro. ¿Es posible que el primero viaje de A a B y el segundo de B a A, de tal manera que la distancia entre ellos sea siempre mayor que un kilómetro?

Ejercicio 1.3. Encuentra todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las cuales se cumple que $f(0) = 1$ y $f(2x) - f(x) = x$, para todo número real x.

Derivada de una función

Mientras que el concepto de integral tiene sus orígenes en la antigüedad, el concepto de derivada fue formulado en el siglo XVII por Fermat y otros. Fermat, en particular, estaba interesado en desarrollar un método para determinar el máximo y el mínimo de una función. La definición de la derivada de una función es:

Definición 2.1. Una función f es derivable en x_0 si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe. En este caso, el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de "derivada de f en x_0".

Ejemplo 2.1. Probaremos que la derivada de un polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

es el polinomio:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$$

Teorema 2.1. Si una función f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces, como $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0$, tenemos que $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x_0)$.

Dado un polinomio $p(x)$ y un número real r (o complejo), decimos que este es una raíz o cero de $p(x)$ con multiplicidad k, si $(x - r)^k$ es un factor de $p(x)$, pero $(x - r)^{k+1}$ no es un factor de $p(x)$. Ahora veremos un resultado muy interesante sobre la multiplicidad de una raíz de un polinomio.

Teorema 2.2. Sea z_0 una raíz de un polinomio $p(z)$. Supongamos que la multiplicidad de z_0 es un número entero $k \geq 2$. Entonces z_0 es también una raíz de $p'(z)$ con multiplicidad $k - 1$.

Demostración. Supongamos que el grado de $p(z)$ es n y que la multiplicidad de z_0 es k; entonces, tenemos que $p(z) = a(z - z_0)^k q(z)$, donde $q(z)$ corresponde a un polinomio de grado $n - k$ y para el cual se cumple que $q(z_0) \neq 0$. Como:

$$p'(z) = a[k(z - z_0)^{k-1} q(z) + (z - z_0)^k q'(z)]$$

tenemos que $p'(z) = a(z - z_0)^{k-1}[kq(z) + (z - z_0)q'(z)]$. Es decir, $p'(z)$ se factoriza como el producto de $a(z - z_0)^{k-1}$ por un polinomio de grado $n - k$. Como $k - 1 \geq 1$, tenemos que z_0 es un cero de $p'(z)$. Además, como:

$$kq(z_0) + (z_0 - z_0)\, q'(z_0) = kq(z_0) \neq 0$$

tenemos que la multiplicidad de z_0 como raíz del polinomio $p'(z)$ es $k - 1$.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Prueba que la derivada de una función constante es cero.

Ejercicio 2.2. Demuestra que, si f y g son dos funciones derivables en x_0, entonces la función $f \cdot g$ también es derivable en x_0.

Interpretación geométrica

La derivada de una función f evaluada en un punto x_0 es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Esta igualdad se puede visualizar como se describe en el siguiente párrafo.

Sea $P(x_0, f(x_0))$ el punto donde queremos analizar la recta tangente, y consideremos un punto distinto sobre la gráfica de f, digamos $P(x_1, f(x_1))$. Denotemos por t y t_1 la recta tangente por P y la recta secante por P y P_1. Tenemos que la pendiente de t_1 se obtiene como:

$$\frac{P_1Q}{QP} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Entonces, a medida que el punto P_1 se aproxima al punto P, a través de la gráfica de f, tenemos que el valor de la pendiente de t_1 se aproxima al valor de la pendiente de t.

Tenemos entonces que la pendiente de t es igual a:

$$\lim_{P_1 \to P} \frac{P_1Q}{QP} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ con } h = x_1 - x_0$$

Pero esta expresión es, precisamente, la que corresponde a la derivada de f evaluada en x_0, es decir, es igual a $f'(x_0)$.

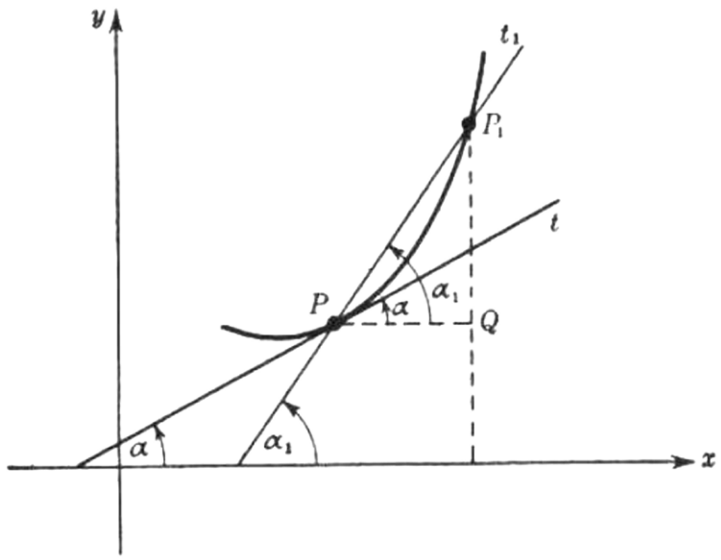


Figura 5. Significado geométrico de la derivada.

Problemas de máximos y mínimos

La derivada de una función es una herramienta invaluable al resolver problemas de optimización. Uno de los teoremas más importantes es el siguiente:

Teorema 2.3. Sea f una función definida sobre (a, b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a, b), y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

Ejemplo 2.2. De un tronco cilíndrico debe sacarse una viga rectangular del máximo volumen posible. ¿Qué forma debe tener su sección transversal? (Perelman, 1993, p. 200).

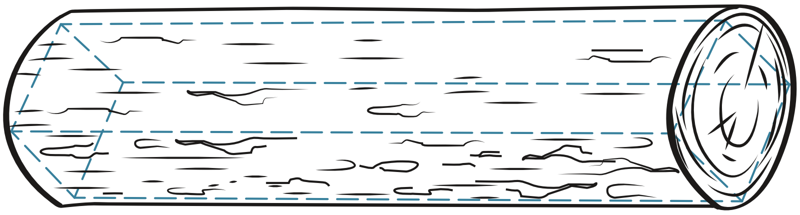


FIGURA 6.
Viga de volumen máximo.

Ejemplo 2.3. Dos pasillos que tienen anchos respectivos a y b se encuentran formando un ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser transportada horizontalmente de un pasillo a otro? (Angoa *et al.*, 2005, p. 231)

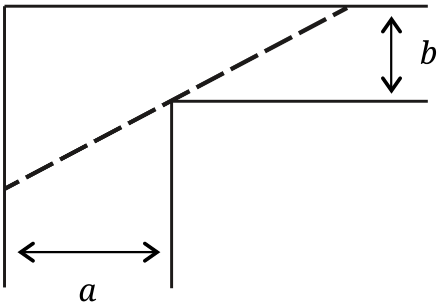


FIGURA 7.
Escalera a través del pasillo.

Ejemplo 2.4. A las 7:00 a. m. un barco estaba a 60 kilómetros en dirección este de un segundo barco. Si el primero navega hacia el oeste a 20 km/h y el segundo hacia el sureste a 30 km/h, ¿en qué momento se encuentran más próximos uno del otro? (Villena, 2017, p. 172)

Ejercicios

Ejercicio 2.3. Dos líneas férreas se intersectan conformando un ángulo recto. Los trenes se aproximan a gran velocidad hacia el cruce. Uno parte de cierta estación situada a 40 km del cruce; el segundo, de una estación que dista 50 km del cruce. El primer tren avanza a una velocidad de 800 m por minuto; el segundo, a 600 m cada minuto. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el instante de partida hasta que las locomotoras se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia? (Perelman, 1993, p. 187)

Ejercicio 2.4. Dada una recta ℓ en el plano y dos puntos A y B en el mismo lado de la recta, encuentra qué condiciones cumple el punto $X \in \ell$ tal que la suma de distancias $AX + BX$ sea mínima.

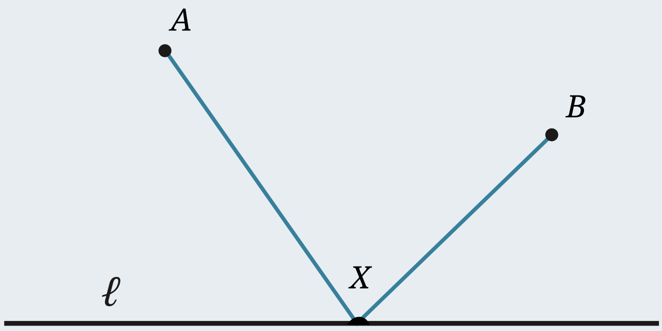


FIGURA 8.
Distancia $AX + XB$ mínima.

Ejercicio 2.5. Encuentra la forma de una cometa con un sector circular que tenga la mayor superficie, partiendo de un perímetro previamente dado (Perelmán, 1993, p. 202).

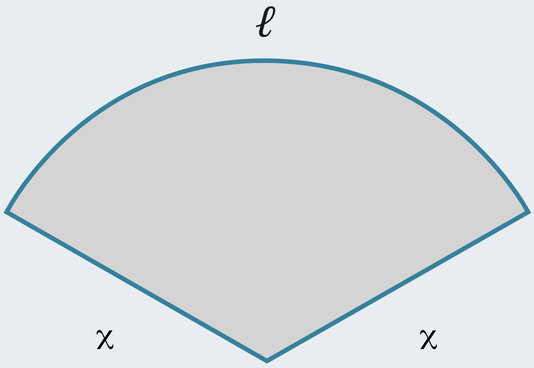


FIGURA 9.
Cometa de área máxima.

Razón de cambio

Como la derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra, para una función $y = f(x)$ se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables x y y con respecto al tiempo t, es decir, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$. Esto nos permitirá resolver problemas de aplicación.

Ejemplo 2.5. Un aeroplano que vuela hacia el norte a 640 km/h pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 km/h está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si las aeronaves están volando a la misma altitud, ¿qué tan rápido se estarán separando a la 13:15? (Villena, 2017, p. 143)

PädiUAQ

Ejercicios

Ejercicio 2.6. Una rueda de la fortuna tarda 2 minutos en completar una vuelta y su eje se encuentra a una altura de 21 metros del suelo. El radio de la rueda es de 20 metros. ¿Con qué rapidez se eleva un pasajero en el instante que se encuentra a 18 metros del suelo? (Villena, 2017, p. 145)

Referencias

Angoa A., J. J. *et al.* (2005). *Cálculo diferencial en una variable*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. http://computo.fismat.umich.mx/~fhernandez/Cursos/Calculo/cal_deuv.pdf

Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. McGraw Hill.

Perelman, Y. (1993). *Álgebra recreativa*. Quinto Sol.

Villena, M. (2017). *El libro negro. Cálculo diferencial e integral*. Academia de Ciencias Exactas APOL.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO

PädiUAQ

¿Quieres publicar en esta revista?

Enviar artículo

Síguenos en nuestras redes:

¿Dudas o sugerencias? Escríbenos a:

padiuaq@uaq.mx

REVISTA INCLUIDA EN:

latindex

LatinREV

VISITA NUESTRO

FISIÓN PODCAST

Escucha de la voz de los autores, entrevistas y comentarios relacionados a sus artículos.

Disponible en:

MÁS REVISTAS UAQ EN:

revistas.uaq.mx

ingenieria.uaq.mx

Edición cuidada, diseñada y maquetada por

DESPACHO DE PUBLICACIONES

Visítanos y conoce las publicaciones que la **Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Queretaro** tiene para ti:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA