# pädiUAQ

DIPFI POSGRADO INGENIERÍA

002 SEPTIEMBRE 2017

REVISTA DE PROYECTOS Y TEXTOS ACADÉMICOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.
PUBLICACIÓN DE LA DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIAUNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO.

PädiUAQ: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# DIRECTORIO



PädiUAQ: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, es una publicación semestral editada y publicada por la **Universidad Autónoma de Querétaro**, **División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.** C.U. Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-52, ext. 6023.
Coordinación de edición: M.D.I. Alma Ivonne Méndez Rojas

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo
No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203
ISSN: en tramite

Ambos registros en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

*Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.*

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

# COMITÉ EDITORIAL




Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# ÍNDICE

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# PRESENTACIÓN

La enseñanza de las matemáticas continúa siendo uno de los retos actuales de la educación pública en México, por ello los programas educativos han buscado apegarse a las competencias matemáticas que postula la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). De ahí, que la OCDE haya creado el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes -PISA, por sus siglas en inglés- que permite medir la capacidad que tienen los individuos para identificar y entender el conocimiento matemático y en ese sentido la capacidad para razonar, analizar y comunicar las matemáticas (Camarena, 2015).

Bajo este contexto, en esta edición la Revista Pädi publica cinco artículos que aportan al objetivo académico y de generación de conocimiento de las matemáticas en los distintos niveles educativos. El primero, de Daniela Hernández y Jesús Noriega, presentan el panorama sobre la importancia que tiene el álgebra en la educación matemática y el proceso por el cual atraviesan los alumnos, por ello los autores ofrecen propuestas didácticas que le permitirán al alumno una transición más efectiva de los conocimientos de la aritmética hacía el álgebra. En esta misma dirección María Fajardo y Víctor Larios demuestran –en su estudio de caso- los procesos de particularización y generalización en la educación matemática en una telesecundaria de la ciudad de Querétaro.

Otro estudio de caso presentado en esta edición es el de Mariana Lujambio, Víctor Larios y Homero Flores quienes reportan a través de una actividad artística y matemática como introducir el concepto de elipse en la materia de Geometría Analítica de la Escuela de Bachilleres de la UAQ. Por otra parte, Alethia Piñón ofrece una propuesta didáctica para la enseñanza de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica de solución, tópicos contemplados en el plan reticular de las ingenierías. Y por último, Juan Abreu presenta los resultados obtenidos tras haber aplicado el enfoque realista de las matemáticas al tema de vectores con alumnos de 5° semestre de preparatoria y resalta la función del docente como facilitador y orientador del aprendizaje de los alumnos.

**Dr. Manuel Toledano Ayala**
**Jefe de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería**

Referencia:
Camarena, G. Patricia (2015). "Educación matemática en México: investigación y práctica docente".
En Xicoténcatl Martínez Ruiz y Patricia Camarena Gallardo. La educación matemática en el siglo XXI. Instituto Politécnico Nacional, México.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# EL ARITMÉTICA COMO BASE INDISPENSABLE PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

## (DEL ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA, UN EJEMPLO DESDE LA TEORÍA APOE)

Arithmetic as an essential base for learning algebra (From arithmetic to algebra, an example based on APOS Theory)

Daniela Hernández Jaramillo, Jesús Alfonso Noriega Márquez
DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO, FACULTAD DE INGENIERÍA,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO. PONTIFICIA UNIVERSIDAD
E-mail: danielahjaramillo@hotmail.com
E-mail: jalfonsonoriega@gmail.com

**RESUMEN:**
En este trabajo se presenta un panorama muy general acerca del papel que juega el álgebra dentro de la educación matemática, así como el proceso de transición por el cual pasan los estudiantes que inician sus estudios de esta materia. Para enfatizar la importancia del álgebra en la formación escolar se muestran algunas estadísticas de las pruebas estandarizadas PISA. Se aborda la relación que existe entre los conocimientos aritméticos que posee el estudiante y el aprendizaje de conceptos y procedimientos algebraicos, y, basándonos en la teoría APOE, (acciones, procesos, objetos y esquemas) se ejemplifica la importancia de contar con bases aritméticas sólidas para la construcción de los conceptos y conocimientos algebraicos. Por último, se abre la puerta a la generación de propuestas didácticas para realizar esa transición desde la aritmética hacia el álgebra.

**Palabras clave:** álgebra, APOE, aritmética, PISA

**ABSTRACT:**
In this paper we present a very general view of the roll that algebra plays inside mathematics education, as well as the transition process that students go through when they initiate their studies on this subject. To emphasize on the importance of algebra during formal education, we show some statistical data collected from PISA standardized tests. We discuss the connection between the arithmetic knowledge that students possess and the learning of algebraic concepts and procedures, and, based on APOS (actions, processes, objects, schemes) theory we provide an example of the importance of having a solid arithmetic knowledge base for the construction of algebraic concepts. Lastly, we open the door for the generation of didactical proposals to work on that transition from arithmetic towards algebra.

**Key words:** algebra, arithmetic, APOS, PISA

# INTRODUCCIÓN

## Pruebas PISA

El sistema educativo en México está constantemente sometido a cambios políticos y sociales que impactan en la educación en general y en la educación matemática en particular. Con todos estos cambios es importante que profesores, investigadores y estudiantes tengan claros los objetivos que se persiguen en la clase de matemáticas, así como la importancia de esta dentro y fuera de los contextos escolares.

El proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas es un tema conflictivo por sí mismo que, además, se ve constantemente afectado por factores externos. Para darnos una idea de las dificultades que afronta este proceso de enseñanza – aprendizaje, podemos referirnos a evaluaciones estandarizadas de nivel internacional, como lo es la prueba PISA.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) ha desarrollado el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, PISA por sus siglas en inglés, como un estudio con fines comparativos entre los sistemas educativos de los diferentes países adscritos a la OCDE. PISA evalúa a estudiantes de 15 años, inscritos principalmente en el nivel medio superior, incluyendo también a estudiantes de nivel básico (secundarias generales, técnicas o telesecundarias). En México, la evaluación estandarizada PISA se aplica desde el año 2000. La finalidad de la evaluación es identificar si los estudiantes han adquirido una serie de competencias consideradas necesarias para su desenvolvimiento en la sociedad. Estas competencias van enfocadas a los dominios de lectura, ciencias y matemáticas.

En el dominio matemático el objetivo es evaluar la competencia de alfabetización matemática. Esta alfabetización matemática se refiere a "la capacidad de las y los jóvenes para analizar, razonar, modelar, argumentar y comunicarse eficazmente cuando se enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en diferentes contextos y situaciones" (Salas, 2012, pág. 3).

La evaluación PISA se aplica cada tres años. En cada ciclo de aplicación se profundiza en alguna de las tres áreas mencionadas, haciendo menor énfasis en las dos áreas restantes. En los años 2003 y 2012 el énfasis principal estuvo en el dominio matemático. De la información publicada por la OCDE (2013) sobre la evaluación PISA 2012 en México, podemos destacar algunos datos estadísticos clave:

- De 2003 a 2012, México aumentó su matrícula de estudiantes de 15 años inscritos a educación formal de un 58% a poco menos de un 70%.

- En matemáticas, el rendimiento de estos alumnos también presentó un aumento, subiendo de una media de 385 puntos en 2003 a 413 puntos en 2012.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

- A pesar del aumento en la media, el 55% de los estudiantes mexicanos no alcanzó el nivel de competencias básicas en matemáticas. Los niveles de competencia más altos son alcanzados por menos del 1% de los estudiantes mexicanos.

- Le media obtenida por los estudiantes mexicanos, 413 puntos, queda por debajo del puntaje promedio en la OCDE, 494 puntos, considerándose como una brecha equivalente a dos años de escolaridad.

Además de estas estadísticas, podemos destacar algunos resultados interesantes en cuanto a la visión de los estudiantes sobre las matemáticas. El informe de la OCDE señala que los estudiantes mexicanos tienden a evitar las matemáticas, pues a más del 75% les generan sentimientos de ansiedad, siendo este el porcentaje más alto entre los países participantes en la OCDE. Esto desemboca en resultados negativos a corto y largo plazo, afectando directamente el rendimiento de los estudiantes y reduciendo drásticamente las probabilidades de que dichos estudiantes elijan profesiones que estén relacionadas con las matemáticas.

México tiene el desafío de mejorar significativamente los resultados obtenidos en la prueba PISA para, cuando menos, alcanzar los puntajes promedio de la OCDE. Cabe destacar que los resultados obtenidos en las áreas de lectura y ciencias no difieren demasiado de los obtenidos en matemáticas. Sin embargo, es bien sabido que la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas es uno de los problemas a los que los sistemas educativos se enfrentan constantemente.

**Teoría APOE**

Como se mencionó en la sección anterior, la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas es un proceso en conflicto permanente. Investigadores en matemática educativa y profesores de matemática de todo el mundo centran sus esfuerzos en encontrar maneras de mejorar estos procesos. Dentro de estos esfuerzos surgen teorías que pretenden explicar, entre otras cosas, cómo es que los estudiantes adquieren o construyen los conocimientos y conceptos matemáticos.

La teoría APOE, desarrollada por el profesor Ed Dubinsky toma como base las ideas constructivistas creadas por Piaget para el desarrollo del pensamiento lógico en los niños. Dubinsky describe la teoría APOE (APOS por sus siglas en inglés) como:

> Las siglas APOS significan las acciones ("actions"), los procesos ("processes"), los objetos ("object") y los esquemas ("schemes"). Estas son las construcciones mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera. (Dubinsky, 2000, p. 59).

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

Lo cual indica cómo el individuo va formando, a partir de abstracciones reflexivas, una concepción de los conceptos matemáticos. Las ideas de Dubinsky se fundamentan en los trabajos desarrollados por Piaget, los cuales indicaban que el conocimiento no es lineal, el individuo no aprende por la acumulación continua de nuevos conocimientos, es más bien escalonado, Piaget las denomina etapas las cuales representan niveles cognoscitivos característicos, donde en cada nivel cognoscitivo se realiza una reorganización de los conocimientos adquiridos en la etapa anterior. (Piaget y García, 2004).

## EL ÁLGEBRA

Muchas teorías en educación matemática, la visión socio crítica de Skovsmose por ejemplo, defienden la idea de que la matemática no es una serie de conceptos que deban estudiarse y aprenderse o memorizarse, sino que se trata de un conjunto de prácticas sociales que influyen fuertemente en la formación de los futuros ciudadanos. Esto implicaría que en la educación matemática, profesores e investigadores, deben buscar la manera de que, a través de la matemática, los estudiantes desarrollen una capacidad de análisis, crítica y reflexión que les permita contribuir a la toma de decisiones dentro de la sociedad a la que pertenecen. (Skovsmose, 1985).

Como profesores e investigadores reconocemos a la matemática como una herramienta presente dentro y fuera del contexto escolar, necesaria para comprender y manejar las circunstancias que nos rodean.

Sin embargo, para los estudiantes la importancia de las matemáticas no siempre está clara y los docentes se ven en la difícil tarea de justificar ante sus alumnos la necesidad de estudiar matemáticas.

En el caso particular del álgebra, las investigaciones en matemática educativa dejan más que clara la importancia de la misma, no solo como herramienta para el estudio de otras matemáticas, ciencias e ingenierías, sino como elemento clave en el desarrollo del pensamiento lógico y racional que los estudiantes necesitarán dentro y fuera de los contextos escolares. El aprendizaje del álgebra implica el desarrollo de estructuras mentales superiores, generando en los estudiantes procesos mentales que no podrían desarrollarse por sí mismos.

Durante los estudios de bachillerato en México (15 – 18 años) los estudiantes cursan al menos un semestre o cuatrimestre de álgebra e incluso, dependiendo del sistema, un ciclo escolar completo. Por lo general estos cursos se dan al inicio del bachillerato, al considerarse que el álgebra es la matemática que les servirá como base para los cursos posteriores y, que si se tienen dificultades en los cursos de álgebra, entonces es muy probable que los estudiantes presenten dificultades en el aprendizaje de los conceptos que se estudiarán en cursos de matemáticas posteriores, principalmente por las complicaciones en el uso y comprensión del lenguaje algebraico. Sánchez y Serna (2013) señalan que el álgebra está presente en innumerables formas, una de ellas serían las palabras, consideradas como una generalización, incluso no dicen: "Cada una tiene un significado en específico, por lo tanto, la palabra es un acto verbal del pensamiento, así como el álgebra es el acto escrito que ayuda a la generalización y a la resolución de problemas en matemáticas" (Sánchez y Serna, 2013, pág. 97)

En el año 2008, el Departamento de Educación de los Estados Unidos presentó Foundations for succes: The final report of The National Mathematics Advisory Panel. El reporte señala que, aunque son muchas las dificultades que los estudiantes enfrentan en su formación matemática, las políticas educacionales ven al álgebra como una de las preocupaciones principales, considerando que los conocimientos adquiridos durante los cursos de álgebra serán necesarios para los cursos matemáticos que el estudiante deba enfrentar más adelante. Además, investigaciones muestran una fuerte relación entre completar exitosamente sus cursos de álgebra en nivel bachillerato, el éxito a nivel licenciatura y el nivel de ingresos una vez que el estudiante se adentra en la vida laboral.

Es tan grande el impacto del álgebra en el desarrollo del país que, en 2006 el Presidente crea The National Mathematics Advisory Panel, con la responsabilidad de generar recomendaciones y propuestas para "fomentar un mayor conocimiento y un mejor rendimiento matemático entre los estudiantes estadounidenses." (NMAP, 2008, pág. xiii)

## DEL ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

Considerando el nivel de importancia que tiene el aprendizaje del álgebra dentro de la matemática educativa no resulta extraño que numerosos investigadores y profesores desarrollen diversas propuestas acerca del método más adecuado para dar a los alumnos una primera aproximación al álgebra que resulte exitosa y que siente las bases adecuadas para sus futuros encuentros con las matemáticas. Aunque diversos autores señalan diferentes métodos, con sus ventajas y desventajas, una opinión generalizada es la importancia de los conocimientos previos del alumno, los cuales sentarán las bases para que el alumno asimile, de forma correcta o no, la nueva información.

Como lo describen Palarea, Ruano y Socas (2008) inclusive los alumnos considerados como los más capacitados, matemáticamente hablando, presentan grandes dificultades cuando inician sus estudios de álgebra. Una de las razones para estas dificultades puede explicarse en el hecho de que, al iniciarse en el álgebra, los estudiantes traen consigo los conceptos, nociones y enfoques de aritmética e interpretan al álgebra como una generalización de dichos conceptos aritméticos. No obstante, el aprendizaje del álgebra requiere un cambio en las estructuras mentales del estudiante para pasar de situaciones numéricas específicas a proposiciones más generalizadas. (Filloy y Kieran, 1989).

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

Para los estudiantes, resulta extremadamente complicado expresar y entender ideas en un lenguaje matemático y, el proceso de transición de lo informal a las representaciones formales para la resolución de problemas, resulta difícil para los alumnos que se inician en el álgebra. Si a estas dificultades, naturales en el proceso de aprendizaje, se añade la falta de bases sólidas de conocimientos previos, nos toparemos con una serie de obstáculos y errores que serán difíciles de subsanar. Es importante que los profesores sean capaces de identificar cuáles son los errores básicos que comenten los alumnos, ya que esto les brindará información valiosa acerca del origen de estas concepciones erróneas.

Para la mayoría de los investigadores, estas concepciones erróneas no son accidentales, si no que tienen su origen en los procedimientos personales que los alumnos eligen para darle tratamiento a un problema algebraico. Estos procedimientos, a su vez, vienen dictados por las experiencias anteriores de los alumnos en matemáticas. En los últimos años, muchos profesores e investigadores en educación matemática han centrado esfuerzos en analizar los métodos más adecuados para hacer la transición de la aritmética al álgebra, considerando que es justamente en esa transición donde puede encontrarse la fuente de muchos de los errores y dificultades que los estudiantes presentan al iniciar sus estudios en álgebra (Socas, 2007).

En Martínez, Rojas y Villanueva (2015) se realizó un análisis de tres cursos de matemáticas intensivos, impartidos en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.

En dicho análisis se consideraron los cursos de Álgebra I, Geometría Analítica y Cálculo. De las evaluaciones aplicadas durante el desarrollo del curso de álgebra, se detectaron una serie de errores o problemas de aprendizaje que la mayoría de los estudiantes presentaban, en este caso, se mencionan únicamente las referentes al álgebra:

| Curso | Álgebra |
|---|---|
| Principales problemas detectados | Resta y suma de números enteros y fracciones;<br>Multiplicación;<br>Uso de signos;<br>Uso de signos de agrupación;<br>Factorización;<br>Simbología;<br>Conjunto de números. |

Tal como las autoras señalan, los principales errores detectados en álgebra se deben a la deficiencia en las habilidades aritméticas de los alumnos, quienes encuentran muy complicado entender y expresarse en el lenguaje matemático. Con todo lo anterior, se vuelve evidente la necesidad de contar con bases aritméticas sólidas antes de iniciar a trabajar con álgebra.

## VISIÓN DESDE APOE

Como se mencionó al inicio del artículo, los trabajos de Piaget indican que los individuos no aprenden de manera lineal sino escalonada, lo cual implica que en el proceso de aprendizaje el individuo realiza una reorganización de los conocimientos que ya posee para añadir a sus estructuras mentales el nuevo conocimiento, en este caso, el concepto matemático.

Aquí radica la importancia de tener buenas bases previas para aprender un nuevo concepto, si los niveles anteriores presentan incompetencias, deficiencias o defectos será difícil que los nuevos conocimientos queden bien establecidos, ya que no podrán enlazarse los conocimientos previos con los nuevos.

Para que la idea se entienda mejor se presenta un ejemplo de la importancia de la aritmética en conceptos algebraicos. Se analiza la resolución de ecuaciones de primer grado; para realizar este análisis se hace una descomposición genética del concepto, esto es dividir dicho concepto en las mínimas partes que el alumno debe ir aprendiendo, es plantear un camino en términos de construcciones mentales que el estudiante debe seguir para construir de manera exitosa el concepto. (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). La descomposición genética se trabaja de la construcción mental más simple, la acción, para terminar con la más compleja, el esquema; sin embargo, para resaltar la importancia que tienen los niveles inferiores en la formación de nuevos conceptos realizaremos la descomposición del mecanismo mental más complejo al más simple para poder recalcar la importancia que tienen las bases previas antes de formar el conocimiento.

### Resolución de ecuaciones de primer grado

El concepto de resolución de ecuaciones de primer grado (REPG) lo tomaremos desde un punto de vista general, donde el alumno no solo debe ser capaz de resolver la ecuación, sino que también sea capaz de interpretar propiedades para analizarlas y poder resolverlas, y además identificar problemas fuera del contexto matemático. Es por esto que el concepto REPG puede ser comprendido bajo tres conceptos que provienen de diferentes construcciones mentales (Barbosa, 2003).

a) Interpretación de REPG: podemos ver la resolución como un ente matemático que es necesario interpretar y al cual lo podemos manipular a partir de diferentes propiedades de los números y de la aritmética.
b) Resolución de REPG: aquí es donde vemos qué tipo de transformaciones son permitidas, cuál es el mejor método para resolver el problema (algebraico, gráfico, por software, etc.) o cómo se pueden minimizar los cálculos.
c) Identificación de REPG: en esta parte es donde el estudiante debe vincular un problema descontextualizado y poder matematizarlo para generar una ecuación de primer grado y con esto poder resolverla donde dicho resultado pueda regresarlo a su contexto original.

Estas tres diferentes construcciones mentales pueden verse como esquemas de tal manera que hablemos del esquema de interpretación, el esquema de resolución y el esquema de identificación de resolución de ecuaciones de primer grado, a continuación, se presentan las descomposiciones de los tres esquemas.

**<u>Esquema de interpretación</u>**

El esquema según la teoría APOE es el conjunto de mecanismos mentales necesarios para la concepción del concepto matemático. Quiere decir que es el conjunto de acciones, procesos y objetos que se generaron para la resolución de ecuaciones de primer grado.

**Objeto**

En este nivel el estudiante es capaz de concebir algunos procesos que utilizó anteriormente para verlo como un todo, generalizar los procesos, y construir transformaciones sobre esta totalidad.

Aquí el estudiante es capaz de aplicar las propiedades de los números y la aritmética para interpretar las ecuaciones, intuye como puede ser la respuesta de la ecuación, imagina como puede ser la gráfica y las propiedades de la misma, es capaz de identificar una ecuación de primer grado con sus propiedades y diferenciar la ecuación de primer grado de otro tipo de ecuaciones.

**Proceso**

En el nivel de proceso el estudiante es capaz de reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Para nuestro ejemplo se dice que el alumno tiene la concepción de proceso del concepto REPG si tiene nociones sobre las propiedades de las ecuaciones de primer grado, si logra diferenciarlas de otro tipo de ecuaciones.

Sin embargo, no intuye cómo puede ser la respuesta ni la gráfica de la misma, además que no puede utilizar las propiedades de los números para imaginar el posible resultado de la ecuación.

**Acción**

Es el nivel más simple, aquí el estudiante manipula físicamente el objeto, en este caso las ecuaciones de primer grado.

En este nivel el estudiante intuye como es la ecuación de primer grado, la manipula y la compara con otro tipo de ecuaciones, no puede relacionar las propiedades de los números con la ecuación, no tiene bases para imaginar la gráfica ni la posible solución.

**Pre-acción**

Para que el estudiante pueda identificar las ecuaciones de primer grado necesita ciertos conocimientos previos que se denominan pre-acción (Barbosa, 2003). Estos conocimientos son indispensables para comenzar a formar el nuevo concepto, aquí es donde reside la importancia de la aritmética, los conocimientos necesarios para el concepto de REPG son: conocimiento de las propiedades de los números, conjuntos de los números, algoritmos de las operaciones aritméticas, propiedades de las operaciones básicas, leyes de signos.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

Sin estos conocimientos de pre-acción el estudiante no podrá comenzar a identificar una ecuación de primer grado.

**Esquema de resolución**

En este esquema se juntan los mecanismos mentales que creó el estudiante para poder resolver las ecuaciones de primer grado.

**Objeto**

El estudiante tiene la concepción de objeto de REPG cuando es capaz de identificar el mejor método para las ecuaciones que resuelve, ya sea de forma algebraica o gráfica, domina las operaciones necesarias para la resolución y conoce las propiedades de las operaciones para minimizar los cálculos.

**Proceso**

Cuando el estudiante es capaz de resolver por un solo método las ecuaciones de primer grado se dice que tiene la concepción de proceso del concepto.

Intenta resolver las ecuaciones de manera mecánica, a través de un algoritmo, generalmente el que más domina, pero no puede minimizar cálculos por no conocer las propiedades de las operaciones. No reflexiona sobre el trabajo que realiza y lo lleva a cometer errores.

**Acción**

Se dice que el estudiante está en el nivel de acción del concepto REPG cuando utiliza valores uno a uno para poder encontrar el valor que satisfaga la igualdad. No es capaz de reflexionar sobre las propiedades de la ecuación y no conoce métodos para resolver el ejercicio, ni métodos que minimicen cálculos.

**Pre-acción**

Al igual que el esquema pasado se necesitan ciertos conocimientos previos para poder comenzar con la formación del concepto de REPG. En este caso los conceptos que necesita el estudiante son:
propiedades de las operaciones básicas, leyes de los signos, algoritmos para las operaciones aritméticas y conocimientos sobre gráficas de los números reales.

Sin estas bases el alumno no puede concebir el concepto de resolución ya que no puede operar las ecuaciones. Como en álgebra se necesita un mayor nivel de abstracción mental, ya que se trabaja con variables y ya no únicamente con valores concretos como los números, es indispensable que tenga bien establecidas las bases de la aritmética para poder crear la abstracción.

**Esquema de identificación**

No solo es importante la parte de resolver el problema e identificar las propiedades de las ecuaciones, también se enfoca en que el estudiante pueda identificar qué problemas de la vida diaria pueden resolverse con ecuaciones de primer grado, para esto se necesita que el estudiante construya un esquema de identificación de las ecuaciones de primer grado.

**Objeto**

En este mecanismo mental el alumno es capaz de identificar problemas descontextualizados, pasarlos a una expresión que él pueda resolver como ecuación de primer grado, para, una vez resuelto la ecuación, regresar al contexto original. Tiene la capacidad de identificar que problemas son de primer grado y cuáles no.

**Proceso**

En este nivel el estudiante tiene dificultades para identificar que problemas se pueden resolver con ecuaciones de primer grado y cuáles no.
Utiliza el mismo método para todos los ejercicios sin reflexionar en las partes que componen el problema. En los ejercicios que, si logra pasar a ecuaciones de primer grado y logra resolverlas, tiene dificultades en pasar el resultado al contexto original.

**Acción**

Aquí el alumno intenta resolver el ejercicio desde un punto de vista lógico, utilizando solo algunos datos que identificó en el problema, pero sin pasarlo a un contexto matemático. No identifica la ecuación de primer grado que caracteriza el ejercicio, pero puede llegar a resolverlo.

**Pre-acción**

Al igual que en los esquemas pasados es fundamental que el alumno posea ciertos conceptos previos, en este caso sería una identificación de las operaciones aritméticas desde un punto de vista fuera del contexto matemático. Que sea capaz de identificar cuando utilizar fuera del aula las operaciones y como utilizarlas, identifica los datos principales y la idea de lo que se le pide.

## COMENTARIOS FINALES

Desde la teoría constructivista de Piaget se viene destacando la importancia de considerar los conocimientos previos del individuo cuando se pretende que este adquiera nuevos conocimientos y, a pesar de que en el sistema educativo se aceptan estas teorías constructivistas como base para el desarrollo de planes y programas, en las clases de matemáticas aún se encuentra el obstáculo de no tomar en cuenta dichos conocimientos previos antes de enfrentar al estudiante a la nueva información, se obvia la importancia de los mismos, lo que desemboca en que año tras año los alumnos repitan los mismos errores y arrastren concepciones equivocadas a sus siguientes cursos.

Ausubel Novak y Hanesian mencionan: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983, p. 1). El cual recalca lo que hemos venido mencionando desde el punto de vista de la teoría APOE, lo más importante es que el alumno posea bases sólidas en aritmética, que conozca los conceptos, sus propiedades y pueda manejarlos adecuadamente, para que los conceptos en álgebra queden mejor conceptualizados.

Con todo esto, abrimos las posibilidades a la elaboración de propuestas didácticas, tomando los lineamientos de la teoría APOE, que involucren activamente los conocimientos previos de los estudiantes en los procesos

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

de construcción y adquisición de nuevos conocimientos. Para ello se tendría que analizar los conocimientos aritméticos que el individuo posee, así como sus concepciones erróneas, y trabajar sobre ellos en un proceso de transición hacia el álgebra, en el cual, el alumno con las concepciones aritméticas correctas se capaz de realizar los procesos de abstracción necesarios para llegar a concepciones algebraicas igualmente correctas.

## REFERENCIAS


Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Barbosa K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. Revista latinoamericana de matemática educativa, 6(3), 199-219.

Dubinsky E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Revista latinoamericana de matemática educativa, 3, 47-70.

Filloy, Y., y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias, 7 (3), 229 -240.

Martínez, A., Rojas, A. y Villanueva, C. (2015). Experiencias de enseñanza – aprendizaje en matemáticas en cursos intensivos a nivel bachillerato. En Larios, V. y Obregón, S. Avances en la investigación y el desarrollo tecnológico de la Facultad de Ingeniería 2015 (págs. 237 – 242). Querétaro, México: Editorial Universitaria UAQ.

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). Foundations of succes: The final report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington, EEUU: U.S. Department of Education.

OCDE (2013) Programa para la evaluación Internacional de Alumnos (PISA), PISA 2012 – Resultados. 2016, de OCDE. Sitio web: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

Palarea, M., Ruano, R. y Socas, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA, 2(2), 61 – 74.

Piaget, J. y García, R. (2004). Psicogénesis e historia de la ciencia. México: Siglo XXI Editores.

Roa-Fuentes S. y Oktaç A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista latinoamericana de matemática educativa, 13, 89-112.

Skovsmose, O. (1985). Mathematical Education versus Critical Education. Educational Studies in Mathematics, 16, 337 - 354.

Salas, O. (2012). Constructo “Alfabetización matemática” según PISA. Cuarto informe del estado de la educación. Costa Rica: Estado de la nación.

Sánchez, E. y Serna, D. (2013). Álgebra, un conocimiento indispensable. Educación científica y tecnológica. Edición especial, 95 -98.

Socas, M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM (2007). Págs. 19 -52.


# EL PROCESO DUAL DE GENERALIZACIÓN-PARTICULARIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

## THE DUAL PROCESS OF PARTICULARIZATION-GENERALIZATION OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS

María del Carmen Fajardo Araujo[1], Víctor Larios Osorio[2]
[1]FACULTAD DE INFORMÁTICA, Y [2]FACULTAD DE INGENIERÍA,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
[1]E-mail: carmulita@hotmail.com
[2]E-mail: vil@uaq.mx

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

**RESUMEN:**

El proceso de generalización aunque no aparece de manera explícita como una de las finalidades que el alumno debe alcanzar en los tres ejes en que se divide el estudio de las matemáticas durante la educación secundaria, se ha considerado importante conocer cómo son las generalizaciones que los alumnos plantean. Este trabajo tiene la intención de dar cuenta de los procesos de particularización y generalización, éstos últimos categorizados en reconstructivos, expansivos y disyuntivos. Los tipos de generalizaciones fueron evidenciados en una práctica argumentativa realizada con estudiantes de tercer grado de una telesecundaria del Estado de Querétaro, en actividades correspondientes al eje Forma, espacio y Medida. Los resultados indican que el tipo de generalizaciones que los alumnos dan depende de su dominio en el lenguaje matemático y de sus habilidades para validar conjeturas, hay alumnos que no abandonan el proceso de particularización para avanzar a la generalización.



**Palabras clave:** generalización, particularización, argumentación.



**ABSTRACT:**

Though the generalization processes does not appear in the explicit way as one of the purposes that the students must reach in the three axes in which the mathematics study is divided during the secondary education, it has been considered the generalization process important to know how they are the generalizations that the students raise. This work has the intention of realizing of the processes of particularization and generalization the above mentioned categorized in reconstructive, expansive and disjunctive. The types of generalization were demonstrated in an argumentative practice realized with students of the third degree in a telesecundaria school of Querétaro´s State in activities corresponding to the axis Forms, space and measure. The results indicate that the type of generalizations that the students give depends of his domain in the mathematical language and on his skills to validate conjectures there are students who do not leave the particularization process to advance to the generalization.



**Key words:** arguments, generalization, particularization.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# INTRODUCCIÓN

## Consideraciones generales

El estudio de las matemáticas en educación básica considera tres ejes, Forma, Espacio y Medida, Sentido numérico y pensamiento algebraico y Manejo de la información. Para cada uno de ellos se esperan finalidades que el alumno debe alcanzar durante su estancia en la secundaria. Uno de los fines más relevantes del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, es el de generalizar propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra (SEP, 2011).

Este trabajo tiene el objetivo de evidenciar el proceso dual de generalización-particularización realizado por alumnos de tercer grado de secundaria, en actividades de temas correspondientes al eje Forma, Espacio y Medida. Conviene aclarar que en los Planes y Programas de Estudio (2011) para educación secundaria, no se hace explícito el desarrollo en el estudiante del proceso de generalización, es sólo en el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico donde aparece. Sin embargo se ha considerado que dicho proceso (generalización) está de manera tácita en los otros dos ejes.

# REFERENTE TEÓRICO

### El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática

El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS] es un modelo teórico compuesto por cinco niveles que pretenden describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática (Font, Planas, 2010). El modelo tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?

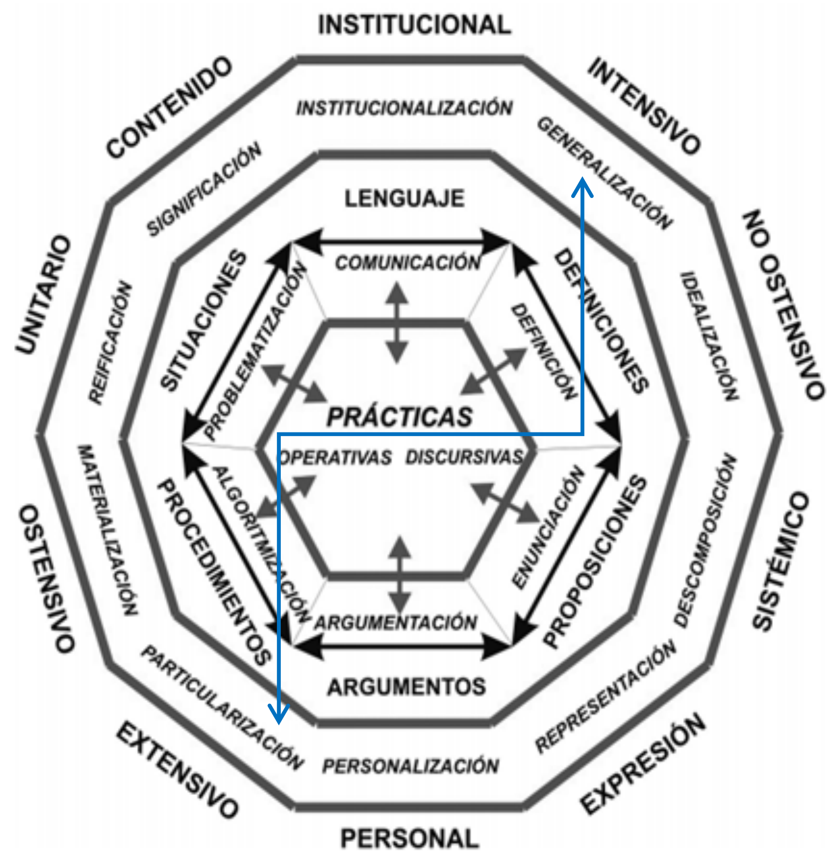



Figura1. Modelo del EOS y los procesos duales.

Los cinco niveles para el proceso de instrucción se describen a continuación:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4. Identificación del sistema de normas y metanormas.

### Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático, tomando en cuenta tanto al agente que realiza la práctica, como el contexto en que se ejecuta dicha práctica. Dado que el agente realiza acciones para la resolución de situaciones problema, hay que considerar otros aspectos como valores, intenciones, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se enfoca en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel de análisis describe la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos.

El tercer nivel implica el análisis didáctico con orientación a describir de los patrones de interacción, los conflictos y su resolución, así como la relación con los aprendizajes de los estudiantes.

El cuarto nivel de análisis estudia la relación de normas y metanormas que condicionan los procesos de instrucción, en este nivel hay que tomar en cuenta los fenómenos de interacción social que suceden en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El quinto nivel se centra en la valoración de la idoneidad didáctica de los niveles previos, con la intencionalidad de identificar mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

El EOS según Rubio (2012) propone procesos matemáticos que fueron agrupados por familias, ya que poseen características en común si se comparan dos a dos. La figura muestra dichos procesos identificados en el decágono, la flecha doble color azul refiere al proceso dual que este trabajo priorizó.

### El proceso de Generalización

La generalización según Krutestskii (1976) se puede distinguir desde dos niveles, la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). En términos escolares para un alumno una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares.

El tipo de generalización depende de las construcciones mentales del individuo (Harel & Tall, 1991). Se han distinguido tres tipos de generalización de los esquemas cognitivos según Harel & Tall (1991), hay expansiva, reconstructiva y disyuntiva. La expansiva cuando el sujeto amplía el rango de aplicabilidad del esquema sin reconstruirlo. La reconstructiva cuando el sujeto reconstruye un esquema existente en orden a ampliar su aplicabilidad. La generalización del esquema es disyuntiva cuando el sujeto construye un nuevo esquema no conectado con los existentes.

El proceso complementario a la generalización es la particularización, pues implica trabajar con objetos matemáticos individualizados, si se toma en cuenta la propuesta de Krutestskii, así como la de Harel y Tall, se habla en ambos casos que para llegar a la generalización, hay que recurrir al empleo de casos particulares.

## METODOLOGÍA

Este trabajo sólo toma los dos primeros niveles de análisis propuestos por el EOS, de manera que la práctica matemática que se analizó fue la de argumentación que es evidenciada en las respuestas de los alumnos a las tareas planteadas. El proceso en el que se centró la atención fue el de generalización identificada en los argumentos proporcionados por los alumnos.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en una escuela secundaria del estado de Querétaro, de la modalidad de telesecundarias, con 28 alumnos del tercer grado, en un laboratorio de cómputo, en lap tops. El trabajo se realizó por parejas y las evidencias fueron recabadas en hojas de trabajo, archivos en Geogebra y grabaciones de audio.

### Estructura de las hojas de trabajo

Las actividades planteadas corresponden a los temas vigentes para el tercer grado del eje Forma, espacio y medida del Plan de estudios para educación secundaria. La organización de las actividades se realizó tomando en cuenta la unidad cognitiva de los teoremas (referencia).

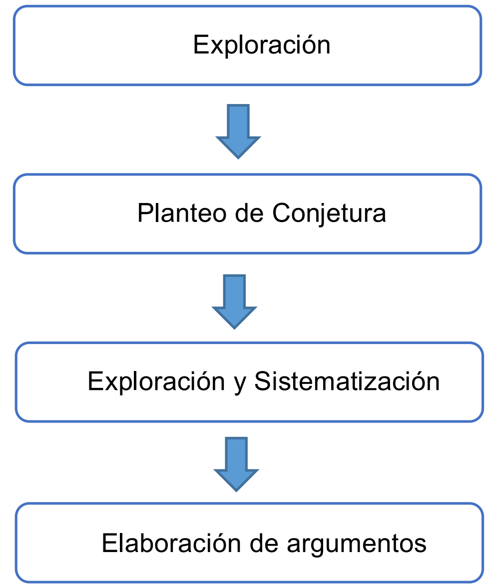



Figura 2. Etapas de la Unidad Cognitiva de los Teoremas.

Se describe de modo general cada una de las etapas, donde conviene aclarar que en una misma actividad se presentaron etapas repetidas, pues la hoja de trabajo requería del planteo de más de una conjetura, por lo que era necesario explorar, plantear la conjetura y argumentar en reiteradas ocasiones.

Etapa de Exploración: los alumnos en construcciones realizadas en Geogebra y guiados por preguntas observan regularidades, en triángulos, en paralelas cortadas por transversales, etc.

Etapa de Planteo de Conjetura: una vez que se observaron las regularidades, los alumnos guiados por preguntas se esperaba que plantearan una conjetura.
Etapa de Exploración y Sistematización: al plantear la conjetura los alumnos habrán de verificarla, por lo que se

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

les pide que observen sus construcciones, las propiedades geométricas o las características que anotaron en la conjetura.

Elaboración de Argumentos: verificada la conjetura en la etapa anterior, los alumnos habrán de escribir los argumentos producto de la observación de regularidades.

**Descripción de las actividades**

Las actividades se diseñaron con base en los temas propuestos para el tercer grado de secundaria del eje Forma, espacio y medida, de los planes de estudio vigentes (2011). Se relacionaron entre sí siete temas con la finalidad de que el alumno tuviera elementos sólidos para construir argumentos a sus conjeturas.

La primera actividad fue la circunferencia como lugar geométrico, donde la finalidad era que el alumno construyera el concepto de circunferencia a partir de la exploración en una construcción en Geogebra.

La segunda actividad consistió en establecer la rigidez triangular y la desigualdad triangular como condiciones para construir triángulos. Los alumnos debían enunciar las dos reglas a manera de generalización.

La tercera actividad fue la de identificar y definir los ángulos opuestos por el vértice, así como los correspondientes en rectas paralelas.

La cuarta actividad fue determinar mediante construcciones los criterios y los no criterios de congruencia en triángulos. Los alumnos debían usar conceptos matemáticos establecidos con anterioridad como los ángulos correspondientes y los opuestos por el vértice.

La quinta actividad consistió en enunciar el Teorema de Tales mediante construcciones en Geogebra, además debían apoyar sus conjeturas con los conceptos matemáticos anteriormente construidos.

La sexta actividad fue establecer los criterios y los no criterios de semejanza en triángulos. Las conjeturas debían validarse con los conceptos matemáticos anteriormente abordados como la proporcionalidad de segmentos, pero ahora aplicada a triángulos, la razón de proporcionalidad, en este caso como razón de semejanza.

La séptima actividad abordó la homotecia directa e inversa donde los alumnos debían formular las propiedades geométricas de figuras homotética cuando $k<0$, $k>1$, $k$ entre 0 y 1 y $k=1$.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Dada la insuficiencia en la precisión del lenguaje matemático por parte de los alumnos para redactar argumentos que se orienten a la generalización, en el sentido estricto de la palabra, se optó por identificar dicho proceso con base en la clasificación propuesta por Harel y Tall (1991). Respecto a la particularización se consideró implícito en la categorización mencionada.

El total de preguntas analizadas fue de 945 de las siete actividades, aunque aparecieron otros procesos matemáticos en las respuestas de los alumnos este estudio sólo va a reportar los de generalización y particularización.

Tabla 1.Frecuencia de aparición de proceso de generalización y particularización

| Proceso matemático | Frecuencia de aparición |
|---|---|
| Generalización Expansiva | 18% |
| Generalización Disyuntiva | 17% |

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

| | |
|---|---|
| Generalización Reconstructiva | 7% |
| Particularización | 9% |
| Otros procesos | 41% |

Las figuras representan ejemplos de los procesos de generalización y particularización, para cada una de ellas se hará una descripción breve con el fin de proporcionar una orientación de por qué se clasificaron de esa manera.

La particularización se observó en esta respuesta, la actividad consistió en elaborar la regla de la desigualdad triangular con base en la construcción de un triángulo en Geogebra con circunferencias intersectadas, donde al moverlas el triángulo podía desaparecer, por lo que los alumnos debían enunciar por qué pasaba tal hecho, después de plantear y validar esa conjetura para ese caso, debían generalizar para todos los triángulos. La respuesta se tomó como particularización porque anota de manera separada cómo son los segmentos para triángulos escalenos, isósceles y equiláteros, no logra generalizar a todos los triángulos.

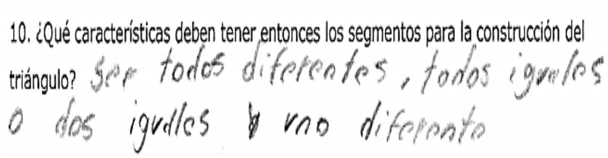

10. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo? Ser todos diferentes, todos iguales o dos iguales y uno diferente

Figura 3. Ejemplo del proceso de Particularización.

La figura 4 es un ejemplo de generalización del tipo disyuntiva que se presentó en la actividad de homotecia directa, cuyo objetivo era que el alumno con ayuda del software observara y enunciara lo que sucedía con los vértices correspondiente de la figura homotética, se les pedía no cruzar el centro de homotecia porque esta primera actividad estaba enfocada a la homotecia directa. En este ejemplo el alumno está respondiendo como si se tratase de una figura, cuando la pregunta alude a los vértices. El sujeto construye un nuevo esquema puesto que puede identificar visualmente cuándo es proporcional y cuándo es congruente la figura de acuerdo a determinadas propiedades de la construcción y a los conceptos matemáticos construidos en actividades anteriores como las propiedades de los triángulos semejantes y congruentes. Sin embargo no puede decir qué sucede con los vértices correspondientes. Su nuevo esquema, que sería el de tomar como sinónimos vértices y figuras, parece inconexo con los otros esquemas como la congruencia y semejanza de figuras porque no responde para los vértices sino para las figuras.

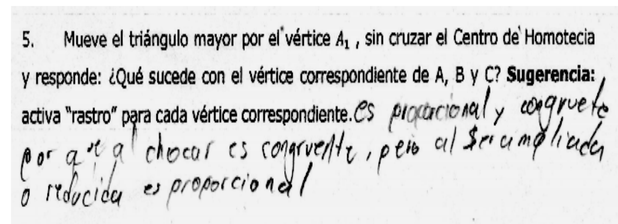

5. Mueve el triángulo mayor por el vértice $A_1$, sin cruzar el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente. es proporcional y congruente por q' al chocar es congruente, pero al ser ampliada o reducida es proporcional

Figura 4. Ejemplo de Generalización del tipo disyuntiva.

La actividad de semejanza consistió en enunciar los criterios a partir de la construcción realizada en Geogebra del Teorema de Tales, la figura 5 refiere al criterio lado, lado, lado y se tomó como un ejemplo de generalización del tipo reconstructiva porque el alumno reconstruye el esquema que tenía sobre las figuras a escala para aplicarlo a la nueva situación que se le presentó concerniente a triángulos y así es decir se ampliar su aplicabilidad.

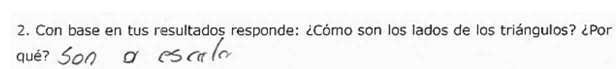

2. Con base en tus resultados responde: ¿Cómo son los lados de los triángulos? ¿Por qué? Son a escala

Figura 5. Ejemplo de Generalización del tipo reconstructiva.

La generalización expansiva se ejemplifica en la figura 6 que corresponde a la actividad del teorema de Tales, donde los alumnos debían establecer la constante de proporcionalidad de segmentos. La definición se fue construyendo con la comparación de segmentos obteniendo el cociente. Se consideró como generalización expansiva la respuesta del alumno, ya que tiene el esquema referente al teorema de Tales y aplicó la definición para establecer la condición que debe cumplirse al comparar segmentos, no hay movilización del esquema, ni tampoco se fracciona, sólo se amplía el rango de aplicabilidad, esto es que el alumno concluyó que la constante de proporcionalidad es el Teorema de Tales.

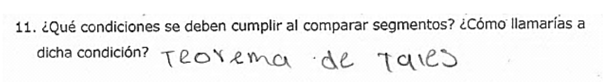

11. ¿Qué condiciones se deben cumplir al comparar segmentos? ¿Cómo llamarías a dicha condición? Teorema de Tales

Figura 6. Ejemplo de Generalización del tipo expansiva.

Los resultados indican que aunque los alumnos llegan a establecer generalizaciones lo hacen con conceptos erróneos o inventados, confunden las propiedades de las figuras semejantes, con las de las congruentes, no hay orden en sus respuestas eso quiere decir aunque empleen casos particulares en algunas tareas que así lo requerían, no garantizó que eso los condujera a la generalización. Las generalizaciones expansivas predominan como proceso en los alumnos en donde no hay reconstrucción de esquemas o bien construyen nuevos, pero éstos no guardan relación con los previos.

## COMENTARIOS FINALES

A pesar de que los alumnos llegan a generalizar esta primera exploración evidencia una carencia del lenguaje matemático, de ahí que se recomiende incitar al alumno a nombrar debidamente a los objetos matemáticos, ya que parecen no abandonar las expresiones cotidianas al construir sus respuestas. Convendría también ayudarle al alumno a distinguir los conceptos matemáticos en los múltiples campos, pues tratan en geometría como sinónimos los conceptos de igualdad y congruencia.

La generalización es un proceso matemático importante que debe desarrollarse en los alumnos, éste debe mejorar conforme el estudiante vaya avanzando en el aprendizaje de los objetos matemáticos, con la finalidad de perfeccionar las formas de expresión al momento de comunicar sus generalizaciones. Si los esquemas de los alumnos se reconstruyen y se ligan con los ya existentes en términos de Piaget (2010) el objeto matemático se transformaría y se dotaría de un nuevo significado.

## REFERENCIAS


Font, Planas, & Godino. (2010). Modelo para el Análisis Didáctico en Educación Matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2),89-105.

Garuti, Boero, & ut, L. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Recuperado el 25 de julio de 2016, de Preuve, Proof, Prueba: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Harell, G., & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in advanced mathematics. For the learning of mathematics, 11(1), 38-42.

Krutestskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (T. f. Wirszup, Trad.) The University of Chicago Press.

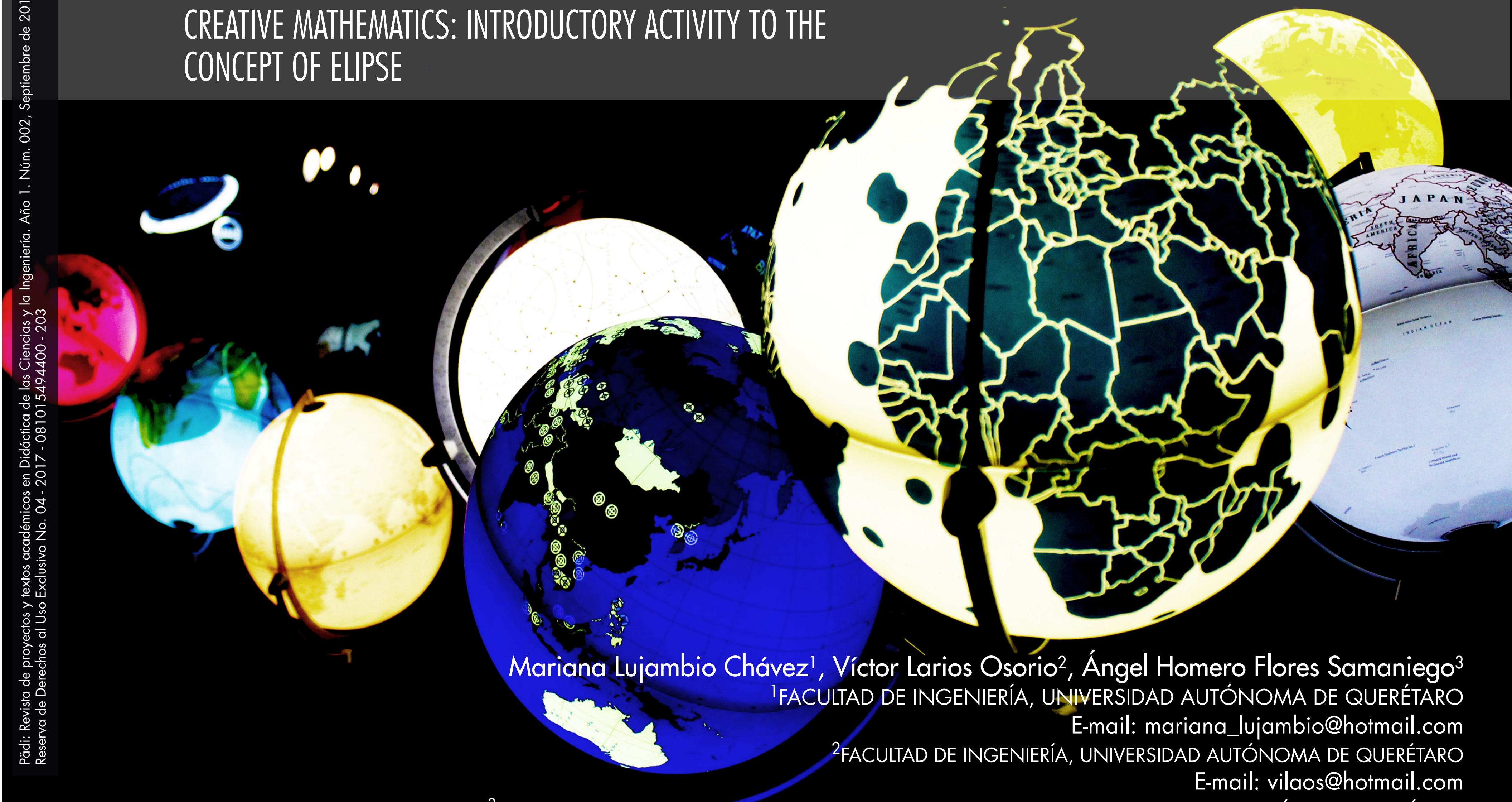
Piaget, J. (séptima reimpresión 2010). La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo. (E. Bustos, Trad.) México: Siglo XXI editores.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de práticas, objetos y procesos matemáticos. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2011). Planes de Estudios 2011. México D.F.: SEP.

# MATEMÁTICAS CREATIVAS: ACTIVIDAD INTRODUCTORIA AL CONCEPTO DE ELIPSE

## CREATIVE MATHEMATICS: INTRODUCTORY ACTIVITY TO THE CONCEPT OF ELIPSE



Mariana Lujambio Chávez[1], Víctor Larios Osorio[2], Ángel Homero Flores Samaniego[3]
[1]FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: mariana_lujambio@hotmail.com
[2]FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: vilaos@hotmail.com
[3]COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES – PLANTEL SUR, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
E-mail: ahfs@unam.mx

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081013494400 - 203

## RESUMEN

El currículo actual de matemáticas demanda planear actividades que desarrollen competencias clave en los alumnos, útiles en su formación como individuos y requeridas para alcanzar metas colectivas. En este trabajo se reporta una actividad artística y matemática para introducir el concepto de elipse en la materia de Geometría Analítica de la Escuela de Bachilleres UAQ. La actividad se fundamenta en el enfoque por competencias y bajo la filosofía de matemáticas realistas propuesta por Freudenthal.



**Palabras clave:** educación, Geometría Analítica, competencias, matemáticas realistas.



## ABSTRACT

The current mathematics curriculum demands to plan activities that develop student's key competencies, useful in their training as individuals and required in helping to accomplish collective goals. In this work an artistic and mathematical activity is reported to introduce the concept of ellipse in Analytical Geometry class from the Bachilleres school at UAQ. The activity is based on the competence approach and the philosophy of realistic mathematics proposal by Freudenthal.



**Key words:** education, analytical geometry, competencies, realistic mathematics.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

## INTRODUCCIÓN

La educación busca la integración de las personas frente a una sociedad en plena evolución, tiene como objetivo formar individuos que tengan los medios personales y materiales para continuar con un desarrollo intelectual, moral, laboral y disciplinario.

El aprendizaje de las matemáticas es un reto para los docentes que las enseñan, se requiere el desarrollo de competencias que han sido valoradas y estudiadas en investigaciones nacionales e internacionales. El enfoque demanda en el nivel medio superior que los alumnos desarrollen tanto competencias disciplinares como genéricas que forman parte del perfil de egreso de la escuela de bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, s.f.).

Al enseñar matemáticas se espera que los alumnos sean hábiles para realizar actividades usando su razonamiento lógico -pero también en el uso del lenguaje y de las TIC- y además adquieran habilidades como el trabajo colaborativo, la comunicación, la autonomía, entre otras.

El profesor, además de permitir que los alumnos escalen niveles cognitivos, debe permitirles desarrollarse en un medio donde puedan adquirir estas habilidades. Uno de los principales objetivos de la Geometría Analítica es que los alumnos puedan establecer una conexión entre la Geometría y el Álgebra, es decir, reconozcan que un dibujo en el plano cartesiano puede ser representado también como una ecuación algebraica.

La Geometría Analítica permite desarrollar habilidades matemáticas claves para el futuro del estudiante de bachillerato: la capacidad de abstracción y generalización, así como la valoración del lenguaje algebraico como una potente herramienta para representar de manera matemática relaciones y propiedades de lugares geométricos (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, s.f.).

En este artículo se reporta una actividad artística elaborada en el curso de Matemáticas V (Geometría Analítica) de la Escuela de Bachilleres de la UAQ, como parte introductoria al tema de la elipse. Además de dar una breve descripción de la actividad, se reportan resultados del desempeño de los alumnos al realizarla y las competencias que se involucran.

## FUNDAMENTACIÓN

Se puede reconocer a la educación como un proceso social, por extensión la educación matemática también es un proceso social (Bishop, 1980). Bajo esa premisa no se puede ver la enseñanza de las matemáticas como un conjunto de conocimientos, sino como la interacción de esos conocimientos con el individuo; de esta interacción depende el buen aprendizaje.

Al aprender matemáticas los alumnos deben desarrollar competencias que lo lleven al saber hacer, saber ser y saber conocer, para permitir una formación integral de los individuos de la sociedad.

En la actualidad, la globalización y la modernización exigen comprender y funcionar dominando las tecnologías y las grandes cantidades de información disponibles; así como desafíos colectivos para el beneficio de la sociedad para tener un balance económico y sustentabilidad ambiental con equidad social. Las competencias que los miembros de la sociedad necesitan para alcanzar metas se han ido haciendo cada vez más complejas (Rychen & Salganik, 2001). Entonces para definir competencia se deben tomar en cuenta varios factores:

> Una competencia es más que conocimientos y destrezas. Involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizando recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto en particular. Por ejemplo, la habilidad de comunicarse efectivamente es una competencia que se puede apoyar en el conocimiento de un individuo del lenguaje, destrezas prácticas en tecnología e información y actitudes con las personas que se comunica (Rychen & Salganik, 2001, p 3).

Las competencias clave son descritas por Rychen & Salganik, (2001) quienes las integran en tres amplias categorías que los docentes deben considerar al planear sus actividades: usar herramientas de manera interactiva (ej. lenguaje, tecnología), actuar de forma autónoma e interactuar en grupos heterogéneos.

Los alumnos deben realizar actividades que les permitan relacionarse con diferentes tipos de herramientas tecnológicas o físicas, poder comunicarse con los demás, así como tomar la responsabilidad y el manejo de su vida. “La necesidad de que los individuos piensen y actúen reflexivamente es fundamental en este marco de competencias” (Rychen & Salganik, 2001, p.4).

La reflexión se desarrolla cuando los alumnos dejan de seguir métodos o técnicas, aplicando fórmulas de forma rutinaria, y permiten la interacción con otros medios que les llevan a aprender de las experiencias y a actuar críticamente.

Los docentes deben considerar que si bien las verdades matemáticas son las mismas en todas partes y para cualquier persona, esto no significa que la educación matemática deba ser igual en todas partes. La enseñanza de las matemáticas debe tomar en cuenta la individualidad del alumno y los contextos sociales y culturales.

> Los planes de estudios, los exámenes, los libros, la formación de enseñantes y la investigación están dominados por el énfasis en el conocimiento de la materia y en la ejecución de la técnica.(…)Lo que en verdad necesita un enseñante no es un texto, sino actividades y recursos que contribuyan al desarrollo de los alumnos (Bishop, 1980, pp. 26 y 29).

Es necesario fomentar, entonces, “la capacidad de los alumnos para resolver y responder adecuadamente en situaciones que requieren de la utilización del conocimiento matemático y de las destrezas propias del pensamiento matemático" (Romero, González, & Quintanilla, 2014).

Bajo estos fundamentos han surgido corrientes dentro de la didáctica de las matemáticas que toman en cuenta al aprendiz y al medio, además del conocimiento matemático. La educación matemática realista es una filosofía propuesta por Hans Freudenthal, se resume en que esta debe ser cercana a la realidad de los alumnos, y ser relevante para la sociedad con el fin de constituir un valor humano (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).
Los alumnos deben tener la oportunidad de reinventar la matemática, es decir, no la crean ni la descubren sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas, con un proceso similar al que usan al inventarlas (Bressan et al., 2004).

La Educación Matemática Realista no pretende ser una teoría general del aprendizaje, como lo es, el constructivismo, sino que es una filosofía, que se concreta en un conjunto de teorías locales de enseñanza de temas de la matemática (Gallego & Bressan, 2011).

El énfasis en matematizar la realidad se instala en lo que se llama matemáticas para todos, Freudenthal destaca que no todos los estudiantes son futuros matemáticos, para la mayoría, toda la matemática que necesitan es la que les será útil para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria. Sin embargo, es necesario a veces para los docentes dejar atrás los problemas de la vida cotidiana y referirse a la matemática para mostrar constelaciones de conceptos, estructuras y sistemas que hayan sido inventados y probados dentro de ella (Gravemeijer & Teruel, 2000).

La realidad es entendida como una mezcla de interpretación y experiencia sensible, lo que implica que la matemática también puede formar parte de la realidad de una persona. Realidad y lo que cuenta como sentido común para una persona no son cosas estáticas sino que crecen y son afectadas por los procesos individuales de aprendizaje (Gravemeijer & Teruel, 2000).

Los alumnos deben realizar actividades que les permitan relacionar la matemática con su entorno, despierte su interés y promueva su creatividad. Los alumnos deben manipular modelos, construir definiciones y matematizarlos para resolver problemas. Estas construcciones les permitirán desarrollar competencias y llegar a mejores niveles de comprensión de la matemática. Sin embargo, debemos reconocer que, para cumplir ambos objetivos se deben seguir varios procesos cognitivos de los estudiantes que permitan su desarrollo día a día, es decir, toda la comprensión no está en una sola actividad, sino en un proceso de enseñanza apoyado en estas actividades, como plantea Godino (2002, p 14):

> El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados

dicotómicos, esto es, se tiene o no, competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que, además, deberán ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes.

## DESARROLLO METODOLÓGICO

El currículo de Geometría Analítica en la escuela de bachilleres se estructura con cuatro unidades, siendo la cuarta correspondiente al tema de las cónicas. La elipse es la tercera cónica que se estudia en el curso, los alumnos tienen una idea intuitiva del concepto de elipse; pues al incio de la unidad se dio una introducción a las cónicas donde se explica su origen y la ecuación general.

Sin embargo, no se ha dado una definición formal de elipse, la actividad que se describe a continuación tiene por objetivo que los alumnos deduzcan la definición por medio de la construcción gráfica de ocho elipses en un plano que formen una mandala para decorar.

El trabajo de clase, llamado actividad artística, se elaboró en dos grupos de 55 y 56 alumnos, se trabajó en parejas con la finalidad de fomentar la colaboración entre ellos; se llevó a cabo en tres sesiones de una hora, algunos alumnos terminaron la decoración en casa por falta de tiempo.

Con la actividad se pretende ayudar al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que son parte del objetivo de la materia y del perfil de egreso de los estudiantes de la Escuela de Bachilleres. En cuarto semestre los estudiantes continúan desarrollando capacidades y habilidades básicas como la del razonamiento matemático, el uso adecuado del lenguaje y su capacidad lectora; el docente debe proporcionar recursos, herramientas y actitudes adecuadas que permitan a los egresados participar en esta sociedad del conocimiento ya sea incorporándose al siguiente nivel educativo o en su caso al ámbito laboral (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, n.d.).

Se espera, entonces, que el estudiante sea cada vez más autónomo al enfrentar las dificultades que se le presenten durante la actividad; exprese sus ideas utilizando distintas representaciones y elija un lenguaje adecuado; piense crítica y reflexivamente; aprenda de forma autónoma cuando revise sus procesos de construcción del conocimiento matemático y los relacione con su vida u otras áreas del conocimiento; trabaje de forma colaborativa, aportando ideas y soluciones.

La actividad se realiza en dos partes: primero se les da instrucciones concretas de cómo dibujar una mandala; posteriormente se les pide que analicen su construcción y con base a ella definan el concepto de elipse; se finaliza con el cálculo analítico de la ecuación de una de las elipses que dibujaron.

La primera parte de la actividad comienza con una introducción para explicar una de las relaciones que hay entre el arte y la matemática: la simetría. La introducción tiene como finalidad fomentar que los alumnos realicen una conexión de la matemática con otro tema fuera de ella. Es decir, matematicen su realidad, para que después aprendan definiciones de objetos matemáticos al interactuar con su representación gráfica. A continuación se presenta la actividad.

La siguiente actividad tiene como finalidad hacer un trabajo artístico que represente ecuaciones matemáticas. Elige una pareja con la que te sea cómodo trabajar, si lo prefieres también puede realizarse individualmente.

La actividad contiene instrucciones específicas de cómo realizar una plantilla:

1. Adhiere con lápiz adeshivo el papel milimétrico al papel cascarón de tal forma que cubra toda el área (…).
2. Dibuja con lápiz fino un plano cartesiano cuyo origen sea el centro de tu plano milimétrico (…).
3. Dibuja con lápiz fino dos rectas que pasen por el origen de tu plano de tal forma que cada un divida a la mitad cada cuadrante (…).
4. Dibuja con compás una circunferencia con centro en el origen y radio igual a una unidad (…).
5. Observa los puntos donde intersectan ambas circunferencias con las rectas (incluyendo los ejes) y remárcalos con lápiz. En los 16 puntos remarcados inserta cuidadosamente un alfiler…La figura obtenida hasta ahora debe ser la de la imagen, en donde cada cruz del dibujo representa un alfiler.
6. Recorta un pedazo de hilo de aproximadamente 18 cms. Amarra el hilo a uno de los alfileres dejando aproximadamente 3 cms de un lado del alfiler y 15 cms del otro lado. Ahora debes amarrar la parte larga del hilo al alfiler que se encuentre en la misma recta y el mismo cuadrante del primero al que amarraste el hilo, de tal forma que la longitud del hilo entre un alfiler y otro sea 12 cms (es decir 6 unidades de tu dibujo)(…).
7. Coloca la mina de lápiz gruesa entre tu hilo y los alfileres (…). Mueve la mina suavemente sin despegarla y sin dejar de estirar el hilo de tal forma que con este movimiento dibujes una cónica (…).
8. Realiza el procedimiento 6 y 7 usando cada pareja de alfileres de tu dibujo que se encuentran alineadas y en el mismo cuadrante.

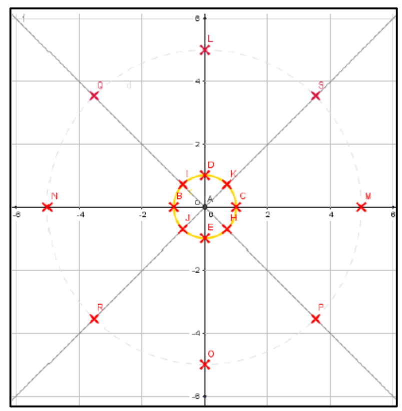


**Imagen 1.**

9. Observa la figura formada y decórala con colores a tu gusto (…).

En la segunda parte de la actividad se espera que el alumno haya entendido que con el procedimiento se dibujó una elipse que puede definir.

Se pide a los alumnos contesten las preguntas:

¿Qué figura se formó al dibujar con la mina y el hilo?¿Qué figura se formó al hacer el procedimiento 8 veces? Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

En esta parte se espera que los alumnos logren identificar el lugar geométrico que dibujaron y lo puedan definir dados dos puntos fijos y un punto que se mueve.

Finalmente se solicita que resuelvan una parte analítica, eligiendo una sola elipse de la cual pueden obtener su ecuación usando la definición. Se pide dibujen en un plano cartesiano un boceto de la elipse de la cual obtendrán su ecuación. Por último los alumnos escriben una conclusión y una reflexión de su trabajo.

## RESULTADOS

Al realizar la actividad encontramos resultados interesantes que serán descritos a continuación.

Primeramente diremos que los alumnos trabajaron sin grandes dificultades la parte práctica, la gran mayoría se sintieron motivados al realizarla, usando todas sus habilidades; fue útil para los alumnos realizar el trabajo en parejas, lo cual permitió fomentar la colaboración y desarrollar competencias de comunicación con otros.

Al realizar la actividad, los alumnos se expresaron artísticamente, utilizaron diferentes técnicas como lápiz, colores, pintura acrílica, confeti, collage. Se muestran algunos de los cuadros finales decorados en la actividad:

Imagen 2. Fotografías de mandalas hechas por los alumnos

A continuación se muestra una tabla de los resultados obtenidos en las preguntas que se hicieron posteriores a la actividad práctica:

| Observaciones | Sí | No | Medianamente |
|---|---|---|---|
| Contesta correctamente qué figura se formó al dibujar con la mina y el hilo. | 92% | 8% | - |
| Contesta correctamente qué figura se formó al hacer el procedimiento ocho veces. | 96% | 4% | - |
| Define correctamente la elipse.[1] | 19% | 46% | 35% |
| Ubica correctamente la elipse que elige para calcular su ecuación en el plano cartesiano. | 58% | 42% | - |
| Calcula correctamente la ecuación del lugar geométrico | 62% | 38% | - |
| Escribe una opinión positiva de la actividad.[2] | 69% | 19% | - |

Tabla 1. Respuestas de 55 alumnos que realizaron la actividad.

[1]Se considera correcto cuando el alumno escribe una definición que cuenta con todos los elementos del lugar geométrico llamado elipse y los relaciona correctamente. Se considera medianamente correcto cuando logra identificar los elementos pero no relacionarlos o relaciona correctamente algunos elementos pero no identifica todos.
[2] El 12% no escribió ninguna opinión de la actividad.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

Analizando las respuestas de los alumnos, la mayoría identifica la gráfica de la elipse y la figura final que se formó; algunos la llaman flor, otros mandala.

Se encontraron dificultades para definir correctamente la elipse, solo el 19% (Tabla 1) logró definirla de forma coherente, entendible y usando su construcción (Imagen 3). Un 35% logró una definición carente de elementos, o con un uso inadecuado del lenguaje (Imagen 4), sin embargo entiende el concepto. El 46% de los alumnos asocian la definición de elipse con la figura geométrica y sus conocimientos previos, con un uso inadecuado del lenguaje (Imagen 5).

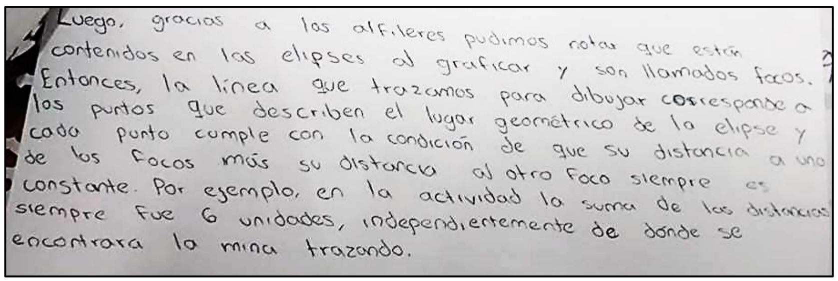
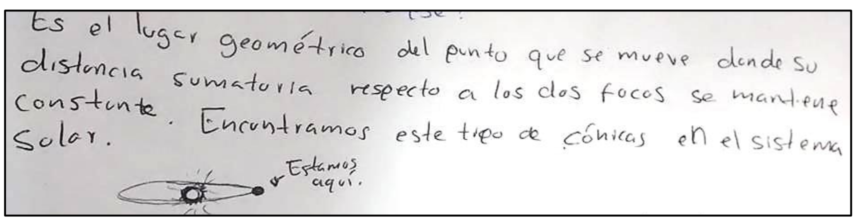

Luego, gracias a los alfileres pudimos notar que están contenidos en las elipses al graficar y son llamados focos. Entonces, la línea que trazamos para dibujar corresponde a los puntos que describen el lugar geométrico de la elipse y cada punto cumple con la condición de que su distancia a uno de los focos más su distancia al otro foco siempre es constante. Por ejemplo, en la actividad la suma de las distancias siempre fue 6 unidades, independientemente de donde se encontrara la mina trazando.

Imagen 3.Definición de elipse de un alumno.


Es el lugar geométrico del punto que se mueve donde su distancia sumatoria respecto a los dos focos se mantiene constante. Encontramos este tipo de cónicas en el sistema solar.

Estamos aquí.

Imagen 4. Definición de elipse de un alumno.

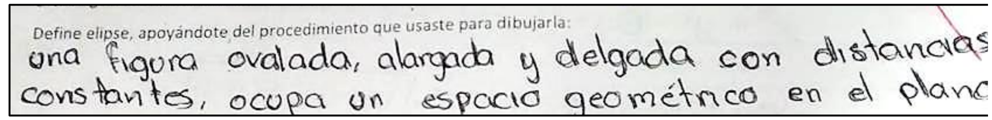

Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla:
una figura ovalada, alargada y delgada con distancias constantes, ocupa un espacio geométrico en el plano

Imagen 5. Definición de elipse de un alumno.

Otros alumnos, asociaron su procedimiento con el trazo de una circunferencia, por lo tanto asocian la definición de elipse a la de circunferencia (Imagen 6).

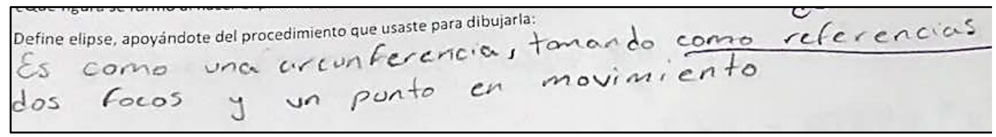

Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla:
Es como una circunferencia, tomando como referencias dos focos y un punto en movimiento

Imagen 6. Definición de elipse de un alumno.

Los alumnos deben dibujar en un plano cartesiano la gráfica de la elipse de la cual calcularán su ecuación. El 58% ubica correctamente la elipse, dados los focos, un 42% confunde los focos con los vértices, ubicando mal la elipse (Imagen 7).

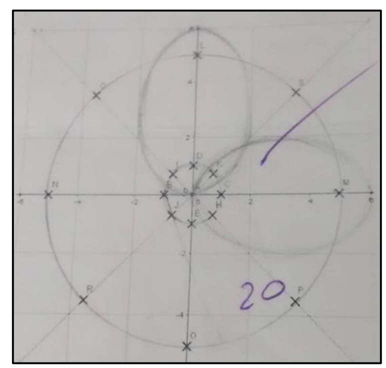



Imagen 7.Elipses ubicadas en el plano cartesiano por los alumnos.

Por último, el 62% de los alumnos logra calcular correctamente la ecuación de la elipse. Para calcularla se requiere de la condición que define a la elipse dibujando su lugar geométrico:

$$d_{\overline{F_1P}} + d_{\overline{F_2P}} = c \qquad (1)$$

Donde $P$ es el punto que se mueve (la mina que dibuja la elipse), $F_1$ y $F_2$ son los focos (puntos donde se colocan los alfileres) y c es una constante (la longitud del hilo que une ambos focos).

Este porcentaje es mayor al de los alumnos que logran definir correctamente la elipse, pues la condición fue deducida y comentada en grupo, antes de proceder a calcular la ecuación particular de una elipse.
De la creación de las mandalas con elipses surgieron cuadros artísticos creativos, que fomentaron al desarrollo de las competencias que se describen a continuación.

a. Competencias genéricas

Es autónomo y cuida de sí mismo: Se conoce y valora, aborda problemas y retos teniendo en cuenta objetivos. Los alumnos hicieron conciencia durante la actividad de sus valores, sus destrezas y dificultades (Imagen 8).

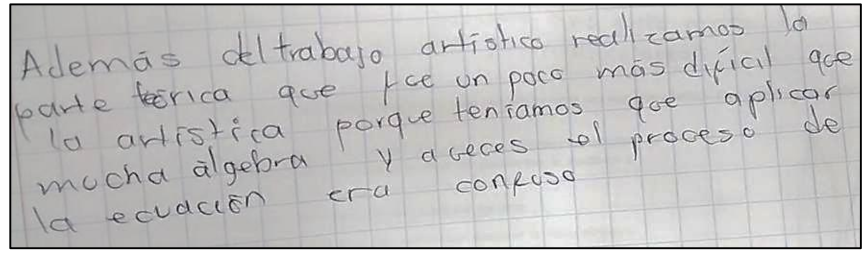

Además del trabajo artístico realizamos la
parte teórica que fue un poco más difícil que
la artística porque teníamos que aplicar
mucha álgebra y a veces el proceso de
la ecuación era confuso

Imagen 8.Comentario sobre la actividad de un alumno.

Se expresa y comunica: Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. Los alumnos expresaron sus ideas con su pareja, también desarrollan una expresión artística y realizaron conclusiones a partir de su trabajo, exponiendo dificultades y aspectos que les gustaron realizar (Imagen 9).

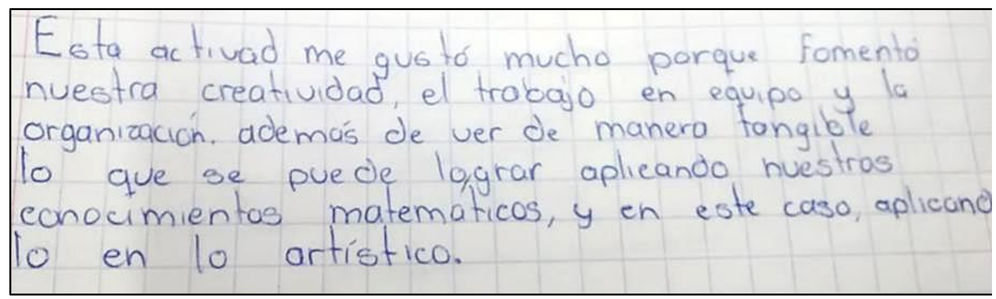

Esta activad me gustó mucho porque fomentó
nuestra creatividad, el trabajo en equipo y la
organización. además de ver de manera tangible
lo que se puede lograr aplicando nuestros
conocimientos matemáticos, y en este caso, aplicand
lo en lo artístico.

Imagen 9. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Piensa crítica y reflexivamente: Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. Los alumnos evaluaron argumentos y opiniones en parejas, haciendo una reflexión sobre los

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

nuevos conocimientos adquiridos. Dieron a conocer sus ideas y argumentos de forma clara.

Durante el proceso de transformación del trabajo,
me di cuenta que se parece a las caracteristicas
de una circunferencia. A pesar de la perdida
de tiempo tuvimos una buena leccion ya que
nos dimos cuenta que la simetria de una elipse
puede formar figuras muy padres.
de alguna manera aprendi que las figuras, elipses,
forman gran parte de estructuras en el universo
como una flor hasta la orbita de los
planetas.

Imagen 10. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Aprende de forma autónoma: Aprende por interés propio a lo largo de la vida. Los alumnos reconocieron tener interés en la actividad, también sus dificultades. Establecieron relaciones de la actividad con su vida y otras áreas del conocimiento.

Me gustó la actividad aunque no haya tenido mucha estética
porque no ha sido como otros ciclos anteriores que sólo
dicen la aplicación que puede tener, además es la primera vez
que hago los cálculos matemáticos con gusto.

Imagen 11. Comentario sobre la actividad de un alumno.

En mi opinión, este tipo de actividades es muy divertida, muchos de
nosotros aprendemos jugando y haciendo trabajos artísticos, la parte
analítica se me hizo un poco complicada de entender en un principio,
pero una vez comprendiendo de dónde sale todo ese metodo
(analizando la realizacción del trabajo artistico.) la actividad se
vuelve mucho más comprensible, y creo que ya me he formado
una idea más clara de lo que es una elipse.

Imagen 12. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Trabaja en forma colaborativa: Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Los alumnos colaboraron entre sí, aportando sus ideas y llegando a acuerdos mutuos para realizar la creación artística, también sobre la compra de materiales y división del trabajo.

Me pareció bien trabajar con mi pareja, nos
dividimos partes de trabajo, trabajabamos los dos,
las ideas de ambos ayudaron a que el
trabajo estuviera creativo, también el
compartir las perspectivas que tenemos sobre
lo realizado del trabajo.

Imagen 13. Comentario sobre la actividad de un alumno.

b. Competencias disciplinares

Las competencias disciplinares buscan formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar el entorno que los rodea matemáticamente. Los alumnos finalmente calcularon la ecuación matemática de su dibujo (Imagen 14), lo que les permite aplicar procedimientos y contrastarlos como modelos establecidos o situaciones reales. Algunos alumnos reconocieron que las elipses aparecen en otros campos de estudio. Los alumnos logran interpretar las ecuaciones como una representación analítica de la elipse.

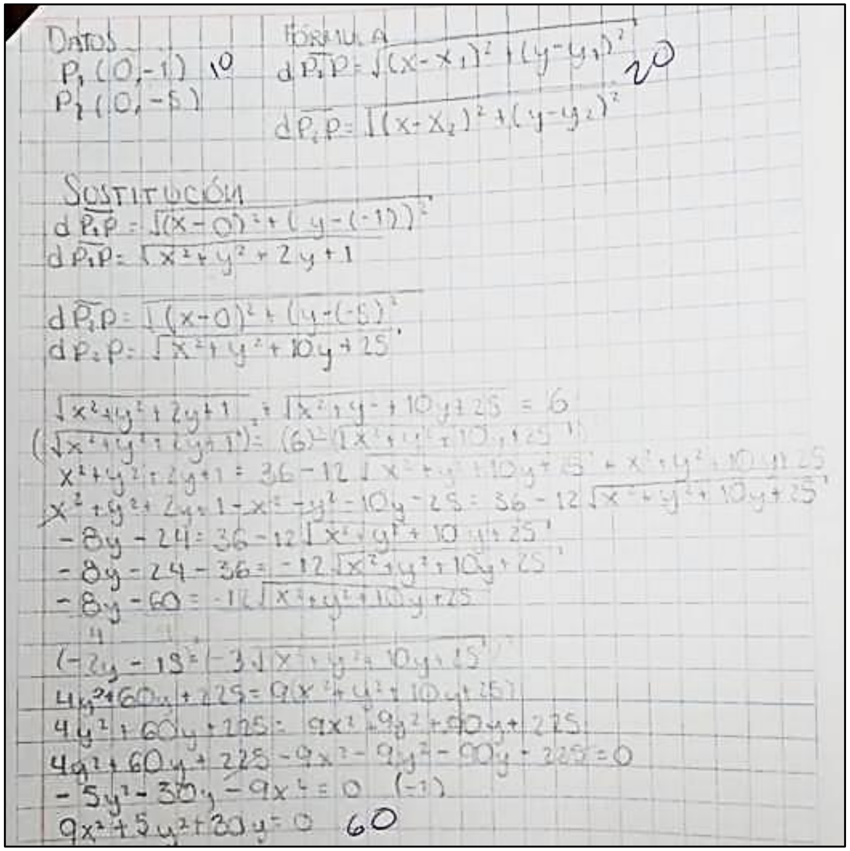


Imagen 14. Cálculo algebraico de elipse realizado por un alumno.

## CONCLUSIONES

Lograr que los alumnos desarrollen competencias es un proceso largo que debe tener un seguimiento durante su formación, sin embargo, se pueden diseñar actividades que vayan enfocadas a desarrollar dichas competencias. Matematizar objetos construidos en la realidad de los alumnos, permite despertar su interés en las matemáticas, además de mostrarles que dicha materia tiene relación con otras ciencias menos abstractas.

Esta actividad permitió a los alumnos usar su creatividad y trabajo en equipo; aunque el objetivo final era relacionar una ecuación matemática con su representación gráfica para definir la elipse, los alumnos pusieron empeño en entregar un cuadro con diferentes materiales que les permitió expresarse artísticamente.

Notamos que los alumnos están poco acostumbrados a redactar conclusiones y opiniones en la clase de matemáticas, pues comúnmente se dedican a seguir algoritmos proporcionados por el maestro, que muchas veces no comprenden. Al pedir a los alumnos que interpreten resultados o definan un objeto matemático por medio de su representación gráfica (que pueden construir) les permite desarrollar habilidades del uso del lenguaje. Sin embargo como mostramos en este artículo, tienen dificultades al hacerlo, por lo que se debe insistir en permitir a los alumnos que interpreten por escrito u oralmente los resultados de problemas matemáticos.

El objetivo de la actividad no se cumplió puesto que un pequeño porcentaje logró definir la elipse correctamente; sin embargo, se puede observar que un mayor porcentaje logra realizar los cálculos algebraicos para encontrar la ecuación, a pesar de que gran parte de los alumnos argumenta tener dificultades para hacerlo, es claro que están más acostumbrados a resolver ejercicios que a usar su razonamiento y su lenguaje para describir objetos matemáticos.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

Gracias a este trabajo podemos concluir que es necesario realizar actividades que le permitan a los alumnos desarrollar otras competencias diferentes a las lógico matemáticas, principalmente las relacionadas con uso del lenguaje.

Se esperaba que más alumnos pudieran definir la elipse con base en su construcción; sin embargo, mostramos que los alumnos están limitados por el uso del lenguaje y la reflexión de los conceptos matemáticos. Se deja abierta la investigación sobre el uso del lenguaje en la actividad, además dejamos la siguiente pregunta abierta para responder en trabajos futuros: ¿cuáles son las dificultades de los alumnos al definir un objeto matemático a partir de su construcción?

## REFERENCIAS


Bishop, A. (1980). Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Paidós.

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, F. (2004). La Educación Matemática Realista. Principios en que se sustenta. In Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática (pp. 1–13).

Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro. (n.d.). Programa Oficial Matemáticas IV.

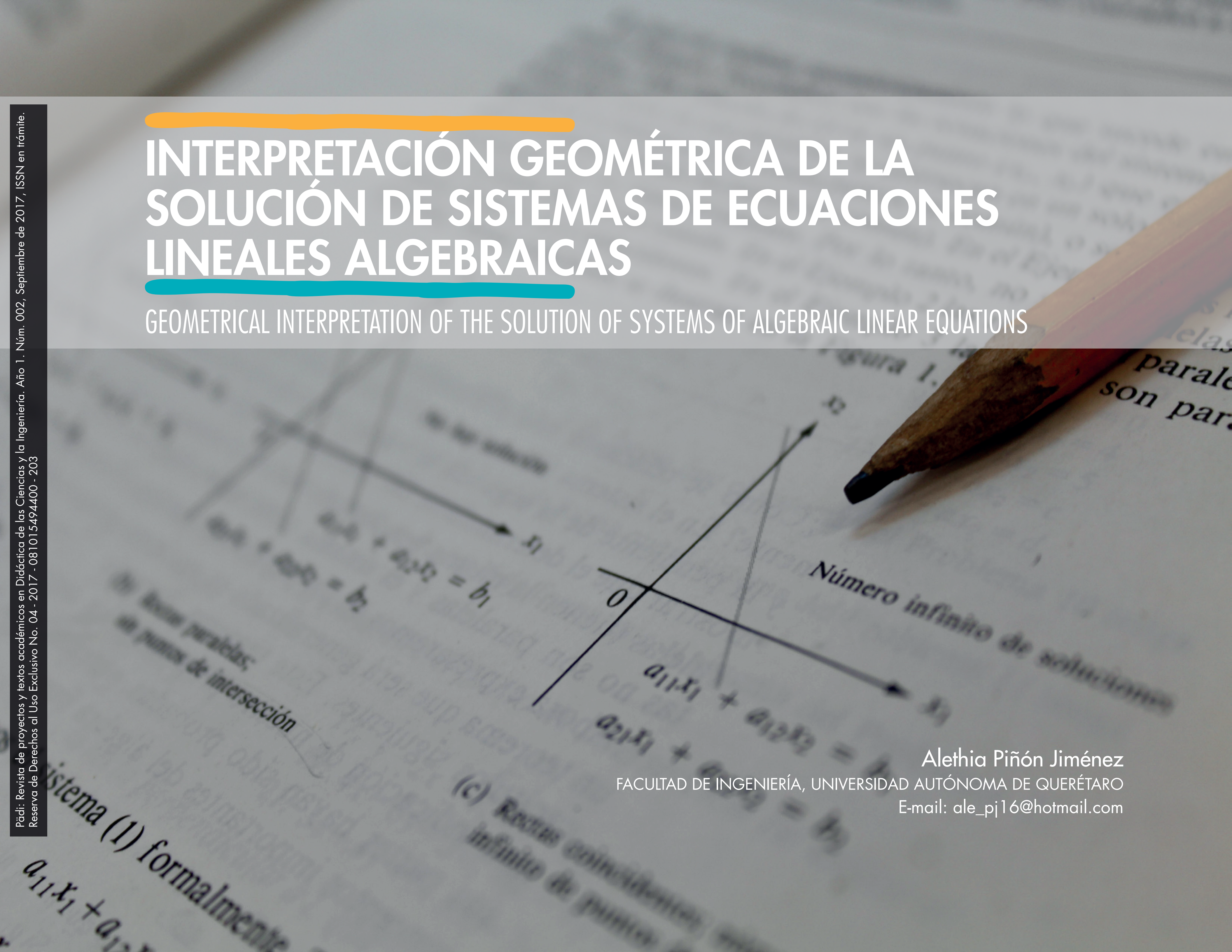
Gallego, M. F., & Bressan, A. (2011). La Educación Matemática Realista. Bases teóricas. In III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea (pp. 1–12).

Godino, J. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. In XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matemática (pp. 8–9). Castel San Pietro Terme (Bologna).

Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. In J.Currículo Studies (Vol. 32, pp. 777–796).

Romero, G., González, L., & Quintanilla, A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática : claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. Enseñanza de Las Ciencias, 32(3), 319–336.

Rychen, D., & Salganik, L. (2001). The Definition and selection of key competencies. DeSeCo Publications, 1–20. Traducción con fondos de la USAID.



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS

## GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE SOLUTION OF SYSTEMS OF ALGEBRAIC LINEAR EQUATIONS

Alethia Piñón Jiménez
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: ale_pj16@hotmail.com

**RESUMEN:**
El presente trabajo es una propuesta didáctica para la enseñanza del tema de ecuaciones lineales y la interpretación geométrica de la solución, el cual, forma parte del plan reticular en el área de ingeniería. En este artículo se proponen dos prácticas relacionadas con el tema, con el objeto de mejorar la comprensión del mismo a través de la construcción de un poliedro cuyas caras se asocian a ecuaciones de planos, que el estudiante determina, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia y luego forma, con las ecuaciones de las caras un sistema, cuya solución se interpreta y verifica tanto en forma física, como con la ayuda de un programa de cómputo para graficar las ecuaciones de los planos. La primera de las prácticas corresponde al caso de sistemas de ecuaciones que tienen solución única, y la segunda, al caso de sistemas que tienen muchas soluciones.

**Palabras clave:** Sistemas de ecuaciones, interpretación geométrica.

**ABSTRACT:**
This work is a didactic proposal for teaching the subject of linear equations and geometrical interpretation of the solution, which is part of the reticular plan in the area of engineering. This article describes two practices related to the subject in order to improve understanding of the same, through the construction of a polyhedron whose faces are associated with equations of planes, the student determines with respect to a coordinate system reference and then form a system of equations whose solution is interpreted and verified both in physical form and with the help of a computer program that plots equations planes. The first of these practices corresponds to the case of systems of equations that have unique solution and the second to the case of systems that have many solutions.

**Key words:** Systems of equations, geometrical interpretation

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

## INTRODUCCION

Investigaciones realizadas desde la década de 1980 revelan que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo (García R. 2013).

En la sociedad contemporánea se considera a las matemáticas como una de las disciplinas de conocimiento más importantes, esto por cuánto la disciplina puede contribuir a que los estudiantes logren desarrollar sus capacidades de exploración, justificación, representación, discusión, descripción, investigación y predicción.

Por lo anterior, no siempre logra constituirse en un medio de comunicación efectiva entre las personas, salvo aquellas que lo conozcan y manejen con propiedad; lo que puede implicar que mientras el docente utiliza un lenguaje técnico los educandos pueden interpretarlo coloquialmente o viceversa, lo que dificulta y, en ocasiones, imposibilita una sola interpretación (García, 2012). Para Camarena (2010a), no hay duda de lo anterior e incluso afirma que el alto índice de reprobación en los cursos universitarios es una muestra del poco interés que muchos estudiantes manifiestan por las matemáticas debido a su “desconexión” con “su” realidad y “su” entorno, así como por la desarticulación que existe con los otros cursos de las carreras que cursan. Esto lleva a un conflicto permanente que contribuye a propiciar la sensación de que el aprendizaje de las matemáticas es un fin en sí mismo, contradiciendo el planteamiento de verlas como un lenguaje dentro de la sociedad del conocimiento y como un instrumento para muchas áreas científicas y profesionales ligadas al desarrollo de competencias.

Con el objeto de contribuir a la conexión del tema de sistemas de ecuaciones lineales y la interpretación geométrica de sus soluciones con el entorno del estudiante, y ayudar a una mejor comprensión de conceptos abstractos como el plano y la recta de intersección de los mismos, se propone en este trabajo el desarrollo de dos prácticas como actividades de aprendizaje.

## DESARROLLO

Se proponen dos prácticas que se identifican con el título de actividad en el presente trabajo. La primera actividad está diseñada para el caso de los sistemas de ecuaciones que tienen solución única y la segunda actividad corresponde al caso de sistemas de ecuaciones que tienen muchas soluciones. Se desarrolla totalmente, a manera de ejemplo, la actividad 1 y la actividad 2 solo se propone.

En ciertas partes del desarrollo de ambas prácticas, se ha incluido la utilización de programas de computadora para graficar las ecuaciones de los sistemas, porque en este caso es un recurso necesario para los procesos de enseñanza y aprendizaje y mejora la comprensión cognoscitiva de los conceptos matemáticos correspondientes al tema.

**Actividad 1.** Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas que tienen solución única.

a) Construya un poliedro en forma de pirámide regular.

b) Seleccione un sistema de referencia de coordenadas rectangulares y determine, usando este sistema y efectuando las mediciones de longitud necesarias, las coordenadas correspondientes a cada uno de los vértices.

c) Obtenga una ecuación para cada una de las caras considerando que corresponden a una parte triangular de un plano en el espacio.

d) Forme un sistema de ecuaciones lineales con todas las ecuaciones de las caras, resuelva y verifique que la solución es única y esta corresponde con las coordenadas del vértice ubicado en la parte más alta de la pirámide.

e) Utilice un programa de cómputo para graficar cada una de las ecuaciones de las caras y verifique que las gráficas tienen un único punto en común y que este corresponde con la solución del sistema de ecuaciones.

## DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 1

a) El número de caras y la forma de la base la indica el maestro. Suponiendo que el poliedro que se construye es la pirámide regular cuya base es un cuadrado de 6 unidades de lado y la altura es de 5 unidades, como se muestra en la figura1.

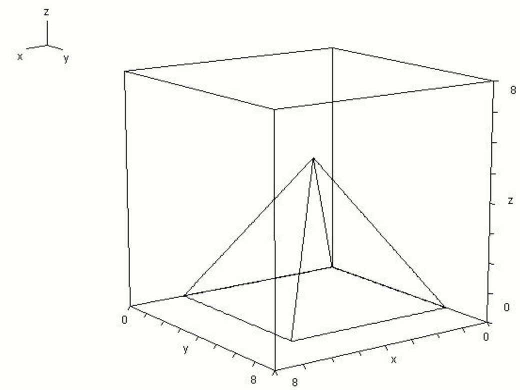


Figura 1. Pirámide de base cuadrada de lado igual a 6 y altura igual a 5

b) La ubicación del origen del sistema de referencia la elige el estudiante que desarrolla la actividad, seleccionando un sistema de coordenadas cuyo origen es uno de los vértices ubicados en la base de la pirámide. Efectuando las mediciones necesarias y observando la figura 1, las coordenadas de los vértices son A(0,0,0), B(6,0,0), C(6,6,0), D(0,6,0), E(3,3,5).

c) Para obtener la ecuación del plano de cada una de las caras se utiliza la forma general de la ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, donde $d = 0$ si el plano pasa por el origen (Stanley L. Grossman, Álgebra lineal, 7ª edición). Así, para la cara correspondiente al triángulo BCE, los puntos B, C, E pertenecen al plano, y estas coordenadas deben verificar la ecuación general, sustituyendo las coordenadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a(6)+b(0)+c(0)=d$$
$$a(6)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(3)+b(3)+c(5)=d$$

Al resolver el sistema usando Gauss-Jordan mientras consideramos que las variables son $a, b, c$, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & d \\ 6 & 6 & 0 & d \\ 3 & 3 & 5 & d \end{bmatrix}$$

Y cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d/10 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente que se obtiene es

$$a = d/6$$
$$b = 0$$
$$c = d/10$$

Sustituyendo en la ecuación general

$$\frac{d}{6}x + 0y + \frac{d}{10}z = d$$

Multiplicando por 30 y dividiendo entre $d$ la ecuación anterior, se obtiene la ecuación del plano correspondiente a la cara BCE.

$$5x + 0y + 3z = 30$$

Procediendo de manera semejante para la ecuación correspondiente al plano que pasa por los puntos C, D, E se obtiene el sistema de ecuaciones

$$a(6)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(0)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(3)+b(3)+c(5)=d$$

Cuya solución para $a, b, c$ es

$$a = 0$$
$$b = d/6$$
$$c = d/10$$

Sustituyendo en la ecuación general se obtiene

$$0x + \frac{d}{6}y + \frac{d}{10}z = d$$

Multiplicando por 30 y dividiendo entre $d$ la ecuación anterior se obtiene la ecuación de la cara CDE.

$$0x + 5y + 3z = 30$$

En el caso del plano que pasa por los puntos D, A, E, se trata de un plano que pasa por el origen del sistema de coordenadas y la ecuación general es $ax + by + cz = 0$.

$$a(0)+b(6)+c(0)=0$$
$$a(0)+b(0)+c(0)=0$$

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

$$a(3) + b(3) + c(5) = 0$$

La matriz de coeficientes aumentada del sistema anterior es

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Y su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{aligned} a + \frac{5}{3}c &= 0 \\ b \quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema equivalente tiene muchas soluciones, haciendo $c$ igual a un valor arbitrario, $c = \alpha$ se obtiene la solución general del sistema.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{5}{3}\alpha \\ b &= 0 \\ c &= \alpha \end{aligned}$$

Si se hace $\alpha = 3$ , se obtiene una solución particular

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 0 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores de los coeficientes en la ecuación del plano que pasa por el origen, la ecuación de la cara DAE es

$$-5x + 0y + 3z = 0$$

Si procedemos de manera semejante para la cara que pasa por los puntos A, B, E, se obtiene la ecuación del plano correspondiente a la cara ABE.

$$0x - 5y + 3z = 0$$

d) Formando un sistema con las ecuaciones de las caras, BCE, CDE, DAE, ABE.

$$\begin{aligned} 5x + 0y + 3z &= 30 \\ 0x + 5y + 3z &= 30 \\ -5x + 0y + 3z &= 0 \\ 0x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Si se aplica el método de Gauss - Jordan, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 5 & 3 & 30 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la reducción a su forma escalonada queda

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que verifica que tiene solución única y esta corresponde con las coordenadas del punto más alto de la pirámide

$$x = 3$$
$$y = 5$$
$$z = 5$$

e) El programa de cómputo que se usa en esta parte, queda a elección del estudiante, dependiendo de los programas a los cuales tenga acceso.

Utilizando el programa de cómputo Derive 6 para graficar cada uno de los planos y haciendo los ajustes necesarios a la gráfica, se obtiene la figura 2, donde se observa que los planos correspondientes a las ecuaciones de las caras BCE, CDE, DAE, ABE tienen gráficamente un solo punto en común y corresponde con la solución del sistema de ecuaciones.

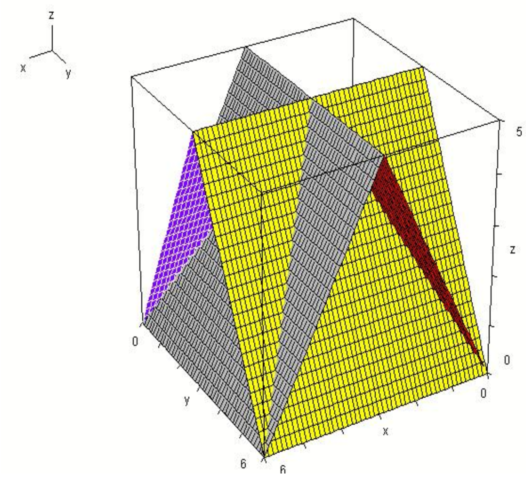



Figura 2. Gráfica de las ecuaciones de los planos correspondientes a las caras de la pirámide, hechas con el programa Derive 6.

**Actividad 2.** Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas que tienen muchas soluciones.

Usando el mismo poliedro de la actividad 1.

a) Forme un sistema de ecuaciones lineales con las ecuaciones de dos caras adyacentes, resuelva y verifique que el sistema tiene muchas soluciones.

b) Escriba la solución general del sistema como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio donde el parámetro es la variable que se supone arbitraria en la solución general.

c) Utilice un programa de cómputo para graficar las ecuaciones paramétricas y verifique que la gráfica es una recta en el espacio y que esta línea recta corresponda con la arista que se encuentra entre las dos caras adyacentes graficando los planos correspondientes.

## CONCLUSIONES.

La actividad 1 de aprendizaje, propuesta y desarrollada a manera de ejemplo en este trabajo, integra aspectos de modelación matemática en un contexto del alumno. El uso del poliedro en forma de pirámide regular vuelve tangible el concepto abstracto de un plano en el espacio geométrico y le permite al estudiante asociar ecuaciones a diferentes superficies planas con respecto a un sistema de referencia seleccionado por él mismo.

La interpretación geométrica que se da a la solución de un sistema de ecuaciones, formado por las ecuaciones correspondientes a las caras de la pirámide, se comprueba en forma física ya que la solución del sistema es única y corresponde con el vértice que se encuentra en el punto más alto.

Es importante notar que, el desarrollo de la actividad requiere aplicar procedimientos de solución de sistemas de ecuaciones, tanto para obtener la ecuación de cada una de las caras, como para obtener la solución del sistema de ecuaciones formado por las mismas, por lo que se espera que el estudiante identifique los diferentes propósitos en el contexto de la aplicación.

Así mismo, la realización de la actividad 1 y 2, al incorporar el uso de programas de cómputo para graficar los planos correspondientes, hace uso de la tecnología para llevar la didáctica de un tema a mejores situaciones didácticas, justificando con ello ampliamente su utilización.

La actividad 2 es propuesta para la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que tengan muchas soluciones, usando el mismo poliedro de la actividad 1. El estudiante puede usar la misma pirámide para ambas actividades pero se espera que cada alumno utilice una pirámide regular diferente.

En lo relativo al uso de la tecnología para graficar ecuaciones que tienen tres variables, se puede afirmar que, el uso de programas de cómputo también mejoraría la didáctica de la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, pero tal propuesta se deja como un posible trabajo futuro.

## REFERENCIAS Y CITAS


Camarena, P. (2010a). Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería.

García, J. (2012). El lenguaje y las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. *Diálogos Pedagógicos*. 10(19).

García R.( 2013) La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería Revista Educación 37(1), 29-42, ISSN: 2215-2644, enero-junio, 2013

Stanley L. Grossman. Álgebra lineal, 7a edición.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

# MATEMATIZACIÓN DE POLIEDROS: UNA APLICACIÓN DE LOS VECTORES

## MATHEMATIZING POLYHEDRA: AN APPLICATION OF THE VECTORS

Juan Ramón Abreu Rivera
FACULTAD DE INGENIERÍA, MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: jrabreur@hotmail.com

**RESUMEN:**
La disociación muy común del binomio teoría-práctica en algunos conceptos de la matemática, ha dado a esta ciencia una falsa reputación de exclusividad para mentes especiales. El acercamiento de conceptos matemáticos a partir de situaciones reales, matematizando la realidad, es una manera de acercar estos a un público más amplio, que se siente atraído por las aplicaciones que pueden tener en distintos contextos. En el presente trabajo se presentan los resultados observados al aplicar el enfoque realista de las matemáticas al tema de vectores con alumnos de 5° semestre de preparatoria, matematizando (modelizando) un par de poliedros regulares. Se rescata además el papel del docente como facilitador y orientador del aprendizaje de los alumnos.


**Palabras clave:** matematización, poliedro, vector, razón áurea.



**ABSTRACT:**
The binomial common dissociation between theory and practice in some concepts of mathematics, have given to this science a false reputation of exclusivity for special minds. The approach of mathematical concepts from real situations, mathematizing reality is a way to bring these to a wider audience, which is attracted to the applications they can have in different contexts. In this paper, the results observed in applying mathematics realistic approach to the issue of vectors with students from 5th semester of high school are presented, mathematizing (modeling) a pair of regular polyhedra. Also is rescued the teacher's role as facilitator and guide to the student's learning.



**Key words:** mathematizing, polyhedra, vector, golden ratio.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

## INTRODUCCIÓN

La matemática es, sin lugar a duda, el resultado más asombroso del intelecto humano. La mathema, como llamaban los griegos a esta área del conocimiento, nace, como su nombre lo indica, de un deseo profundamente humano de comprender, representar y predecir la realidad, de comunicarla en una cultura que se ha apropiado de ella y la ha desarrollado a niveles insospechados (Osta, 2013).

Muchas han sido las aportaciones de diversos individuos, muchos de ellos perdidos en el anonimato de una cultura, han hecho en favor del desarrollo de esta ciencia: chinos, egipcios, griegos, mayas, por mencionar solo algunos, son referencias obligadas para comprender la concepción y evolución histórica del vasto conocimiento matemático. De todos ellos nos sorprende esa increíble capacidad de observación y abstracción, dos habilidades tan frecuentes en las mentes de grandes matemáticos de todos los tiempos.

El concepto de matematización no es, ciertamente, un concepto nuevo en el ambiente matemático. Podemos afirmar que así surgió la matemática en sus orígenes perdidos en la historia del mismo hombre. Sin embargo, sí es un enfoque que se ha venido rescatando desde hace algunas décadas. El vertiginoso adelanto, producción y formalización de la matemática, observado desde mediados del siglo XIX y hasta principios del siglo XX, le dio una mala reputación de inaccesibilidad, bien sea por la complejidad o por la abstracción lograda en sus conceptos y métodos, fuera del alcance del "mundo común". La matemática se percibió en este tiempo como un conocimiento exclusivo de las "mentes brillantes": los matemáticos.

Para Husserl, es Galileo quien anticipa el concepto de matematización al comenzar a ver a la naturaleza desde la óptica de la geometría, relacionando la experiencia sensible del mundo que nos rodea con el campo objetivo, coherente y potencialmente infinito, de la matemática. La geometría pura del ideal griego pasa a un segundo término. Se busca representar la realidad, modelizarla, en términos matemáticos (Osta, 2013).

Ya para finales del siglo XX, el trabajo de Freudenthal sobre la Educación Matemática Realista (1977) supuso una vuelta a las bases, a eso que dio origen a las matemáticas y que Galileo había ya anticipado 400 años atrás: la estrecha relación con la realidad. Se aprende matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria, llenas de sentido para el estudiante y relevantes para la sociedad (van den HeuvelPanhuizen, 2009).

El concepto de la Trasposición Didáctica, desarrollado por Chevallard en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas, supuso también en esta misma perspectiva un nuevo impulso a esta manera de entender la matemática, al explicar el proceso de transformación que sigue un "saber sabio" para hacerse un "saber del alumno". En este escenario se ha de considerar con especial atención el papel del docente, quien re contextualiza y personaliza el saber, para lograr que los alumnos lo hagan propio: adapta los objetos a enseñar y los organiza en el tiempo, formando un "saber enseñado" (Chevallard, 1998).

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El curso de Matemáticas NS (Nivel Superior) del Programa del Diploma del IBO (Organización del Bachillerato

Internacional) para alumnos de quinto semestre de preparatoria, pretende –entre otros objetivos- que los alumnos apliquen sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas extraídos de una diversidad de contextos, logrando con ello desarrollar su comprensión de las formas y las estructuras matemáticas y apreciar las relaciones entre conceptos pertenecientes a distintos temas (IBO, 2016). *En particular, la* unidad 4: Vectores, busca proporcionar una introducción al uso de los vectores en dos y tres dimensiones, y facilitar la resolución de problemas relacionados con puntos, rectas y planos.

Tradicionalmente, el curso se ha enfocado en la exposición de conceptos y procedimientos descontextualizados, con resolución de problemas que implican la aplicación y mecanización de técnicas y algoritmos, muchas veces carentes de significación para los alumnos, lo que ha supuesto un ambiente árido y poco motivante para el aprendizaje, con periodos de poca concentración y poca retención en la memoria a largo plazo.

Se ha observado que al final del tema, los alumnos pueden operar vectores y resolver cierto tipo de problemas relativos al tema, pero no logran visualizar aplicaciones más allá de los mismos.

**PROPUESTA**

La propuesta que se hizo para lograr acercar aplicaciones de la unidad 4 del programa del curso, consistió en matematizar poliedros utilizando vectores. En particular, se trabajó con el icosaedro y el dodecaedro (poliedros regulares de 20 y 12 caras, respectivamente).

El objetivo de la propuesta hecha es: Diseñar una actividad que muestre una aplicación del tema de vectores a los alumnos de tercero de preparatoria del Colegio Álamos, donde los alumnos refuercen y pongan en práctica los temas de la unidad 4: Vectores, del curso Matemáticas NS.

La hipótesis que se sostiene es que: El acercamiento de conceptos teóricos en contextos realistas, utilizando modelos físicos tangibles construidos por los mismos alumnos, favorecerá que los estudiantes participen activamente en la construcción y apropiación de nuevos conocimientos, logrando también que relacionen a estos con conocimientos previos de diversas áreas.

Previo a la actividad se trabajó durante dos sesiones de 90 min con el grupo algunos conceptos básicos relativos al tema, como qué es un vector, su notación y representación gráfica, vector de posición, suma y resta de vectores y el producto escalar (producto punto) y vectorial (producto cruz) de vectores. Posteriormente se trabajó en una sesión con todo el grupo donde se presentaron los objetivos de la actividad y se acordaron las reglas que se seguirían en las sesiones de trabajo.

Los objetivos propuestos fueron:

1. Matematizar un icosaedro y un dodecaedro.
2. Aplicar los conceptos y operatividad de vectores en una situación real.
3. Profundizar en propiedades de los poliedros.

Las reglas acordadas fueron:

1. La actividad se realizará en equipos de 3 personas.

2. La duración de la actividad será de 5 sesiones de 90 min.

3. Cada equipo debe tener acceso a internet, por ejemplo a través de un teléfono celular, para realizar las investigaciones previstas.

4. Al final de cada sesión se entregará una bitácora donde se relatará el trabajo realizado durante la sesión: ¿qué se hizo? ¿qué se investigó? ¿qué problemas se encontraron? ¿cómo se resolvieron las dificultades? ¿qué aprendí? ¿cómo me sentí?

5. La comunicación entre los equipos no está permitida: solo se puede hablar con los integrantes del equipo.

Cada una de las cinco sesiones tuvo sus propios objetivos particulares:

*Sesión 1:*

- Investigar qué es un poliedro, cómo se clasifican, qué es un sólido platónico y qué significado le daban los griegos a estos.
- Investigar qué es la proporción áurea, qué es un rectángulo áureo y qué impacto tuvo esta proporción en la cultura griega.
- Construir un icosaedro a partir de la intersección de tres rectángulos áureos (el material se les proporciona en clase) a la manera de la Figura 1.

*Sesión 2 y 3:*

- Verificar que el sólido construido a partir del modelo se trata de un icosaedro.
- Calcular el área superficial y el volumen del icosaedro construido.

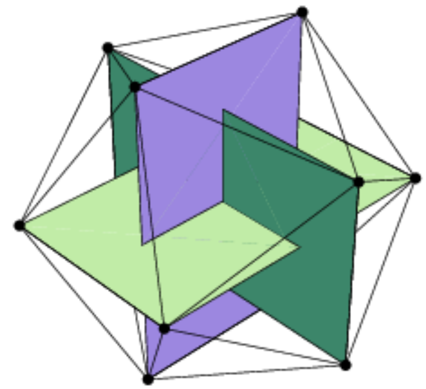


Figura 1. Construcción de un icosaedro a partir de la intersección de 3 rectángulos áureos.

*Sesión 4 y 5:*

- Verificar que el icosaedro puede inscribirse en un dodecaedro.
- Calcular el área superficial y el volumen de dodecaedro circunscrito al icosaedro.

Acerca de las relaciones de las propiedades de inscripción de estos poliedros, se buscó que los alumnos intuyeran la naturaleza de esta propiedad, al percatarse que el icosaedro posee 12 vértices en igual cantidad que el número de caras del dodecaedro, por lo que podrían intuir que los vértices del primero se ubicaban en el centro de las

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

caras del segundo. Al respecto, puede consultarse el trabajo de Guillén y Puig (2001).

## RESULTADOS

Los resultados observados en la actividad fueron muy alentadores, tanto desde el punto de vista de la producción matemática lograda, como del ánimo y ambiente de la clase. Los siguientes comentarios muestran, de manera resumida, la información conseguida de las bitácoras entregadas por los alumnos al final de cada sesión y de la percepción del docente responsable del curso
*Sesión 1:*

Los alumnos mostraron en principio poco interés en la primera parte de la investigación, pero al adentrarse un poco más en el tema y empezaron a comprender el significado que en el contexto cultural tuvo para los griegos la razón aurea (sobre todo en el ámbito arquitectónico) y los sól idos platónicos, se observó un cambio en su actitud y en sus discusiones dentro del grupo. La construcción del icosaedro supuso un buen reto para la mayoría de los equipos, ya que hubo varios intentos fallidos. Es de destacar la persistencia de un equipo por lograr un icosaedro "cuasi" perfecto, que les llevó a realizar el modelo en 3 ocasiones.

*Sesión 2 y 3:*

La sesión inició un poco con no saber cómo verificar que el sólido era un icosaedro. Había argumentos simples como "sí es, porque se parece a un icosaedro", o "porque tiene 20 caras". El profesor tuvo que guiar un poco el razonamiento del grupo, cuestionándoles sobre si era suficiente que pareciera icosaedro o que contara con 20 caras. Al cuestionarles sobre qué característica deberían tener las caras, los alumnos cayeron en la cuenta que deberían de ser iguales y con forma de triángulo equilátero. A algunos se les ocurrió entonces medir los triángulos con una regla, pero se dieron cuenta que no todas las aristas del modelo medían lo mismo. El profesor sugirió entonces la matematización del poliedro a partir de vectores: referenciar los vértices del icosaedro respecto de un sistema xyz por medio de puntos, y asociar estos puntos a sus respectivos vectores de posición. A partir de esta sugerencia, los alumnos lograron modelar las aristas del poliedro a partir de diferencias de vectores y calcularon el ángulo entre dos vectores o la longitud de estos para mostrar que los triángulos eran equiláteros. Calcularon las áreas de las caras y determinaron el área del icosaedro. El objetivo del cálculo del volumen del icosaedro no se concluyó por falta de tiempo.

*Sesión 4 y 5:*

A los alumnos se les dificultó darse cuenta que las aristas del icosaedro se ubicaban en el centro de las caras del dodecaedro. Sin embargo, la situación se resolvió al pedirles que investigaran en internet cómo podría ser esto. A partir de esto, lograron definir la ecuación del plano que contenía a cada una de las caras del dodecaedro, determinaron las ecuaciones de las rectas que contenían a las aristas intersectando los planos de las caras y calcularon las coordenadas de los vértices intersectando las ecuaciones de las aristas. De esta manera lograron calcular el área de las caras del dodecaedro y posteriormente el área superficial del mismo. El objetivo del cálculo del volumen del dodecaedro no se concluyó por falta de tiempo.

En general, se notó un buen trabajo de los equipos, con mucha participación al interior de los mismos. Los

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

alumnos mostraron mucho interés por la actividad y lograron aplicar los conceptos de vectores revisados en el par de sesiones anteriores a la actividad. La participación del docente fue muy importante para ayudar a que los alumnos conectaran dichos conceptos con la matematización de los poliedros, de manera que sugiriera herramientas o algoritmos para que los alumnos intentaran y se acercaran al modelo real a través del lenguaje de vectores.

Los alumnos además manifestaron en sus bitácoras que la dinámica de la actividad les había resultado atractiva porque aprendieron muchas cosas por ellos mismos y vieron una aplicación de vectores conectada con algo real.

## CONCLUSIONES

Los resultados observados en la actividad fueron muy satisfactorios en general, tanto para los alumnos como para el maestro. El profesor reportó que notó a los alumnos muy metidos en la actividad y con un trabajo constante durante todas las sesiones. Una dificultad especial que se observó es la falta de habilidad de los alumnos para trabajar expresiones algebraicas que aparecieron en los cálculos a fin de evitar la representación decimal de ciertas cantidades, razón por la cual se vio conveniente trabajar con la representación decimal de las mismas aproximadas a tres decimales.

El objetivo planteado al inicio se cumplió satisfactoriamente, ya que la actividad permitió a los alumnos reforzar y poner en práctica los temas de la unidad 4: Vectores en el curso mencionado, de una forma atractiva para los alumnos. De igual forma, el desenvolvimiento de los alumnos en la actividad evidencia la veracidad de la hipótesis sugerida, y nos lleva a resaltar la importancia de buscar acercar conceptos matemáticos a partir de la experiencia y realidades tangibles cercanas a los alumnos, tal y como lo plantea el concepto de matematización. Finalmente, resaltar el papel que desempeña el docente en este proceso, facilitando y acompañando en la aplicación de los conceptos matemáticos en situaciones reales.

## REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1998). *La trasposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE Grupo Editor.

Guillén, G., & Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudios de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pág. 8). Almería: Universitat de Valencia.

IBO. (2016). *Guía de Matemáticas NS.* Cardiff, Reino Unido: Organización del Bachillerato Internacional.

Osta, M. (2 de enero de 2013). Recuperado el octubre de 2016, de La matematización de la naturaleza: http://galileo.fcien.edu.uy/la_matematizacion_de_la_naturaleza.htm

Van den HeuvelPanhuizen, M. (septiembre de 2009). *Correo del Maestro Núm. 160.* Recuperado el 5 de octubre de 2016, de http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

PädiUAQ: Revista de proyectos y textos académicos en
Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, es una
publicación semestral editada y publicada por la
**Universidad Autónoma de Querétaro**,
**División de Investigación y Posgrado**
**de la Facultad de Ingeniería.**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO**
**División de Investigación y Posgrado.**
Facultad de Ingeniería, UAQ
Tel. 442-192 1200 ext. 6023

**www.ingenieria.uaq.mx/revistapadi**