PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

DIPFI POSGRADO INGENIERÍA

001 2017-A

PUBLICACIÓN DE LA DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO.

DIRECTORIO

PädiUAQ: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 1. Núm. 001, abril de 2017, es una publicación semestral editada y publicada por la **Universidad Autónoma de Querétaro**, **División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.** C.U. Cerro de las Campanas S/N, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-52, ext. 6023.
Coordinación de edición: M.D.I. Alma Ivonne Méndez Rojas

Reserva de Derechos al Uso Exclusivo
No. XX-2017-XXXXXXXXXXXX-XXX,
ISSN: XXXX-XXXX

Ambos registros en trámite por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

COMITÉ EDITORIAL

ÍNDICE

PÁG.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La revista Pädi pretende generar un espacio para la propuesta, la crítica y la reflexión en un tema fundamental en el desarrollo de las sociedades: educación. En el entendido que la educación, la ciencia y la cultura son pilares que no se pueden estudiar de manera aislada. En esta publicación bi-anual, se podrán encontrar artículos inéditos relacionados con el quehacer docente en la formación de las competencias en los estudiantes de los distintos niveles educativos, sin perder de vista desde luego, la misma profesionalización del docente.

El mundo en el que habitamos parece depender cada vez en mayor medida del conocimiento científico y tecnológico, el cual ha transformado nuestra sociedad de una manera acelerada. Aquí caben las preguntas ¿cómo podemos contribuir a que los conocimientos que se generan y transmiten en las Instituciones Educativas realmente proporcionen las herramientas para mejorar nuestra sociedad? ¿cómo lograr que la educación sea un motor de movilidad social? ¿cómo reducir la brecha entre países desarrollados y en vías de desarrollo en el contexto educativo? ¿qué papel juega la ciencia, tecnología e innovación en las aulas?¿cómo superar el aprendizaje científico a partir de la memorización de datos descontextualizados?.

Sin lugar a dudas, es necesaria la reflexión, el análisis, la propuesta pero sobre todo la participación de todos para responder a estas y otras preguntas que nos encontramos en el día a día como docentes en nuestras instituciones. Bienvenidos aquellos que comparten la preocupación por mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Propongamos juntos una sociedad mejor, desde nuestro quehacer, desde nuestra trinchera; el ingenio para crear, no para destruir.

Dr. Manuel Toledano Ayala

Pádi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ESTRUCTURAS MENTALES PARA MODELAR EL APRENDIZAJE DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS EN R^2. EL CASO DE ENSEÑANZA MEDIA

Marcela Parraguez González, Andrés Yáñez Pérez
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO (CHILE)
marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN

Basados en la teoría APOE como marco teórico y metodológico, investigamos desde una postura cognitiva, las estructuras mentales necesarias para modelar la construcción cognitiva de los valores y vectores propios en R^2 como objeto. Con el propósito de analizar la forma en que estudiantes de enseñanza media lo aprenden, se diseñó una descomposición genética (DG) para este fin. La puesta a prueba de esta DG en estudiantes de enseñanzamedia a través de un cuestionario(conjuntamente con los comentarios que ellos hicieron de sus respuestas), mostró que los elementos desde el ámbito geométrico –la Rotación en 180° con centro en el origen y la homotecia– son conceptos matemáticos relevantes para la construcción del concepto valor/vector propio como objeto en R^2.

Palabras clave: Valor propio, Vector propio, Rotación, Homotecia, Teoría APOE.

ABSTRACT

Based on the APOS theory as a theoretical and methodological framework, we investigate from a cognitive stance, mental structures needed to model the cognitive construction of eigenvalues and eigenvectors in R^2 as an object. In order to analyze how middle school students learn it, a genetic decomposition (DG) was designed for this purpose. The testing of this DG in high school students through a questionnaire (together with the comments they made their answers) showed that elements from the geometric field –the rotation 180° with center at the origin and the homothecy– are relevant mathematical concepts to build the concept value/eigenvector as an object in R^2.

Keywords: Eigenvalue, Eigenvector, Rotation, Homothecy, APOS Theory.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería, Pedagogía y/o de licenciatura en Matemáticas, Física y Química, precisan en general, de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas, de transformaciones lineales y de valores/vectores propios. Dorier y Sierpinska (2001) plantean que el problema central en esta materia consiste en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza muy general, pero tratados con elementos particulares. Específicamente, los conceptos de valor y vector propio representan un obstáculo mayor, porque precisan de una construcción previa y fuerte de espacio vectorial y transformación lineal, y como los aprendices no entienden su naturaleza general, se inclinan fuertemente por procedimientos calculatorios específicos que sabe manejar, pero no necesariamente los comprende (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016).

Salgado y Trigueros (2014), reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los valores y vectores propios, de los estudiantes en un curso en el que estos conceptos se han enseñado, usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Sin embargo, aún no se ha reportado un modelo cognitivo y su validación propiamente tal, plasmado en una descomposición genética, para el caso particular de valores y vectores propios enR^2, dirección que toma la presente investigación, cuya finalidad es develar elementos del ámbito geométrico, que permiten la construcción de este objeto matemático en R^2.

De acuerdo a varios textos de estudio (Por ejemplo: Poole, 2011; Lay, 2007) los valores/vectores propios se definen de la siguiente forma:

Si A es cualquier matriz numérica cuadrada, de tamaño nxn, entonces:

(1) Un valor propio, denominado λ, es un escalar, que para un vector v distinto al nulo, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.
(2) El vector v se llama vector propio de λ, si: $Av = \lambda v$.

RELEVANCIA DE LOS VALORES/VECTORES PROPIOS

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del álgebra lineal. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado. Por ejemplo, se usan en áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, economía, etc., entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz. También hay muchas aplicaciones prácticas, entre las que destacamos: *El orden en que los resultados de la búsqueda aparecen en Google se determina mediate el cálculo de un vector propio* (ver https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank).

PREGUNTA Y OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas de investigación que surgen de la presentación en los apartados anteriores, son por un lado desde la matemática: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores/vectores propios? y por otro, desde la cognición y la didáctica ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción delos conceptos valores/vectores propios? Para responder estas preguntas se posesionó esta investigación desde estudiantes de enseñanza media utilizando como marco teórico la teoría APOE. Consideramos que esa teoría es pertinente para este estudio dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de instrumentos y el análisis de los datos de forma congruente con la propuesta teórica.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros & Weller, 2014) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática. En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget (Dubinsky, 1991) para describir la construcción de objetos mentales, relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación y reversión, como se explicita a continuación.

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción acción de dicho concepto si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él ha interiorizado la acción en un proceso si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos. Por otra parte, dos o más procesos pueden coordinarse para construir un nuevo proceso y un proceso puede revertirse o generalizarse. Si el estudiante considera un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se afirma que ha encapsulado el proceso en un objeto. Además, si necesita volver desde el objeto al proceso que le dio origen, se dice que ha desencapsulado el objeto.

En general puede decirse, a la luz de esta teoría, que las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados. Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un esquema y puede destematizarlo para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellos, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Para operacionalizar la teoría como marco de investigación se requiere del diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG), que es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta investigación interesa el diseño de una descomposición genética que describa la construcción del conocimiento incluido en los valores/vectores propios, en el contexto de un concepto del álgebra lineal.

MÉTODO

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción de los valores/vectores propios en estudiantes de enseñanza media, se diseñó una descomposición genética que se describe más adelante y se crearon instrumentos y registros de observación, basados en la descomposición genética, para llevar a cabo el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, en particular de sus estrategias de solución de los ítems de dichos registros. Para analizar dichos procedimientos, consideramos que una aproximación adecuada es el estudio de casos (Stake, 2010), ya que es apropiada para estudiar una situación a profundidad en un periodo de tiempo acotado.

PARTICIPANTES

Los participantes de esta investigación fueron nueve estudiantes chilenos de dos instituciones distintas. Los dos casos de estudio propuestos se sustentan y justifican en la necesidad de delimitar con precisión las construcciones que los participantes ponen en juego cuando trabajan con problemas relacionados con los valores/vectores propios. Los casos de estudio permiten explicitar y describir las estructuras y los mecanismos mentales que se presentan en las situaciones de los instrumentos aplicados. Además, la heterogeneidad en la formación de los estudiantes de distintas niveles de formación permite explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que son comunes en la construcción de los valores y vectores propios.

El procedimiento seguido en la selección de los casos se basó en la consideración de las siguientes categorías:

Caso 1: Corresponden a cinco estudiantes de primero medio (etiquetados como E1, E2, E3, E4 y E5), donde las transformaciones isométricas, especialmente la rotación en 180° grados, han formado parte de sus contenidos curriculares en la institición escolar 1.

Caso 2: Corresponden a cuatroestudiantes de segundo medio (etiquetados como E6, E7, E8 y E9), donde la Homotecia ha formado parte de sus contenidos curriculares en la institución escolar 2.

ANÁLISIS TEÓRICO

El análisis teórico consistió en el estudio profundo, por parte de los investigadores, de los conceptos matemáticos incluidos en la construcción del objeto valores/vectores propios. A partir de este análisis, se diseñó una DG preliminar de los valores/vectores propios con la intención de contar con un modelo epistemológico y cognitivo de la construcción de del concepto en estudio.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES/VECTORES PROPIOS EN R^2

La construcción hipotética del objeto valores/vectores propios, en estudiantes de enseñanza media se inicia con acciones (Acción 2) sobre el objeto rotación en 180° con centro en el origen, especificamente rotando casos particulares de vectores dados. La Acción 2, es interiorizada, por el uso de una relación de correspondencia, que dado un vector se le asigna su inverso, este proceso obtenido (Proceso 2) se puede describir mediante la fórmula $\vec{v} \rightarrow -1 \cdot \vec{v}$. Lo anterior plasmado en la Figura 1, conformará un aspecto de la DG.

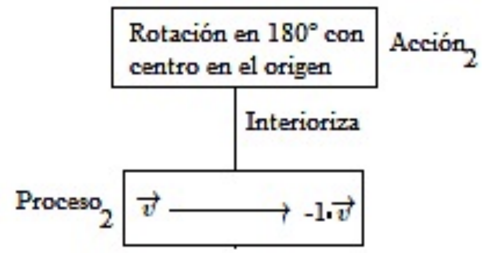


Figura 1. Interiorización de la rotación en un proceso.

Al realizar acciones (Acción 1) sobre el objeto ponderación escalar, por ejemplo, dibujando la ponderaciónde forma geométrica en casos particulares de vectores de R^2, permite ser interiorizadas por la forma algebraica de la ponderación por escalar para vectores en R^2, originando el proceso que se describe a continuación, para λ en R y v en R^2:

$$\lambda v = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Lo anterior se sintetiza en la Figura 2, y conformará otro aspecto de la DG.

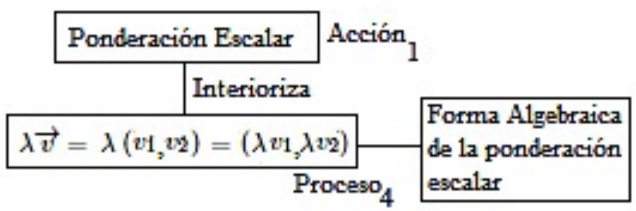


Figura 2. Acción Ponderación por Escalar interiorizada en un proceso.

Al coordinar el proceso 2 y proceso 4, por separado con la idea de función (proceso 1), como relación, se generan nuevos procesos, el Proceso 5 y Proceso rotulado, como una fórmula, lo que se muestra en la Figura 3, y conformará otro aspecto de la DG.

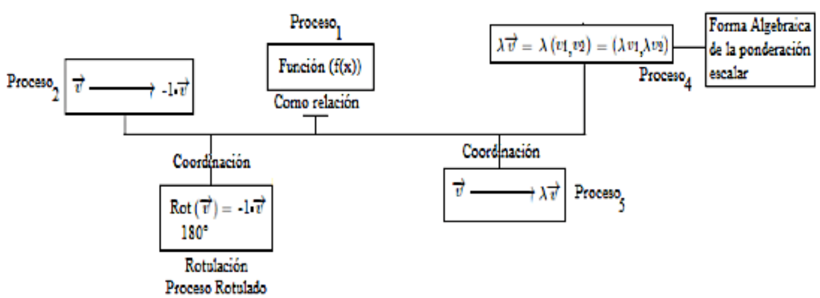


Figura 3. Coordinaciones de procesos que dan origen a otros procesos.

Un estudiante que logre encapsular el proceso 5, es decir, que tenga como objeto la ponderación escalar, utilizando como medio la idea de función, obtiene el objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante una relación algebraica, como lo muestra la Figura 4.

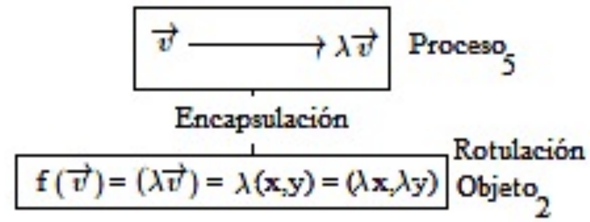


Figura 4. Encapsulación de un proceso en un objeto.

El objeto 2 al ser rotulado de esa forma, muestra la construcción objeto de los valores y vectores propios en R^2. Dicho objeto 2 al ser desencapsulado en dos procesos como casos particulares: por un lado, la rotación en 180° (Proceso rotulado), donde el elemento matemático que la propicia es la ponderación por el escalar $\lambda = -1$; y por otro lado, se puede desencapsular en un proceso geométricoa través de la variación (múltiplo) de la magnitud del vector, (Proceso 6), lo que se sintetiza en la Figura 5.

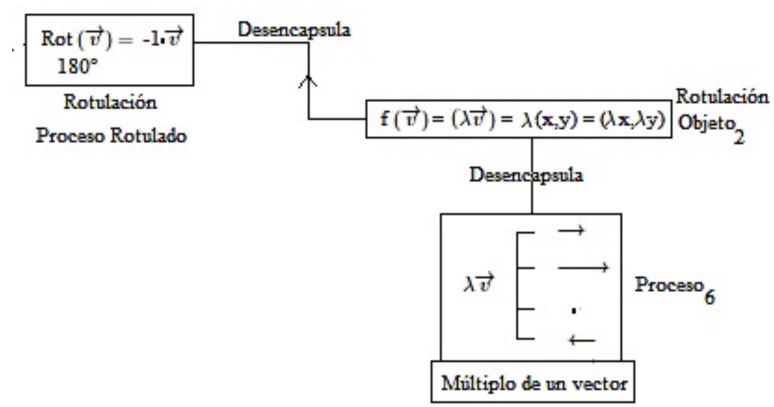


Figura 5. Desencapsulación del objeto valores/vectores propios en R^2.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

La versión de DG hipotética, para ensenanza media en R^2, que se presenta en la Figura 6, emerge del análisis anterior, donde se ha puesto de manifiesto que un agente que permite la coordinación de procesos, es de la ponderación escalar –un caso particular es la rotación en 180◦ con centro en el origen–. También la construcción mental objeto de la rotación en 180°, en si mismo como objeto se puede desencapsular en el proceso que a un vector se le asigna su inverso aditivo, que a su vez este proceso es una desencapsulación del objeto$f: R^2 \rightarrow R^2, f(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

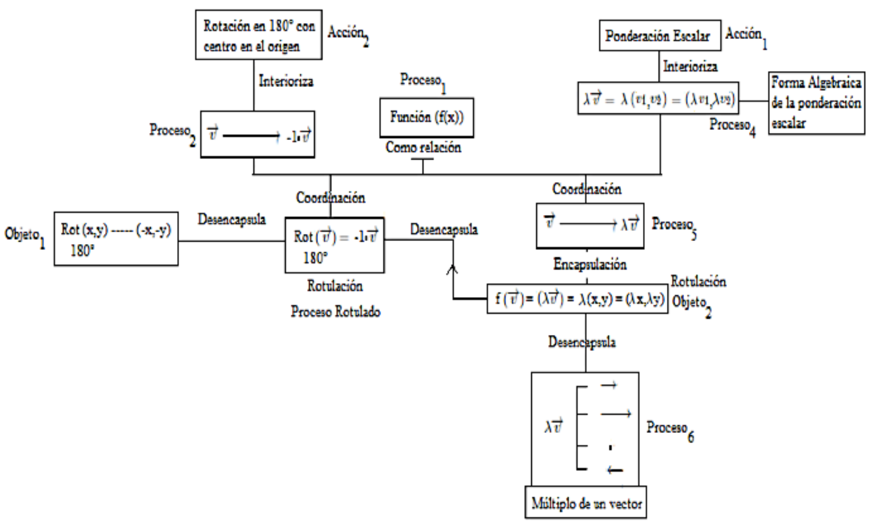


Figura 6. DG hipotética para el aprendizaje en enseñanza media de los valores/ vectores propios en R^2 .

INSTRUMENTOS

Una vez diseñada la DG preliminar (Figura 6), fue necesario validarla, es decir, tener alguna certeza de su viabilidad como modelo de construcción de los valores/vectores propios en R^2. Para ello se diseñó un cuestionario con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Para cada una de las preguntas del cuestionario se realizó un análisis a priori y otro a posteriori. Ambos análisis fueron profusamente discutidos entre los investigadores y las discrepancias se negociaron hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante como el análisis a priori de las preguntas del cuestionario, y posteriormente como el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

Las preguntas de la medición que resultaron clave y que permitió la obtención de resultados fueron las preguntas que a continuación se describen como pregunta 1 y pregunta 2.

Pregunta 1

Describa que es lo que hace una rotación en 180°, con centro en el origen sobre un grupo de vectores.

Al solicitar al estudiante que describa esta transformación, se pretende evidenciar el estado objeto (objeto 1) de este concepto, debido a que la descricpión puede ser desde lo geométrico, lo funcional y lo artimético (propiedades), por lo tanto si logra esta descripción, bajo estas tres miradas diremos que tiene una construcción de objeto para la rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo geométrico:

Cuando el estudiante no argumenta desde

la ponderación por escalar, sino que inmediatamente muestra que la rotación en 180° se relaciona con el vector opuesto al dado (Figura 7), diremos que él muestra una construcción geométrica de una rotación en 180° con centro en el origen.

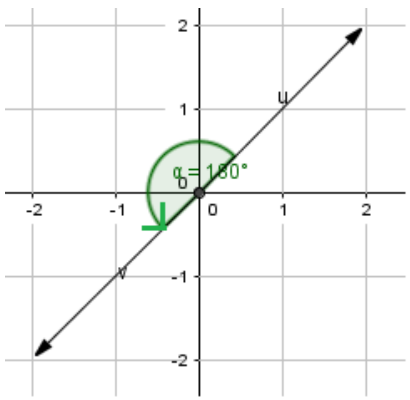


Figura 7. Concepción geométrica de la Rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo funcional: Si el estudiante es capaz de rotular la rotación en 180°, con centro en el origen como una relación funcional, esto es, T (v) = $R_{ot,180°}$ (v) = −1 · v, diremos que él muestra una construcción funcional de una rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo aritmético (propiedades): Cuando el estudiante describe la rotación en términos de propiedades de una estructura algebraica, por ejemplo por medio del inverso aditivo de un vector (al mirar como un número y recordando la propiedad definida para números reales del inverso aditivo), diremos que él muestra una construcción aritmética de una rotación en 180° con centro en el origen.

Pregunta 2

A continuación se presenta una función T que tiene el siguiente efecto al aplicarla a un vector v de R^2,T(v) =λv donde λ es un número real.

a) ¿Qué efecto geométrico tine T? Explique.

b) Si λ toma los valores 2 y −2, ¿Qué forma toma T(v)? Exlique.

c) Suponga que tiene los siguientes vectores: v_1 = (1,1), v_2 = (−1,-2), v_3 = (-2,4) y v_4 = (3,−1). Si λ es igual a 2, ¿Qué sucede con cada uno de los vectores anteriores? Y ¿Si λ es igual a –2 que sucede con ellos? Explique.

d) Explique que sucede si los valores de λ son positivos y negativos, grafique su explicación. ¿Qué relación tienen con cada uno de los vectores iniciales?

La intensión investigativa para esta pregunta 2, es mostrar que la transformación *T*, entrega un múltiplo del vector, es decir es una función que asocia a cada vector evaluado un múltiplo de este. Como resultado geométrico, está subyacente la idea múltiplo, que es observable con casos particulares como la contracción si el valor de λ está entre 0< λ < 1, y dilatación de vectores si el valor deλ es 1 < λ, y más aún los mismos efectos pero en sentido opuesto si λ < −1 y si −1< λ < 0. Un caso donde se puede observar un aspecto geométrico conocido, es para

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

$\lambda = -1$, pues este corresponde a la rotación en 180° con centro en el origen para vectores en R^2. Estos efectos geométricos se pueden observar en la Figura 8.

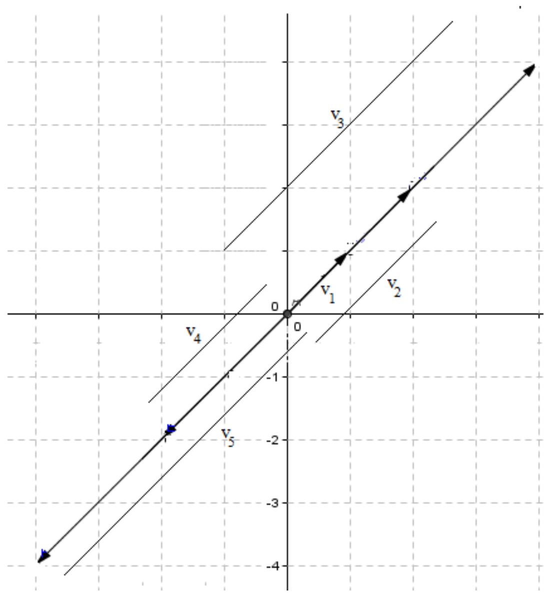


Figura 8. Efecto geométrico sobre los vectores : v_1, v_2, v_3y v_4.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de las respuestas de los estudiantes, conjuntamente con los comentarios que hicieron en estas respuestas, permitió, por un lado, identificar las construcciones mencionadas en dicha DG y, por otro, analizar las construcciones y mecanismos mentales mediante las cuales los estudiantes pueden construir los valores/vectores propios.

Se analizaron los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento por los investigadores, quienes los negociaron en términos de la DG preliminar. En general, el análisis fue hecho con nitidez, es decir, se prestó atención a estudiantes que parecen comprender los valores/vectores propios y a otros que parecen no haberlo entendido. Posteriormente se discutieron las diferencias detectadas en términos de la presencia o ausencia de cada una de las construcciones o mecanismos mentales que aparecen en la DG preliminar de la Figura 6. Así, se detectaron los datos que apoyan las construcciones o mecanismos mentales previstos en la DG o que puedan aportar información para refinarla.

RESULTADOS

Se presenta el análisis de algunas respuestas seleccionadas al cuestionario. Es importante mencionar que esta selección se basa en el interés de este estudio consistente en explorar la posibilidad de validar las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG a partir de los razonamientos que los estudiantes evidencian en sus respuestas. En relación a lo obtenido por la aplicación de la medición se obtuvieron los siguientes elementos.

La rotación en 180°, con centro en el origen es una función, que dado un vector *v* entrega por resultado –*v* (Proceso rotulado)

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Aquí en la Figura 9, se muestra cómo el E6 rotula la rotación, por medio de una descripción funcional, utilizando un lenguaje algebraico de lo obtenido geométricamente, asociando la rotación a un cierto tipo de función.

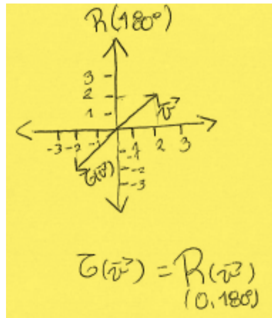


Figura 9. Fragmento de respuesta de E6 a Pregunta 1.

La rotación en 180° como un proceso rotulado permite obtener el inverso aditivo de un vector

Otro elemento que se reporta es el carácter estructural que esta mostrando el estudiante E6, pues reconoce que la estructura algebraica tiene efectos geométricos sobre los vectores y permite obtener aspectos de propiedades de los vectores, como si los estuviese viendo o trabajando desde números reales, dando cuenta de una mirada más profunda de lo que involucra la aplicación de este tipo de transformaciones, como lo ilustra la Figura 10, que muestra el inverso aditivo del vector.

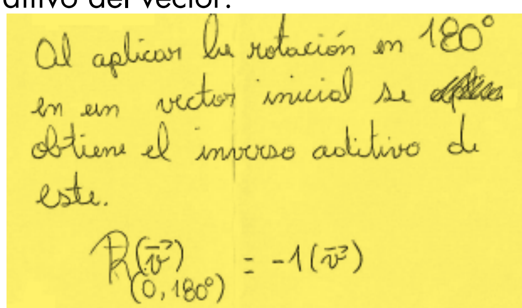


Figura 10. Fragmento de respuesta de E6 a Pregunta 1

Construcción Acción 2 para la rotación en 180°, con centro en el origen para vectores en R^2

El estudiante E2 da cuenta de acciones (tipo 2) sobre el objeto rotación en 180°, con centro en el origen para ciertos vectores dados, como casos particulares desde lo geométrico, develando el estado acción para la rotación, como se muestra la Figura 11.

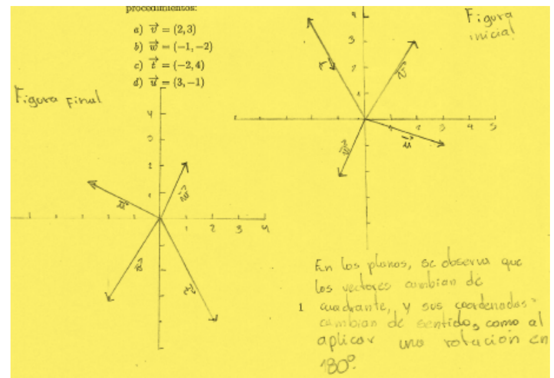


Figura 11. Fragmento de respuesta de E2 a Pregunta 2.

Proceso 5 se muestra en la transformación T que genera una recta a partir del vector *v*

Otro elemento geométrico que se distingue en las resoluciones dadas por los estudiantes, es el Proceso 5 de la DG, a través de la idea de generador, en el sentido que para distintos valores de λ, a partir de un cierto vector *v* se genera una recta en ambos sentidos de este vector, siendo para los casos en que el parámetro λ, es positivo y la rotación de estos valores en 180°, cuando este es negativo, como se puede apreciar en la Figura 12.

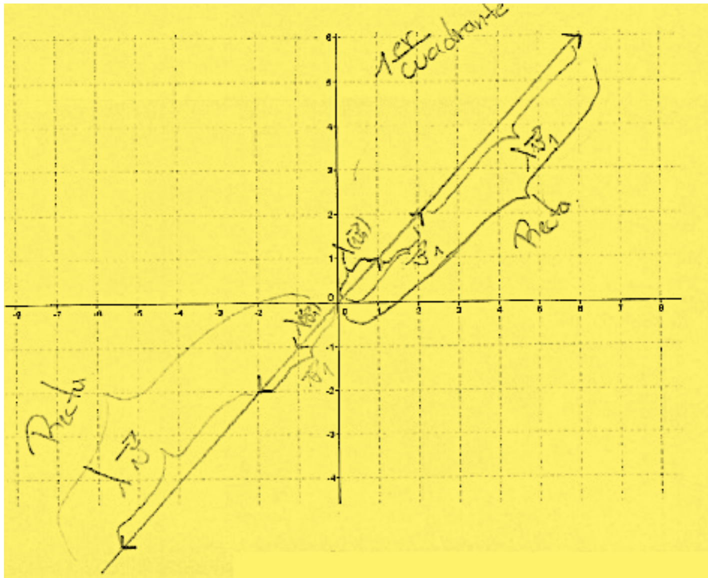


Figura 12. Respuesta a pregunta 2d de E6.

La ponderación escalar y su efecto geométrico como proceso 4

En el escrito del estudiante E7, la operatoria de ponderación escalar no solo es interpretada desde una mirada algebraica, sino también establecen relaciones (procesos tipo 4) con lo geométrico de forma directa, relacionando la magnitud y el sentido de los vectores (en el caso de que $\lambda < 0$), como se muestra en la Figura 13.

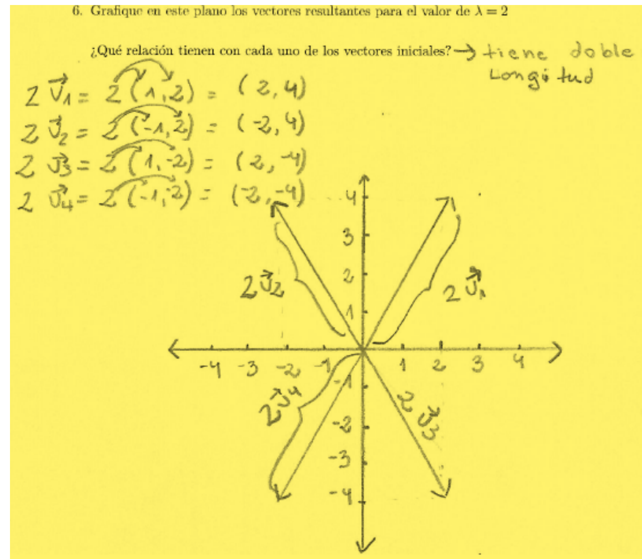


Figura 13. Respuesta a pregunta 2d de E7.

Por lo tanto el valor de parámetro λ determina orientación y magnitud de los vectores que se evalúan, es decir, la ponderación escalar determina este efecto geométrico, como se muestra el estudiante E2 en la Figura 14.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

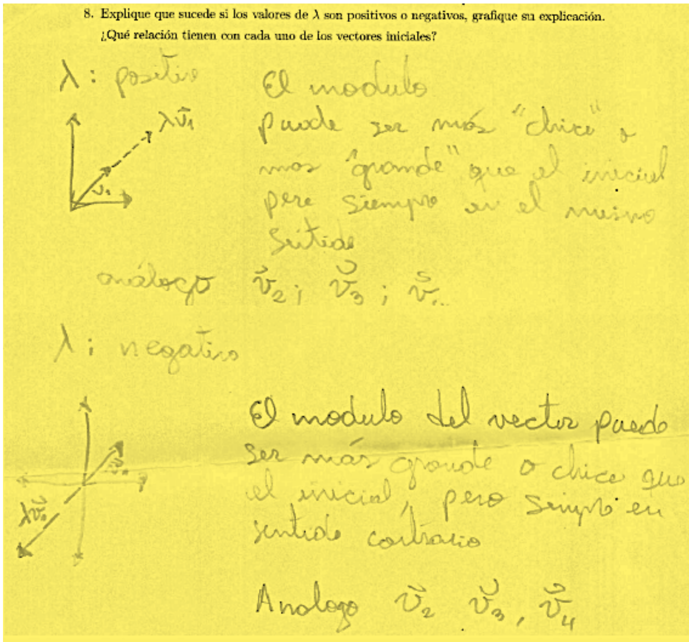


Figura 14. Respuesta a pregunta 2d de E2.

Para el caso de la ponderación escalar se pesquiso con el estudiante de segundo medio E7, que la ponderación escalar tenía una relación con una correspondencia, por lo cual se volvió a él y se le planteó la siguiente interrogante.

Dejando de lado la rotación, ¿Qué otro efecto geométrico le asocia a este tipo de transformación T?

Para esta pregunta se le dejó al estudiante que dibujara, y explicará a que se refería con esta función, a lo cual reportó que ésta era en realidad la homotecia como se muestra en la Figura 15.

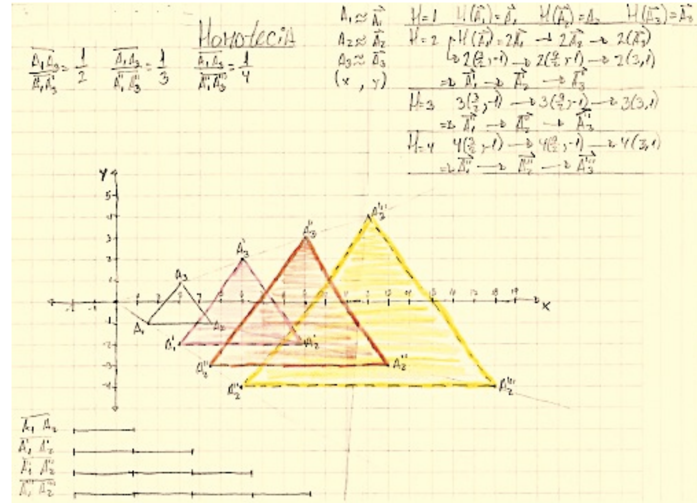


Figura 15. Respuesta de E7 en relación a la ponderación escalar.

Después de obtenido esto, otro elemento geométrico considerado fue la Homotecia, pues se reportó esta como una transformación sobre los vectores desde el punto de vista de una función, describiendo una relación de carácter geométrico pero con una descripción funcional.

Objeto (Objeto 2) valor/vector propio en R^2a través de la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función

El estudiante E2, no da cuenta del proceso ponderación por escalar de forma explícita, sino que más bien realiza directamente una encapsulación de este concepto, originado en Objeto 2 de valor/vector propio de la DG, con base en la coordinación del proceso función como correspondencia y del proceso de ponderación por escalar como se muestra en la Figura 16.

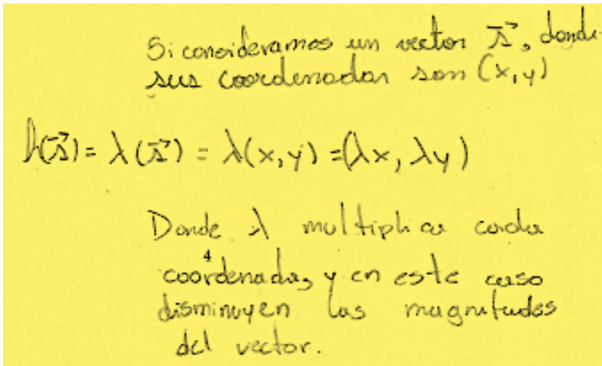


Figura 16. Fragmento de respuesta de E2 a la pregunta 2 del cuestionario.

Desencapsulación del objeto rotación en 180° con centro en el origen

E2 da cuenta de una desencapsulación de este objeto rotación, ya que lo describe como el proceso, a un cierto vector *v* lo hace corresponder con $-1 \cdot v$ ó $-1 \cdot (x,y)$, este objeto lo rotula de tal forma que describe una relación funcional para este objeto geométrico. Este proceso de forma implícita esta coordinado con el proceso de función, a través de la idea de correspondencia, (ver la Figura 17).

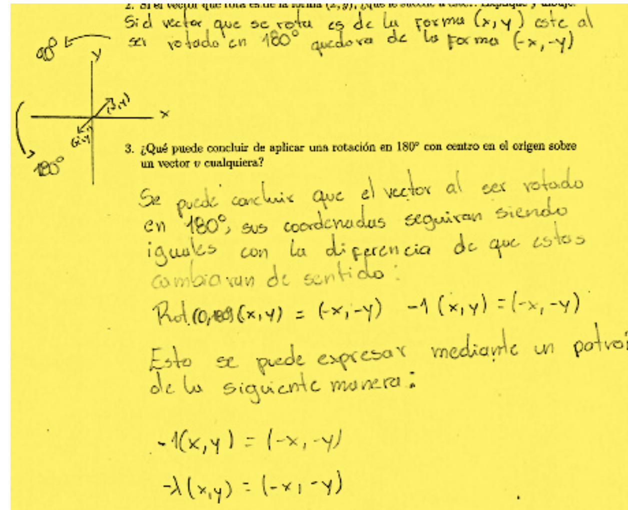


Figura 17. Respuesta de E2, mostrando la desencapsulación del objeto Rotación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2. Entre ellos se destacó la rotación en 180° como proceso que permite obtener el inverso aditivo de un vector y la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función.

En cuanto a la construcción de los valores/vectores propios en R^2, el análisis de los resultados obtenidos da cuenta que los estudiantes que logran construirlo, mostraron evidencias de haber construido las siguientes construcciones y desarrollado los mecanismos mentales asociados a ellas:

- La rotación en 180°, con centro en el origen es una función, que dado un vector *v* entrega por resultado –*v*(que de acuerdo a la DG equivale al Proceso rotulado).
- La rotación en 180° como un proceso rotulado permite obtener el inverso aditivo de un vector.
- La construcción Acción 2 (según la DG) para la rotación en 180°, con centro en el origen para vectores en R^2, es la que se interioriza en el Proceso 2 (según la DG).
- El Proceso 5 (según la DG) se muestra en la transformación *T* (pregunta 2) a través de la generación de una recta vectorial.
- La ponderación escalar y su efecto geométrico muestran la construcción del proceso 4 (según la DG).
- La construcción Objeto (Objeto 2 según la DG) valor/vector propio en R^2 se evidenció a través de la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función.

Las evidencias obtenidas dan cuenta de las dificultades en la construcción del objeto valor/vectores propios en R^2. Claramente, el análisis de los resultados muestra que la no construcción del concepto rotación en 180° como un proceso rotulado,imposibilita la construcción del objeto valor/vectores propios en R^2. Esta dificultad implica que no se ha construido la encapsulación del proceso 5, es decir, el objeto de la ponderación escalar, utilizando como medio la idea de función, obtienida a través del objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante la relación algebraica $f\colon R^2 \to R^2, f(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

En general podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son, fundamentalmente, la construcción del concepto de rotación en 180° con centro en el origen y también el de homotecia en la construcción de los valores/vectores propios como un objeto en R^2, y la importancia del reconocimiento de *T* (en la pregunta 2) como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada parece dar cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2.

Con este estudio se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada acerca de las construcciones y mecanismos mentales asociados a la construcción de valores/vectores propios en R^2, al mismo tiempo, a la pregunta sobre las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje de ellos.

Se propone, así, esta DG a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza y aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2 y como diseño de investigación que permita validarla. Los resultados de este estudio, sin embargo, van más allá de la validación de la DG. Entre las contribuciones que la investigación hace a la literatura se pueden señalar el estudio de valores/vectores propios en R^2 desde la rotación en 180° y la homotecia (Ponderación por escalar); las construcciones que parecen ser indispensables en la comprensión de este importante tópico; la construcción de la rotación en 180° con centro en el origen como una función (que dado un vector *v* entrega por resultado –*v*), la importancia de la ponderación escalar y su efecto geométrico muestran la construcción del proceso 4, el papel de *T* (pegunta 2) como función y su rol en la construcción objeto de valores/vectores propios en R^2, como paso fundamental para la comprensión real del mismo. Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a sus estrategias.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Dorier, J. L. y Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* 255-273 ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (3ª Ed.). México: Pearson educación.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Revista enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.
Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3° Ed.). México: Thomson.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Stiidies in Mathematics*, 17, 359-386.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Stake, R. E (2010). *Investigación con estudio de casos.* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y EL QUEHACER CIENTÍFICO

MATHEMATICAL THOUGHT AND THE SCIENTIFIC TASK

Ángel Homero Flores Samaniego
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, UNAM (MÉXICO)
flores.samho@gmail.com

RESUMEN

El pensamiento matemático y el pensamiento científico son manifestaciones contextualizadas del pensamiento reflexivo, entendido como el proceso de formación de significados que lleva al individuo de una experiencia a otra con un entendimiento más profundo de sus relaciones con otras experiencias y otras ideas. En este ensayo se hará una reflexión sobre los procesos de razonamiento que están detrás del conocimiento científico; el papel que juega el pensamiento matemático en la generación de dicho conocimiento; y las implicaciones en la enseñanza de las ciencias.

Parte de la reflexión se centra en la caracterización de los razonamientos que llevan a la formación de conjeturas y la búsqueda de su justificación; no referimos a los razonamientos deductivo, inductivo y abductivo, y cómo su combinación guía la indagación científica.

Palabras clave: Abducción; deducción; enseñanza de las ciencias; inducción; pensamiento matemático; pensamiento reflexivo.

ABSTRACT

Mathematical and scientific thought are contextualized manifestations of reflexive thought, defined as the process of meanings formation that takes an individual from one experience to another with a deeper understanding of its relationships with other experiences and ideas. In this essay a reflection on the reasoning processes behind scientific knowledge, the role of mathematical thought in the building of such a knowledge, and its implications on the teaching of science will be addressed.

Part of the reflection is focused on the characterization of the kind of reasoning that leads toward the posing of conjectures and the search of its validation; we are referring to deductive, inductive, and abductive kind of reasoning, and how its combination guide scientific inquiry.

Key words: Abduction; deduction; induction; mathematical thought; reflexive thinking; science teaching.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

Para los efectos del presente ensayo, consideramos que un científico es toda aquella persona que se dedica a la ciencia, sin hacer distinciones sobre el carácter de dicha ciencia, puede ser natural o social.

Un científico debe poseer una manera de pensar y de concebir su entorno acorde con su posición de persona que busca el conocimiento. Este conocimiento debe ser válido, considerado como verdadero por la comunidad de científicos en la que se desenvuelve y, de ser el caso, por la sociedad a la que pertenece.

El pensamiento científico es un pensamiento reflexivo que se puede resumir de la siguiente manera (Rodgers, 2002: 845):

- Es un proceso de formación de significados que lleva al individuo de una experiencia a otra con un entendimiento más profundo de sus relaciones y sus conexiones con otras experiencias y otras ideas.
- Es una manera de pensar sistemática, rigurosa y disciplinada, con sus raíces en el cuestionamiento científico.
- Es necesario que se dé en el seno de una comunidad, a partir de la interacción entre individuos.
- Requiere actitudes que valoren el crecimiento personal e intelectual del individuo mismo y de los demás.

Según, John Dewey (1910), filósofo y pedagogo estadounidense, el pensamiento reflexivo sigue cinco pasos lógicos:

a) La sensación de una dificultad o su percepción.
b) Su ubicación y su definición.
c) Sugerencias de posibles soluciones o explicaciones en la forma de hipótesis o de conjeturas.
d) Desarrollo, mediante razonamientos lógicos, de las implicaciones de las sugerencias.
e) Observación y experimentación más detallada que lleva a la aceptación o al rechazo de la posible solución o explicación, es decir, de la conjetura.

Esto es, una persona percibe una dificultad, un problema, o algo que no encaja del todo en una situación; el pensamiento reflexivo hace que la persona ubique y defina aquello que despertó su curiosidad; sugiere posibles causas y, si la situación es conflictiva, posibles soluciones; ahora, mediante inferencias lógicas, determina las implicaciones que pueden tener las sugerencias de solución, es decir, las conjeturas sobre las causas del conflicto o sobre las posibles soluciones; finalmente, el pensamiento reflexivo lleva a hacer una especie de recapitulación, observando y analizando con más detalle lo que tiene hasta ese momento, y esto lleva a aceptar o no las conjeturas como válidas. El pensamiento reflexivo influye en el sistema de creencias de un individuo, ya sea reforzando algunas de ellas o desechando otras.

Ahora bien, el tipo de razonamiento que utiliza un matemático cuando hace matemática es una forma muy especial del pensamiento reflexivo. El pensamiento matemático dota al individuo de las habilidades de razonamiento abstracto que le permitirán adquirir la capacidad de resolver problemas de manera efectiva, haciendo un uso racional de las herramientas tecnológicas a su alcance.

Así pues, por pensamiento matemático entenderemos el razonamiento que se da durante el proceso de hacer matemática; este razonamiento tiene elementos inductivos, deductivos y abductivos y adquiere características especiales dependiendo del contexto matemático en el que se dé. Dividimos el pensamiento matemático en cinco categorías igualmente importantes y que se complementan entre sí:

- Razonamiento numérico: implica la comprensión de los números y su representación, así como su conformación en conjuntos específicos en donde existen operaciones y transformaciones entre ellos.
- Razonamiento algebraico: se refiere al entendimiento de los procesos de reconocimiento de patrones y generalización.
- Razonamiento variacional: está conformado por la comprensión de las relaciones funcionales y los procesos de cambio.
- Razonamiento geométrico: implica la percepción espacial de los objetos que nos rodean y la comprensión de sus relaciones.
- Razonamiento probabilístico y estocástico: tiene que ver con la comprensión de los procesos azarosos y de cálculo de probabilidades.

La matemática es inherente a cualquier actividad humana, desde el quehacer científico y humanístico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Por tal motivo, es importante desarrollar aquellos aspectos básicos de la matemática que permitirán desempeñarse satisfactoriamente en el contexto social y laboral, no sólo en el académico o científico.

Para entender la naturaleza de la matemática y la manera en que se construye el conocimiento matemático, es necesario hacer una recapitulación sobre cómo se genera y se valida el conocimiento matemático, que no es muy diferente al proceso que sigue el conocimiento científico en general.

Básicamente, los resultados que un matemático obtiene de sus investigaciones aparecen, en primer término, como una serie de conjeturas que debe validar. Es muy probable que una conjetura se forme a partir de una serie de hechos aislados, siguiendo un proceso inductivo. Si las evidencias obtenidas convencen al matemático de su plausibilidad, es decir, si hay un proceso de autoconvencimiento de la veracidad de sus hallazgos, entonces se aventura a buscar una demostración matemática, basada en procesos deductivos. Una vez que tiene la demostración de su conjetura, la somete a la revisión y al escrutinio de sus colegas, dando inicio, así, a un proceso de persuasión sobre su validez. Si los resultados son lo suficientemente interesantes o relevantes para el conocimiento y la teoría matemática, es posible que la revisión de la demostración lógica de la conjetura se haga de tal manera que se dé una serie de pruebas y refutaciones hasta que sea aceptada o rechazada por la comunidad.

Si la conjetura es aceptada como válida, entonces adquiere el estatus de teorema; si no, la conjetura puede utilizarse con las reservas del caso. En ambos casos, teorema y conjetura, vienen a formar parte del conocimiento matemático.

Lo interesante de este proceso de formación de conjeturas y su validación, es que el pensamiento reflexivo juega un papel importante. Esto es, el investigador, siguiendo más o menos en el mismo orden los pasos lógicos del pensamiento reflexivo definidos por Dewey, percibe que algo puede ser importante; ubica ese algo y lo define o trata de definirlo; sugiere posibles explicaciones en forma de una conjetura; razona de manera lógica sobre la validez de su conjetura; y busca mayores evidencias de ésta, hasta que termina por aceptarla o rechazarla. Ahora bien, este conocimiento se da en el seno de una comunidad, por ello la necesidad de someterlo a su escrutinio; esta misma necesidad de que el resultado sea reconocido como válido por la comunidad, hace que el investigador se someta a una serie de reglas establecidas tanto en la disciplina misma como por la comunidad en la que se desenvuelve. En este caso, hablamos del respeto a las reglas matemáticas y la honestidad en los planteamientos.

Por tanto, la matemática y la generación de conocimiento matemático implican el desarrollo de un pensamiento reflexivo contextualizado que se puede fomentar haciendo matemática. Un pensamiento reflexivo que será de gran ayuda en la formación de científicos y en la investigación científica.

En este ensayo se hará una reflexión sobre los procesos de razonamiento que están detrás dela generación y manifestación del conocimiento científico; el papel que juega el pensamiento matemático en la generación de dicho conocimiento; y las implicaciones en la enseñanza de las ciencias.

LA FORMACIÓN DE CONJETURAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA LÓGICA

Pensemos en el siguiente razonamiento:

Premisa Mayor: Todos los perros son animales.

Premisa Menor: Jackson es un perro.

Conclusión: Jackson es un animal.

Éste es un modo de silogismo llamado Barbara, podemos decir que se trata de uno de los razonamientos más directos y fáciles de comprender. Es un razonamiento deductivo en el que la premisa mayor es una ***regla general***, la premisa menor es un ***caso particular*** y la ***conclusión*** se obtiene directamente de las otras dos. El razonamiento será válido si las dos premisas son válidas.

Ahora, si cambiamos de lugar la premisa mayor y la ponemos al final del silogismo tendremos:

Premisa 1: Jackson es un perro

Premisa 2: Jackson es un animal.

Conclusión: Todos los perros son animales.

En este caso tenemos una inducción. Las dos premisas apuntan a un caso particular, Jackson es un perro y es animal. Este caso lleva a una regla general: *Todos los perros son animales*. La conclusión es débil, no es posible decir que sea válida tomando como ejemplo un solo perro. Habría que indagar más. En este tipo de razonamiento el conocimiento para determinar la validez de la conclusión está contenido en las dos premisas, la validación consistiría en encontrar más casos de perros que también sean animales: cuántos más perros animales encontremos, más fuerte será la conclusión. Decimos que la conclusión es una conjetura.

Intercambiemos ahora la segunda premisa y la conclusión en nuestro silogismo:

Premisa 1: Todos los perros son animales.

Premisa 2: Jackson es un animal.

Conclusión: Jackson es un perro.

Este tipo de razonamiento no se puede considerar una inducción, pues parte de una regla general. ¿Es un razonamiento válido? ¿La certitud de las dos premisas aseguran la veracidad de la conclusión? La respuesta claramente es no. Si cambiamos la redacción del razonamiento a:

Jackson es un animal; todos los perros son animales, entonces es posible que Jackson sea un perro.

El conocimiento que puede llevarnos a la validez de la conclusión no se encuentra en las premisas. Habría que buscarlo en otra parte. En este caso una simple inspección del animal podría sacarnos de la duda.

A este tipo de razonamiento, Charles Sanders Peirce, filósofo pragmático estadounidense, llamó razonamiento abductivo. Lo expresó de la siguiente manera (Peirce, citado en Psilos 2011, p. 132):

Se observa un hecho sorprendente C.

Pero si A fuera cierto, C se estaría observando.

Entonces existe razón para pensar que A es cierto.

En nuestro caso el hecho observado es que Jackson es un animal. Si Jackson fuera perro, tendríamos que Jackson es animal. Entonces existe razón para pensar que Jackson sea un perro.

Así pues, mientras que en los razonamientos deductivo e inductivo la validación de la conclusión está en las mismas premisas, en el razonamiento abductivo hay que buscarla en otro lado.

En el ámbito de la matemática un razonamiento abductivo sería el siguiente.

Este triángulo tiene la propiedad de que la suma del cuadrado de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero (hecho *observado). Yo sé que los triángulos rectángulos cumplen con esta propiedad (regla general), entonces es posible que este triángulo sea rectángulo (conjetura).*

Coincidimos con Peirce (2014) y otros autores (Anderson, 1995; Douglas, 1995; Fann, 1970; Reichertz, 2010; Russell, 1965) en que este tipo de razonamiento lleva a una indagación con razonamientos de tipo deductivo e inductivo que nace de probar la validez de la conjetura y generalizarla. En este caso la pregunta que nos haríamos es: ¿será, entonces, que todos los triángulos que tengan esta relación entre la longitud de sus lados sean rectángulos? Si tomamos esto como cierto, ¿cuáles serían las consecuencias? ¿Qué se puede deducir de esto?

¿Cómo podemos probar la hipótesis? Lo primero que se puede hacer es ver si el triángulo observado y otros con la misma característica cumplen con el hecho de ser rectángulos. Cuando se tienen casos suficientes como para estar seguros de que la regla general se cumple, entonces se buscaría una cadena de razonamientos deductivos (cuyas premisas están sustentadas por la teoría matemática) que lleven a la conjetura como conclusión.

LA INDAGACIÓN CIENTÍFICA

Tomando en cuenta lo dicho hasta este momento, un razonamiento de tipo abductivo es el primer paso en un proceso de pensamiento reflexivo y, por ende, de un proceso de indagación científica. Peirce reconoce tres etapas de la indagación científica (adaptado de Psillos, 2011, pp. 143-144; traducción propia).

> *La completa serie de desempeños mentales entre la observación del maravilloso fenómeno y la aceptación de la hipótesis, … y la estimación final de su plausibilidad, considero que es la primera etapa de la indagación. Su fórmula característica de razonamiento la llamo abducción (retroducción en el texto original), es decir del consecuente al antecedente.*
>
> *La abducción no permite seguridad. La hipótesis debe ser probada. Esta prueba, para que sea lógicamente válida, debe honestamente iniciar, no como inicia una abducción, con el escrutinio del fenómeno, sino con el examen de la hipótesis, y exhibir toda suerte de consecuencias condicionales que se seguirían de su veracidad. Esto constituye la segunda etapa de la indagación. Por su forma característica de razonamiento, nuestra sociedad le ha proporcionado el nombre de deducción.*
>
> *Una vez que el propósito de la deducción, el recabar consecuentes de la hipótesis, es llevado a cabo de manera suficiente, la indagación entra es su tercera etapa, la de establecer qué tan lejos tales consecuentes concuerdan con la experiencia, y de juzgar en consecuencia si la hipótesis es sensiblemente correcta o requiere alguna modificación no esencial, o debe ser completamente rechazada. Su forma característica de razonamiento es la inducción.*

El desarrollo de la ciencia está lleno de ejemplos de razonamiento abductivo que lleva al planteamiento de una conjetura o hipótesis y a la búsqueda de su aceptación completa bajo ciertas circunstancias o su completo rechazo.

Un ejemplo de esto es la evolución del concepto de átomo, desde las consideraciones filosóficas de Demócrito, hasta el modelo atómico de Schrödinger. Todo apunta a un proceso que aún no termina.

Según la versión más aceptada (Enciclopedia de Filosofía de Stanford, 2004), Parménides afirmaba que no podía haber un cambio sin que implicara que algo viniera de la nada; y como la idea de que algo viniera de la nada es algo que se tenía por imposible, entonces decía que el cambio era ilusorio. Pero los cambios están ahí, se pueden testificar diariamente, por tanto, negar el hecho no era la solución. En consecuencia, varios filósofos, entre ellos Demócrito y su maestro Leucipo de Mileto, se dieron a la tarea de buscar una explicación alternativa sobre las causas del cambio.

Podemos poner el razonamiento de Parménides como una abducción de la siguiente manera:

> *Se observa un cambio en la materia. Si algo surgiera de la nada, estaríamos observando cambios; por tanto, es posible que algo surja de la nada.*

Parménides no avanza mucho en su razonamiento, el siguiente paso fue negar el hecho observado (el movimiento es ilusorio), en lugar de tratar de probar su conjetura: hay cosas que surgen de la nada; o dado el caso, cambiarla.

Porsu parte, el razonamiento de Demócrito se puede establecer como:

> *Se observa un cambio en la materia. Si hubiera principios constitutivos de la materia que no percibimos, estaríamos observando los cambios. Por tanto, es posible que existan esos principios.*

Y en lugar de negar lo observado, lo que hizo fue tratar de probar su conjetura suponiendo la existencia de bloques indivisibles de materia que al combinarse con otros bloques provocaban los cambios que sí podemos percibir. A estos bloques los llamó *átomos.*

La existencia misma de los átomos como una estructura indivisible era una conjetura, conjetura que retomó Newton y modificó Dalton muchos siglos después para explicar los elementos químicos, dando a los átomos formas y tamaños diferentes. Es decir, la conjetura que suponía la existencia de los átomos, si no verdadera, resultó útil para explicar algunos fenómenos. A medida que avanzó la tecnología y la ciencia fue evolucionando, el concepto de átomo perdió su característica de indivisible, el átomo está compuesto de partículas como electrones, neutrones, protones, muones y un número grande de otras partículas (partículas elementales). Pero básicamente la conjetura de Demócrito sigue vigente, ¿cuál es la estructura mínima e indivisible de la materia que origina los cambios que observamos? ¿Existen tales estructuras? Sabemos que la energía juega un papel fundamental en la conformación de la materia, y la luz tiene un comportamiento dual: como corpúsculo y como onda. Incluso tenemos una ecuación que relaciona la energía con la masa: $E = mc^2$; por tanto es razonable

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

creer que tal vez no exista dicha estructura y todo sea un intercambio entre materia y energía.

En la naturaleza, por lo menos hasta donde se conoce, la materia se encuentra en estado sólido, líquido, gaseoso o en forma de plasma. Y es posible tener conversiones entre estos estados. Entonces, es plausible pensar que, al final de cuentas, Aristóteles tuviera razón cuando argumentaba que la materia es un continuo y los cuatro elementos tierra (sólido), agua (líquido), aire (gas) y fuego (plasma) compartan algunas características.

El punto a resaltar con todo lo anterior, es que el razonamiento abductivo puede embarcarnos en un proceso de reflexión y de formación de conjeturas que, eventualmente, nos llevaría al conocimiento, o a destinos insospechados como la poesía quees el caso de Edgar Alan Poe con su texto Eureka escrito en 1847.

Pensamiento matemático e investigación científica

En geometría, un ejercicio típico es el siguiente:

> *Si tenemos dos segmentos de diferente longitud que se cruzan en su punto medio, el cuadrilátero que se forma con los extremos de los segmentos es un paralelogramo. ¿Es válida la afirmación anterior? Explica por qué sí o por qué no.*

Al resolver este ejercicio un profesor de matemática de bachillerato (tres últimos años antes de iniciar la universidad) respondió de la siguiente manera:

> *Sí es un paralelogramo, pues en un paralelogramo sus ángulos internos miden lo mismo y sus diagonales se cruzan en su punto medio.*

¿Es correcto este razonamiento?

Si planteamos la afirmación como un razonamiento abductivo, quedaría así:

> *Hecho observado: Dos segmentos que se cruzan en su punto medio.*
>
> *Si todos los cuadriláteros cuyas diagonales se cruzan en su punto medio fueran paralelogramos, entonces es posible que estos dos segmentos sean las diagonales de un paralelogramo.*

La conjetura que hay que revisar sería:

> *Todos los cuadriláteros con diagonales que se cruzan en su punto medio, son paralelogramos.*

Y no como lo pone el profesor del ejemplo:

> *Todos los paralelogramos tienen diagonales que se cruzan en su punto medio.*

Es decir, el razonamiento abductivo nos ayudaría a plantear la conjetura correcta.

Una vez que tenemos la conjetura correcta, para probarla podemos recurrir a procedimientos deductivos, es decir, considerar que consecuencias tendremos de considerar que en el cuadrilátero sus diagonales se cruzan en su punto medio, y si estas consecuencias nos llevan al hecho de que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Como en el caso del átomo, es posible que el razonamiento abductivo lleve a un proceso de validación y refutación de conjeturas que tome años, décadas e, incluso, siglos.

Tomemos, por ejemplo, el caso de la fórmula de Euler que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro regular: V – A = C + 2, en la que V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras.

El problema original fue la clasificación de los poliedros por parte de Euler, 1758 (adaptado de Lakatos, 1963, p. 6):

> *Mientras que la clasificación de polígonos en geometría plana puede hacerse con facilidad de acuerdo con el número de sus lados, que siempre es igual al número de sus ángulos, en estereotomía la clasificación de poliedros representa un problema mucho más difícil, ya que el solo número de caras resulta insuficiente para este propósito.*

Según Lakatos, la línea de pensamiento del matemático fue: si pudiera establecer una relación entre los elementos de un poliedro, como en el caso de los polígonos, sería fácil hacer la clasificación. El razonamiento que se vislumbra en el argumento de Euler es de tipo abductivo:

> *Si se pudieran clasificar los poliedros, tendríamos una relación entre sus elementos. Tengo una relación entre sus elementos, entonces es posible que se puedan clasificar.*

El hecho observado es la relación entre los elementos del poliedro, y la conjetura es que los poliedros se pueden clasificar. La cuestión está en que Euler no tenía la relación, supone que existe por la correspondencia entre polígonos y poliedros. A diferencia de Parménides que negó el hecho, Euler supone que existe y se abocó a encontrarlo.

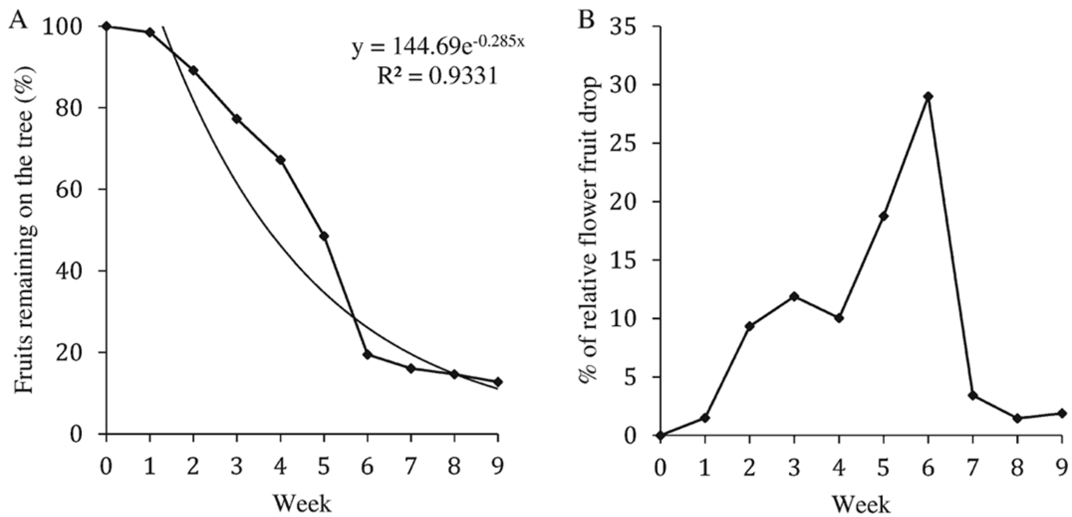
La fórmula que encontró, de hecho, fue otra conjetura que requería demostración: esta conjetura tuvo una serie de demostraciones y refutaciones que llevaron varias décadas (Lakatos, 1963).

En términos generales, podemos concluir que la matemática se ve sometida al escrutinio de las leyes de la inferencia y su conocimiento no se produce exclusivamente con razonamientos de tipos inductivo y deductivo. Sin embargo, debido a las características de la teoría matemática y la forma en que se construye, el pensamiento matemático da un carácter más riguroso al quehacer científico en general.

La matemática ha impactado todos los ámbitos del quehacer humano. No obstante, parece ser que el pensamiento matemático no ha tenido el mismo impacto. Veamos el siguiente ejemplo:

La Figura 1 fue tomada de la revista Annals of Applied Biology.

Patrón de frutificación de longan, Dimocarpus longan: desde la polinización hasta el desarrollo de arilos



Annals of Applied Biology
Volume 169, Issue 3, **pages 357-368, 11 JUL 2016 DOI: 10.1111/aab.12306**
http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/aab.12306/full#aab12306-fig-0004

Figura 1. Patrón de fructificación del árbol de longan u ojo de dragón. Fuente: Annals of Applied Biology.

La gráfica A muestra la tendencia de la permanencia de frutos de longan (también conocido como 'ojo de dragón'), una fruta tropical asiática parecida al lichi. Parte de la explicación que se da en el artículo sobre la gráfica A es como sigue (traducción propia)

> *Las flores/frutos caen de 1 a 9 semanas después de la floración, siguiendo una tendencia exponencial (R^2 = 0.9331) según la ecuación y = $144.69e^{-0.285x}$, en la que 'x' significa semanas después de la antesis. (Pham, et al, 2016: 363)*

Si analizamos la información que se da en la gráfica y lo transcrito en el párrafo anterior, podemos observar lo siguiente: suponemos que la gráfica con puntos corresponde a las observaciones de campo (en el artículo no se menciona este hecho), éstas se hicieron semanalmente, en consecuencia, los puntos no deberían estar unidos por segmentos pues no se sabe qué sucede entre una medición y otra (éste es un ejemplo de curva discreta). Ahora bien, teniendo una gráfica de puntos como la de la figura, ¿qué fue lo que llevó a los autores a pensar en un ajuste exponencial? El coeficiente de determinación R^2 es alto, por tanto, la curva debería pasar muy cerca de los puntos, cosa que no se observa en la gráfica. Esto haría pensar en que se haya cometido algún error en el cálculo de R^2. Ahora bien, el artículo está publicado en una revista arbitrada, ¿faltó rigurosidad a los revisores o simplemente no les pareció importante?

Situaciones como la anterior se deben a la falta de un pensamiento matemático en las líneas de razonamiento de los autores. ¿Habrían cambiado los resultados y, por ende, las conclusiones de haber sido más rigurosos en el uso de herramientas matemáticas? ¿Qué tan útiles son las gráficas en el artículo o sólo tienen la función de darle un carácter más 'científico' al texto?

IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

La escuela, como el centro de formación de los integrantes de una sociedad, se conforma en el lugar en donde se prepara a los aprendices para la vida. En palabras de Dewey (traducción propia):

> *La gran importancia del pensamiento para la vida hace necesario su control por parte de la educación, debido a su tendencia natural a perderse, y debido a que existen influencias sociales que tienden a formar hábitos de pensamiento que llevan a creencias inadecuadas y erróneas. (Dewey, 1910: 29)*

En especial, durante el proceso de formación científica (incluyo en esta categoría a todos los ingenieros y los científicos sociales) es necesario que los aprendices adquieran hábitos y habilidades de pensamiento reflexivo que les permita llegar a inferencias mejor sustentadas. Es decir, la escuela debe proporcionar al estudiante una disciplina mental que convierta el talento natural de los individuos, a través de un ejercicio gradual, en un poder efectivo (Dewey, 1910):

> *Cuando la disciplina es concebida en términos intelectuales (como el poder habitual de una actividad mental efectiva), se le identifica con la libertad en su sentido verdadero. Ya que la libertad de mente significa un poder mental capaz de un ejercicio independiente, emancipado del control de otros, no la mera operación externa sin ataduras (p. 64. Traducción propia)*

El científico necesita esta independencia intelectual para poder plantear conjeturas y buscar su justificación sin apegarse a dogmas. Por lo general, el científico se encuentra con hechos y busca su causa. La disciplina mental le ayudará descubrir lo que hay en medio y si la causa encontrada es razonable.

En este sentido, el pensamiento matemático podría ser de gran ayuda. Por consiguiente, sería recomendable que el estudio de la matemática en niveles superiores se abocara a desarrollar el pensamiento reflexivo a través del pensamiento matemático.

Para ello es necesario cambiar el enfoque de enseñanza de la matemática que se ha dado en estos niveles. Exceptuando las carreras de matemática pura, la enseñanza de la matemática ha sido como una herramienta de apoyo a otras materias como física, química o biología; y su concepción como un cuerpo de conocimiento acabado no ha cambiado: la matemática se enseña como una serie de recetas y algoritmos que se aplican en determinadas situaciones, sin que haya una reflexión verdadera sobre el origen de tales algoritmos o el porqué de las fórmulas. En este tipo de enfoque no hay espacio para el razonamiento, sólo la aplicación mecánica de recetas.

Por el contrario, en carreras de matemática pura, el enfoque es axiomático y formal, en donde el razonamiento deductivo juega un papel importante, como el método único para demostrar teoremas. Por lo general, se inicia con la definición de conceptos clave, las leyes básicas (y obvias) que rigen algunas relaciones entre tales conceptos (axiomas) y, a partir de esto, se construye la teoría, siguiendo una serie de implicaciones deductivas derivadas de los axiomas, en un principio, y de axiomas y teoremas más adelante. Una vez establecido el teorema, se ejemplifica su aplicación con ejemplos concretos, dando a la mecanización de procedimientos un lugar relevante en el aprendizaje.

Es muy común que una clase de matemática empiece con el enunciado de un teorema y, a continuación, la demostración del mismo llevada a cabo por el encargado del curso. Tales demostraciones son tomadas de libros de texto y se las presenta sin muchas variaciones. Si el profesor es bueno, la demostración puede llegar a buen fin sin problema alguno. Pero si el profesor no tiene mucha experiencia con la reproducción de la demostración, puede pasarse horas platicando con el pizarrón mientras los estudiantes son mudos testigos.

En ninguno de los dos extremos presentados, hay espacio para que el estudiante explore, haga conjeturas, siga líneas de razonamiento y llegue a sus propias conclusiones.

Para que el estudio de la matemática sea realmente de utilidad y refuerce el pensamiento reflexivo de los científicos en ciernes, es necesario dejar de verla exclusivamente como una herramienta, o exclusivamente como una serie de conceptos abstractos sin mayor aplicación en la vida cotidiana.

En cada carrera universitaria, incluidas las humanidades y las ciencias sociales, debería hacerse un estudio de la matemática inherente a ese campo de conocimiento y las características que tendría en su carácter de ciencia, herramienta y lenguaje. En Física esto está más o menos claro, pues la física y la matemática se han desarrollado de la mano, prestándose mutua ayuda; pero la relación en otras materias como la biología, la química o la historia la relación no es tan inmediata.

A manera de conclusión, me atrevo a afirmar que, igual que hay una matemática financiera, una físico-matemática o una bio-matemática, también es posible definir una matemática para la historia, la química, la ingeniería e, incluso, la filosofía o la medicina.

El estudio de estas ramas de la matemática aplicada muy bien podría constituirse en el vehículo ideal para fomentar el pensamiento reflexivo en nuestros futuros científicos. Hay que allanar el camino.

REFERENCIAS

Peirce, C. S. (2014) *Illustrations of the logic of science,* by de Waal, Cornelis, Peirce, Charles Sanders. Open Court.

Stanford Encyclopedia of Philosophy, extraidael 17 de octubre de 2016 desde http://plato.stanford.edu/entries/democritus/#2

Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations: the logic of mathematical Discovery*. EUA:Cambridge University Press.DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781316286425

Pham,V. T., Herrero, M.y Hormaza J. I. (2016) Fruiting pattern in longan, *Dimocarpus longan*: from pollination to aril development. *Annals of Applied Biology*. 169(pp. 357–368)

Dewey, J. (1910) *How we think*. EUA: D. C. Heath & co. Publishers.

Reichertz, J. (2010) Abduction: The Logic of Discovery of Grounded Theory. *Forum Qualitative Social Research*. Vol. 11, no. 1.

Anderson, D. (1995). *Strand of system. The philosophy of Charles Peirce*. West Lafayette: Purdue University Press.

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Nijhoff.

Russell, H. N. (1965). Notes toward a logic of discovery. En Richard J. Bernstein (Ed.), *Perspectives on Peirce*. (pp.42-65). New Haven: Yale University Press.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ACUMULACIONES VS INTEGRAL

José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera, Carlos Humberto Ruiz
FACULTAD DE FÍSICO MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO (MÉXICO)
jcortes@umich.mx, lilia_lopez@hotmail.com, carloshruizp@gmail.com

RESUMEN
El artículo siguiente tiene como objetivo el presentar acercamientos numéricos, mediante sumas, que permitirá a los estudiantes realizar transferencias entre representaciones semióticas, para la aprehensión de los procesos matemáticos asociados al concepto de integral. Se utilizará el potencial del ajuste de puntos con funciones de Geogebra como medio de enseñanza.

Palabras clave: acumulación, geogebra, integral, noesis, semiosis

ABSTRAC
This paper aims to show numerical approaches, through sums, which allow students to make transfers bewtween semiotic representations, for apprehension of mathematical processes associated to integral concept. We will use the Geogebra's potential for a function's points adjustment as the teaching medium.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

El curso de Cálculo Integral que se imparte en los diferentes bachilleratos, se centra en la utilización de algoritmos que propician solamente el desarrollo de habilidades mecánicas (por habilidades mecánicas entenderemos la secuencia de pasos algebraicos necesaria para llegar al resultado deseado), es decir existe una tendencia a privilegiar el aspecto algebraico, y se da poca importancia a la adquisición de los conceptos fundamentales del curso tales como entender que es una integral. Este esquema de enseñanza a producido, entre otras cosas, una tendencia al uso de algoritmos por parte de los estudiantes.

Aun cuando en el programa del curso se menciona que "Dada la importancia que tienen las definiciones y conceptos es conveniente que se introduzcan a un nivel intuitivo", en la práctica solamente se parte de estas ideas para llegar a la manipulación algebraica, es decir que la enseñanza del Cálculo parte de una concepción estructural del mismo; lo anterior según menciona Duval (1993), en su artículo Semiosis y Noesis "los aprendizajes de base en matemáticas no pueden solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo), sino que debe también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados".

Las investigaciones educativas realizadas, ponen de manifiesto la dificultad de aprehensión, por parte del estudiante, de los conceptos, y resaltan la importancia que tiene la articulación de los diferentes registros de representación del concepto, para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por ejemplo: Hitt (1992) considera que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si él puede reconocer este concepto en sus diferentes representaciones."

Es importante señalar que algunas de las causas de la ausencia de utilización de diferentes registros de representación, por los estudiantes, en los cursos de Cálculo Integral, se pueden deber a:

1. La complejidad en su utilización: Al respecto, Eisenber y Dreyfus (1966) mencionan que "siempre que es posible, los estudiantes parecen escoger una estructura simbólica para procesar información matemática más que visual", lo cual nos lleva a pensar que el uso de diferentes registros de representación puede ser un problema de aprendizaje.

2. Pérdida de tiempo para usarlos: Por lo que es importante subrayar que con el advenimiento de las nuevas tecnologías, tales como súper-calculadoras y computadoras, se puede tener acceso a diferentes registros de representación con un gasto reducido de tiempo

3. Los profesores no consideran que es un proceso significativo por el que tienen que transitar los estudiantes, además de no encontrarles el valor

didáctico en su incorporación, dando como resultado que no sean parte esencial de su trabajo en el aula. Esta causa la podemos considera como un problema de enseñanza.

4. En los libros de texto que son normalmente utilizados se resalta, solamente, la utilización de técnicas de manipulación algebraicas.

Resumiendo, la enseñanza del Cálculo Integral en el bachillerato es puramente algebraica, lo cual oculta información muy importante para el estudiante. En este artículo se expone un acercamiento numérico y gráfico para propiciar el entendimiento del concepto de integral que viene a ser un complemento de lo expuesto por Cortés (Cortés, 2012).

MARCO TEÓRICO

A la fecha, se ha publicado una gran cantidad de investigaciones educativas sobre el diseño de propuestas metodológicas desde diversos paradigmas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el Nivel Medio Superior y Superior. Se han señalado los conflictos que enfrenta la enseñanza formal del Cálculo, considerando que privilegia a una algoritmia desprovista de significados para su aplicación en otras disciplinas o profesiones;

Otras publicaciones presentan resultados obtenidos, tanto en innovaciones que responden a las demandas institucionales de aplicar el conocimiento a Problemas Reales (Modelo Educativo por Competencias), como en las innovaciones que responden a la Reforma del Cálculo definida en los Estados Unidos desde 1986, con el propósito de presentar al Cálculo "más esbelto y lleno de vida". También se han publicado resultados de prácticas y estrategias didácticas, con o sin la implementación de recursos tecnológicos; e innovaciones para la enseñanza del Cálculo en diferentes ambientes y escenarios educativos, para promover la asignación de Significados a la Integral de una función como objeto matemático.

En relación a las dificultades en el aprendizaje del Cálculo Integral, Muñoz (2000) afirmó que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Considera que se realiza un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas e integrales indefinidas, descuidando a la conceptualización de la integral definida. En esa misma dirección, se ha identificado que los problemas que deben resolver los estudiantes en los que se aplica la integral, son muy estereotipados, reduciendo su actividad de aprendizaje a la mecanización de técnicas de integración, con una excesiva orientación algebraica, en descuido de lo geométrico y del significado del proceso de integración (Artigue, 2002).

Las ideas teóricas en las que se basa está propuesta es explicada a través de la teoría de Registros semióticos de representación propuesta por Duval (1988, 2003, 2005). "Para las matemáticas las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasformar ideas intangibles en imágenes u objetos reales, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos (vista, tacto, etc.)" (Cortés, 2002). Además según lo expuesto por Duval (1993), menciona que "los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces poder proporcionar representaciones". Con base en esto, Ferrara, Pratt, & Robutti (2006) citan que:

> Es importante construir un entendimiento de las funciones a través de representaciones múltiples y problemas contextuales antes de poner énfasis en las definiciones estáticas. Una aportación de la tecnología es el ofrecer el acceso a varios tipos de representación de función. Esta aportación ha sido importante en la investigación PME a lo largo de las tres décadas pasadas.

Las representaciones se pueden considerar en dos sentidos, por un lado las representaciones mentales y por otro a las representaciones semióticas. Es necesario resaltar la relación del sujeto con las representaciones mentales y con las representaciones semióticas; Dupuis (1997) dice que "Las representaciones semióticas son conscientes (notorias para el sujeto) y externas (directamente visibles y observables) y las representaciones mentales son conscientes e internas".

Duval (1993) hace una diferenciación de la aprehensión de las representaciones semióticas y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además afirma que hay necesidad de utilizar en el aprendizaje, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático ya que considera que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de una representación a otra existen diferentes aspectos de contenido que son representados, y también alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades que existen para no hacerlo, es usar múltiples sistemas de representación semiótica.

Es de relevante importancia mencionar que "La coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos" Duval (1993). Es decir, que para lograr la aprehensión del objeto matemático (noesis) debemos, entre otras cosas, lograr primero la aprehensión de los diferentes registros de representación (semiosis).

De las investigaciones sobre el aprendizaje mediado con el uso de tecnología en la enseñanza del Cálculo, se ha señalado que no es suficiente enfocar el significado geométrico del concepto de Integral de una función como Área bajo la curva, para comprender la definición de la integral como sumas de Riemann. Por otra parte, Gordon y

Gordon (2007), plantearon la idea de ajustes de funciones con datos numéricos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo por parte de los estudiantes, con el apoyo de recursos tecnológicos.

Se coincide con Thompson y Silverman (2007), quienes realizaron investigación de índole cognitiva, considerando algunas dificultades sobre la concepción de *función* como *proceso;* plantearon que para comprender la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann, los estudiantes deben conceptualizar primero la función de acumulación, como una conceptualización auxiliar; y afirmaron que “la mayor fuente de problemas cognitivos para la comprensión matemática de la acumulación, se da porque es raro que dicha idea se enseñe en los cursos de Cálculo Integral, o si se enseña, es raro que se tenga intención de que se aprenda.”

Por lo anterior es que en este trabajo se pretende abordar conceptos de Cálculo Integral a través de un acercamiento numérico, y estos serán tratados con diferentes registros de representación semiótica.

EXPOSICIÓN DE LA PROPUESTA

A continuación se presentan dos casos de funciones de acumulación: primero de una función. Después, de una función no polinomial de la forma $f(x)=\sqrt{x+1}$.

CASO I: ACUMULACIONES DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Partiendo de una función constante, sea la función *f(x)= 3* cuando el incremento es.
La función *f(x)=3*, se puede ver en la figura 1.

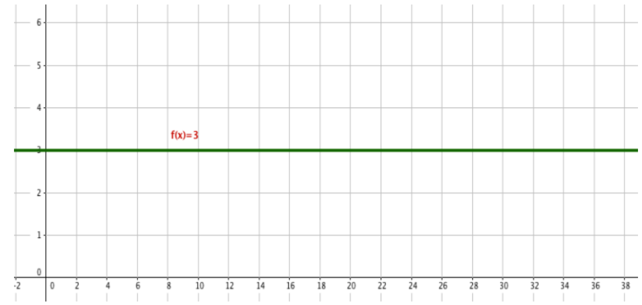


Figura 1. Gráfica de la función f(x)=3.

1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o para obtener una aproximación de la primera integral de la función *f(x)= 3* cuya función llamaremos *B(x)*, necesitamos dar un valor inicial por ejemplo *B(0)=-5*, y sumando la función *f(x)*, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:
Cuando *x* vale 0 (valor inicial), *B(0)=-5*, después incrementando en una unidad a *x, x=1*, *B(0)* se incrementa en *3* unidades (porque *f(x)=3*) obteniéndose que *B(1)= -5+3=-2*. Incrementando a *x* en *1* unidad, *x=2*, *B(1)* se incrementa en *3* unidades, *B(2)=B(1)+3=-2+3=1* y así sucesivamente. En la tabla 1 se ven los resultados para *x* desde *0* a *10*.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
f(x)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Tabla 1. Tabla de valores de B(x) y f(x).

Tomando 2 puntos para calcular la expresión algebraica de la función *B(x)* se encuentra que la función representa a la recta *B(x)= 3x-5*. El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente como sigue:

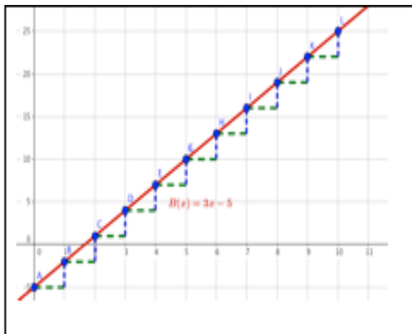


Figura 2. Tratamiento de la Primer Acumulación

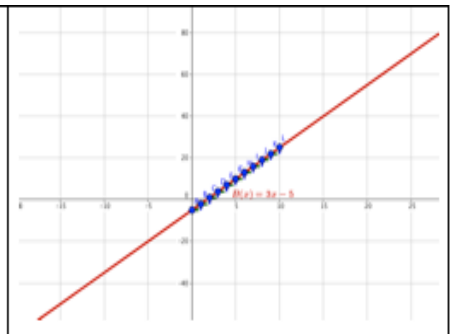


Figura 3. Comportamiento de la función lineal *B*(*x*).

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de *B(x)*, construyamos la segunda acumulación, que llamaremos *C(x)*. Para esto, se necesita dar un valor inicial *C(0)=-3*. Se procede a elaborar la tabla 2 del modo siguiente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60	82
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	

Tabla 2. Tabla de valores de C(x) y B(x).

Con la condición inicial y la suma de la función de la *B(x)*, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$.Tomando tres puntos para calcular la expresión algebraica y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene que los parámetros son $a_2=\frac{3}{2}$ $a_1=\frac{13}{2}$ $a_0=-3$, por lo expresión algebrica de la función es $C(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{2}x-3$. El proceso para obtener la segunda acumulación, se puede observar en la gráfica siguiente:

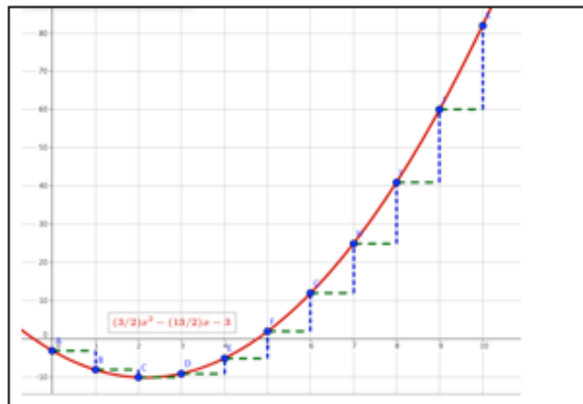


Figura 4. Esta gráfica muestra solo parte de la función C(x),

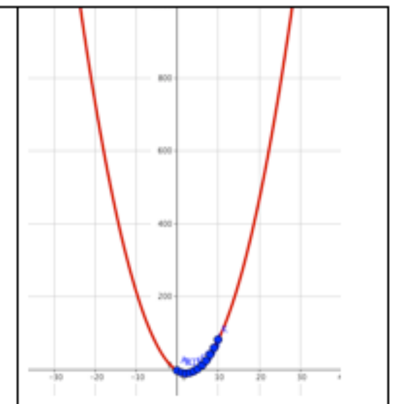


Figura 5. Gráfica para otros valores de x.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de *C(x)*, construyamos la tercera acumulación, que llamaremos *D(x)*. Primeramente se da un valor inicial *D(0)=-1* y se elabora la tabla 3 de acumulaciones:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	-1	-4	-12	-22	-31	-36	-34	-22	3	44	104
C(x)	-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60	

Tabla 3. Tabla de valores de D(x) y C(x).

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma, se construye la nueva función *D(x)*, que en este caso es de tercer grado y es de la forma $D(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, para encontrar los valores de los coeficientes se toman 4 puntos y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se encuentra que valen $a_3=\frac{1}{2};a_2=-4;a_1=\frac{1}{2};a_0=-1$, por lo que la expresión algebraica de la función es: $D(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-1$. En la siguiente gráfica se observa el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

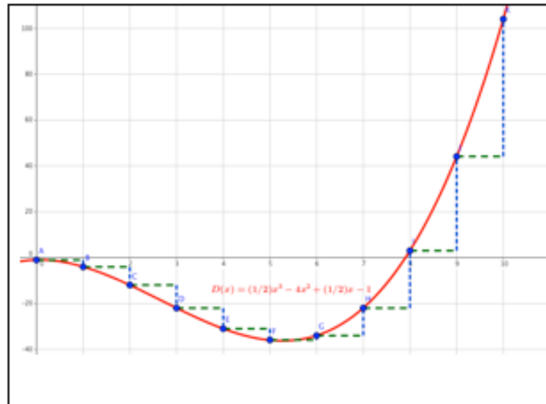


Figura 6. Se muestra el intervalo [0,10] cuando $\Delta = 1$.

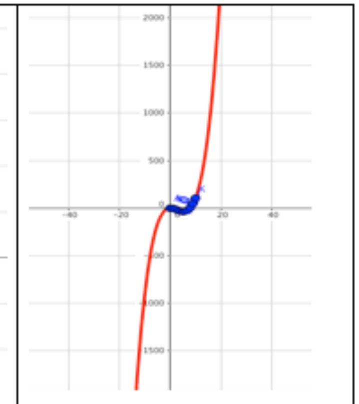


Figura 7. Gráfica de la curva *D(x)*

En la siguiente tabla, se hace una comparación de las acumulaciones obtenidas para la función polinomial y sus respectivas integrales.

$f(x)=3$		
1ª acumulación	$3x-5$	$\int 3dx = 3x + c_1$
2ª acumulación	$\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{2}x-3$	$\int (3x+c_1)dx = \frac{3}{2}x^2+c_1x+c_2$
3ª acumulación	$\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-1$	$\int \left(\frac{3}{2}x^2+c_1x+c_2\right)dx = \frac{1}{2}x^3+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$

Tabla 4. Comparación de las funciones

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Observaciones:

- Se puede observar que en efecto, la 1ª, 2ª y 3ª acumulación se aproximan a la 1ª, 2ª y 3ª integral de *f(x)=3*, respectivamente.
- En cada acumulación, los coeficientes del coeficiente mayor, son los mismos que de los coeficientes del coeficiente de las integrales respectivas. Es decir, en la 1ª acumulación, el valor del coeficiente término de primer grado es 3 para los 2.
- En la 2ª acumulación, el valor del coeficiente del término de segundo grado es; y En la 3ª acumulación, el valor del coeficiente del término de tercer grado es.
- En la tabla se observa que el término constante de cada función acumulación es la condición inicial de que partimos.

CASOII: ACUMULACIONES DE UNA FUNCIÓN NO POLINOMIAL

Se obtienen las sumas en una Función no polinomial por ejemplo $f(x)=\sqrt{x+1}$ cuando el incremento de *x* es .
Partiendo de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ cuando el incremento es .
En la figura de abajo se puede apreciar la tabla 5 de valores de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	3.31

Tabla 5. Valores de la función f(x).

La función $f(x)=\sqrt{x+1}$, se puede ver graficada para algunos puntos en la siguiente figura 8.

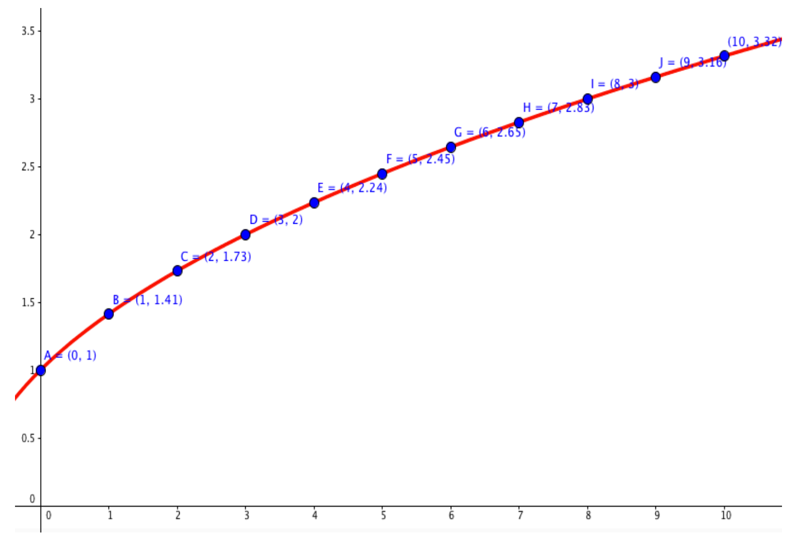


Figura 8. Gráfica de la función f(x).

Construcción de la 1ª, 2ª y 3ª acumulación.

1ª acumulación.

Para calcular la función de la primera acumulación que se llamará *B(x)* y que es una aproximación de la primera integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, primero se da un valor

inicial por ejemplo y sumando los valores de la función f(x) se obtienen los valores de la primera acumulación de la siguiente manera:
Cuando *x* vale *0* (valor inicial), *B(0)=0.5* (es el valor inicial), después incrementado en una unidad las *x*, *x=1*, por lo que *B(0)* se incrementa en el valor de *f(0)*, el siguiente punto *B(1)* es igual a *B(1)=B(0)+f(0)*; incrementando a *x* en una unidad, *x=2*, por lo que *B(2)=B(1)+f(1)=* y así sucesivamente como se muestra en la tabla 6.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	22.93
f(x)	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	

Tabla 6. Valores de la funciones B(x) y f(x).

En la siguiente figura se pueden ver graficados algunos puntos de la 1ª acumulación, así como el comportamiento general de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$; también se ha graficado la 1ª integral de la función que es: $R(x)=\int\sqrt{x+1}\,d_x=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}$.

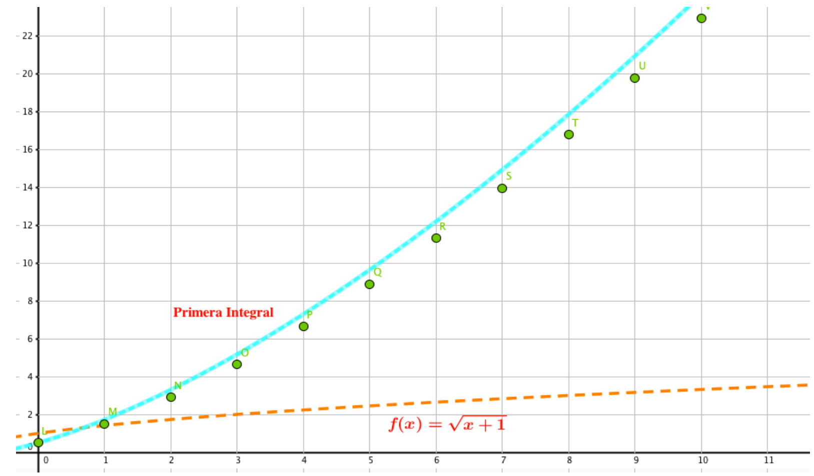


Figura 9. Gráfica de la función f(x), B(x) y R(x)

2ª acumulación.
Para obtener la segunda acumulación o en este caso, una aproximación de la segunda integral de *f(x)*, utilizando la función acumulación *B(x)*, se forma la segunda acumulación, que llamaremos *C(x)*, de la siguiente manera: Se da un valor inicial arbitrario, por ejemplo *C(0)=1*. Se incrementa en una unidad a la *x*, llegando a *x=1*, para obtener *C(1)* se realiza *C(1)= C(0)+B(0)*. Para *x=2*, incrementamos *C(1)* en *B(1)* unidades: *C(2)= C(1)+B(1)*. Y así sucesivamente, como se puede apreciar en la tabla *7*.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	87.86
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	

Tabla 7. Valores de la funciones C(x) y B(x).

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la 2ª acumulación y de cómo se aproximan a la 2ª integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, que es *R(x)*, la cual algebraicamente se expresa cómo: $M(x)=\int R(x)d_x=\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6}x+\frac{11}{15}$.

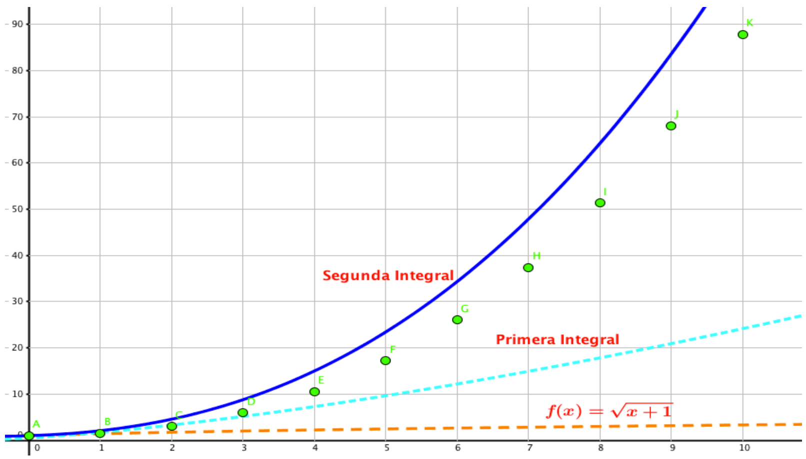


Figura 10. Gráfica de la función f(x), R(x), C(x) y M(x)

3ª acumulación.

Para obtener la tercera acumulación o en este caso, una aproximación de la tercera integral de *f(x)*, utilizando la función acumulación *C(x)*, se forma la tercera acumulación, que llamaremos *D(x)*, primeramente dar un valor inicial arbitrario por ejemplo *D(0)=1.5*, realizamos las sumas *D(1)=D(0)+C(0) =1.5+1=2.5; D(2)=D(1)+C(1)=2.5+1.5=4* y así sucesivamente como se puede apreciar en la tabla 8.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	1.5	2.5	4	7	12.91	23.46	40.65	66.71	104.08	155.4	223.49
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	

Tabla 8. Valores de la funciones C(x) y D(x).

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la función resultante de la 3ª acumulación *D(x)* y como se aproximan a la 3ª integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ que se llamará *P(x)*, la cual algebraicamente se expresa cómo: $P(x)=\int M(x)d_x=\frac{8}{105}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{12}x^2+\frac{11}{15}x+\frac{299}{210}$.

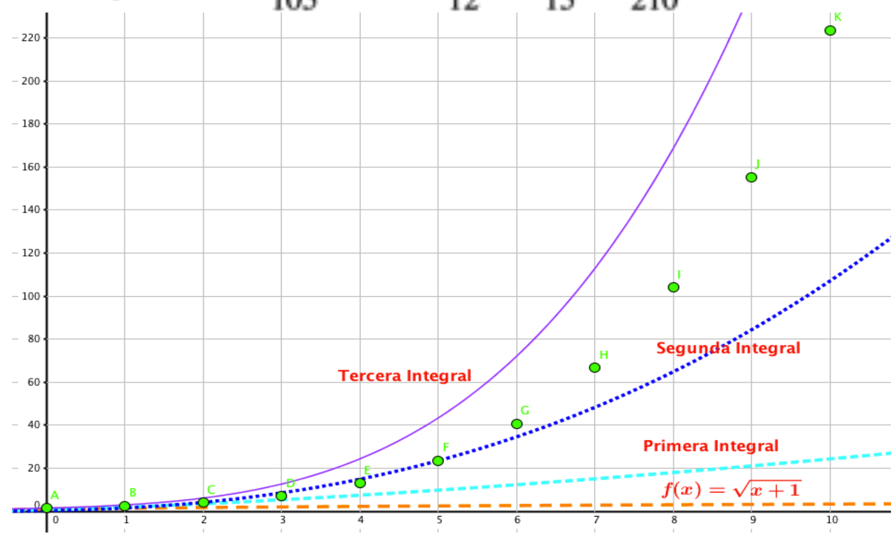


Figura 11. Gráfica de la función f(x), R(x), M(x), D(x) y P(x).

Posteriormente se puede utilizar una herramienta como Geogebra para encontrar la expresión algebraica asociada a las funciones *B(x)*, *C(x)* y *D(x)* a través del ajuste de curvas. Se puede observar que este método da una buena aproximación a la integral. Ahora bien repitiendo los pasos anteriores pero con lo que se obtiene es una mejor aproximación a las correspondientes funciones integrales.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESAMIENTO COGNITIVO QUE SE ESPERA EN LOS ESTUDIANTES

Con esta propuesta se espera que los estudiantes realicen, de forma iterada los 5 pasos del procesamiento cognitivo que se describen a continuación:

- En un primer paso, realizaron el *tratamiento aritmético* (con acciones cognitivas de forma interna al Registro Numérico) para identificar significados de las acumulaciones con la orientación del profesor.
- En un segundo paso, realizaron la *conversión entre el registro numérico y el registro geométrico* a través del potencial que ofrece el ajuste de datos con funciones en Geogebra.
- En tercer paso, realizaron un *tratamiento figural* (con acciones cognitivas hacia el interior del Registro Geométrico) para identificar el comportamiento gráfico de la función de ajuste en Geogebra.
- Como un cuarto paso, se identifica *la conversión entre el registro geométrico y el registro algebraico* que brinda el Geogebra.
- En el quinto paso realizaron un *tratamiento algebraico*, (interno al Registro Algebraico), para identificar la relación existente entre la función real y la función que corresponde a la integral de la misma.

Para obtener la segunda y tercer integral de la función, se realizaron de forma iterada los 5 pasos descritos. De esta forma, se propició la actividad de coordinación de registros semióticos para la aprehensión del concepto de la integral de la función.

CONCLUSIONES

La investigación educativa presente, permitió observar que el proceso de acumulación, y los procesos de acumulación-ajuste, son una buena manera de aproximar a la integral. Si en un curso introductorio de Cálculo Integral, se les explicara este método para aproximarse numéricamente a la integral, se promovería el conocimiento de lo que realmente es "la integral".

Aunque es algo tedioso estar haciendo tablas y en este caso, encontrar una función "explícita" de la función acumulación, como en el caso de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, se puede ver que el hacer esto nos da un acercamiento numérico que pueda permitir al estudiante entender ideas básicas de conceptos del Cálculo Integral.

El presente acercamiento numérico, se constituye en una alternativa que toma en cuenta aspectos cognitivos que permitan la conceptualización y apropiación de la integral como función de acumulación, a fin de propiciar la construcción del significado de la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Cortés, C. (2012). Construyendo funciones derivadas. Revista UNION. Marzo de 2012, Número 29, páginas 23-34 ISSN: 1815-0640. España.

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Antología en Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myriam Vega Restrepo (1ª ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, 41-76.

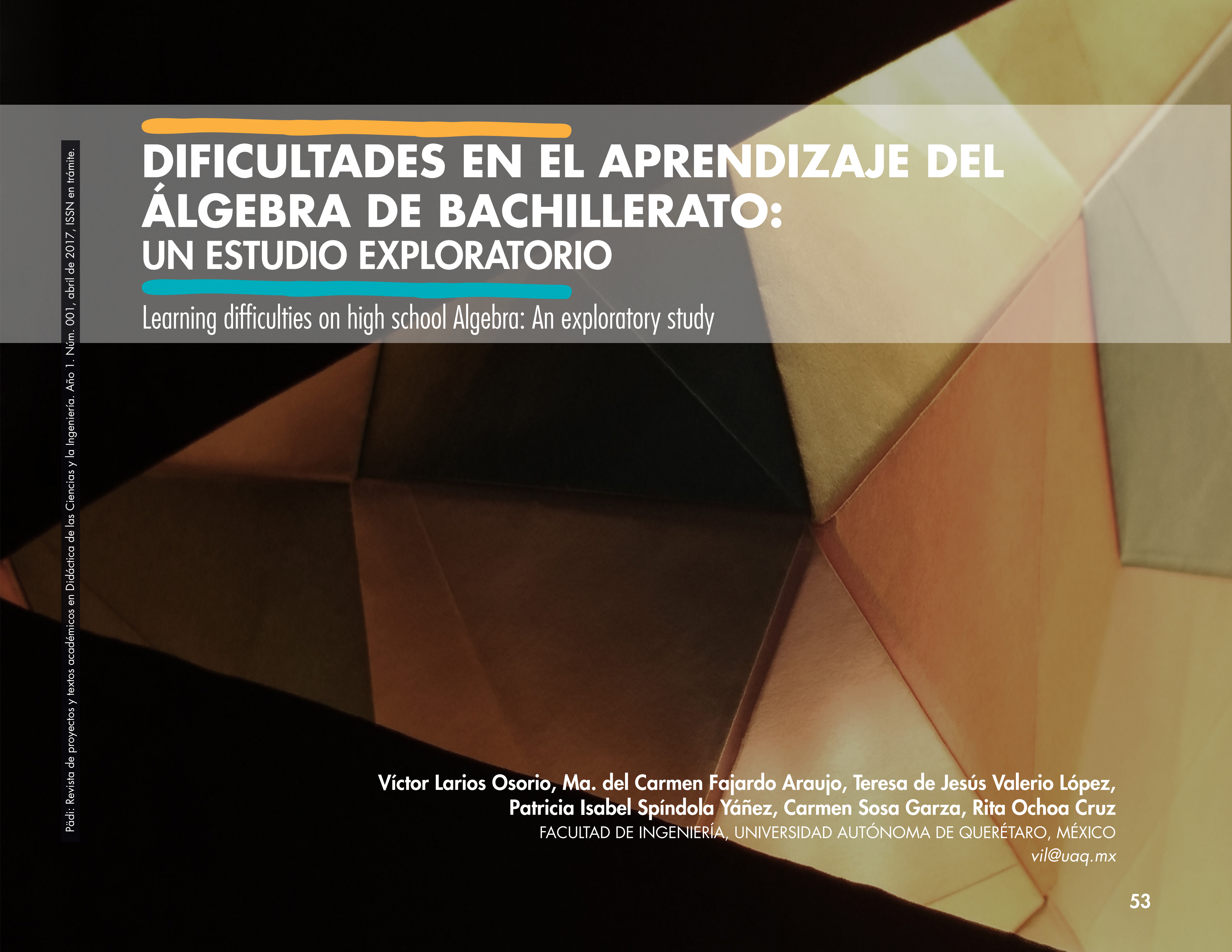
Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. En Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5-53.Eisenber y Dreyfus (1966). On visual versus analytical thinking in mathematics. PME-10 congress (1966). London pp. 153-158)

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. Mathematics Teacher 100 (9), 597-604.

Hitt. F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Memorias del IV Simposio sobre Investigación en Matemática Educativa 1992.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(2), 131- 170.

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp.117-131). Washington D.C.: Mathematical Association of America



DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA DE BACHILLERATO:
UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Learning difficulties on high school Algebra: An exploratory study

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Víctor Larios Osorio, Ma. del Carmen Fajardo Araujo, Teresa de Jesús Valerio López, Patricia Isabel Spíndola Yáñez, Carmen Sosa Garza, Rita Ochoa Cruz
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
vil@uaq.mx

RESUMEN

El Álgebra en bachillerato en México (15 a 18 años) es el área de las Matemáticas que es prácticamente la base de los cursos posteriores, por lo que los problemas que tengan los alumnos durante su aprendizaje se verán reflejados en su desarrollo académico posterior (Geometría Analítica, Trigonometría, Cálculo, Probabilidad y Estadística). Es por ello que en el contexto específico de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) se ha querido indagar sobre los problemas en su aprendizaje. Este trabajo presenta los primeros resultados de un proyecto al seno de la institución orientado en este sentido. En este proyecto se hizo un estudio muestral que tomó en cuenta aspectos semióticos, el uso del Álgebra como herramienta para resolver problemas y sobre las justificaciones que los alumnos formulan para sustentar sus respuestas. Se observó la necesidad de que los alumnos le den sentido a las representaciones y a los objetos algebraicos, para que el Álgebra se convierta en una herramienta.

Palabras clave: Álgebra en bachillerato, justificaciones y argumentaciones, representaciones semióticas.

ABSTRACT

The high school Algebra in Mexico (15-18 years old students) is a basic mathematic curse, fundamental for de subsequent math courses. This means that every problem students have when they learn Algebra will be reflected in their academic development (Analytic Geometry, Trigonometry, Calculus, Probability and Statistics). That is why we are interested to research about the learning problems in Algebra at the specific context of the Bachelors' School of the Autonomous University of Querétaro (UAQ). This paper presents the first results of one project inside the institution oriented in this direction. In this project a sample of students was taken and a quiz has been applied to the students asking about semiotic aspects, use of Algebra as a tool to solve problems, and students' justifications to support their answers. We observed the students' need to give meaning to representations and to algebraic objects, in order to Algebra becomes a tool and no to be just a collection of algorithmic processes that must be memorized.

Keywords: High school Algebra, justifications and argumentations, semiotic representations.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las Matemáticas tiene dificultades por muy diversas razones, algunas de las cuales están determinadas por las dificultades en el aprendizaje. En la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) se ha estado planteando la necesidad de considerar al aprendizaje como fuente para identificar problemas en la enseñanza.

Para ello se han realizado varios proyectos de investigación, como es el caso del proyecto "La interacción maestro-alumno en las clases de Matemáticas en el Estado de Querétaro" (2010-2012), en el cual se realizó un estudio descriptivo de las prácticas de profesores de Matemáticas en el Estado de Querétaro en los niveles educativos de la Primaria, la Secundaria y el Bachillerato. Algunas de las conclusiones fueron referentes al nivel bachillerato en todo el Estado (Larios y Díaz Barriga, 2013, pág. 187 y ss.) y entre éstas se incluye el cambio en la "típica" dinámica de las clases de acuerdo con los enfoques que se plantean en el Sistema Nacional de Bachillerato y que buscan el aprendizaje por medio de actividades que están centradas en el desarrollo de los alumnos y de un trabajo con los objetos matemáticos.

También se desarrolló el proyecto "El proceso de justificar y el pensamiento reflexivo en alumnos del nivel medio" (2012-2014). En este proyecto se ha observado que los alumnos del nivel medio pueden argumentar matemática de manera progresiva y adecuada al considerar actividades diseñadas con una finalidad específica y que consideran un esquema que tenga la reflexión como base (Arellano, 2013; Avilés, 2014). Estas actividades estaban asociadas a conceptos que se incluyen en los currículos oficiales, pero se le dio más énfasis a procesos como la observación, la argumentación y la experimentación.

Con estos esfuerzos se ha ido acotando el campo de estudio hacia el aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (EB UAQ), para así proponer líneas de trabajo en la enseñanza. Este interés se considera justificado por dos razones:

Por una parte, si se considera un enfoque sociocultural, sabemos que el contexto social y escolar influyen los procesos de aprendizaje. Como menciona Valero (2012, pág. 190), "numerosas investigaciones han mostrado cómo la interacción social en el aula puede ser un factor determinante en el desarrollo de competencias matemáticas por parte de los estudiantes. La manera como los estudiantes pueden llegar a tener competencia sobre cualquier noción depende de cómo se desarrolla una cadena de actividades e intercambios en la que el maestro y estudiantes negocian el significado de tal noción."

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Es por estas razones que se ha realizado un proyecto para estudiar la problemática del aprendizaje del Álgebra en el contexto particular de la institución. Lo cual permitirá plantear las bases para el diseño de estrategias o acciones específicas en varios niveles que irían desde la práctica docente, en el aula y hasta el nivel curricular.

Tanto el proyecto, como los resultados que se han obtenido, se describen a continuación.

ANTECEDENTES Y EL PROYECTO

En Martínez, Rojas y Villanueva (2015) se describe una experiencia realizada con alumnos del bachillerato de la UAQ a partir de talleres intensivos de regularización. En esta experiencia se consideraron los cursos relativos al Álgebra, la Geometría Analítica y el Cálculo (Diferencial e Integral). Las autoras detectaron como principales problemas para el aprendizaje lo siguiente en cada uno de los cursos (págs. 239-240):

Cursos	Álgebra	Geometría Analítica	Cálculo
Temática con dificultades:	Multiplicaciones, uso de signos (positivo y negativo), signos de agrupación, factorización, simbología y conjuntos de números.	Despejes y uso de signos.	Leyes de los exponentes, multiplicación algebraica y factorización.

Es notorio que entre estas dificultades no aparecen referencias a representaciones gráficas, sino a operaciones aritméticas y algebraicas, así como a representaciones de éste último tipo.

En este sentido afirman:

> "Para los alumnos entender el lenguaje matemático fue algo complicado, pues están acostumbrados a expresar sus ideas en un lenguaje cotidiano y no en uno abstracto, en específico en Álgebra en el tema de conjuntos." (pág. 240)

En 2008 el Departamento de Educación de los EEUU presentó *The final report of the National Mathematics Advisory Panel* (NMAP, 2008) en el cual participaron veinticuatro instituciones de ese país. Entre los comentarios que aparecen está el siguiente:

> "Aunque nuestros estudiantes encuentran dificultades con muchos aspectos de matemáticas, la mayoría de los que están involucrados con las políticas educacionales, ven el desempeño en Álgebra como una preocupación central. [...] Éstas son preguntas con grandes consecuencias, pues se ha demostrado que el curso de Álgebra es la puerta para lograr mejores resultados en el futuro del estudiante. Los estudiantes necesitan este curso para poder cursar cursos de matemáticas más avanzadas en sus siguientes etapas educativas; más aún, investigaciones demuestran que el cursar aprobatoriamente el curso de Álgebra II está

relacionado de manera significativa con el éxito que los estudiantes tienen en la etapa de educación superior, y con los ingresos que recibirán al obtener un trabajo. De hecho, **los estudiantes que terminan satisfactoriamente el curso de Álgebra II tienen más del doble de posibilidades de graduarse de la licenciatura que aquéllos que tienen menor preparación matemática."** (2008, pág. xiii)

Todo este interés resulta particularmente relevante si consideramos que el Bachillerato en la UAQ está orientado al aprendizaje final de dos áreas matemáticas: Cálculo y Estadística. Para ello existe una serie de cursos que consideran un año de Álgebra, después Geometría y Trigonometría, tras ello Geometría Analítica y, finalmente en el tercer año, los dos cursos mencionados. En otras palabras, y a pesar de que no existe una seriación legal entre los cursos de Matemáticas, pues se considera que un curso posterior puede ayudar a un alumno a superar sus dificultades de cursos anteriores, si se tienen problemas en el curso de Álgebra del primero año es posible que los alumnos tengan problemas en la comprensión de los siguientes cursos que tienen una fuerte carga de uso del lenguaje algebraico.

Martínez, Rojas y Villanueva, en el mismo trabajo que ya se mencionó afirman:

> "En la asignatura de Cálculo los alumnos llegan con deficiencias algebraicas y estas no permiten la comprensión de los nuevos conceptos de la materia, haciendo de ella una de las menos aceptadas por los alumnos, ya que hace uso de casi todas las asignaturas impartidas con anterioridad en su paso por el bachillerato." (pág. 241)

Este tipo de situaciones han llevado a plantear un proyecto exploratorio que proporcione información inicial para el diagnóstico de la situación del aprendizaje en la Escuela de Bachilleres de la UAQ y que a continuación se ampliará.

DESARROLLO

a. La muestra

Dado que el proyecto fue pensado para indagar de manera exploratoria sobre las dificultades sobre Álgebra de los alumnos se consideró la posibilidad de hacer un estudio cuantitativo tomando una muestra que resultase hasta cierto punto representativa en los dos principales planteles de la institución y que además se encuentran en la zona metropolitana de la ciudad de Querétaro, capital del Estado homónimo y sede de la UAQ. Estos planteles (conocidos por "Sur" y "Norte" por su ubicación geográfica) agrupan a poco más de 4,100 estudiantes que representan la mayor parte de la población estudiantil de la institución (el 71.2% de los poco más de 5,800 alumnos que atiende en total en sus siete planteles repartidos en el Estado).

Con base en lo anterior se seleccionó una muestra aleatoria de manera estratificada, tomando de cada grupo una cantidad fija de alumnos dependiendo del grado, el turno y el plantel, ya que se contó con el apoyo de las autoridades de la institución y se tuvo acceso a las listas de los grupos. A los alumnos seleccionados se les invitó a participar y se les aplicó un "examen diagnóstico" tipo encuesta que constó de diez reactivos de diferente tipo y que se ampliará enseguida. En total se aplicaron 373 "exámenes diagnóstico" a igual cantidad de alumnos de los dos planteles mencionados.

b. El instrumento

El instrumento para la recolección de la información fue un examen diagnóstico de diez reactivos, algunos de opción múltiple y otros para respuestas abiertas, que tenían diversas orientaciones. En este trabajo sólo mencionaremos los reactivos que estuvieron orientados al estudio de:

- El uso o desuso de modelos algebraicos para resolver planteamientos.
- El sentido de los signos algebraicos.
- El uso de tipos argumentos para justificar las respuestas.
- El uso de diversos registros semióticos de representación (gráfico y algebraico).

En este sentido se irán considerando los reactivos utilizados de acuerdo a la temática recién mencionada.

La aplicación duró, en todos los casos, a lo mucho una hora y fue durante su jornada normal de clases y en sus respectivos planteles. Los alumnos que asistieron estuvieron en salones normales (con butacas) y no utilizaron calculadoras (no se les pidió, ni se les prohibió). Estuvieron organizados por el grado académico.

Dado el tamaño de la muestra y el compromiso de respetar los datos personales de los alumnos participantes, no se les dio un seguimiento posterior. No obstante, uno de los propósitos de estos resultados es que sirvan de base para un estudio posterior en la misma Escuela de Bachilleres.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

c. Uso o desuso de modelos algebraicos para resolver planteamientos

Dos de los reactivos del instrumento fueron pensados para este rubro, pues se esperaba que los alumnos utilizaran en alguna medida el Álgebra como medio (herramienta) para resolver una situación planteada. Los reactivos son:

3. Un auto inició un viaje con el tanque lleno y cuando se detuvo en una gasolinera había consumido $\frac{7}{8}$ de su capacidad. Cargó sólo 38 litros y entonces el medidor marcó $\frac{3}{5}$ partes del tanque. ¿Cuál es la capacidad del tanque? Describe todo el desarrollo y la respuesta.

8. ¿De qué número 78 es el 150%? Escribe todo el procedimiento que hagas.

En el primer caso (reactivo 3) se esperaba que los alumnos realizaran un desarrollo algebraico similar a lo siguiente:

$$\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$$

$$38 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{8}\right)x = \frac{24-5}{40}x = \frac{19}{40}x$$

$$x = \frac{40 \cdot 38}{19} = \frac{40 \cdot 19 \cdot 2}{19} = 40 \cdot 2 = 80$$

Así que la capacidad del tanque de combustible es de 80 litros, pues así el automóvil inició su viaje con el tanque lleno y en la primera parte se gastó $\frac{7}{8}$ del tanque, es decir 70 litros. En la gasolinera cargó 38 litros y así el tanque tuvo 48 litros, que son $\frac{3}{5}$ del tanque.

En el caso del reactivo 8 lo que se esperaba que los alumnos pudiesen plantear (y resolver) una ecuación como la siguiente:

$$1.5x = 78$$

$$x = \frac{78}{1.5} = 52$$

Es decir, que la respuesta buscada es 52.

Como se puede observar los dos reactivos tienen diferente nivel de dificultad en términos de la necesidad de plantear un modelo algebraico como herramienta para resolverlos. Mientras que en el primero podría ser más útil aplicar técnicas algebraicas, en el segundo podría resultar superfluo. Sin embargo la idea era ver qué tanto los alumnos utilizaban Álgebra, si tenían preferencia. En este sentido también es importante mencionar que se contabilizó la cantidad de alumnos que dieron la respuesta correcta independientemente si utilizaron estrategias aritméticas o algebraicas, pero también se consideró la situación en que los alumnos plantearon ecuaciones "incorrectas" o que manipularon erróneamente las expresiones planteadas pues una situación es resolver un problema y otra tratar de hacerlo con una cierta herramienta que puede estar disponible.

En otras investigaciones se han hecho categorizaciones para estudios parecidos, como el de Frost (2015, pág. 3) que plantea las siguientes categorías para las respuestas:

1. "Correcto — La estrategia de solución es válida matemáticamente y el conjunto solución fue declarado explícitamente.
2. "Conjunto solución ausente — La estrategia de solución es válida matemáticamente, pero no es proporcionado el conjunto solución.
3. "Conjunto solución incorrecto — La estrategia de solución es válida matemáticamente, pero el conjunto solución dado es incorrecto.
4. "Error algebraico/aritmético — Un error algebraico o aritmético ocurre. Típicamente este error cambió tanto la naturaleza del problema como del conjunto solución.
5. "Inserción de símbolos literales — Un símbolo literal fue insertado artificialmente en algún punto de la respuesta escrita.
6. "Otro — Esta categoría incluye respuestas en blanco, 'no sé', etc."

Sin embargo después de revisar las repuestas de los alumnos para nuestro trabajo y considerando que, por ejemplo, la categorización anterior se planteó para estudiar la resolución de ecuaciones y desigualdades mas no para resolver planteamientos, se propuso la siguiente categorización:

Categoría	**Subcategoría**
Se plantea un modelo algebraico (correcto o no)	Manipula correctamente las literales y resuelve correctamente
	Lo resuelve parcialmente con la manipulación algebraica
	No utiliza el modelo algebraico para resolver
	Utiliza estrategias aritméticas
	No resuelve
Introduce algunas literales	Hace alguna manipulación con las literales, pero utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No manipula las literales, pero utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No resuelve
No utiliza literales	Utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No resuelve
No lo resuelve	

Es importante mencionar que la última categoría incluye la ausencia de respuestas o respuestas del tipo "no sé" en las que se indique no hubo intento por resolver la situación.

Ahora bien, en cuanto al reactivo 3 resultó que sólo 25 alumnos (el 6.7%) lo resolvieron correctamente. Esta cantidad es realmente baja, pero sólo cinco de ellos (1.3% del total) utilizaron un planteamiento algebraico y el resto (20 alumnos) utilizaron estrategias puramente aritméticas. Es interesante ver que otros tres alumnos (0.8% del total) plantearon bien la ecuación, pero incurrieron en errores en la manipulación algebraica (ver la Ilustración 1 en la que el alumno termina resolviendo una ecuación cuadrática).

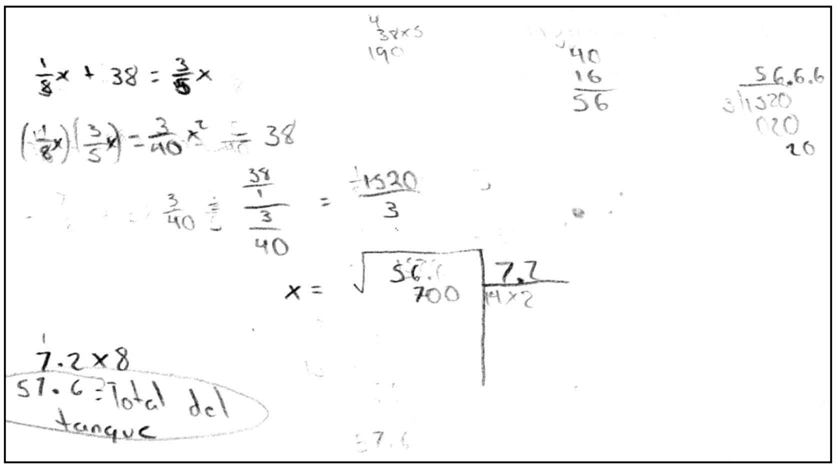


Ilustración 1. Ejemplo de respuesta de un alumno de segundo año (alumno Nm-3-006).

Ahora bien, con la intención de mirar el uso de estrategias algebraicas se tuvo que de los 273 alumnos que contestaron el reactivo (correcta o incorrectamente) 233 utilizaron (el 62.5%) estrategias aritméticas, hubiesen o no incluido el uso de símbolos algebraicos. Además, este porcentaje se mantiene más o menos constante en los distintos grados de la escuela (64% para primer año, 59% para segundo y 64% para tercero), lo que muestra un cierta preferencia en el tipo de estrategias independientemente del avance escolar.

Resultó que, de hecho, 222 alumnos (el 59.5%) no utilizaron en absoluto símbolos o estrategias algebraicas. Si consideramos estos datos se tiene que sólo el 14.65% de los estudiantes utilizaron estrategias algebraicas (correctas o no) para resolver este planteamiento.

Por otro lado, en el caso del reactivo 8 se tuvieron datos todavía más cargados hacia las estrategias aritméticas. 255 alumnos (el 68.4% de los alumnos participantes y 96.6% de los alumnos que contestaron el reactivo) utilizaron estrategias puramente aritméticas. Sólo ocho alumnos en total utilizaron estrategias algebraicas con mayor o menor éxito:

La cantidad de alumnos que utilizaron estrategias algebraicas en los tres niveles de la escuela prácticamente no cambiaron: un alumno de primer año, dos de segundo y cuatro de tercero. Proporcionalmente la diferencia es inapreciable y se puede decir que la preferencia en el uso de las estrategias aritméticas se mantiene a lo largo del bachillerato (66% al 71%).

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Una de las estrategias más utilizadas para resolver este planteamiento fue la llamada "regla de tres". 118 alumnos (casi la tercera parte) lo utilizan para abordar la situación (incluso con estrategias algebraicas), aunque a veces de manera errónea.

Uno de los casos erróneos es cuando se considera el dato original (78) no como el 150%, sino el 100%, y entonces el alumno lo que busca es el 150% y obtiene 117 como resultado. En este sentido sí se notó un cambio en el proceso de control a lo largo del desarrollo académico, pues el 15.63% de los alumnos del primer año hicieron esto, el 9.6% de los alumnos del segundo año lo hicieron y el porcentaje disminuyó al 2.5% para los alumnos del tercer año.

Como se mencionó unos párrafos más arriba, este reactivo puede ser resuelto más fácilmente utilizando estrategias puramente aritméticas que el anterior y, de hecho, el uso de la incógnita (una x por lo general) pareciera que es para señalar dónde está el dato que se busca en la regla de tres, pero no para hacer manipulaciones algebraicas (ver, por ejemplo, la siguiente ilustración).

$$\left(\frac{78}{150\%}\right)\left(\frac{100\%}{x}\right) = \frac{7800}{150} = 52 \text{ es el } 100\%,\ 78 \text{ es el } 150\%$$

Ilustración 2. Ejemplo del uso de la incógnita para señalar el dato buscado, pero no para utilizarlo como parte de un estrategia algebraica (alumno Sm-6-001).

b. El sentido de los signos algebraicos

Para revisar este aspecto se consideraron varios de los reactivos diseñados, a saber el reactivo 1, el reactivo 3 (ya mencionado), el reactivo 7 y el reactivo 8 (ya mencionado también).

El primer reactivo del instrumento fue de opción múltiple y es el siguiente:

1. Selecciona el inciso que corresponda a la respuesta que consideres correcta de la siguiente pregunta:

¿Por qué $\sqrt{2}$ no es un número racional?

a) No puede expresarse como el cociente de dos números enteros.

b) Así lo establece la definición de $\sqrt{2}$.

c) No se puede expresar como $\frac{p}{q}$ con p y q enteros, y $q \neq 0$.

d) Eso es falso porque $\sqrt{2}$ es un número racional.

e) Así lo dicen los maestros.

En este caso el énfasis está en el hecho de que las opciones *a* y *c* son prácticamente la misma (la diferencia es que la primer opción no establece la necesidad de que el divisor no sea nulo, pero no se incluyó porque alargaría "sospechosamente" la opción), por lo que fueron consideradas como opciones correctas.

Es interesante observar que prácticamente la mitad de los alumnos (49.87%) seleccionó la opción *a*, mientras que sólo el 10.99% seleccionó la opción *c* (porcentaje incluso menor al 31% que seleccionó la opción *d*, ver la Ilustración 3).

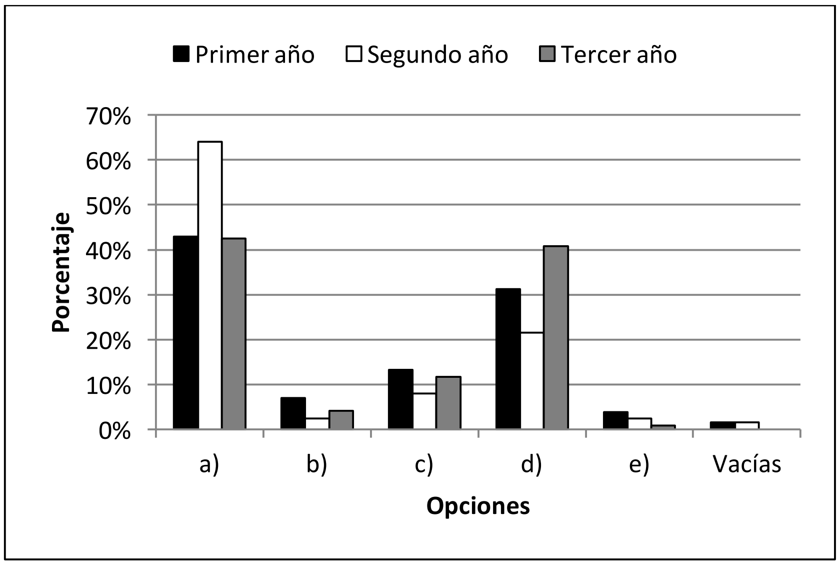


Ilustración 3. Porcentaje de selecciones de opciones del reactivo 1 por año que de bachillerato que cursan los participantes.

Hemos considerado como una posibilidad de que esta diferencia en las preferencias por las opciones *a* y *c* se debe al lenguaje utilizado: mientras que la opción a utiliza un lenguaje coloquial ("natural"), la opción c echa mano de un lenguaje que involucra símbolos algebraicos. Como sabemos, el lenguaje juega un papel clave al funcionar como un mediador entre los objetos matemáticos y el alumno. A este punto de su desarrollo académico los alumnos han tenido mucho más contacto con su lenguaje natural que con el lenguaje algebraico, por lo que explica esta preferencia. Sin embargo, al comparar los porcentajes en la selección de opciones para los tres grados del bachillerato se puede observar en la misma Ilustración 3 que las preferencias por la opción *a* prácticamente no disminuyen y por la opción *c* prácticamente no aumentan.

En cuanto al reactivo 3 se observó, vinculado al uso de estrategias aritméticas, la no utilización de símbolos algebraicos que llevó a algunos alumnos a inconsistencias en la escritura. Un caso notable es el que se muestra a continuación:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

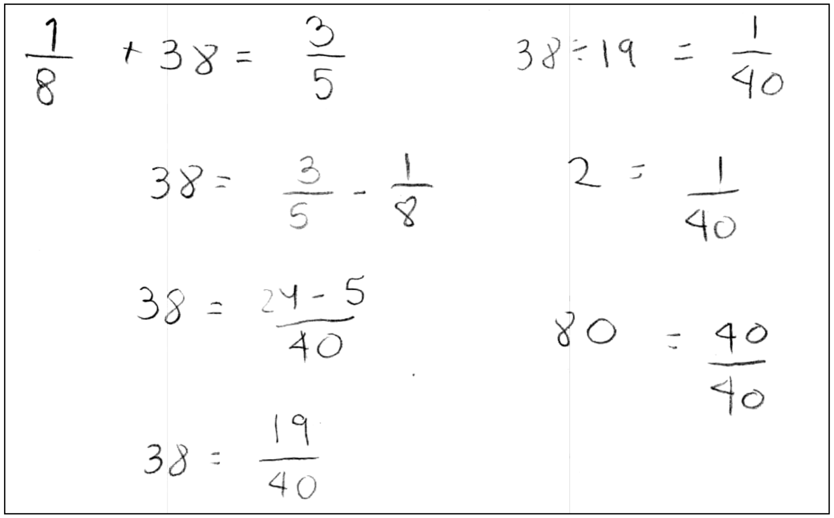


Ilustración 4. Respuestas al reactivo 3 de un alumno del segundo año (Sm-4-023).

Es interesante notar que a primera vista el signo de igualdad no cumple la función que debería desde el punto de vista matemático como relación de equivalencia. Sin embargo lo que ha escrito el alumno y el proceso realizado sería correcto si se le añaden literales en los sitios apropiados:

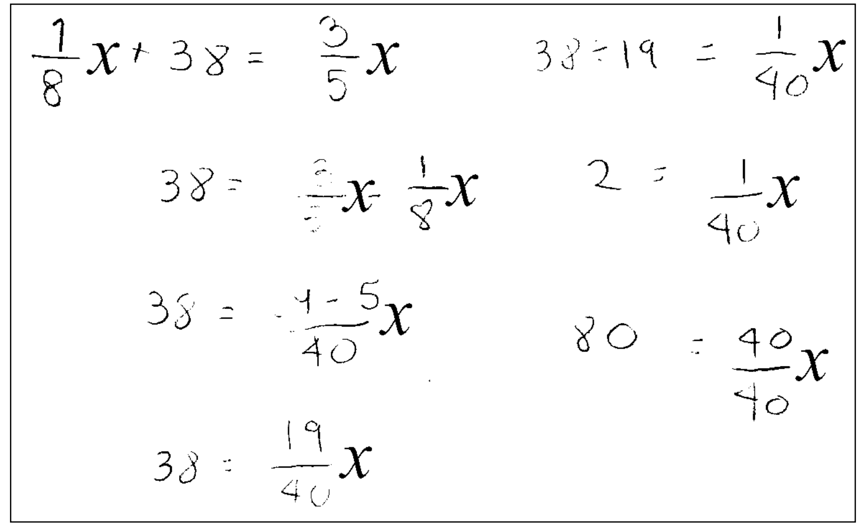


Ilustración 5. Respuesta mostrada en la Ilustración 7 con las literales añadidas.

Esto lleva a suponer que el alumno ha comprendido en alguna medida la situación y ha planteado un modelo que la representa, pero el problema está en el significado de las literales. En otros casos los alumnos han expresado fracciones del tanque igualándolas con cantidad de litros de manera explícita (ver abajo).

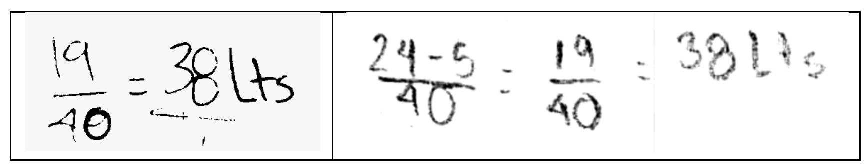


Ilustración 6. Ejemplos de expresiones propuestas por dos alumnos del tercer año (Sv-6-009 y Sm-6-029).

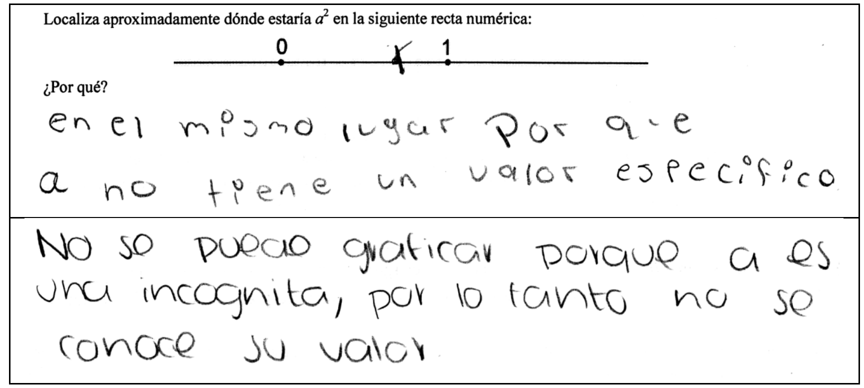
Lo que podemos suponer es que el símbolo "Lts", relacionado con "litros", tiene sentido para los alumnos, mientras que el símbolo "*x*" no tiene sentido para ser relacionado con "partes del tanque" o "fracciones del tanque".

Un caso similar ocurrió con el reactivo 7, el cual establecía lo siguiente:

> **7.** En la recta numérica tienes un número a que está localizado de la siguiente manera:
>
> 0 a 1
>
> Localiza aproximadamente dónde estaría a^2 en la siguiente recta numérica:
>
> 0 1
>
> ¿Por qué?

Lo que se esperaba en este caso era que los alumnos señalaran un punto entre el 0 y la posición de a.

Con respecto a lo que se ha mencionado en los párrafos anteriores algunos alumnos declararon explícitamente que no podían ubicar la posición del punto correspondiente a a^2 porque no se conocía el valor de a (ver Ilustración 7). En otras palabras, es necesario que la literal tenga un valor numérico para poderse manipular como número, de otra manera es un símbolo que hace referencia a algo no numérico.


Localiza aproximadamente dónde estaría a^2 en la siguiente recta numérica:

0 1

¿Por qué?

en el mismo lugar por que a no tiene un valor especifico

No se puedo graficar porque a es una incognita, por lo tanto no se conoce su valor

Ilustración 7. Ejemplos de justificación sobre la posición de a^2 en el reactivo 7 (Sv-2-025 y Sv-6-021, respectivamente).

Aquí es muy importante considerar que, finalmente, los objetos matemáticos los "manipulamos" por medio de representaciones que pertenecen a registros de representaciones semióticas (en el sentido de Duval, 1998), pero los significados que un individuo les atribuye a estas representaciones no necesariamente coinciden con las esperadas. Es por ello que lo que escriben los alumnos carecen de sentido para el lector experto, pero bien podrían tener sentido para el alumno.

También se pueden considerar los planteamientos para resolver el reactivo 8 ya mencionado, donde la expresión "78 es a 150%", en el registro semiótico de la lengua natural, es traducida a "78 = 150%" en el registro semiótico algebraico como si "es a" fuese lo mismo que "=".

En este mismo sentido se debe considerar que el signo "=" tiene dos funciones debido a la homonimia en el uso de los símbolos y que, se ha visto, causa dificultades en su comprensión:

> "La investigación ha mostrado que una concepción errónea común es ver al signo de igual como un signo de entrada-salida, como en cuando tres más cinco produce (es igual a) ocho (Kieran, 1981). En otras palabras, muchos estudiantes tienen una visión operacional del signo de igual. El signo de igual puede ser visto como 'el total' o 'la respuesta' (McNeil y Alibali, 2005). Esta visión operacional puede llevar a errores como contestar 17 cuando se intenta resolver la oración numérica: 8 + 4 = ■ + 5 (E.J. Knuth et al., 2006). Por el contrario, una comprensión relacional del signo de igual reconoce que el signo de igual es un símbolo para la equivalencia matemática; que ambos lados deben balancearse (A.C. Stephens, 2006)." (Frost, 2015, pág. 2)

Esta diferencia entre los dos usos permiten explicar la razón por la que alumnos del tercer año de bachillerato siguen escribiendo "cadenas" de igualdades como la siguiente:

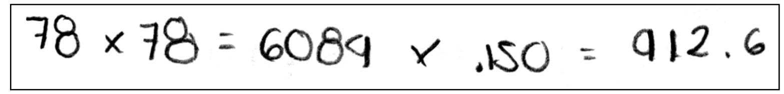


Ilustración 8. Ejemplo de expresión con el uso del signo igual de un alumno de tercer año (Nv-5-017).

c. El uso de diversos registros semióticos de representación

La noción de registro de representación semiótico (Duval, 1998) nos ayuda a identificar las diferentes maneras en que se representan los objetos matemáticos y cómo el individuo hace una manipulación de las representaciones para darle un significado al objeto, pero también para identificar si existe una confusión entre las representaciones o entre las representaciones y los objetos.

A pesar de que el tema de la investigación es sobre Álgebra y se podría pensar que mucho estaría relacionado a representaciones simbólicas ligadas al registro de representación algebraico, nos llamó la atención el uso de otros registros de representación, principalmente el gráfico y el del lenguaje natural.

En lo que respecta al uso de representaciones gráficas los reactivos que hemos tomado en cuenta son

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

dos: el reactivo 3 (ya mencionado desde el inicio) y el reactivo 7 (recién mencionado).

En el primer caso el 9.4% de los alumnos utilizó alguna representación gráfica para ilustrar la situación y ayudarse. En su mayoría son representaciones que provienen de la Escuela Primaria, donde las fracciones se presentan como pasteles rebanados o bien rectángulos divididos en n partes.

Según Otte (2006, pág. 16) "los profesores de Matemáticas muy a menudo no les gustan las representaciones icónicas, creyendo que son confusas y no controlables con respecto a su impacto (…). Esto podría ser tan cierto como esencial, si algo nuevo es aprendido. Los razonamiento matemático y lógico son imposibles sin observación, percepción generación intuitiva de ideas e hipótesis nuevas." Sin embargo, en algunos casos estas representaciones sirvieron como medio para darle sentido a la situación planteada al funcionar como sustitutos de las literales como en el siguiente ejemplo:

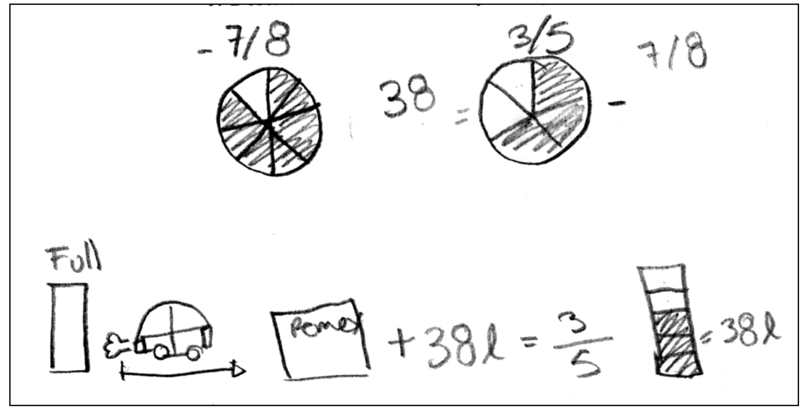


Ilustración 9. Ejemplo donde se sustituye el uso de la incógnita (literal) por una representación gráfica en la respuesta del reactivo 3 (Nv-5-015).

Para el caso del reactivo 7 la cosa es distinta, pues mientras que en el anterior las representaciones gráficas son ayudas, en el caso de este último reactivo es necesario utilizar el registro gráfico porque está incluido en la consigna. Además, se esperaba que echaran mano de otros registros, como el algebraico o el lenguaje natural, para vincularlo con el gráfico. Sin embargo, esto no siempre ocurrió.

Casi dos terceras partes de los alumnos (el 64.6%) sólo utilizaron el registro gráfico mientras que sólo poco más de un quinto (el 21.2%) echaron mano de un registro semiótico simbólico para luego "regresar" al registro gráfico (ver Ilustración 10).

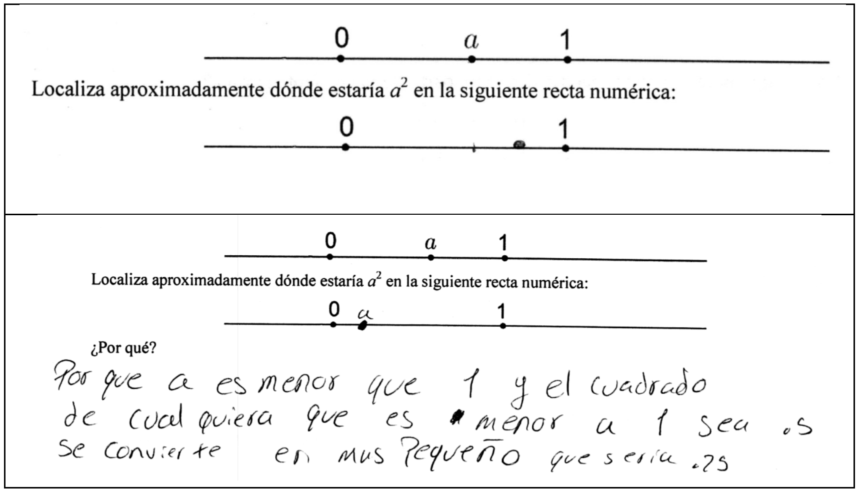


Ilustración 10. Ejemplos de un caso en el que sólo se echa mano del registro gráfico (arriba) y otro en el que el alumno utiliza un registro simbólico y luego regresa al gráfico (Sv-6-020 y Sv-6-024).

Al parecer el uso predominante de este registro de representación gráfico apoya la idea errónea de que el cuadrado de un número (positivo) siempre es mayor que el número (positivo) dado, aunque esto cause un conflicto al momento de pasar de un registro de representación a otro: El 62.2% de los alumnos consideró esto de manera explícita (el 7% del total utilizó incluso representaciones simbólicas e hizo operaciones) y colocó el punto correspondiente a a^2 a la derecha del punto que correspondía a a (ver la Ilustración 10, arriba, e Ilustración 11). Este porcentaje baja conforme avanzan los alumnos en su desarrollo académico, pues así lo hicieron el 78.9% de los alumnos del primer año, 58.4% del segundo año y 48.33% del tercer año, aunque los porcentajes son relativamente altos.

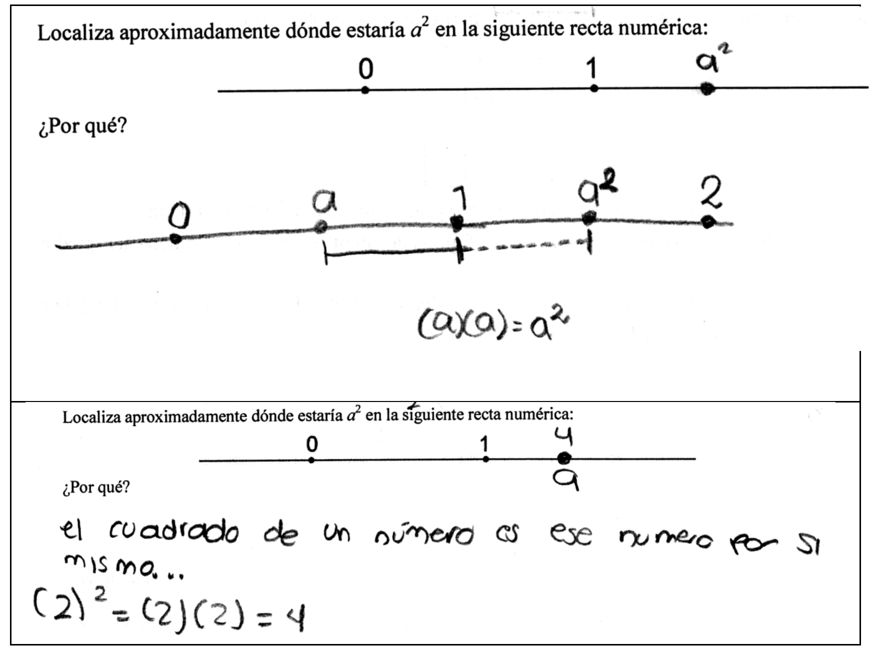


Ilustración 11. Ejemplos donde se aprecia la necesidad de que a^2 sea mayor que a, aunque se utilicen representaciones simbólicas y aunque se resuelva el conflicto echando mano de datos no proporcionados originalmente (Nv-5-015 y Nv-1-043).

Adicional a lo anterior el 38.1% de los alumnos consideró erróneamente que el cuadrado de un número es lo mismo que el doble del mismo número de manera explícita, lo cual refuerza la idea de que el cuadrado siempre es

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

mayor que el número original. En este caso sucedió algo similar a lo recién mencionado: mientras que el 46.7% de los alumnos del primer año expresó (explícitamente) que el cuadrado de un número es su doble, el porcentaje disminuyó levemente al 40% en el segundo año y un poco más (el 26.7%) para los alumnos del tercer año. Estas dos situaciones sí muestran un cambio en la concepción errónea a lo largo del desarrollo académico de los alumnos.

CONCLUSIONES

Como se mencionó al inicio, este proyecto es de tipo diagnóstico orientado a proporcionar información útil para la toma de decisiones sobre estrategias orientadas a la enseñanza de las Matemáticas y modificaciones curriculares en el contexto particular de la Escuela de Bachilleres de la UAQ. Al momento se tiene información más bien cuantitativa como es el caso del EXHCOBA para el ingreso al nivel superior. Larrazolo, Backhoff y Tirado (2013) analizaron los resultados de estos exámenes para ingresar a universidades públicas de cinco Estados del país, entre ellas la UAQ, y observaron que "los estudiantes que aspiran a ingresar al nivel de educación superior (...) presentan serias deficiencias en los aprendizajes esperados de matemáticas de los niveles de primaria y de secundaria" (2013, pág. 1157).

En específico sobre la institución se tienen los resultados de la prueba ENLACE (SEP, 2013). En la aplicación de 2013 los alumnos de la UAQ tuvieron mejores resultados que el promedio estatal y nacional: Mientras que en el nivel 'insuficiente' se tuvieron porcentajes de entre 4% y 24% en la UAQ, a nivel Estado y país se tuvieron 29% y 34%, respectivamente; en la misma tónica mientras que en el nivel 'excelente' la UAQ tuvo a entre 12% y 38%, en el Estado y el país estuvieron el 10% y el 12%, respectivamente.

Además, en los tres temas considerados ("cantidad", "espacio y forma" y "cambios y relaciones") se vio un progresivo aumento en la cantidad de errores ya que en el primer tema la mayoría de los reactivos fueron respondidos correctamente más del 60%, pero en el último tema (que se aborda en el quinto semestre principalmente) casi la mitad de los reactivos tuvieron respuestas incorrectas en más del 60% de los casos.

Esta información nos está proporcionando un panorama general y algo de información referente a la problemática del aprendizaje de los alumnos en Matemáticas, pero no proporciona información sobre cuáles son las posibles causas de tales problemáticas.

Es importante reflexionar sobre lo que se ha mencionado, pues al considerar que la mayoría de los

alumnos participantes, sin importar el nivel educativo en el que están, prefieren utilizar estrategias aritméticas por sobre las algebraicas o muestran problemas para el manejo de las representaciones algebraicas se podrían llegar a plantear preguntas como "¿para qué estudian los alumnos de bachillerato el Álgebra, si no se convierte en una herramienta útil al final de su paso por la escuela?"
Sin embargo esta pregunta podría no ser la pertinente por todas las implicaciones que tiene el aprendizaje del Álgebra (no sólo para Matemáticas, sino para otras disciplinas) como medio para aprehender técnicas, usos de representaciones (lenguaje), procesos cognitivos (generalización, validación, etcétera). Es posible que sean más pertinentes preguntas como "¿qué podemos hacer para que se convierta en dicha herramienta útil?" o bien "¿cómo lograr que el uso del Álgebra tenga sentido para los alumnos?"

El reto es importante, porque los distintos registros de representación semiótica involucrados en el estudio de Álgebra implica conflictos con los antecedentes de los alumnos y conflictos entre los diversos registros. En los cursos de Matemáticas a partir de la Secundaria y en el Bachillerato se les pide a los alumnos que, por ejemplo, consideren símbolos originalmente considerados como no números y los consideren números. Y no sólo las literales, sino otros números representados por letras (por ejemplo *e*, base de los logaritmos naturales, o *i*, unidad imaginaria), letras griegas (π y φ, por ejemplo) o bien mezclas que deben mantenerse sin "convertir" a aproximaciones racionales (por ejemplo $\sqrt{2}$).
Así pues, la información obtenida puede dar pie a nuevas investigaciones que generen y difundan conocimientos educativos sobre el aprendizaje del Álgebra, considerando los retos que implican las demandas sociales, políticas, científicas, culturales y económicas. Todo ello con la finalidad de establecer las bases para proponer estrategias de cambio en los procesos educativos (capacitación docente, cambios curriculares, etcétera).

RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con apoyo del *Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación de la Universidad Autónoma de Querétaro* (FOFI-UAQ 2013) con registro FIN-2014-21.

Se agradece el apoyo de la las autoridades de la Escuela de Bachilleres de la UAQ y a los alumnos que participaron en la aplicación de los instrumentos para la obtención de la información: Andrea L. Rojas R., Azalia G. Martínez H., Dulce G. Rivera S., Miguel Á. Martínez O. y Noemí G. Lara S. de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas; Emir Martínez A. del Doctorado en

Tecnología Educativa y Meliza M. Bautista V. y Víctor Larios G. de las licenciaturas de la UAQ.

REFERENCIAS

Arellano C., C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro (Tesis de maestría no publicada, http://ri.uaq.mx/handle/123456789/1232).

Avilés F., A. (2014). *El pensamiento reflexivo como marco para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en un sistema por competencias*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro. (Tesis de maestría no publicada, http://ri.uaq.mx/handle/123456789/2883).

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt Espinosa (ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (págs. 173-201). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Frost, J. (2015). Disappearing *x*: When solving does not mean finding the solution set. *Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 1-17.

Larios O., V. y Díaz Barriga C., A. J. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el Estado de Querétaro*. Querétaro, México: Editorial Universitaria UAQ.

Larrazolo, N., Backhoff, E. y Tirado, F. (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *18*(59), 1137-1163.

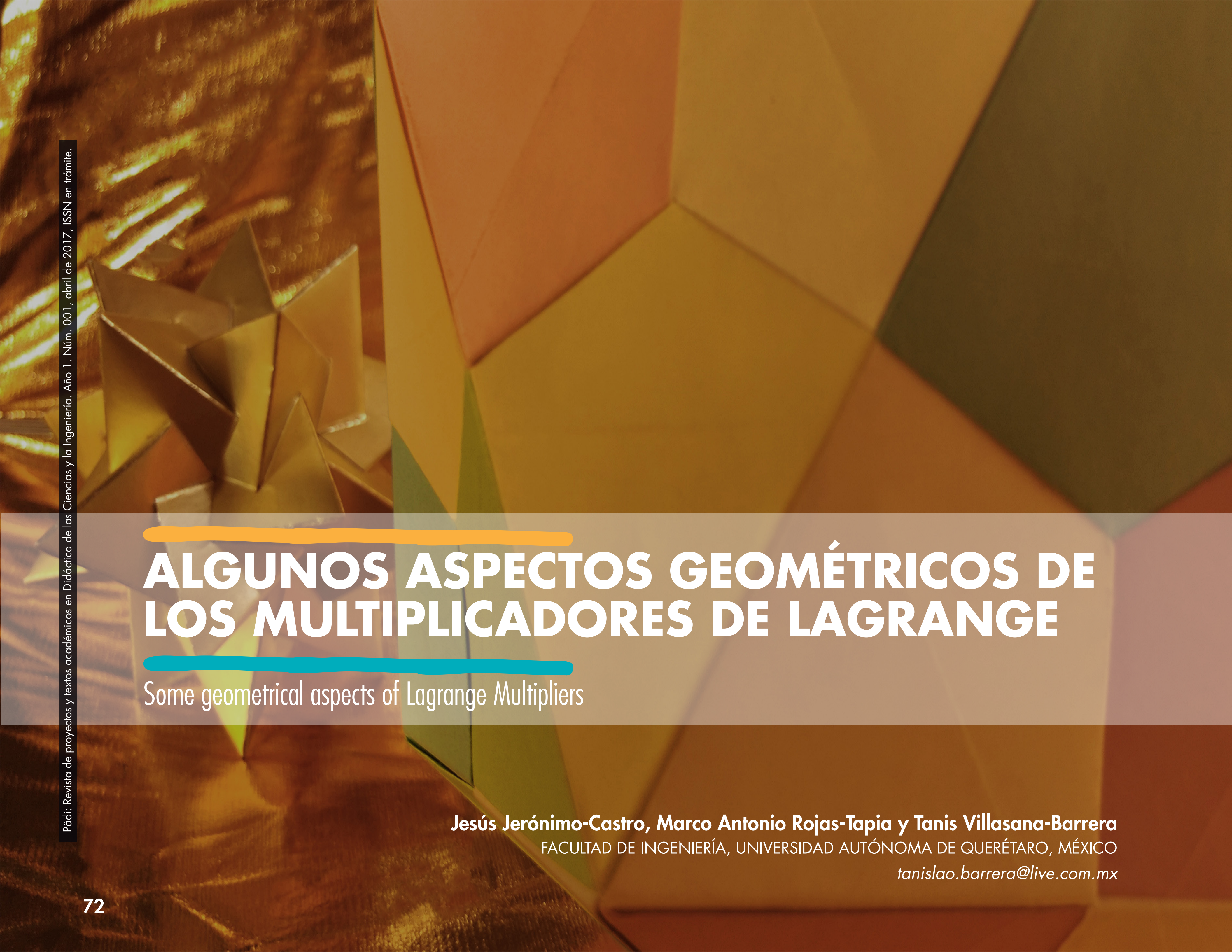
Martínez H., A., Rojas R., A. L. y Villanueva G., C. E. (2015). Experiencias de enseñanza-aprendizaje en matemáticas en cursos intensivos a nivel bachillerato. En V. Larios O. y S. Obregón B. (edits.), *Avances de Jóvenes Investigadores 2015* (págs. 237-242). Querétaro, México: Editorial Universitaria UAQ.

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, EEUU: U.S. Department of Education.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 11-38.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2013). *Educación Media Superior*. Recuperado el 30 de enero de 2014, de ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico de Centros Escolares): http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/

Valero, P. (2012). La inclusión de visiones sobre lo «social» y lo «político» en educación matemática. En N. Planas (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (págs. 187-203). Barcelona, España: Editorial Graó.



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ALGUNOS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Some geometrical aspects of Lagrange Multipliers

Jesús Jerónimo-Castro, Marco Antonio Rojas-Tapia y Tanis Villasana-Barrera
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
tanislao.barrera@live.com.mx

RESUMEN:

En este trabajo se muestran algunos fundamentos geométricos de los Multiplicadores de Lagrange, de este modo, se pretende dar una explicación más detallada de por qué estos funcionan para resolver problemas de optimización que involucran funciones de varias variables. Después, mediante una adecuada introducción de variables, se resuelve un problema geométrico en el que se usan los multiplicadores de Lagrange. Finalmente, se muestra como el estudio de un problema no se acaba con la solución de éste, al contrario, muchas veces se puede generalizar de una manera natural.

Palabras claves: Funciones de varias variables, Multiplicadores de Lagrange, problemas geométricos.

ABSTRACT:

In this work we show some geometric fundamentals of Lagrange Multipliers, in this way, we pretend to give a more detailed explanation about why they works for solving optimization problems that involve several variables. By a suitable use of variables, we solve a geometric problem with the use of Lagrange Multipliers. Finally, we show how sometimes the study of a problem is not ended with its solution, instead we can generalize it in a natural way.

Key words: Functions of several variables, Lagrange Multipliers, geometric problems.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Los Multiplicadores de Lagrange es comúnmente conocido como un método clásico utilizado para optimizar funciones real-valuadas de diferentes variables; en otras palabras, se usa para encontrar máximos o mínimos de una función escalar sujeta a una o más restricciones. Sin embargo, pocas veces se explica por qué estos funcionan al resolver problemas de optimización. La mayoría de los textos de Cálculo, se concentran en utilizarlos en la solución de algunos ejemplos directos y otros, aunque dan una demostración analítica del teorema, no explican de manera intuitiva la razón de por qué es que estos funcionan.

Además, en los cursos de cálculo en ingeniería o en la licenciatura en matemáticas no se les da la importancia necesaria a estos, es decir, sólo se ve como un tema más quedando en el olvido de la gran mayoría de los estudiantes, cuando en la vida real siempre estamos buscando lo mínimo, máximo u optimizar algo. Es por esto que en este artículo se propone primero, entender bien qué son y de dónde se originan los Multiplicadores de Lagrange y después, dar ejemplos concretos de su útil uso.

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En esta parte del artículo discutimos el método desde un enfoque geométrico, cuando deseamos encontrar los valores extremos de una función de dos variables $f(x,y)$, sujeta a la restricción $g(x,y)=c$. Antes de discutir la técnica de los Multiplicadores de Lagrange, debemos recordar conceptos básicos de Cálculo Vectorial que nos ayudarán a lograr una mejor comprensión del tema.

A continuación, desarrollamos de manera geométrica y analítica el concepto de derivada direccional.

Definición 1: Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ definidas como

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Definición 2: La derivada direccional de $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ es

$$D_u f(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h},$$

si este límite existe.

Para entender geométricamente la definición 2, imaginemos una superficie $z=f(x,y)$ la cual es intersecada por un plano M_u $(M_u \cap f(x,y))$, siendo este último ortogonal al plano xy, y que además pasa por un punto $p=(x_0,y_0)$ en dirección u. La derivada direccional

$D_u f(p)$ es la pendiente de la línea recta que se muestra en la Figura 1.

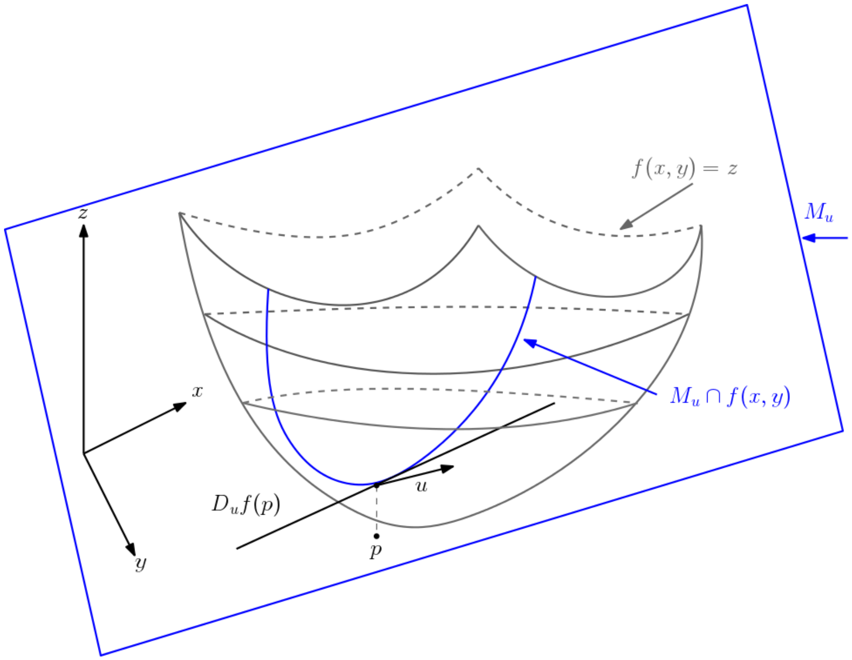


Figura 1: Derivada direccional

Teorema 1: Si f es una función diferenciable en (x, y), entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u = (a, b)$ y

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b.$$

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto arbitrario. Si definimos g, una función de una variable h, como

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb),$$

entonces, por definición de derivada, se tiene que

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha,\, y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0). \qquad (1)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$ y $y = y_0 + ha$. Entonces, si aplicamos el Teorema de la Regla de la Cadena obtenemos que

$$g'(h) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dh} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b.$$

Si ahora hacemos $h = 0$, obtenemos que $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$g'(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} b. \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), vemos que

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} b.$$

■

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Observación.

Podemos ver que la derivada direccional se puede expresar como el producto punto de dos vectores

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \cdot (a,b) \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \cdot u. \end{aligned}$$

La siguiente definición es muy útil en muchos conceptos en Matemáticas, en particular cuando se trabaja con derivadas direccionales.

Definición 3: Si f es una función de dos variables x y y, entonces el *gradiente* de f es la función vectorial ∇f definida como

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Con la notación para el vector gradiente, podemos reescribir la derivada direccional como

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u.$$

Lo anterior, expresa a la derivada direccional en la dirección u, como la proyección escalar del vector gradiente sobre el vector u.

Definición 4: Las *curvas de nivel* de una función f de dos variables son las curvas con ecuación $f(x,y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

La Figura 2 muestra geométricamente lo que significan las curvas de nivel para diferentes valores de la constante k.

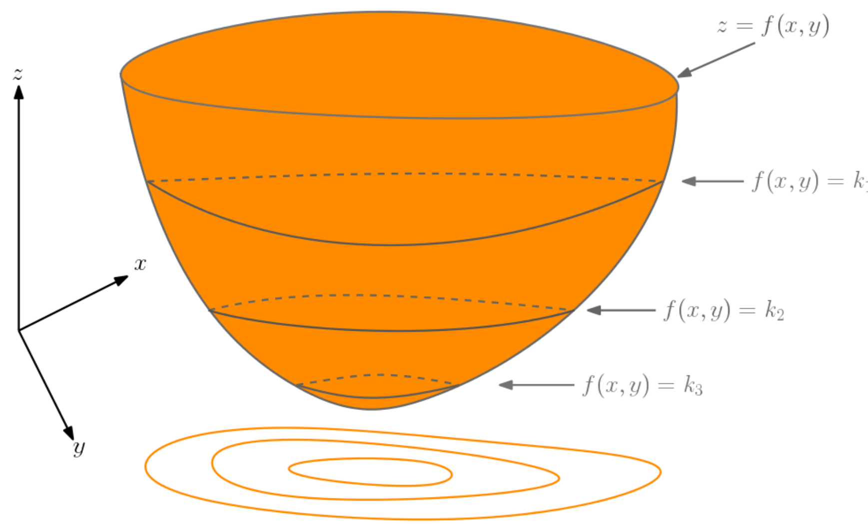


Figura 2: Curvas de nivel

Una vez introducidos los conceptos anteriores, ahora sí nos disponemos a presentar la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Como $f(x,y)$ es una función, las curvas de nivel $f(x,y) = k$ no se intersecan. Ahora, imaginemos que se camina sobre la curva

$g(x, y) = c$. Luego, como las curvas $f(x, y) = k$ y $g(x, y) = c$ son generalmente distintas, entonces al caminar sobre $g(x, y) = c$ nos cruzamos con muchos caminos $f(x, y) = k$. Por tanto, el valor k crece o decrece al caminar sobre $g(x, y) = c$ hasta encontrar un punto p de tangencia entre $f(x, y) = k$ y $g(x, y) = c$. Cuando la curva $g(x, y) = c$ toca tangencialmente a una curva $f(x, y) = k$ en algún punto $p = (x_0, y_0)$, entonces al caminar en ambas direcciones sobre $g(x, y) = c$, desde p los valores de k cambian en la misma dirección, ver Figura 3.

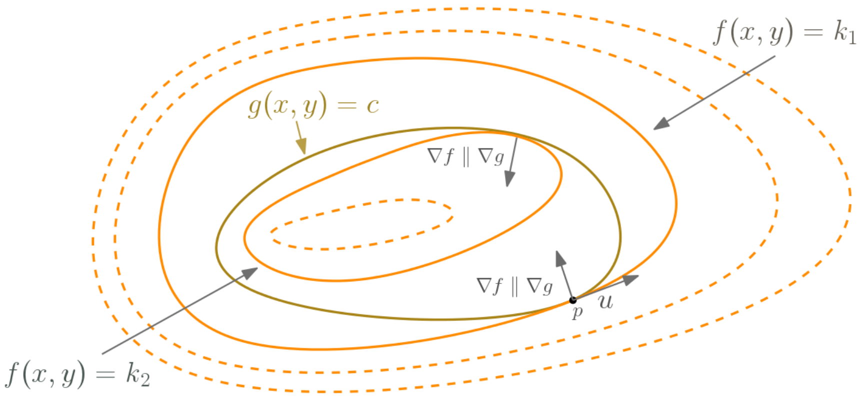


Figura 3: Curvas tangentes

Por otro lado, sea u un vector tal que esté contenido en la recta tangente común entre $g(x, y) = c$ y $f(x, y) = k$ y que pasa por el punto $p = (x_0, y_0)$. Entonces, el punto p corresponde a un extremo local de $f(x, y)$ sujeta a la restricción. Esto se puede ver si observamos la curva $M_u \cap f(x, y)$, donde M_u es el plano que pasa por p y contiene a u. Lo anterior, nos dice que las derivadas direccionales son iguales a cero, esto es, $D_u f(p) = 0$ y $D_u g(p) = 0$, ver Figura 4.

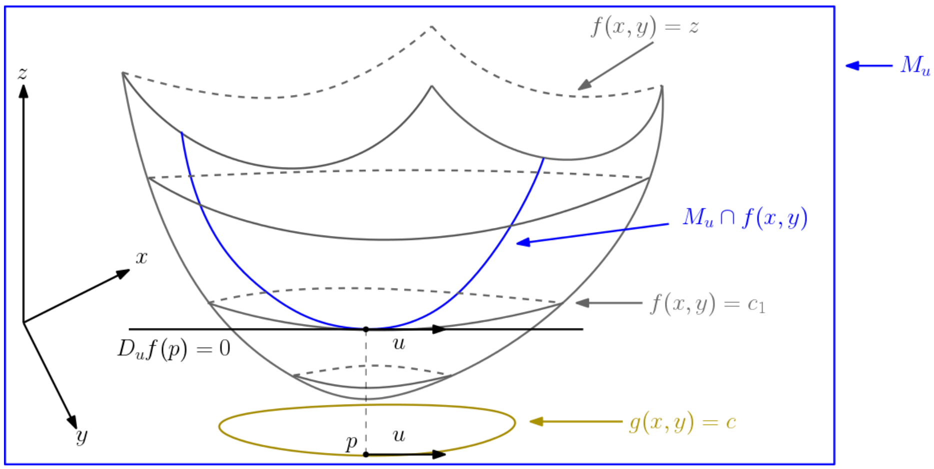


Figura 4: Derivada direccional tangente a una curva de nivel

Más precisamente, el extremo ocurre cuando $\nabla f(x, y) \cdot u = \nabla g(x, y) \cdot u = 0$; en otras palabras, cuando $\nabla f(x, y)$ y $\nabla g(x, y)$ son paralelos y, por tanto, cuando se tiene que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para algún número real λ, ver Figura 3. Este valor λ es conocido como Multiplicador de Lagrange. En consecuencia, para funciones de dos variables, la optimización con una restricción equivale a resolver el sistema

$$\begin{Bmatrix} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = c. \end{Bmatrix}$$

Esta técnica se puede generalizar para múltiples restricciones. Además, la técnica también puede ser extendida a problemas de cálculo de variaciones con restricciones del tipo integral.

UN EJEMPLO EN GEOMETRÍA

Ahora mostraremos el uso de los Multiplicadores en la solución de un problema geométrico.

Ejemplo (Tikhomirov, 1986, p. 137): Dado un ángulo $\measuredangle BAC$ y dos puntos M y N en su interior, trace un segmento DE que pase por M, de tal manera que el área del cuadrilátero $ADNE$ sea mínima.

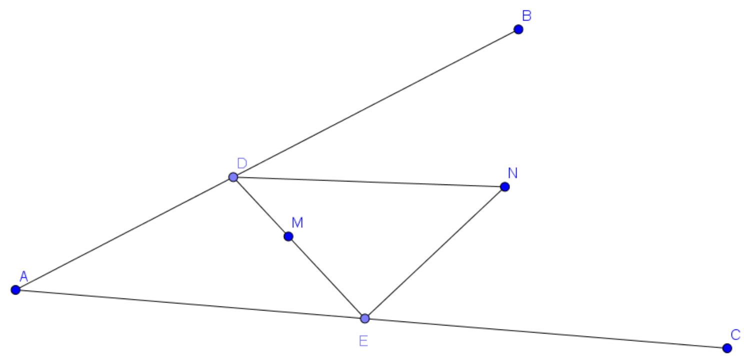


Figura 5: Problema de Shariguin.

Solución: Tracemos segmentos MF y MG paralelos a los lados AC y AB, respectivamente, y denotemos su longitud como a y b. Tracemos las perpendiculares desde N hacia AB y AC y denotemos sus longitudes como d y c, respectivamente.

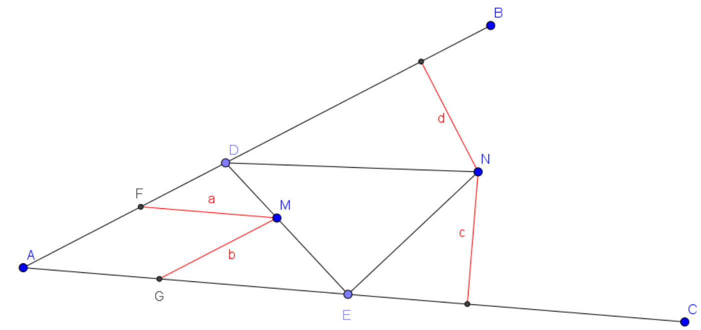


Figura 6

Claramente, el doble del área de $ADNE$ es igual a $(b+x)d=(a+y)c$, donde $x=|FD|$ y $y=|GE|$. Además, por semejanza de los triángulos DFM y MGE podemos deducir que $xy=ab$.

Tenemos entonces las siguientes funciones:

$$f_0(x,y)=(b+x)d+(a+y)c,$$

la cual queremos minimizar sujeta a la restricción

$$f_1(x,y)=xy-ab=0.$$

Entonces, la función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}=f_0+\lambda_1 f_1.$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow d + \lambda_1 y = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow c + \lambda_1 x = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos las condiciones necesarias para minimizar el área del cuadrilátero $ADNE$, las cuales son

$$xy = ab, \qquad \frac{x}{y} = \frac{c}{d}.$$

Dado que el máximo del área del cuadrilátero $ADNE$ no está acotada, tenemos que la solución obtenida nos provee de hecho un mínimo.

■

Ahora veremos cómo es posible extender un poco más el resultado obtenido. Supongamos ahora que en lugar de tener un par de puntos M, N, tenemos un conjunto convexo M tangente a AC y AB y un punto N, como se muestra en la figura siguiente. Queremos encontrar el punto P sobre el arco $\widehat{HL}$, de manera que el área del cuadrilátero $ADNE$ sea mínima, donde el segmento DE es tangente a M en el punto P.

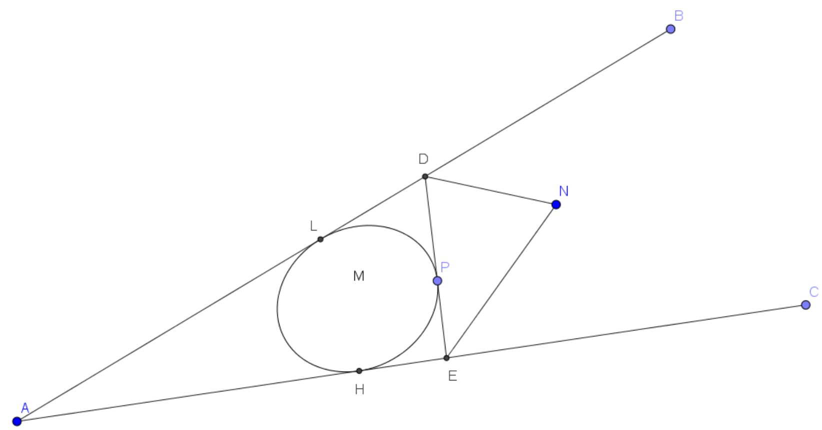
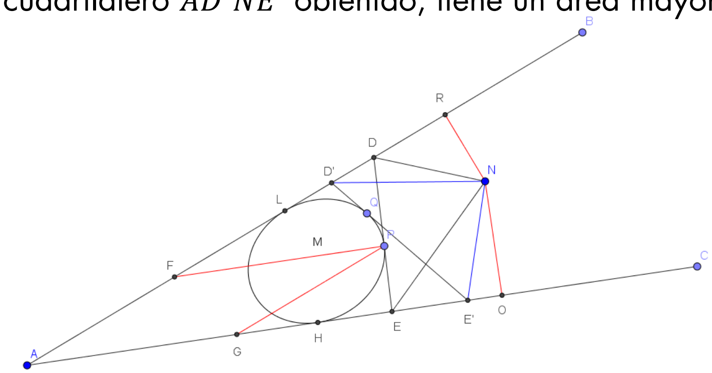


Figura 7: Problema del área generalizado.

Solución: El candidato a ser el punto P que minimiza el área del cuadrilátero es el que cumple las condiciones del ejemplo anterior. Para demostrarlo, basta con ver que escogiendo cualquier otro punto Q sobre el arco $\widehat{HL}$, el cuadrilátero $AD'NE'$ obtenido, tiene un área mayor.



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Figura 8.

Sea $P \in \widehat{HL}$ tal que $\frac{|FD|}{|GE|} = \frac{|NO|}{|NR|}$, donde FP y PG son paralelos a AC y AB, respectivamente. Ahora, sea $Q \in \widehat{HL}$, tracemos el segmento $D'E'$ tangente a M en Q, donde $D' \in AB$ y $E' \in AC$. Luego, tracemos un segmento $D''E''$ paralelo a $D'E'$ en P.

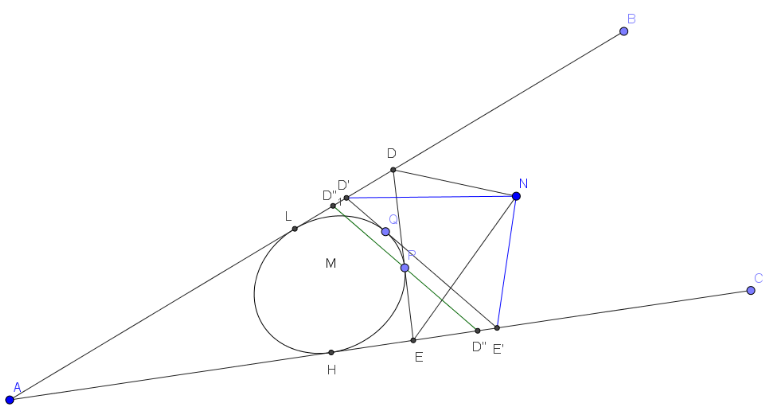


Figura 9.

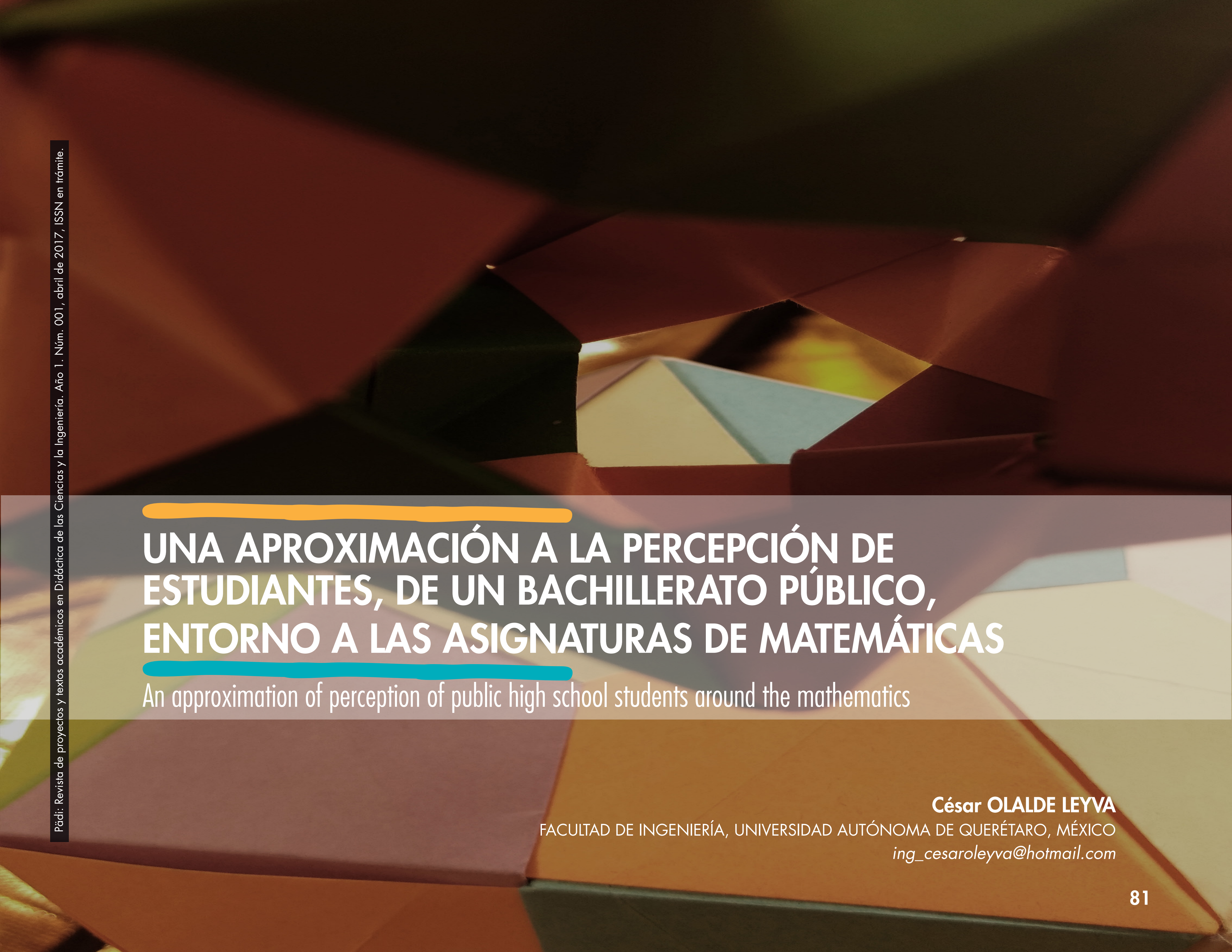
El cuadrilátero $AD''NE''$ tiene un área mayor que la del cuadrilátero $ADNE$, pues por el ejemplo anterior para el punto P el cuadrilátero con menor área es $ADNE$. Claramente, $AD''NE'' \subset AD'NE'$ por lo que el área del cuadrilátero $AD'NE'$ es mayor a la del cuadrilátero $AD''NE''$, así el área de $AD'NE'$ es mayor al área de $ADNE$. Por lo tanto, si el punto P cumple las condiciones del ejemplo anterior entonces minimiza el área del cuadrilátero $ADNE$, donde el segmento DE es tangente a M en el punto P.

BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

Rousseau, C., Saint-Aubin, Y., Antaya, H., Ascah-Coallier, I., & Hamilton, C. (2008). *Mathematics and technology*. Springer.

Tikhomirov V.M. (1986), *Stories about maxima and minima*, Mathematical World, Amer. Math. Soc., Volume 1.



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

UNA APROXIMACIÓN A LA PERCEPCIÓN DE ESTUDIANTES, DE UN BACHILLERATO PÚBLICO, ENTORNO A LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS

An approximation of perception of public high school students around the mathematics

César OLALDE LEYVA
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
ing_cesaroleyva@hotmail.com

RESUMEN:

En este trabajo se presenta la información obtenida por la aplicación de un cuestionario a estudiantes que cursan quinto semestre en un bachillerato público; información con la que se pretende conocer la percepción, afinidad, actitudes, hábitos, que tienen en su quehacer como estudiantes de Matemáticas dentro de su formación en la educación nivel medio superior, así como su interacción con el profesor de Matemáticas y desenvolvimiento al realizar actividades propias de tal asignatura. El cuestionario solo pretende acercarse, aproximarse, a estas percepciones, subjetivas y cualitativas, encontrando su aportación en el posible contraste de los resultados obtenidos, sin la intención de pasar de lo particular a lo general, debiendo tener que existir para esto una línea de investigación multidisciplinaria futura que permita, siguiendo una metodología formal y objetiva, identificar patrones que conlleven a plantear problemáticas, dificultades, que los alumnos presentan en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas relacionadas con su percepción de la asignatura de Matemáticas y sirvan como aporte tanto a los profesores como a las instituciones educativas. En los resultados obtenidos contrasta que si bien más de la mitad de los alumnos sondeados afirmó que a veces les han gustado, atraído, la asignatura de Matemáticas, también más de la mitad optó por no reducir las horas de clase de esta asignatura en caso de que pudieran hacerlo, donde algunos lo justificaron reconociendo la importancia de cursar tal materia.

Palabras clave: cuestionario, percepción, estudiantes, matemáticas.

ABSTRACT:

In this paper is shows the information obtained by the application of a questionnaire to students who attend the fifth semester in a public high school; Information with which it is tried to know the perception, affinity, attitudes, habits, that they have in their work as students of Mathematics within their formation in the high school education, as well as their interaction with the professor of Mathematics and development when carrying out activities of that subject. The questionnaire only seeks to closer, to approach these perceptions, subjective and qualitative, finding its contribution in the possible contrast of the results obtained, without the intention of moving from the particular to the general, it having to exist for this a line of research multidisciplinary future that allows, following a formal and objective methodology, to identify patterns that lead to problematic problems presented by students in the teaching and learning of Mathematics related to their perception of the subject of Mathematics and serve as input to the teachers and educational institutions. In the results obtained contrasts that although more than half of the students surveyed stated that sometimes they liked, attracted, the subject of Mathematics, also more than half chose not to reduce the class hours of this subject in case of that they could do it, where someone of them justified it recognizing the importance of studying this subject.

Key words: questionnaire, perception, students, mathematics.

Un buen maestro, como un buen actor,
primero debe captar la atención de su audiencia
y entonces puede enseñar su lección.
-John Henrik Clarke

INTRODUCCIÓN

Consultando, de manera electrónica en la página web de la Real Academia Española, la 23° edición del Diccionario de la lengua española, arroja las siguientes dos definiciones, tomadas con pertinencia, para "alumno" (del lat. *alumnus*, der. de *alĕre* 'alimentar'):

1.- Persona que recibe enseñanza, respecto de un profesor o de la escuela, colegio o universidad donde estudia.
2.- Persona criada o educada desde su niñez por alguien, con quien mantiene una cierta vinculación.

Además de aprendiz y pupilo, otra palabra que se usa para designar a la persona que cumple con tales características es "estudiante" (del ant. part. act. de estudiar), para la cual del mismo diccionario se rescatan las siguientes dos definiciones:

1.- Que estudia.
2.- Persona que cursa estudios en un establecimiento de enseñanza.

De las cuatro definiciones, en tres de ellas se infiere que la persona que cumple con esas descripciones lo hace desenvolviéndose en la institución o espacio de la sociedad destinado para ello (escuela, plantel, instituto, colegio, academia, facultad, etc.) interactuando con otro semejante a él pero donde éste cumple con otras descripciones, atributos, labores, al enseñarle (profesor, maestro, docente).

Si se investigan en el mismo diccionario las definiciones de "profesor", "docente" y "maestro", quedándose solo con las que competen al campo del sistema educativo, se observaría que se repiten las palabras *que enseña*, siendo pregunta inmediata ¿a quién enseña?

Se tienen dos sustantivos que describen al *que enseña* y al *que estudia*, solo el primero entra en conjugación si el segundo también lo hace; no se enseña, educa, instruye si no hay a quien enseñar, educar o instruir, pudiendo establecer así la insolubilidad que hay entre enseñanza-aprendizaje, sustantivos de la acción que se ejecuta en la interacción profesor-alumno (el autodidactismo se deja fuera del alcance del presente trabajo).

Entonces, el proceso enseñanza-aprendizaje es un proceso de interacción social ya que interactúan dos semejantes, desempeñando los roles que les corresponden sin establecer una dictadura (el alumno no es el subordinado, no es delegado a un papel co-protagónico). Salinas (2010) da una clasificación de interacción social o contacto según cómo se presenta; una de ellas es la *interacción regulada* donde se desarrollan las relaciones que se establecen con los directivos de la escuela, los

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

profesores y los compañeros en las cuales se deben de obedecer una serie de normas relacionadas con los horarios, con la entrega de trabajos y tareas y con el comportamiento dentro del salón de clases y de la escuela (p. 81).

Dicha interacción es regulada por una serie de normas o reglas establecidas de manera explícita (el reglamento interno del plantel o institución, por ejemplo) y también implícitamente tal como Guy Brousseau (2007) evidenció la existencia de un contrato didáctico, cuyo fin es asegurar que el proceso enseñanza-aprendizaje se lleve a cabo de la mejor manera.

El estudiante al acatar tales instrucciones, normas, reglas, hay respuesta de éste en la interacción regulada del proceso enseñanza-aprendizaje; estas respuestas pueden manifestarse por la expresión verbal, escrita o kinestésica que el estudiante articule o produzca, y que el profesor y la institución deben de captar como parte de una retroalimentación en su quehacer didáctico siendo así que la interacción regulada del proceso enseñanza-aprendizaje no es estática, no es infalible: la interacción siempre es perfectible, es dinámica.

En las tres anteriores manifestaciones se debe tener en cuenta la adherencia de otras reacciones, propias de la personalidad de alumno, de su forma de ser, de su forma de pensar y de sentir, por ejemplo, hacia la asignatura de Matemáticas. Hidalgo, Maroto y Palacios (2004) mencionan que hay actitudes hacia las Matemáticas, la cual se refiere "[...] a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva, la cual se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc." (p. 77). Además, parafrasean que para Gómez Chacón (2000):

> La relación que se establece entre los afectos (emocionales, actitudes, y creencias) y el rendimiento es cíclica: por una parte, la experiencia que tiene el estudiante al aprender Matemáticas le provoca distintas reacciones e influye en la formación de sus creencias. Por otra, las creencias que sostiene el sujeto tienen una consecuencia directa en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender. (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, p. 77)

Dichas actitudes, afectos, el profesor debe ser capaz de detectarlas y tomarlas en cuenta como parte de la mejora continua en la regulación de tal interacción social. Con esta idea en mente, asentando ya la interacción a la enseñanza-aprendizaje del campo disciplinar de las Matemáticas, Larios y Díaz-Barriga (2013) mencionan que un profesor de Matemáticas "[...] debe tener los elementos necesarios y adecuados para llevar a cabo su tarea de manera apropiada de acuerdo al contexto escolar y social, la interacción con los alumnos, el desarrollo cognitivo de éstos, etcétera" (p. 243).

También aluden que como parte del perfil que se espera que tenga éste profesor, es deseable que adquiera competencias que cualquier profesorado comparte entre sí (competencias genéricas) y aquellas que ya son propias de un profesionista que enseña matemáticas (competencias específicas) que le permitan captar y procesar las manifestaciones y reacciones que explicita e implícitamente los estudiantes emiten en la interacción (proceso) enseñanza aprendizaje (pp. 245, 252).

Ambos autores presentan propuestas para dichas competencias. Una de las genéricas se llama Ciudadanía, la cual atribuye al profesionista de la enseñanza de Matemáticas que "[…] como miembro de la sociedad es necesario que el docente, en un primer nivel, identifique los dilemas éticos en la vida cotidiana personal y social [de los alumnos] describiendo sus causas y consecuencias, así como los valores éticos en juego" (Larios y Díaz-Barriga, 2013, p. 246).

Ya en las competencias disciplinares, "[…] el docente necesita conocer la importancia que tienen los aspectos motivacionales y afectivos sobre el aprendizaje […]" (Larios y Díaz-Barriga, 2013, p. 259).

OBJETIVO

Recabar información cualitativa acerca de aspectos generales, de percepción, hábitos y entorno social, de alumnos que están en contacto con asignaturas de Matemáticas como parte de su mapa curricular estudiantil.

RECOLECTA DE LA INFORMACIÓN

Para recabar algunos de estos aspectos del estudiante, se propuso un cuestionario individual dirigido a alumnos de quinto o sexto semestre de nivel medio superior de educación, ya que ellos son los que cuentan con el mayor grado académico en la preparatoria o bachillerato (el diccionario de la Real Academia Española define como (escuela) preparatoria al "Establecimiento para estudios previos a otros superiores", y para bachillerato se tienen dos definiciones, la más competente para los fines requeridos es "Estudios de enseñanza secundaria que preceden a los superiores"; por tanto, no se hará distinción entre ambas. De manera análoga, tampoco se hará distinción entre estudiante y alumno; y entre profesor, maestro y docente) y que además, en particular, éste cuerpo estudiantil es el que más ha cursado asignaturas de Matemáticas desde nivel básico hasta su nivel de educación actual.

El cuestionario propuesto se realizó con la intención de recabar la información mencionada en el Objetivo; información cualitativa sujeta a la percepción, apreciación, afinidad, hábitos, costumbres, afectividad, empatía, que un individuo, y también miembro de una sociedad, tiene como estudiante de bachillerato a cerca de las asignaturas de Matemáticas que ha cursado, incluyendo la que actualmente esté llevando.

Consultando el diccionario de la Real Academia Española, encuesta lo define como "Conjunto de preguntas tipificadas a una muestra representativa de grupos sociales, para averiguar estados de opinión o conocer cuestiones que les afectan"; y cuestionario lo define como "Lista de preguntas que se proponen con cualquier fin". Dado el tipo de muestra que se tomó, como se describirá en el siguiente apartado y el tipo de reactivos, para su presentación en éste trabajo se le dejará el sustantivo de cuestionario.

Martínez (2011) señala que "Todo conocimiento es interesado, siempre existe un pretexto para conocer y un producto de eso que se conoce" (p. 4). El enfoque tomado es el cualitativo ya que al cuestionario no le asignó valores numéricos a las respuestas que tienen que colocar los alumnos, sino que "en este enfoque se considera que las auténticas palabras de éstos resultan vitales en el proceso de transmisión de los sistemas significativos de los participantes, que eventualmente se convierten en los resultados o descubrimientos de la investigación" (Martínez, 2011, p. 16).

Entonces para lograr esta intención, a cada enunciado del cuestionario se le llamó reactivo, agrupados en cuatro secciones. Básicamente se plantearon tres tipos de reactivos, según la respuesta que los alumnos pueden plasmar:

1.- Opción múltiple: el estudiante solo pudo elegir una única opción de varias mostradas.
2.- Abierta: el estudiante tuvo la libertad de escribir hasta cinco palabras o cinco oraciones como respuestas a tales reactivos, es decir, no se le restringió más allá de lo que el enunciado del reactivo solicitaba.
3.- Cierre o conclusión: como último reactivo de todo el cuestionario, después de haber incentivado que el estudiante reflexionara, hiciera memoria y conciencia al contestar los reactivos anteriores, a manera de conclusión se le ofreció un recuadro para que agregara, comentara, opinara, sugiriera o expusiera información extra sin una solicitud explícita como en reactivos anteriores.

Las cuatro secciones en los que se acomodaron los reactivos fueron:

Sección 1: Datos personales del alumno. En este apartado se les pidió que escribieran, entre otra información, su edad, semestre que actualmente estén cursando en preparatoria y el tipo de preescolar, primaria y secundaria de procedencia (pública o privada), incluyendo la preparatoria en la que estén inscritos. No

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

se les solicitó que colocasen su nombre, ni el nombre de la preparatoria, secundaria, primaria y preescolar, y ni tampoco nombres de profesores, esto con el afán de darle confidencialidad al cuestionario para que fuese como incentivo para que sus respuestas fueran de manera personal sin temor a ser evidenciados explícitamente. En esta sección, los enunciados para recabar la información no fueron presentados por reactivos.

Sección 2: Percepción del alumno acerca de la asignatura de Matemáticas. En este segundo apartado, los reactivos se enfocaron en que el estudiante expresase su percepción global de la asignatura de Matemáticas, las horas de clase que le dedican y del profesor que se las imparte. También se consideró importante su apreciación acerca del uso de libro de texto, software y páginas web como material y herramientas de apoyo, y la presentación de examen como medio de evaluación.

Sección 3: Hábitos del alumno en la asignatura de Matemáticas. Al plantear una evaluación a través de trabajos, tareas, proyectos, etc. y no sea solo el examen la única evidencia de aprendizaje de los alumnos dentro de la ponderación de las calificaciones, los reactivos de esta sección dirigieron principalmente su atención hacia los hábitos, costumbres o rutinas que tienen los estudiantes al realizar trabajos, trabajos extra-clase (o tareas, proyectos) de la asignatura de Matemáticas, así como la manera en que se preparan para presentar un examen.

Sección 4: Desenvolvimiento social del alumno alrededor de la asignatura de las Matemáticas. En esta última sección del cuestionario, los reactivos tuvieron el fin de conocer cómo los alumnos interactúan con familia y compañeros de clase al llevar a cabo los trabajos, tareas, de la asignatura de Matemáticas; el lugar donde los realizan, es decir, la influencia directa o indirectamente de otros miembros de la sociedad en su quehacer como estudiantes de esta asignatura, así como de los medios por los cuales interactúan. Después de esta sección, los alumnos tuvieron la oportunidad de redactar, sí así lo consideraron, a manera de conclusión, su participación en el cuestionario.

En las secciones dos, tres y cuatro, los reactivos se distinguieron, según el enunciado que solicita la información, en dos: independientes, cuya redacción de la respuesta no fue condicionada por reactivo anterior; y dependientes, donde la respuesta o información si fue subordinada por la respuesta dada en un reactivo anterior.

INFORMACIÓN OBTENIDA

El cuestionario se aplicó a dos grupos de quinto semestre de turno vespertino de un bachillerato público mixto ubicado en el municipio de Santiago de Querétaro, Estado de Querétaro.

La Estructura Curricular de Bachillerato Tecnológico vigente tiene tres componentes: de formación básica, de formación propedéutica y de formación profesional. El cuestionario se enfocó, de manera global, sobre las asignaturas del campo disciplinar de Matemáticas, pertenecientes al componente de formación básica de las cuales los alumnos de quinto semestre han cursado: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, de primer a cuarto semestre, respectivamente, y actualmente cursan Cálculo Integral, la cual pertenece al componente de formación propedéutica; siendo en total cinco asignaturas de Matemáticas al momento de la aplicación del cuestionario.

Dado que estas cinco asignaturas son cursadas por todos los alumnos del mencionado bachillerato, la elección de los dos grupos sondeados no se siguió por la especialidad a la cual pertenecen ni por el turno (matutino o vespertino), sino por la disponibilidad de tiempo de clase a invertirle en el cuestionario, buscando también que el aplicador del cuestionario fuera el que lo elaboró como parte de su retroalimentación. Además, los dos grupos elegidos no fueron avisados previamente a la aplicación del cuestionario, para evitar sugestiones que pudieran haber influido en las respuestas.

Antecediendo a la sección 1, se plasmaron las instrucciones generales del cuestionario, donde en un inciso de tales indicaciones se les hizo mención a los alumnos de que era confidencial, por lo que se les pedía realizarla de manera individual, honesta y sincera.

La única condición puesta para que los alumnos llevaran a cabo el cuestionario fue el que pertenecieran al quinto o sexto semestre, que en este caso, por ser el período escolar Agosto 2016- Enero 2017, son semestres impares.

A continuación se mostrará la información recaba en cada sección. Aquella obtenida mediante reactivos de respuesta abierta se presentará parcialmente sin que esto signifique falta de importancia o relevancia de todas las palabras y oraciones escritas por los alumnos, y a la vez serán colocadas lo más fielmente posible. Toda la información recaba por el cuestionario es tratada y presentada con seriedad, tolerancia y respeto; el origen de todas las respuestas se mantendrá confidencial y no será motivo de perjuicios hacia la integridad (en todos los sentidos) de los estudiantes, profesores y el plantel educativo.

Sección 1: Datos personales del alumno

Se sondearon en total 44 estudiantes, cuya edad quedó comprendida entre los 17 y 21 años; prácticamente todos son solteros, y 40 de ellos vive con mamá, papá, tutor legal o familiar directo (dos estudiantes no indicaron esta información). De los 44 estudiantes, 16 además de estudiar también trabajan. En la Tabla 1 se muestra la cantidad de alumnos por el tipo de preescolar, primaria y secundaria de procedencia.

Tabla 1. Cantidad de alumnos por su procedencia de institución pública o privada.

Nivel educativo	Procedencia Privada	Publica
Preescolar	3	41
Primaria	1	43
Secundaria	0	44

Sección 2: Percepción del alumno acerca de la asignatura de Matemáticas.

En esta sección, como primer reactivo se les pidió "Escribe hasta cinco palabras que pienses o que se te vengan a la mente cuando escuchas o lees 'matemáticas'". En la Tabla 2 se muestran los resultados; en caso de mostrarse dos en la columna Palabra, la primera es la que fue mencionada más veces.

Tabla 2. Palabras con mayor repetición por los alumnos que asociaron con la palabra "matemáticas".

Palabra	Número de veces mencionada
números	21
ecuaciones/ecuación	9
problemas/problema	8
complicado/complicadas	7
formulas/formula	7
operaciones	7
sumas/suma	7
restas/resta	6
cálculos/cálculo	5
difícil/difíciles	5
divisiones/división	5
interesantes	5
procedimiento/procedimientos	5
ejercicios	4
fracciones	4
útiles	4
aburrido	3
multiplicaciones/multipl	3

icación	
cuentas	2
derivadas	2
figuras	2
flojera	2
integrales	2
letras	2
pensar	2
resultados	2
signos	2
trabajo	2

En otro reactivo la indicación fue "Escribe cinco palabras que pienses o que se te vengan a la mente acerca de 'profesor de matemáticas´". En la Tabla 3 se muestran los resultados; en caso de mostrarse dos en la columna Palabra, la primera es la que fue mencionada más veces.

Tabla 3. Palabras con mayor repetición por los alumnos que asociaron con "profesor de matemáticas".

Palabra	Número de veces mencionada
inteligente	11
estricto	10
aburrido	8
trabajo/trabajos	3
responsable	3
serio	3
chido	2
ejercicios	2
enojón	2
enseñanza	2
honesto	2
ingeniero	2
trabajo	2

En otro reactivo se le solicitó al estudiante la siguiente información "Escribe aproximadamente la edad que tenía el profesor que te haya enseñado peor la asignatura de matemáticas. Además, selecciona la opción en que te dio clases éste profesor". Las edades y el nivel educativo se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Nivel educativo en que peor han recibido enseñanza de la asignatura de Matemática por parte de un profesor y su rango de edad.

Nivel educativo	Número de veces mencionado	Rango de edad del profesor
Primaria	1	45
Secundaria	13	33-50
Preparatoria	28	30-70

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

(*)Dos estudiantes no seleccionaron la opción del nivel escolar. La edad más repetida fue para el profesor de preparatoria, con 33 años.

Posteriormente se les pidió que describieran, justificando, el por qué fue el peor docente en enseñarles la asignatura de matemáticas. En la Tabla 5 se muestran algunas de las oraciones escritas como respuestas en éste reactivo.

Tabla 5. Algunas descripciones del profesor y la clase.

Nivel educativo	Justificación
Primaria	-Solo explicaba una vez sin resolver dudas. -Hablaba demasiado rápido o exageradamente lento. -Los ejemplos del pizarrón los borraba cuando terminaba.
Secundaria	-Muy estricto. -No daba ciertos temas. -Tenía favoritos. -Se le olvidaban los procedimientos. -No estaba preparado. -Se la pasaba en el celular.
	-Se salía del salón. -No explicaba. -No nos daba ejemplos. -Criticaba y se burlaba. -El mismo se trababa en sus ejercicios. -Era muy impuntual.
Preparatoria	-Dictaba mucho y no enseñaba. -No aclaraba bien las dudas. -Pocos ejemplos. -Llegaba tarde. -No explicaba bien. -No aprendía bien porque iba muy rápido. -Creído. -No dejaba muchos ejercicios. -Solo nos decía que página hacer pero no nos explicaba.

A manera de contraparte de éste reactivo, se les pidió que escribieran propuestas de cómo debería enseñarse la asignatura de Matemáticas. En la Tabla 6 se muestran algunas de las oraciones escritas como propuestas.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Tabla 6. Algunas propuestas de los estudiantes para enseñar mejor la asignatura de Matemáticas.

-Hablar claramente.
-Que el alumno aprenda un tema antes de pasar al otro.
-Que se enseñe de las maneras posibles (manual, visual, auditivo).
-Hacer la clase divertida.
-Pacientemente.
-Haciendo ejercicios.
-Que sepa hablar y que se le entienda bien.
-Deberían enseñar con ejemplos sobre el problema.
-Preguntar si entendiste.
-Más fluido sin tanto enredo.
-Interesantes, para generar interés en el tema.
-Dejar menos trabajos de tarea y más en clase.
-Con profesores con paciencia, no aburridos y que te apoyen.

En otro reactivo, se les pidió que seleccionaran si se les ha llegado a solicitar o no que adquirieran un libro como material para cursar alguna asignatura de Matemáticas, a lo cual 38 estudiantes respondieron que "Si". Ahora, dado que su respuesta había sido afirmativa, en un siguiente reactivo, los 38 alumnos seleccionaron solo una opción de las que se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Percepción de los estudiantes que llevaron libro de Matemáticas para la clase, como material de apoyo.

Afirmación	Número de estudiantes
Le he entendido al libro y al profesor por igual	2
Le he entendido mejor al libro que al profesor	6
Le he entendido mejor al profesor que al libro	10
No le he entendido ni al profesor ni al libro	20

Continuando con las herramientas de apoyo en la asignatura de Matemáticas, otro reactivo tuvo como fin el preguntarle al estudiante sí "¿Has llegado a utilizar alguna plataforma en Internet o algún programa de computadora en la clase de matemáticas?". De los 44 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario, 34 respondieron que "Si". Si elegían ésta respuesta, debían seleccionar una opción de tres afirmaciones en un siguiente reactivo. En la Tabla 8 se muestra la información recabada.

Tabla 8. Percepción de los estudiantes con la plataforma digital o programa de computadora para la asignatura de Matemáticas.

Afirmación	Número de estudiantes
Le he entendido mejor a las matemáticas con la plataforma digital o el programa de computadora.	15
No he necesitado la plataforma digital o el programa de computadora para entender las matemáticas.	9
Me he confundido más utilizando la plataforma digital o el programa de computadora.	9

(*)Un estudiante no seleccionó alguna de las tres opciones.

Como otro reactivo dentro de la sección 2, a los alumnos se les hizo el siguiente cuestionamiento "¿Te ha gustado, agradado, atraído, interesado, la asignatura de matemáticas? Selecciona solo una opción", para la cual tenían como respuesta: "Siempre", "A veces" o "Nunca". En la Tabla 9 se muestran los resultados.

Tabla 9. Interés o gusto de los estudiantes hacia la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Siempre	9
A veces	31
Nunca	4

El siguiente reactivo inmediato a éste fue que si la respuesta había sido "A veces" o "Nunca" entonces describieran o explicaran el por qué habían elegido esa opción. Al ser de respuesta abierta, las justificaciones, del por qué a veces o nunca les ha interesado o gustado la asignatura de Matemáticas, fueron diversas. En la Tabla 10 se muestran algunas de las respuestas.

Tabla 10. Algunas justificaciones de los alumnos para la falta de interés hacia la asignatura de Matemáticas.

-Demasiado procedimiento.
-Si te equivocas en algoritmos todo está mal.
-Me aburre.
-A veces no entiendo.
-Me confundo a veces.
-Siento que las matemáticas son buenísimas pero a veces los profesores no te alientan a seguirlas.

-Porque luego algunos temas se me complican mucho.
-Solo me interesan a veces cuando les entiendo a los profesores.
-Me revuelvo.
-Las utilizo en la vida cotidiana.
-Nunca porque luego no me preparo.

Dentro de la evaluación del aprendizaje adquirido por parte de los estudiantes, se suele incluir la prueba escrita o examen. Un reactivo tuvo como fin el que los alumnos expresarán de cómo se sienten, por lo general, al hacer un examen de Matemáticas. En la Tabla 11 se enlistan las palabras que aparecieron con mayor frecuencia en las respuestas.

Tabla 11. Palabras con mayor repetición por los alumnos hacia su percepción del examen de la asignatura de Matemáticas.

Palabra	Número de veces mencionada
nervioso/nerviosa/nervios/ nerviosismo/temerosa	32
presionado/presionada/ presión	11
confundido	9
enojado/molesto	9
pensativo/pensativa	5
ansias/ansiosa/ansioso	4
inseguro	4
seguro/segura	4
aburrido	3
desesperada/desesperado	3
frustrado/frustrada	3
bien	2
preocupado	2

Como penúltimo reactivo de la sección 2 a los estudiantes se les argumentó “Si pudieras reformar los planes de estudio desde preescolar hasta preparatoria ¿reducirías las horas de asignaturas de matemáticas? Selecciona solo una opción”, teniendo para elegir “Si”, “No” o “No sé”. En la Tabla 12 se muestran los resultados obtenidos.

Tabla 12. Opinión de los estudiantes sobre la posibilidad de que pudieran reducir las horas de las asignaturas de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Si	4
No	26
No sé	12

(*)Dos estudiantes no seleccionaron alguna de las tres opciones.

Y como reactivo posterior a éste, se les pidió que justificarán hasta en cinco oraciones el por qué escogieron esa opción. En la Tabla 13 se pueden observar algunas de las respuestas que dieron para cada opción.

Tabla 13. Algunas justificaciones de los estudiantes para haber elegido la opción de la Tabla 12.

Opción	Justificación
Si	-A veces es cansado. -Menos presión. -Menos desesperación. -Por la falta de tiempo en tareas.
No	-Porque siento que hasta faltan más para comprender mejor. -Son fundamentales. -Porque estoy consciente que las matemáticas son indispensables en una profesión, doctorado y en nuestra vida cotidiana. -Porque así sería un problema aprender. -Son difíciles a veces y con menos horas no será fácil. -Porque son necesarias. -El problema no son las horas, el problema son los maestros. -Porque quieras o no siempre se usaran. -No se puede vivir sin matemáticas.
No sé	-Me aburren las matemáticas. -No me interesan mucho. -Son importantes para mi educación. -Es bueno tener varias horas de matemáticas pero no exagerar. -Algunos temas son muy aburridos. -No sé si pueda beneficiar.

Sección 3: Hábitos del alumno en la asignatura de Matemáticas.

Como primer reactivo de esta sección, se les preguntó a los estudiantes la frecuencia con la que hacen las tareas y trabajos extra-clase (tales como proyectos, por ejemplo) de la asignatura de Matemáticas, cuyas opciones de respuesta fueron "Siempre", "A veces" o "Nunca", debiendo de seleccionar solo una opción. En la Tabla 14 se señala la información recabada.

Tabla 14. Frecuencia con la que los estudiantes hacen tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que

Tabla 14. Frecuencia con la que los estudiantes hacen tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Siempre	15
A veces	27
Nunca	2

En caso de que la respuesta haya sido diferente a "Siempre", se les pidió a los estudiantes de que expusieran el por qué realizan a veces o nunca las tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de Matemáticas. En la Tabla 15 se muestran algunas de las respuestas.

Tabla 15. Algunas justificaciones de los alumnos para no hacer siempre las tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de Matemáticas.

-No les entiendo.
-Mucho procedimiento.
-No da tiempo.
-Me aburre.
-Porque luego no le entiendo, pero la mayoría de las veces si las hago.
-Se me olvidan.
-A veces hay más trabajos que hacer.
-Flojera.
-Por lo difícil.
-No me acuerdo de los procesos para realizarlos.

(*)Cuatro estudiantes no justificaron.

Relacionado con estos dos últimos reactivos, en otro se les presentó la siguiente cuestión: "¿Con qué frecuencia haces por ti mismo (sin copiar) las tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de matemáticas? Selecciona solo una opción". Podían seleccionar "Siempre", "A veces" o "Nunca". El número de veces que fue elegida cada opción se muestra en la Tabla 16, y las correspondientes justificaciones fueron muy similares a las expuestas en la Tabla 15.

Tabla 16. Frecuencia con la que los estudiantes hacen tareas y trabajos extra-clase, de la asignatura de Matemáticas, sin copiarlas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Siempre	15
A veces	28
Nunca	1

En la sección 1 del cuestionario se abordó la apreciación y sensación que tienen los alumnos al estar presentado un examen de Matemáticas. Ahora, dentro de la sección 2, se

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Tabla 17. Frecuencia con la que los estudiantes se preparan para presentar un examen de la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Siempre	14
A veces	25
Nunca	5

Si el estudiante eligió "Siempre" o "A veces", se le pidió en seguida de que describiera hasta en cinco oraciones la manera en la que estudia o se prepara para el examen, algunas respuestas se muestran en la Tabla 18. Algunas justificaciones de aquellos que seleccionaron la opción "Nunca" fueron: me estreso; se me olvida estudiar; flojera.

Tabla 18. Algunas justificaciones del cómo los estudiantes se preparan con anticipación para un examen de la asignatura de Matemáticas.

-Estudiar unas horas antes.
-Repitiendo ejemplos.
-Elaborando una guía.
-Revisando apuntes.
-Busco más información.
-Resolviendo problemas.
-Veo videos que expliquen sobre el tema.
-Pido ayuda.

(*)Cuatro estudiantes no justificaron.

Sección 4: Desenvolvimiento social del alumno alrededor de la asignatura de las Matemáticas.

Esta última sección del cuestionario empieza solicitándoles a los alumnos que enlisten hasta cinco lugares donde hagan las tareas y trabajos extra-clase, escribiéndolos de mayor a menor frecuencia. El sitio con la mayor frecuencia fue en la casa de los estudiantes, dentro del cual se englobó cuarto, habitación, escritorio, mesa, sala, comedor; y como segundo lugar se tuvo al salón de clases.

Como siguiente reactivo, se les preguntó a los alumnos "¿Con qué frecuencia pides ayuda a tus papás, tutores legales, hermanos o familiares con las tareas y trabajos extra-clase de la asignatura de matemáticas? Selecciona solo una opción". En la Tabla 19, se puede observar el número de alumnos que respondió "Siempre", "A veces" o "Nunca".

Tabla 19. Frecuencia con la que los estudiantes solicitan ayuda a los miembros de su familia con las tareas y trabajos extra-clases de la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción

Siempre	6
A veces	18
Nunca	19

(*)Un estudiante no seleccionó alguna de las opciones.

En caso de que los estudiantes hayan respondido "A veces" o "Nunca", en seguida se les pidió que redactarán el por qué no les piden ayuda siempre a sus familiares. La Tabla 20 muestra algunas de las respuestas.

Tabla 20. Algunas justificaciones del por qué los estudiantes no solicitan siempre ayuda a los miembros de su familia con las tareas y trabajos extra-clases de la asignatura de Matemáticas.

-Están ocupados.
-La mayoría del tiempo si les entiendo.
-A veces no están.
-No comprenden el tema.
-A veces no saben.
-Porque no tienen tiempo.
-Quiero resolver por mi cuenta.

(*)Dos estudiantes no justificaron.

Siguiendo con la misma línea de cuestionamiento pero ahora la solicitud de ayuda es con los amigos, compañeros y conocidos de la preparatoria. La Tabla 21 muestra las respuestas obtenidas y en la Tabla 22 se muestran las justificaciones de aquellos que eligieron "A veces" o "Nunca" como respuesta.

Tabla 21. Frecuencia con la que los estudiantes solicitan ayuda a sus amigos, compañeros y conocidos de la preparatoria con las tareas y trabajos extra-clases de la asignatura de Matemáticas.

Opción	Número de estudiantes que eligieron la opción
Siempre	12
A veces	28
Nunca	2

(*)Dos estudiantes no seleccionaron alguna de las opciones.

Tabla 22. Algunas justificaciones del por qué los estudiantes no solicitan siempre ayuda a sus amigos, compañeros y conocidos de la preparatoria con las tareas y trabajos extra-clases de la asignatura de Matemáticas.

-No saben.
-Prefiero hacerla sola.
-A veces si le entiendo.
-Son quienes no ayudan.
-En ocasiones mis compañeros explican mejor.
-Porque no le entienden ellos.

(*)Un estudiante no justificó.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

El último reactivo de la cuarta sección se enunció así: "Describe hasta en cinco oraciones las principales distracciones que tiene en una clase de Matemáticas". Como principal distracción se tuvo la interacción que tienen entre sí los alumnos como compañeros, amigos, dentro de la clase; seguido del teléfono celular; después se tuvieron como causas de distracción los ruidos y personas externas al aula, falta de concentración, el que ya no entiendan el tema, la forma de dar la clase del maestro, otras tareas o asignaturas; aburrición.

A manera de cierre del cuestionario, después de incentivar esta recolección de información por parte del alumno, se le proporcionó un espacio en blanco para responder la pregunta "¿Algo que quieras agregar, comentar, opinar, sugerir o exponer? Escríbelo dentro del recuadro".

No todos los estudiantes comentaron esta cuestión. Los que sí lo hicieron se expresaron sobre cómo dar la clase de Matemáticas; la importancia de las Matemáticas; haciendo referencia a algún profesor; y una opinión, comentario, hacia el cuestionario dándole un visto bueno ya que le permiten al interesado (a quien aplica el cuestionario) conocer al cuerpo estudiantil con este tipo de preguntas.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

De la información obtenida en la sección 1, en la Tabla 2 se puede observar que la palabra que más relacionaron los alumnos con Matemáticas fue "números", con veintiún veces, seguido de "ecuaciones/ecuación" y "problemas/problema", con nueve y ocho menciones, respectivamente; en las cuales intuitivamente se puede afirmar que forman parte del léxico de una clase de matemáticas. ¿Qué concepto de número tienen los estudiantes? ¿Es lo más importante de las Matemáticas?

Pero no solamente palabras de vocabulario matemático fueron señaladas, también palabras como "complicado/complicadas" con siete repeticiones, y por debajo de ésta, "difícil/difíciles" con cinco repeticiones, y tomando muy ligeramente como un contraste en comparación con los que no alcanzaron más de una mención se tuvo que cinco alumnos relacionaron "interesante" con Matemáticas.

De manera análoga, para el profesor de Matemáticas (véase Tabla 3), los alumnos relacionaron el adjetivo "inteligente" un total de once veces y solo un punto por debajo se tuvo "estricto", y "aburrido" con ocho repeticiones. Para éste reactivo, los alumnos tuvieron como opción el poder escribir, de su puño y letra, hasta cinco palabras, donde en algunas ocasiones escribieron dos palabras seguidas para poder expresarse. ¿Qué imagen

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

emite el profesor en una clase de Matemáticas como para que los alumnos lo consideren inteligente? Dado que la mayoría o algunos de los conceptos que se ven en las Matemáticas de preparatoria pudieran ser "nuevos" para los alumnos ¿eso justifica entonces que éste adjetivo sobresaliera?

Como fueron estudiantes de nivel medio superior a los que se les aplicó el cuestionario, en el Tabla 4 sobresalió preparatoria como el nivel educativo en el que peor han recibido enseñanza de las asignaturas de Matemáticas, con el 67% (los porcentajes se redondearán al siguiente entero superior en caso de que el decimal sea mayor o igual a cinco) de los estudiantes que si seleccionaron alguna opción de nivel educativo para el correspondiente reactivo. ¿Por qué no fue el 100% si han cursado completamente cuatro asignaturas de Matemáticas en preparatoria? Pese a que son alumnos a los cuales les faltaría un semestre más para terminar el bachillerato, tomando en cuenta de que han transcurrido aproximadamente dos años y medio desde que terminaron la secundaria, aproximadamente el 31% de los alumnos seleccionaron secundaria. ¿Cómo fue la enseñanza del profesor como para que el alumno considerara, desde su punto de vista, como la peor que ha recibido?

En la Tabla 5 se puede observar que efectivamente la manera de dar la clase del profesor fue decisivo así como su actitud hacia los alumnos; esto se vio reflejado por el tipo de respuestas que dieron los estudiantes: actitudinal, didáctico, hábitos, conocimiento y dominio de la asignatura, la manera llevar a cabo la clase, interés para que el alumno aprendiera, trato hacia el cuerpo estudiantil, entre otros. En la Tabla 6, algunas de las propuestas de cómo dar una mejor clase de Matemáticas abarcaron principalmente desde las actitudes del profesor, la didáctica o estrategias de cómo llevar a cabo la clase, tacto hacia los estudiantes, entre otros.

Como parte de las herramientas que se pueden incluir dentro de las estrategias para apoyar la enseñanza-aprendizaje de cualquier materia, y no solo de Matemáticas, el profesor puede optar por solicitarle al alumno que traiga a clase un libro de texto. De los treinta y ocho estudiantes que si han llevado un libro para la asignatura de Matemáticas, el 53% afirmó no entenderle ni al profesor ni al libro, seguido de un 26% de alumnos que le han entendido mejor al profesor que al libro y un 16% que le han entendido mejor al libro que al profesor. ¿De qué criterios se sirve el profesor para solicitar un libro en específico de la bibliografía disponible? ¿El profesor ve como apoyo al libro para la clase, o una sustitución, parcial, a su cátedra? ¿De qué manera le indica el profesor al estudiante que utilice el libro?

El libro de texto pudiera ya no considerarse como la única herramienta o material de apoyo para impartir cualquier asignatura; la tecnología ha entrado de lleno en éste rubro. El 72% de los estudiantes respondió que sí han llegado a utilizar alguna plataforma digital o software para la asignatura de Matemáticas; y de estos, el 46% afirmó que, al utilizar tales herramientas, le han entendido mejor a las Matemáticas. ¿En qué sentido o aspecto ha mejorado su comprensión de los conceptos que se ven en la clase de Matemáticas en la que utilizan la plataforma o software? ¿Hasta qué grado han mejorado? ¿Utilizan estas herramientas solo en la escuela o también tienen acceso a ellas fuera de? ¿Cómo es la plataforma o software que utilizan? ¿Cómo se apoya el maestro en esta tecnología para impartir la clase de Matemáticas?

Al preguntarles si les han gustado, atraído o interesado la asignatura de Matemáticas, aproximadamente el 70% optó por la opción de que ha sido "A veces", un 21% afirmaron que ha sido "Siempre" y el restante "Nunca". En la Tabla 10 se observan algunas de las justificaciones para haber elegido "A veces" o "Nunca". ¿Qué influencia tiene el profesor en este indicador? ¿Qué influencia tiene la infraestructura? ¿Y los recursos, equipos, materiales y herramientas? ¿Qué influencia tiene la sociedad y la familia? ¿Qué predisposiciones, sugestiones, cultura, tiene el estudiante hacia esta asignatura?

En la Tabla 11, la palabra más relacionada con su experiencia al presentar un examen de Matemáticas fue "nervioso/nerviosa/nervios/nervios/nerviosismo/temerosa" con 32 veces de repetición, es decir, que más del 50% de los alumnos a los que se les aplicó el cuestionario se sienten nerviosos al presentar el examen. ¿Por qué se sienten nerviosos? ¿Qué imagen o impresión de un examen de Matemáticas han construido a lo largo de su vida estudiantil? ¿Cómo han sido elaborados los exámenes que han presentado? ¿Cómo se les ha calificado, revisado, considerado, tales exámenes? ¿Cuál es la intención del profesor de Matemáticas al aplicar este instrumento?

Hasta este punto han sido brevemente comentadas las impresiones, percepciones, que los estudiantes tienen acerca de Matemáticas, la asignatura y el profesor, así como los materiales y herramientas de apoyo, con el panorama aproximado de que al 71% de los estudiantes sondeados les ha interesado o gustado a veces la asignatura de Matemáticas, asignatura donde se ven involucrados profesores, alumnos y materiales de apoyo. Sin embargo, el 62% que seleccionaron alguna de las tres opciones como respuesta a, que si pudieran hacerlo, reducir las horas de las asignaturas de Matemáticas desde nivel preescolar hasta bachillerato, optó por "No" reducirlas, donde algunas justificaciones para haber elegido esta opción se muestran en la Tabla 13, tal que resaltó que los alumnos al parecer están conscientes de la importancia de las Matemáticas en su quehacer diario.

Para incentivar aún más el contraste, ¿por qué consideran importantes las Matemáticas pese a que si las perciben con ciertos adjetivos calificativos, como los observados en la

Tabla 2? En su quehacer diario, ¿en dónde aplican Matemáticas? ¿Es el tiempo un factor decisivo en la impartición de las clases de Matemáticas? ¿Y el desempeño del profesor junto con la disposición del alumno?

En la sección 3 del cuestionario, el 61% de los estudiantes mostraron como respuesta "A veces" una disponibilidad para realizar tareas y trabajos extra-clase de Matemáticas, un 34% seleccionaron "Siempre" y el resto indicó que "Nunca" las realizan. Siguiendo con esta idea, se puede separar por un lado el que hagan las tareas y trabajos extra-clase, y que por otra parte que si las hacen sea por ellos mismos, que si bien pueden solicitar apoyo, asesoría, esto no significa copiar ni trascribir la información sin tener conocimiento de lo que se está haciendo. Al preguntarles a los estudiantes la frecuencia con que llevan a cabo estas actividades sin copiar, 28 alumnos respondieron "A veces" como la frecuencia con la hacían las tareas y trabajos extra-clase por ellos mismos; en otras palabras, se puede inferir si bien era regular la frecuencia, si llegaban a copiar, donde sus justificaciones fueron muy similares a las que por qué "A veces" o "Nunca" hacían tales actividades (véase Tabla 15), llegando a afirmar que se les olvidaba el procedimiento o no les entendían, o encontraba dificultad al hacerlos. Si se comparan las Tablas 14 y 16, prácticamente tienen el mismo número de estudiantes que eligieron la opción correspondiente. ¿Con que frecuencia el profesor les debe dejar a los alumnos trabajos extra-clase y tareas como para que la mayoría siempre los lleve a cabo? ¿Cómo son las tareas y trabajos extra-clase que el profesor de Matemáticas les encomienda? ¿Cuál es la finalidad, objetivo, meta, de dejar estas actividades?

Además de los trabajos y tareas, dentro de la evaluación de los estudiantes se suele considerar la prueba escrita o examen, ya que esta puede englobar todos o la mayoría de los conceptos vistos en el periodo a evaluar. Si el 71% de los estudiantes declaró que "A veces" les ha gustado o atraído la asignatura de Matemáticas, el 21% que "Siempre" les ha atraído o interesado y el porcentaje restante que "Nunca", se puede encontrar cierta similitud con otro porcentaje: el 59% afirmó que "A veces" es la frecuencia con la que se preparan para un examen de Matemáticas, el 32% que "Siempre" estudian con anticipación y el porcentaje restante "Nunca".

Como se mencionó en párrafos anteriores, los estudiantes pueden buscar apoyo o asesorías para realizar las tareas y trabajos extra-clase, recurriendo a la gente con la que está en contacto con mayor frecuencia en su quehacer estudiantil. De un día de 24 horas, de lunes a viernes, los estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario pueden llegar a pasar hasta el 29% del día en la institución educativa, es decir, 7 horas por día entre semana; el porcentaje restante del día lo invierten fuera la escuela (trabajo, casa, servicio social, etc.).

Al preguntarles la frecuencia con la que solicitan ayuda con los trabajos extra-clase y tareas de Matemáticas, a sus semejantes de la preparatoria (amigos, compañeros), el porcentaje mayor fue del 67% para los que respondieron que era "A veces" la frecuencia de tal solicitud. Y si ahora la petición de ayuda se hacia a los padres de familia, tutores legales, hermanos o familiares, el mayor porcentaje estuvo casi cerrado entre los que respondieron "A veces" o "Nunca" (véase Tabla 19), 42% y 44%, respectivamente; siendo que el porcentaje de petición de ayuda estuvo más cargado hacia los compañeros y amigos que tienen en la preparatoria, lo cual pudiera deberse a que al pedir ayuda buscan disponibilidad de tiempo de la otra persona y que esté familiarizado con el tema (véanse Tablas 20 y 22), pese a que el lugar indicado con mayor frecuencia para hacer tales actividades fue la casa de los alumnos, y posteriormente la escuela.

La presente información recabada busca mostrar a los estudiantes de matemáticas más allá de lo que el profesor capta como los trabajos, exámenes, tareas, ejercicios, apuntes, proyectos, etc. que los alumnos llevan a cabo al ser producto, evidencia, de su aprendizaje de las Matemáticas. Si bien la mayoría de los reactivos no fueron controlados en el tipo de lenguaje o terminología técnica propia de un estudio más objetivo, las respuestas dadas por los alumnos estuvieron influidas, sobre todo aquellas que fueron abiertas, principalmente por:

1.- La asignatura de Matemáticas que actualmente están cursando y las que más recientemente han cursado. En la Tabla 2, aparecen palabras como cálculo, derivadas e integrales, propias del vocabulario de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

2.- El profesor de Matemáticas que actualmente les imparte la clase y los que más recientemente han tenido. Pese a que no alcanzaron una repetición de más de una ocasión, hubo estudiantes que escribieron el nombre del profesor al pedirles que enunciaran cinco palabras que piensen o que se les venga a la mente acerca de "profesor de matemáticas". De igual manera, en este mismo reactivo, llegaron a redactar la descripción física de los profesores. En la Tabla 4 se puede observar que el nivel educativo de mayor mención fue para preparatoria.

3.- La ubicación del salón de clases. Uno de los dos grupos, a los que se les aplicó el cuestionario, toma clase en un salón que se encuentra ubicado en la esquina de la planta baja de un edificio de dos niveles. Los pasillos que se intersectan en dicha esquina conducen, principalmente, a: la planta superior de dicho edificio, al centro de copiado, a una de las dos instalaciones sanitarias y al edificio donde toman clase los grupos con mayor cantidad de alumnos. Por lo que los sucesos externos a éste salón de clases fueron mencionados como factores de distracción en la asignatura de Matemáticas.

El cuestionario no fue elaborado ni aplicado con intención de ser exhaustivo ni pretendiendo generalizar y homogeneizar a toda la comunidad estudiantil. Únicamente se formuló a manera de un primer acercamiento, servir como exploratorio, dócil de poderse pulir en investigaciones posteriores. Es decir, de manera análoga, como cuando un profesor recibe por primera vez un grupo de alumnos, totalmente nuevo, al inicio de un ciclo escolar, donde es altamente recomendable que haga un diagnóstico, tanto actitudinal, académico (conocimientos previos), de hábitos de estudio, como de estilos de aprendizaje, que sirvan como punto de partida para su clase.

Por tanto, la información obtenida mediante el cuestionario, sin ánimos de afirmar que proviene de casos particulares o un contexto social específico, muestran relaciones que pudiera incentivar una línea de investigación multidisciplinar más objetiva, pudiéndose incluir esta información dentro de los antecedentes de tal investigación, la cual permita establecer problemáticas, dificultades, sugestiones e impresiones de los alumnos que obstaculicen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en nivel medio superior.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., y Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Larios Osorio, V., y Díaz-Barriga Casales, A. J. (coord.). (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro*. México: Editorial Universitaria UAQ.

Martínez, R. J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismos de investigación*, *08*(1), 1-43.

Real Academia Española. (octubre de 2014). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 10 de septiembre de 2016, de http://www.rae.es/

Salinas Álvarez, S. (2010). *Ciencia, tecnología, sociedad y valores 2*. México: Editorial GES.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS PARA ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES

Epistemic Configurations for analysis of the concept of function limit

Telésforo Sol Campuzano, Víctor Larios Osorio
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO.
campuzano_0000@yahoo.com.mx
vilaos@hotmail.com

RESUMEN

En este trabajo se describe el tratamiento institucional que se da al concepto de límite de una función en el curso de cálculo diferencial en algunos libros de texto universitarios utilizando como herramienta de análisis el concepto de configuración epistémica, definido dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción (EOS), también se hace una comparación basada en las configuraciones obtenidas. Se busca dar una respuesta a la siguiente pregunta ¿Cómo puede hacer un profesor el análisis de los libros de texto universitarios para mejorar la argumentación dentro de las demostraciones que involucran el concepto de límite en un curso de cálculo diferencial?

Palabras clave: Argumentación, configuración epistémica, demostración.

ABSTRACT

This paper describes the institutional treatment given to the concept of function limit in the course of differential calculus in some college textbooks using as a tool the epistemic configuration construct, which is defined within the theoretical model about mathematical cognition and instruction, Also made a comparison based on the obtained configurations. It seeks to give an answer to How can a teacher analysis of college textbooks to improve the argumentation in demonstrations involving the concept of limit in a course of differential calculus?

Keywords: Argumentation, epistemic configuration, demonstration.

INTRODUCCIÓN

Un concepto fundamental y al mismo tiempo difícil en el curso de cálculo diferencial en el nivel superior es el de límite de una función lo cual es inmediato de deducir al observar que muchos libros antes de formalizar este concepto trabajan primero con una definición intuitiva. Esto lleva a los profesores a buscar dar de una forma más clara posible el significado de este concepto, considerando que se encuentran con alumnos de nivel superior. Para ello hay que pensar en las prácticas matemáticas, consideradas aquí como se definen en Godino y Batanero (1994), para poder llevarlas a cabo en el salón de clases. Con esto el profesor debe tener la competencia de analizar un mismo tema en diferentes libros de texto, lo cual le permitirá entre otras cosas: tener un panorama amplio respecto a los diferentes enfoques que se le puede dar a un mismo concepto; conocer el tipo de argumentos y demostraciones que el alumnos estudiaran y deberán entender; y ser consciente de los conocimientos previos que el alumno debe tener en los cuales se consideran conceptos, procedimientos, proposiciones, lenguaje matemático y diferentes formas de argumentar.

En el presente trabajo se hace un análisis de una de las herramientas didácticas más utilizadas en los cursos que es el libro de texto. En particular se analizan cuatro libros de texto universitarios utilizados para cursos de Cálculo Diferencial en el tema de límite de una función los cuales son: Spivak (2003), Apostol (2007), Stewart (2008) y Swokoski (1988). Estos libros fueron seleccionados principalmente porque presentan diferentes enfoques de estudio, por ejemplo algunos se apoyan de software, otros son más formales, algunos utilizan más imágenes para aclarar ideas y uno de ellos cambia el orden de los temas.

Para el análisis se echa mano del sistema teórico llamado Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), ya que en este sistema teórico permite estudiar las prácticas matemáticas institucionales considerando como objetos matemáticos primarios: el lenguaje, situaciones problemas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.
La herramienta del EOS que se utiliza principalmente para analizar los libros de texto es la configuración epistémica (CE) pues permite estudiar textos matemáticos como se ve en (Font & Godino, 2006).

Con base en estos elementos metodológicos se nota los diferentes enfoques que los autores han trabajado en la elaboración de sus textos.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

En el EOS se considera que los objetos matemáticos se generan de sistemas de prácticas y se tienen en cuenta los siguientes dos niveles de objetos generados de sistemas de prácticas.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Aquí están las entidades que se pueden observar en un texto matemático.

Segundo nivel: Atributos contextuales. Aquí se tiene una tipología de objetos que se genera de las diferentes formas de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del primer nivel.

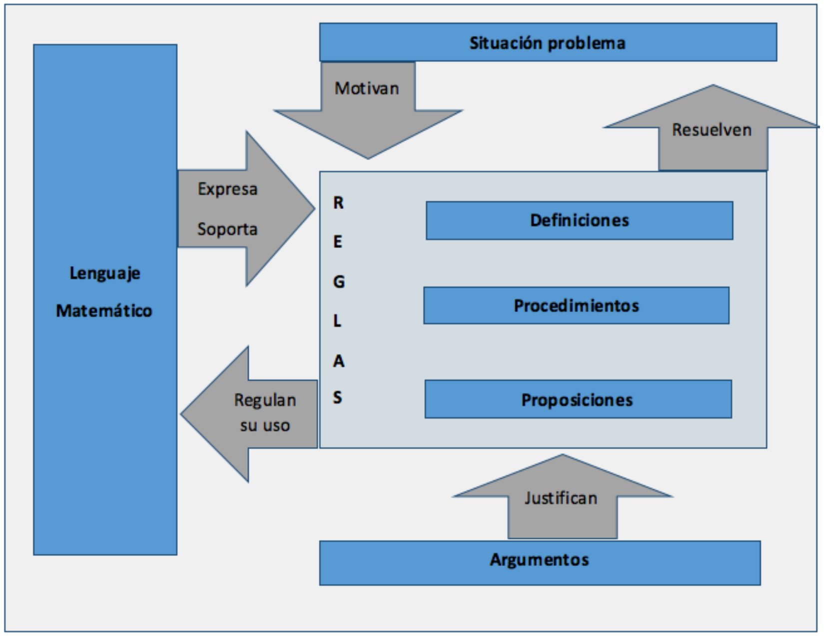
Para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático y en general la actividad matemática dentro del EOS se contempla una ontología formada por los siguientes objetos matemáticos primarios:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios).
- Conceptos – definición (definiciones de función, límite, dominio, etc.).
- Procedimientos, técnicas (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Proposiciones, propiedades, teoremas.
- Argumentaciones (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Con la relación de estos seis tipos de objetos se forman configuraciones epistémicas (CE), donde las situaciones problemas dan pie a la actividad; el lenguaje representa los otros objetos y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que se relacionan por los conceptos, las CE permiten conocer la estructura de las demostraciones. Como se menciona en (Font & Godino, 2006) las configuraciones epistémicas utilizadas en los libros de texto universitarios son de alguna manera laxas respecto a la parte precisión y rigor en el concepto de prueba, donde se busca trabajar en las pruebas de una manera axiomática, donde no se explica cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. La Figura 1 se puede considerar como el modelo básico de las configuraciones epistémicas.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Figura 1 Configuración epistémica



LA DEFINICIÓN DE LÍMITE.

Hay que mencionar que de los cuatro libros considerados, el de Apostol tiene diferente orden en sus capítulos ya que primero presenta los conceptos de Cálculo Integral, después una idea intuitiva de continuidad y posteriormente aborda la definición formal de límite. A diferencia de los otros libros que presentan primero una definición intuitiva de límite y después abordan el concepto formal de límite. Desde esta diferencia de orden para presentar los capítulos con ideas intuitivas del concepto de límite se ve la importancia de analizar y comparar los libros de texto.

También en todos los libros excepto el de Apostol se trabaja con una definición no formal antes de la formal, y en estas definiciones intuitivas no se utiliza el valor absoluto.

Ahora bien, de manera general se describirá la forma en que se trabaja el concepto de límite en cada libro:

- Spivak (2003, págs. 107-131): Se presenta una definición provisional con apoyo de algunas imágenes, con esta definición provisional calculan los límites de algunas funciones y muestran cómo otras no tienen límites, en estos cálculos utilizan las variables ε, δ, la función valor absoluto y muestran algunas formas de calcular los límites de una función, después está la definición formal de límite e inmediatamente se estudia la negación de la definición del límite (esta negación no se menciona en los otros libros), aquí se está definiendo un procedimiento, después se hace un análisis de la notación, se demuestra un lema para después utilizarlo en la demostración del siguiente teorema.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Teorema 1
Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces

$$(1)\ \lim_{x\to a}(f+g)(x) = l+m;$$

$$(2)\ \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m.$$

Además, si $m \neq 0$, entonces

$$(3)\ \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}.$$

Por último se define los siguientes conceptos $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

- Apostol (2007, págs. 156-169): El concepto de límite en este libro es el segundo tema dentro del capítulo de continuidad donde el primer tema es la idea intuitiva de continuidad. Para la definición de límite se da primero la definición de entorno de un punto y apoyado de esta definición se da la definición de límite, después se representa geométricamente el concepto de límite, se dan como ejemplos el límite de la función constante y el de la función identidad, después define limites laterales, hay tres ejemplos de límites laterales, se pasa al siguiente tema que es la definición de continuidad donde se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

En el siguiente tema demuestra el Teorema 1 y es lo último que se enfoca al tema de límites.

- Stewart (2008, págs. 83-116): Se da un acercamiento al concepto de límite mediante la idea de hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto con tres ejemplos apoyados de gráficas, se da una definición de límite no formal (no se hace explícito que la definición no es formal) con apoyo de algunas gráficas, se trabajan algunos ejemplos con esta definición, se definen límites laterales (también de manera no formal), se definen los límites al infinito, se define lo que es una asíntota vertical con el concepto de límite, se dan las siguientes proposiciones llamadas leyes; ley de los límites el cual es prácticamente el teorema 1, ley de potencia y luego ley de la raíz, después se da una proposición a la cual le llaman propiedad de sustitución directa, por último se dan dos teoremas uno que tienen que ver con desigualdad de funciones y límites, el último teorema se llama teorema de la compresión el cual es el teorema 2. (En este libro algunas de las proposiciones son propiedades, leyes y teoremas), en la siguiente sección se define de manera formal todos los conceptos y solo se demuestra el primer inciso del teorema 1.

- Swokoski (1988, págs. 52-80): Se presenta una introducción al cálculo con la que muestran ejemplos donde el concepto de límite formaliza la idea de velocidad y pendiente. Después se expone de manera informal el concepto de límite, en la sección tres de la definición formal (en esta definición se utilizan imágenes que no relacionan los intervalos de longitud 2δ y 2ε) y la última sección es sobre algunas propiedades importantes, entre ellos el teorema 1 y el teorema 2.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA SOLUCIÓN DE PROPOSICIONES RESPECTO AL CONCEPTO DE LÍMITE

El siguiente análisis sobre estructura de una demostración utilizando el constructo de configuración epistémica es sobre la primera demostración que aparece en el libro de Spivak (2003, pág. 120) después de la definición formal de límite, la cual trata de la unicidad del límite de una función en un punto. La demostración que está en el libro es la siguiente:

Teorema 3
Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos, si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.

Demostración
Por ser el primer teorema acerca de límites, será ciertamente necesario traducir la hipótesis en concordancia con la definición.
Puesto que *f* tiende hacia l en *a*, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo *x*,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_1, entonces\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sabemos también, puesto que *f* tiende hacia *m* en *a*, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que para todo *x*,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_2, entonces\ |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Hemos tenido que emplear dos números, δ_1, δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo *x*,

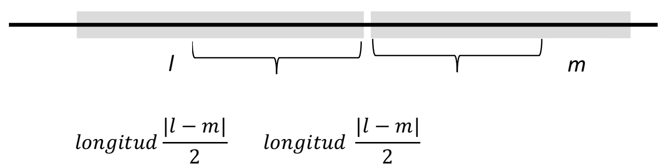
$$si\ 0 < |x - a| < \delta, entonces\ |f(x) - m| < \varepsilon\ \ y$$
$$|f(x) - l| < \varepsilon;$$

basta simplemente elegir $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$.
Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\varepsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones

$$|f(x) - m| < \varepsilon \;\; y \;\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

No puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$. La elección adecuada la sugiere la Figura 2.

Figura 2



Si $l \neq m$, de modo que $|l - m| > 0$, podemos tomar como ε a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un δ > 0 tal que para todo x,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_2, entonces\ |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

$$y \;\; |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2};$$

Esto implica que para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m|$$

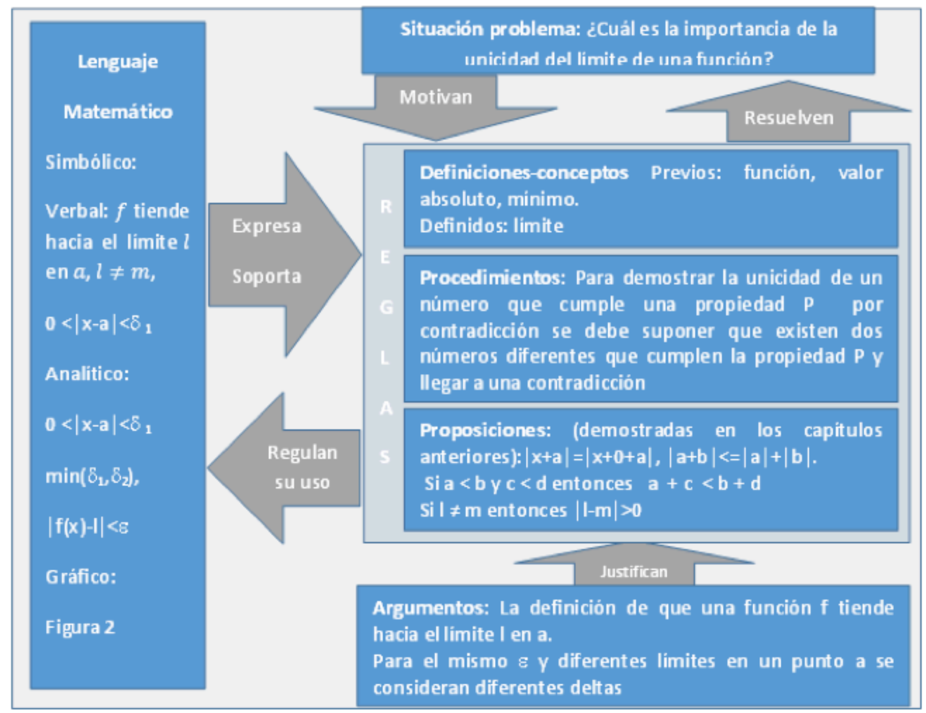
$$< \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2}$$

$$= |l - m|$$

Lo cual es una contradicción.█

La configuración epistémica de la demostración se puede representar con la Figura 3 :

Figura 3: Configuración epistémica de la unicidad de límite



En el libro de Apostol (2007) después de dar la definición formal de límite, solo trabaja dos ejemplos para ejercitar dicha definición y después da el teorema de reglas básicas para operar con límites, con su demostración en la siguiente sección y es prácticamente

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

todo lo que trabaja enfocado al concepto de límite. Es decir no profundiza tanto en este concepto pero lo aprovecha para trabajar continuidad.

El teorema que aparece en todos los libros es el teorema 1, pero este solo se demuestra en Spivak (2003) y Apostol (2007).

La siguiente proposición respecto al concepto de límite que aparece en casi todos los libros es el teorema 2. En el libro de Spivak (2003, pág. 134) está como ejercicio a demostrar en la sección de problemas propuestos, como el teorema de la intercalación en el de Swokoski (1988, pág. 79), como principio de intercalación en el de Apostol (2007, pág. 164) y como teorema de la compresión en Stewart (2008, pág. 105), esta proposición solo aparece con demostración en el libro de Apostol (2007) en la sección de límites en el Swokoski la demostración está en el Apéndice II. En los libros de Stewart (2008, pág. 106) y Swokoski (1988, pág. 79) el teorema se aplica en la misma función para calcular su límite y sólo en estos dos libros se representa gráficamente la idea del teorema 2.

En el libro de Swokoski (1988, pág. 79) el ejemplo aparece de la siguiente forma:
Ejemplo. La función seno tiene la propiedad de que $-1 \leq sent \leq 1$ para todo número real t. Usar este hecho y el teorema de la intercalación para demostrar que:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Solución: Podemos escribir

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Para todo $x \neq 0$. Multiplicado por x^2 (que es un número positivo cuando $x \neq 0$), obtenemos

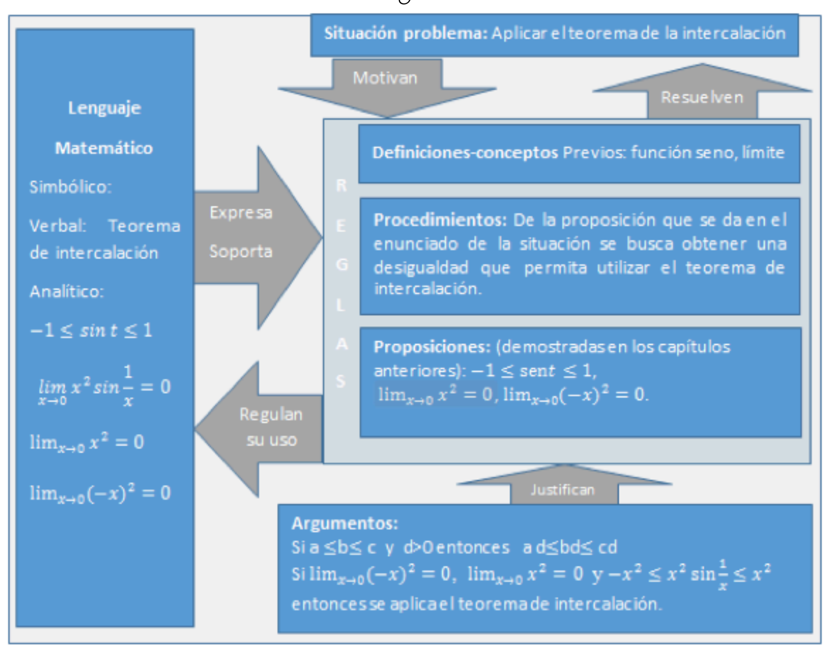
$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x \to 0}(-x)^2 = 0$ y $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$,
Se deduce del teorema de la intercalación, con $f(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

La configuración epistémica de esta solución se puede representar como se ve en la Figura 4:

Figura 4



En el libro de Stewart (2008, pág. 106) aparece de la siguiente forma:

Ejemplo. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

Solución: En primer lugar note que no puede aplicar:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

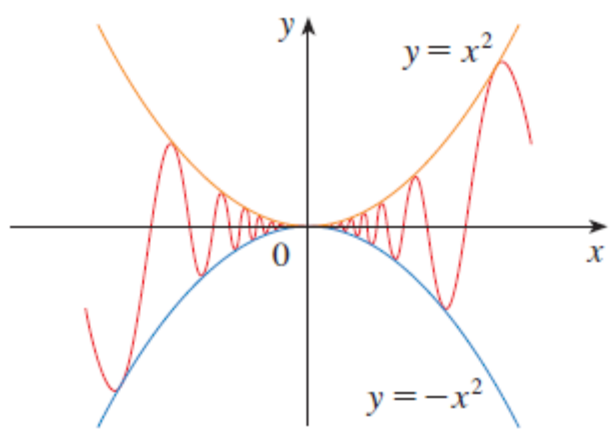
Porque $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ no existe. Sin embargo, como

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

Se tiene, como se ilustra mediante la Figura 5,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

Figura 5 gráfica de la función y= x^2 sin ⟦1/x⟧



Se sabe que

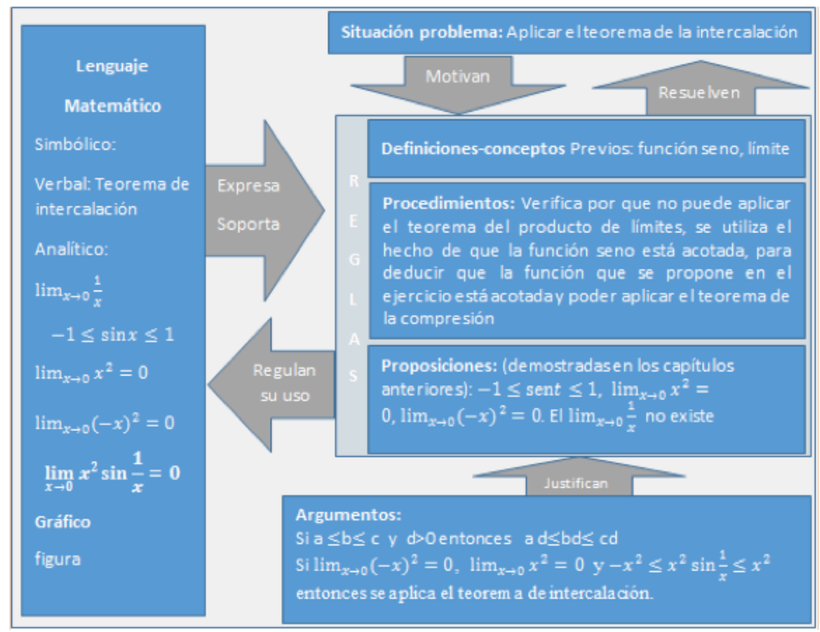
$\lim_{x \to 0} (-x)^2 = 0$ y $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$,

Al tomar $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la comprensión, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \blacksquare$$

La configuración epistémica de la solución anterior se puede representar con la Figura 6:

Figura 6



Se puede observar que la información que se proporciona en el planteamiento del ejemplo en el primer caso es más que la que se proporciona en el segundo, al mencionar que la función seno está acotada. En el segundo caso se maneja el lenguaje gráfico durante la solución y de hecho se utiliza como argumento para deducir que $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$ (Figura 5).

En la segunda solución se refuerza la importancia de las hipótesis dentro de los teoremas al verificar que no se puede aplicar el teorema de que si los límites de dos funciones existen en un punto de su dominio entonces el límite del producto de las funciones en ese mismo punto existe, porque no se cumple una de las hipótesis de este. Lo cual no se considera en la primera solución.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Spivak (2003), cuando aborda la demostración de unicidad de límite, utiliza un lenguaje gráfico que no hace referencia a la variable ε y la imagen no considera que el intervalo (l – ε , l + ε) se toma en el eje *y*.
En el libro de Swokoski (1988) en la definición formal de límite el lenguaje gráfico que se utiliza para representar el intervalo (l – ε , l + ε) al principio no se relaciona con el eje *y*, después en un ejemplo si lo hacen.

El teorema sobre la unicidad del límite de una función no se menciona en Stewart (2008), Swokoski (1988), ni en Apostol (2007). Esto da pie a las siguientes preguntas: ¿Los alumnos serán conscientes de esta proposición? y ¿por qué en un libro menciona una proposición como teorema y en los otros no existe comentario alguno respecto de esta? Con esto el profesor debe decidir si trabaja este teorema en clase o solo lo menciona o definitivamente omitirlo mostrando así la importancia de analizar diferentes libros de texto.

Al tener diferentes procedimientos en la misma situación problema como fue el caso de las dos últimas configuraciones el lector tiene más opciones para entender una misma situación problema o un profesor puede plantear más opciones de solución de un mismo problema a los alumnos.

Las configuraciones dan la estructura de la demostración pero no dan el orden de cómo se dan las relaciones de los conceptos primarios que participan en ellas, una forma de complementar la estructura de las demostraciones podría ser dando un orden de las relaciones que se van dando entre los objetos primarios.

Las configuraciones epistémicas permiten hacer explícitos los objetos matemáticos que se utilizan en los libros de texto universitario los cuales no necesariamente se mencionan en el texto principalmente los argumentos y procedimientos no son tan claros en los libros de texto, Así las configuraciones permiten analizar un texto matemático de una forma más amplia.

Con la configuración epistémica de una situación problema los profesores podrían verificar de manera más puntual los objetos matemáticos en los cuales los alumnos tienen mayor dificultad de manejo.
Al generar las configuraciones epistémicas de una misma situación-problema de un texto matemático en diferentes

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

libros se puede intuir el enfoque que el libro busca respecto a un tema en particular. Por ejemplo, los libros de Apostol (2007) y de Spivak (2003) estudian de una manera más formal el concepto de límite pero de diferente forma pues el primero le da mayor importancia al estudio de la continuidad y es esto para lo que utiliza principalmente el concepto de límite, mientras que el segundo estudia el concepto de límite de manera independiente. Por otro lado los libros de Stewart (2008) y de Swokoski (1988) están enfocados de alguna forma en dar más herramientas para cálculo de límites al dar más proposiciones y menos demostraciones, trabajando con mayor peso en técnicas y mencionando más ideas intuitivas. Algunas preguntas que quedan pendientes por explicar son:

- ¿Cómo se pueden aprovechar las configuraciones epistémicas generadas en el análisis de libros de textos matemáticos para enseñanza de límite de una función?
- ¿Dada una configuración epistémica del desarrollo de una proposición se puede replantear la situación problema que la genera para proponer nuevas situaciones didácticas que faciliten la demostración?

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, M. T. (2007). *Calculus I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra lineal.* Barcelona: Reverté, S.A.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui.* , 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 325-355.

Spivak, M. (2003). *Cálculo inifnitesimal* (segunda ed.). Barcelona, España: Reverté, S. A.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable.* México: sexta.

Swokoski, E. (1988). *Cálculo con Geometría Anlaítica* (Cuarta ed.). Colombia: Grupo Editoria Ineroamerica.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LÓGICA MATEMÁTICA EN UN CURSO PROPEDÉUTICO BAJO LA TEORÍA APOE

A DIDACTIC PROPOSAL FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS LOGIC ON APOS THEORY

Jesús Alfonso Noriega Márquez
DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO, FACULTAD DE INGENIERÍA,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
jalfonsonoriega@gmail.com

RESUMEN:

El siguiente trabajo es una propuesta para enseñar tablas de verdad en un curso propedéutico para la carrera de ingeniería. La propuesta se divide en dos partes, la primera es un análisis de los conocimientos que debe tener un estudiante antes de llevar los cursos de Cálculo Diferencial, presentados en forma de esquemas por la teoría APOE y la segunda parte es una descomposición genética del concepto de tabla de verdad, en el cual se explican las abstracciones que debe ir desarrollando el estudiante para crear las estructuras mentales que formen el concepto.

Palabras clave: propuesta didáctica, tabla de verdad, teoría APOE.

ABSTRACT:

This paper is a proposal to teach truth tables in a preparatory course in Engineering career. The proposal is divided in two parts, the first is an analysis of knowledge must have a student before taking courses differential calculus, presented in the form of schemes in APOS theory and the second part is a genetic decomposition of the concept of truth table in which the abstractions that should be developing the student to create mental structures that form the concept are explained.

Key words: APOS theory, didactic proposal, truth table.

INTRODUCCIÓN

CURSO PROPEDÉUTICO

Muchos de los estudiantes temen estudiar una carrera en ingeniería por la fuerte base matemática que ésta involucra, principalmente por materias referentes al análisis infinitesimal, además que el cálculo es el culpable de que cerca del treinta por ciento de los estudiantes deserten una vez que deciden estudiar una licenciatura en ingeniería (Farfán, 1997). Es por ello que se han desarrollado diferentes estrategias para que el alumno pueda demostrar aprendizaje principalmente en esta área de la matemática. Una de las propuestas que se están trabajando son cursos propedéuticos. La finalidad de un curso propedéutico es poder reforzar diferentes conceptos que el alumno ya cursó, en este caso, dentro de la preparatoria.

Ausubel, Novak y Hanesian apuntan: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983, p. 1). Es por ello que se le debe de dar la importancia requerida a un curso propedéutico. En éste se intenta generar o reforzar el conocimiento que necesita el alumno para poder generar nuevo conocimiento en cursos posteriores. Ausubel indica que es importante saber cuáles son los conocimientos con los que cuenta el estudiante, y éstos conocimientos son los que queremos reforzar dentro del curso propedéutico, en este caso serían los conceptos de lógica matemática, para que estos sirvan como base de los siguientes conceptos que el alumno formará durante la curricula subsiguiente en ingeniería. Además, la descomposición genética propuesta por la teoría APOE requiere de ciertas bases para lograr un esquema de comprensión por parte del estudiante, Barbosa (2003) los nombra Preacción. Si el lector le interesa conocer más acerca de la importancia de un curso propedéutico desde un punto de vista constructivista se sugiere que se revise el artículo de Noriega (2015).

TEORÍA APOE

La teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky para comprender la formación del conocimiento en los estudiantes. Está basada en los trabajos de Piaget sobre constructivismo, la cual nos menciona que el sujeto tiene que construir sus propios conocimientos, y no los puede recibir construidos por los otros, aunque para la propia construcción sea indispensable la interacción entre individuo y medio. Y también se basa en la abstracción reflexiva que es un conocimiento no observable, pues es la

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

persona quien lo construye en su mente a través de relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, es un conocimiento que una vez aprendido ya no se olvida, ya que la experiencia no viene sobre los objetos sino sobre la acción de los mismos.

Para Dubinsky la abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos ya que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción de las acciones matemáticas para la solución de situaciones, a este análisis Dubinsky lo llamo "análisis cognitivo" (Cañas Gutiérrez, 2010).

De este análisis cognitivo surge la teoría APOE, que es llamada así por sus siglas Acción, Proceso, Objeto y Esquema, los cuales son construcciones mentales que produce el sujeto mientas va asimilando el conocimiento. La teoría nos ayuda a investigar el por qué de las dificultades que se presentan al construir un conocimiento. El análisis teórico que se desarrollará en la propuesta se divide en dos partes las estructuras mentales (acciones, proceso, objetos y esquemas) y las abstracciones mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión) (Trigueros, 2005).

Dentro de las estructuras tenemos el más simple que es la acción, la cual es cualquier objeto físico o mental, convirtiéndose en un objeto matemático dentro de la experiencia del alumno. Son acciones que tienden a ser algorítmicas por su simplicidad donde el estudiante comienza a manipularlas, se hacen evaluaciones individualizadas relacionado con la aparición de números algebraicos y cálculo de valores resultantes. Conforme una acción se interioriza (generalmente por repetición) la acción se vuelve interna y se le conoce como proceso. Cuando el alumno llega al proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de transformación. Aquí el estudiante puede crear nuevos procesos por coordinación o reversión. Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera encapsulado para convertirse en un objeto. Una vez encapsulado el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta que permite nombrar el objeto y conectarlo con el proceso. El alumno deber ser capaz de des-encapsular su objeto y regresar al proceso para la resolución de problemas. El último nivel es el esquema, que es una colección de procesos y objetos, donde pueden ser más o menos coherentes, pero el estudiante los utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observado. Un esquema puede tener esquemas subordinados y puede utilizarse para resolver una situación problemática des-encapsulando y trabajando con los procesos y objetos del individuo. Después un esquema puede trabajarse como un objeto. La construcción de los esquemas requiere de un mecanismo llamado generalización, el cual permite un alcance más amplio.

Las abstracciones mentales que intervienen en el proceso de formación del conocimiento son las siguientes: interiorización: que es donde una acción se interioriza a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma. *Coordinación*: la coordinación de los procesos múltiples da como resultado nuevos procesos. Es necesario para un estudiante encontrar elementos de un nuevo tema y reconocer las estructuras subyacentes que permite la aplicación. *Reversión*: permite al estudiante concebir un nuevo proceso, que deshaga la secuencia de transformaciones que comprende el proceso inicial. Es la construcción de un proceso que es una contraorden de un proceso internalizado. *Encapsulamiento*: cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción se convierte en objeto. *Generalización*: permite un alcance más amplio de la utilización del esquema. Se presenta cuando el estudiante amplía el ámbito de aplicación sin cambiar la estructura del esquema. (Meel, 2003).

PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta a trabajar está diseñada para un curso propedéutico, por lo cual se espera que los alumnos posean ciertas nociones de los conceptos, o al menos, los hayan trabajado con anterioridad. La finalidad de la teoría APOE es que el estudiante pueda construir el concepto matemático a trabajar, en este caso el concepto que manejaremos serán las tablas de verdad. Para esto se creó una descomposición genética de las tablas de verdad, y se mencionan las diferentes abstracciones que necesita el estudiante para poder crear estructuras mentales con los cuales logre concebir el concepto trabajado. Se divide en dos partes, por un lado, se realiza un ejercicio, el cual sí un estudiante es capaz de resolver es porque demuestra que tiene los conocimientos bien fundamentados y la segunda parte, en caso que el estudiante no resuelva el ejercicio, consta de la propuesta como tal para que el alumno vaya construyendo el concepto.

En este artículo solo se trabajan las tablas de verdad, pero se espera poder crear las descomposiciones genéticas de los diferentes temas a tratar en el curso propedéutico: lógica

matemática, teoría de conjuntos, trigonometría, ecuaciones e igualdades y desigualdades e inecuaciones.
La idea de la propuesta está basada en el libro "El laberinto mágico" de Ian Stewart (Stewart 2001), en el cual se plantea una serie de problemas o acertijos matemáticos que se tienen que resolver para avanzar dentro del laberinto y poder salir de él. Cada acertijo le sirve a Stewart para poder explicar diversos temas matemáticos y así resolver cada problema al que nos enfrentamos. De la misma manera se plantea diseñar el curso propedéutico, crear un cuestionario, en el cuál, la respuesta de cada pegunta necesite cierto nivel de conocimiento del concepto matemático además de ciertos esquemas a trabajar como el de interpretación y el de resolución. Si el estudiante logra resolver los problemas demuestra que maneja los esquemas necesarios para estudiar una ingeniería, en caso que no logre responder correctamente a los cuestionamientos se intenta desarrollar el conocimiento requerido dentro del curso propedéutico.

LÓGICA

Para la parte de lógica lo que se espera en los alumnos es un correcto uso de las tablas de verdad, para ello se ha encontrado que el concepto se puede dividir en dos partes (Barbosa, 2003). Por un lado, analizamos si el estudiante puede interpretar un ejercicio que necesite uso de las tablas de verdad para su resolución, y por otro lado analizamos si el estudiante conoce las definiciones, teoremas, leyes y propiedades necesarias para poder desarrollar las tablas de verdad. La teoría APOE nos maneja que para cada parte que dividimos el concepto el estudiante necesita manejar dos esquemas diferentes, uno para la interpretación y otro para la resolución. Es por ello que el cuestionario comienza con un ejercicio que está descontextualizado para poder averiguar cuantos y cuales estudiantes manejan el esquema de interpretación.

La *interpretación* la definimos como el conocimiento que necesita el estudiante para poder contextualizar cualquier problema que necesite un análisis, sin que necesariamente esté relacionado con la matemática. Así mismo una vez que resuelva el ejercicio, el estudiante debe ser capaz de regresar el resultado al contexto original.

La *resolución* la entendemos como los conocimientos que necesita el estudiante relacionado con las leyes, teoremas, algoritmos, operaciones, etc. Que son necesarios para poder resolver las tablas de verdad.
La pregunta correspondiente a la parte de lógica es la siguiente:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

1. *¿Qué se necesita para pasar el curso? Justifique sus respuestas*

ANÁLISIS DE ESQUEMAS

La idea del curso propedéutico es conocer el nivel que tiene el estudiante sobre los temas y conceptos que sirven como base para las diferentes materias que va a estudiar en ingeniería, es por ello que el propedéutico se plantea con los conceptos que sirven como pre-acción a los diferentes procesos que desarrollara el estudiante. Por eso se observa que la pregunta no plantea que se trabaje directamente con lógica matemática, mucho menos con tablas de verdad. Para que el profesor pueda observar que: si el estudiante logró identificar y asociar la pregunta con tablas de verdad es porque posee tanto el esquema de interpretación como el esquema de resolución, lo cual indica que el estudiante comprende el concepto matemático y puede utilizarlo y aplicarlo en una gran variedad de problemas que no tienen que ver directamente con la lógica. En caso de no lograr resolverlo o utilizar una técnica diferente a las tablas de verdad es porque el estudiante no posee el esquema de interpretación. Para poder proseguir con el análisis se explicará que se entiende por esquema de interpretación y esquema de resolución.

ESQUEMA DE RESOLUCIÓN

Que el estudiante posea un esquema de resolución significa que es capaz de utilizar los conectivos lógicos para encontrar los valores de verdad de las proposiciones trabajadas, conoce y aplica las leyes, propiedades y la notación para resolver las tablas de verdad. Básicamente el alumno es capaz de resolver cualquier tabla de verdad que se le asigne.

Para que el estudiante pueda alcanzar este nivel de conocimiento es necesario que pase por las etapas anteriores al esquema, las cuales se indican a continuación:

ACCIÓN

El estudiante posee una concepción de acción de la tabla de verdad si es capaz de utilizar la definición de los conectivos lógicos para resolver tablas de verdad de máximo dos valores. Es capaz de mezclar dos o más conectivos, pero no más de dos valores de verdad, realiza los procedimientos de manera mecánica y tiene pocas nociones de cómo utilizar las leyes.

PROCESO

Cuando el estudiante logra entender el origen del conectivo lógico y comprende porque se le da el valor de verdad a cada conectivo entonces el estudiante tiene una concepción de proceso de la tabla de verdad. Aquí es capaz de utilizar

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

su razonamiento para resolver tablas de verdad con más de dos valores de verdad.

OBJETO

Cuando el alumno logra encontrar algunas propiedades o leyes utilizando el razonamiento de la resolución de ejercicios se dice que tiene una concepción de objeto de las tablas de verdad. Aquí entiende las leyes y las aplica cuando son necesarias, no es un procedimiento algorítmico, sino que al entender el origen de los conectivos lógicos utiliza estos para resolver algunos problemas y después logra generalizar algunas leyes o entiende de mejor manera las leyes expuestas por el profesor o algún libro. En este punto es capaz de resolver prácticamente cualquier tabla de verdad que se le presente.

ESQUEMA

El esquema es el conjunto de los procesos, objetos y procesos que generó el estudiante para un concepto dado, entonces cuando el estudiante es capaz de resolver cualquier tipo de tabla de verdad decimos que su esquema es de un nivel sobresaliente. Piaget menciona que el conocimiento no es un procedimiento lineal, sino que es un proceso escalonado, en el cual cada etapa corresponde a un nivel cognoscitivo característico, donde en cada etapa existe una reorganización de los conceptos aprendidos en etapas anteriores. (Piaget y García, 2004). Entonces cuando el estudiante logró pasar desde el nivel de acción al nivel de procedimiento y termina en el nivel de objeto, y va reorganizando cada uno de los conceptos nuevos con los anteriores, logra generar un esquema bastante amplio para trabajar en la resolución de tablas de verdad.

ESQUEMA DE INTERPRETACIÓN

No solo basta que el alumno pueda resolver tablas de verdad, también es necesario que pueda usarlas en contextos diferentes, es por eso que necesita saber interpretar las diferentes proposiciones. Interpretar una tabla de verdad significa que el estudiante es capaz de comprender las proposiciones, conoce el lenguaje matemático, maneja la sintaxis y la semántica para contextualizar problemas de la vida diaria en problemas de lógica. Para que este objetivo se logre se debe pasar por diferentes niveles cognoscitivos.

ACCIÓN

Que el estudiante sea capaz de comprender que son las proposiciones significa que tiene una concepción de acción de la interpretación de la tabla de verdad. Aquí es capaz de pasar del contexto no matemático a un contexto matemático de proposiciones simples, y poder resolverlas.

Sin embargo, no es capaz de analizar o modificar las proposiciones.

PROCESO

Cuando el estudiante es capaz de utilizar varias proposiciones para trabajar con ellas significa que tiene una concepción de proceso de interpretación de las tablas de verdad. Es capaz de trabajar con diferentes y con varias proposiciones y logra entender el significado de estas. Comienza a trabajar la sintaxis y la semántica de las proposiciones.

OBJETO

Una vez que logra entender el significado de las proposiciones y su representación en tablas de verdad es capaz de poder modificarla, por ejemplo, con cuantificadores o negaciones. Comienza a resolver algunos ejercicios sin necesidad de pasarlo a una tabla de verdad y analiza las proposiciones con más detalle. Comprende mejor su sintaxis y su semántica. Cuando el estudiante es capaz de esto se dice que está en la concepción de objeto de la interpretación de las tablas de verdad.

ESQUEMA

El estudiante tiene una concepción coherente de esquema de la interpretación de las tablas de verdad cuando es capaz de contextualizar diferentes ejercicios para poder ser resueltos por tablas de verdad. Aquí se nota que el esquema de interpretación va ligado con el de resolución. Para un estudiante que quiere ser ingeniero es fundamental poder interpretar valores de la vida diaria y poder describirlos matemáticamente.

Si el estudiante es capaz de resolver el ejercicio descontextualizado es porque maneja ambos esquemas, en caso contrario, que no logre resolver el ejercicio, se pretende que el profesor realice una descomposición genética más detallada para poder generar ambos esquemas.

A continuación, se propone una descomposición genética para ambos esquemas en los cuales se irán describiendo tanto los procesos como las abstracciones que debe generar al estudiante a partir de los ejercicios y problemas planteados.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

Como se enfatizó en la introducción un problema que afecta a los ingenieros es la falta de conocimientos sobre modelación y demostración, un ingeniero va a estar trabajando constantemente con modelos y es por ello que en esta descomposición genética se utilizan nociones para que el estudiante pueda modelar y argumentar sus conocimientos. Esto es porque cuando un estudiante utiliza

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

sus conocimientos para generar un modelo matemático o para argumentar algún concepto matemático demuestra que el concepto lo tiene en una concepción de objeto, el cual significa que ha logrado aprender el concepto y lo manipula en diferentes contextos.

Para crear la descomposición genética debemos partir de la definición a la que queremos llevar al estudiante. Una vez que conocemos la definición la descomponemos en los mínimos detalles y trazamos el camino por los cuales el estudiante debe dirigirse para logar unas estructuras mentales coherentes que le permitan asimilar el contenido y la concepción del concepto trabajado. En nuestro caso la definición a la que queremos llegar es la siguiente:

P	$\neg P$	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1

Donde el estudiante no solo debe ser capaz de resolver las tablas de verdad que se le asignen, sino que sea capaz de utilizar las leyes de implicación, asociativa, distributiva, De Morgan, idempotencia, doble negación, etc.

Para que el estudiante pueda llegar a la concepción de objeto de este concepto se propone pasar por los siguientes niveles:

PRE-ACCIÓN

Para poder comenzar con la construcción genética es importante que el estudiante posea ciertos conceptos previos, a los que denomino pre-acción, como menciona Piaget el aprendizaje es una reestructuración de conceptos que ya tiene el alumno (Piaget y García, 2004), entonces para poder generar el concepto de tabla de verdad es de suma importancia que se conozcan y manejen ciertos conceptos previos.

Para el caso de las tablas de verdad es fundamental que el estudiante posea la noción de proposición desde el punto de vista de la sintaxis, referente a la composición y estructura de éstas. Para ello se utiliza una lluvia de ideas o un discurso por parte del profesor indicando que es una proposición, preferentemente de forma vaga donde se indique que es una frase que se puede afirmar o negar. La idea es que el estudiante recuerde las proposiciones y pueda utilizarlas a partir de aquí.

En caso que los estudiantes no hayan trabajado con lógica matemática, que no recuerden nada de cursos anteriores o que no posean el concepto de proposición se sugiere que el profesor se enfoque primero en este concepto hasta que los alumnos lo manejen adecuadamente, como recordamos la base para comprender un buen concepto es tener buenas bases de conocimientos previos. Para que el alumno pueda comprender fácilmente el concepto de proposición se recomienda comenzar con el concepto de término, donde un término es una palabra o un grupo de palabras que se utilizan para hacer referencia a uno o varios objetos. Si nos referimos a un solo objeto decimos que es un término singular y si lo usamos para referirnos a todos los elementos de una clase se conoce como término general. Con ayuda de un par de ejemplos es sencillo que el estudiante pueda concebir el concepto de término. Ayuda mucho cuando es el propio estudiante el que alimenta la clase con más ejemplos, por un lado, para que los compañeros encuentren más opciones de ejemplos y por otro para que el profesor corrobore si el concepto quedo bien aprendido. Una vez que se entiende lo que es el término se puede proceder de forma análoga a la proposición, donde el término funciona como sujeto en una oración y necesita un predicado para poder asignarle un valor de afirmación o negación. Se recomienda utilizar apuntes creados por el profesor de las nociones principales para que el alumno pueda repasar y seguir estudiando en casa.
Ya que el estudiante puede manejar el concepto de proposición se pasa a un siguiente nivel donde trabajara las proposiciones, el nivel de acción.

ACCIÓN

El alumno posee una concepción de acción cuando puede manipular de forma física los objetos con los que está trabajando.

Para que el alumno construya una concepción de acción de las tablas de verdad es necesario que manipule diferentes proposiciones y comience a trabajar con ellas. La manipulación al principio tiene que ser física, esto es utilizando un modelo que le ayude a trabajar más fácilmente. Ahora que el alumno entiende la proposición el siguiente paso es que pueda encontrar una forma para representar sus proposiciones. La idea es que el alumno logre encontrar que el modelo más sencillo a trabajar es con las tablas de verdad, pero si no logra llegar a esta idea es necesario que el profesor le indique cual es el modelo apropiado.

Ya que la tabla de verdad es una representación matemática podemos utilizarla como medio físico para que

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

el alumno manipule sus proposiciones. Los modelos a los que el estudiante debe de llegar, o en su defecto el profesor debe mostrarle son los siguientes:

Negación:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Disyunción:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicación:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Doble implicación:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El alumno poseerá la concepción de acción cuando sea capaz de representar sus dos proposiciones en forma de valores de verdad y a los cuales les pueda aplicar un conectivo lógico. Aquí únicamente utiliza los valores de verdad y los manipula para encontrar algunos valores, pero no razona del por que ese resultado. El siguiente paso en el proceso de descomposición genética es hacer que el alumno interiorice el concepto.

INTERIORIZACIÓN

La interiorización consiste en construir una estructura mental que realice el mismo trabajo que la acción externa, los alumnos logran interiorizar un concepto cuando lo repiten y reflexionan sobre éste.

Aquí se propone a que el alumno realice un análisis sobre la concepción de las tablas de verdad, para llegar a esta reflexión es necesario que el estudiante utilice un ejemplo creado por él y encuentre a partir de los valores de sus proposiciones los resultados obtenidos en las tablas de verdad, un ejemplo puede ser el siguiente:
Basándonos en la pregunta "¿qué se necesita para pasar el curso?", las opciones a trabajar pueden ser las siguientes: pasar el examen y realizar las tareas, donde las proposiciones pueden tener los siguientes valores:

Se acreditó el examen: *Sí*
No
Se realizaron las tareas: *Sí*
No

Como en la respuesta se está utilizando un conectivo "y" nos indica que únicamente se puede acreditar el curso cuando se acredita el examen y cuando se realizaron las tareas, quedándonos un modelo de tabla de verdad como el siguiente:

Se acreditó el examen	*Se realizaron las tareas*	*Se acreditó el curso*
SÍ	*SÍ*	*SÍ*
SÍ	*NO*	*NO*
NO	*SÍ*	*NO*
NO	*NO*	*NO*

Se puede utilizar el mismo método para generar las tres tablas faltantes, donde es el alumno el que genera, por razonamiento, las tablas de verdad. Al repetir el proceso con otros ejemplos, ya sea del profesor o de sus compañeros, podrá llegar a una mejor comprensión. Una vez que entiende el origen de las tablas de verdad significa que interiorizó el concepto para llegar al siguiente nivel.

PROCESO

Se dice que un estudiante tiene la concepción de proceso cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Se puede llegar a la concepción de proceso por dos abstracciones ya sea por interiorización o por coordinación.
En nuestra descomposición genética llegamos a la concepción de objeto por medio de la interiorización. Aquí el estudiante es capaz de reflexionar cuando se le presentan proposiciones aleatorias y es posible que pueda encontrar valores de verdad cuando asocia más de dos proposiciones.

Además de poder reflexionar sobre los valores de verdad de las proposiciones también el estudiante ha ido familiarizándose con la simbología que se utiliza en matemáticas y que es necesaria para el entendimiento de

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

la lógica. Algunos de los símbolos que el estudiante ha ido trabajando en las proposiciones o en la formación de las representaciones por tablas de verdad son los siguientes:

Símbolo	*Significado*
$\Rightarrow$	*Implica*
$\Leftrightarrow$	*Si y solo si*
$\in$	*Pertenece, es un elemento de:*
$\subseteq$	*Subconjunto de:*
$\emptyset$	*Conjunto vacío*
$\forall$	*Para todo*
$\exists$	*Existe*

Ya el estudiante en esta etapa del aprendizaje es capaz de reflexionar, argumentar y resolver diferentes tablas de verdad para más de dos valores de verdad, además de que entiende el origen de los valores que se le asignaron a los conectivos lógicos. Ya el proceso puede enfocarse en la siguiente abstracción.

COORDINACIÓN

La coordinación permite establecer relaciones entre los procesos para determinar nuevos procesos.
Para esta etapa es conveniente que varios de los ejercicios propuestos por el profesor lleven a una tautología, esto es para que el alumno pueda seguir reflexionando y conozca este nuevo concepto. Una vez que maneja y puede encontrar el resultado de verdad que lo lleve a tautologías se pueden establecer diferentes relaciones en sus procesos para llegar a las leyes.
Como la teoría APOE es una teoría constructivista se busca que sea el estudiante el que forma sus conceptos, el que crea sus conocimientos, es por ello que en lugar de darle la ley explicita al estudiante y el demuestre su veracidad, procederemos a que a partir de algunos ejemplos el estudiante pueda encontrar la ley aplicada.

Como el estudiante ya obtuvo la abstracción de las propiedades de la conjunción en las tablas de verdad podemos desarrollar el siguiente ejercicio:

Realiza los siguientes ejercicios:

1.-

A	B	C	$(A \wedge B) \wedge C$

2.-

A	B	C	$A \wedge (B \wedge C)$

3.- Encuentra tres proposiciones que cumplan con las condiciones de las tablas de verdad pasadas.

Una vez que llegue al resultado de ambos ejercicios se espera que pueda reflexionar sobre el resultado y encuentre la ley por sí mismo, generalizando los resultados y encontrando que es verdad la ley propuesta. Aquí trabajamos con otro aspecto de importancia que es la demostración, una vez que verifica que los modelos de las tablas de verdad funcionan para cualquier proposición y comprueba que la ley se cumple para todos los casos a partir de sus modelos y representaciones en tablas de verdad está comenzando a demostrar y argumentar sus ideas, también es un propósito que se tiene en el curso propedéutico que el estudiante comience a demostrar pequeñas leyes o teoremas para una vez que tome el curso de cálculo se le facilite demostrar y entender las demostraciones.

Las demás leyes se pueden trabajar de la misma manera, como el tiempo es corto en un curso propedéutico se propone que se divida el grupo en equipos y cada equipo deduzca una ley diferente para después generalizar sus ideas al grupo. Se aconseja que de ejercicio para el estudiante por su cuenta termine de construir las leyes restantes.

Ya que el estudiante es capaz de coordinar el concepto se dice que lo paso al siguiente nivel, objeto.

GENERALIZACIÓN

Cuando el alumno consigue pensar en nuevos conceptos usando características o propiedades del concepto aprendido se dice que utilizó la abstracción de generalización.

Para poder llegar a esta abstracción se proponen trabajar con analogías que puedan servir de enlace del concepto con otros conceptos que compartan sus propiedades. Un ejemplo en el caso de las leyes puede ser que identifiquen que en teoría de números y en algebra se cumplen algunas propiedades como la legislativa, doble negación, asociativa, etc.

OBJETO

Cuando el estudiante piensa en el proceso como un todo y es capaz de realizar y construir transformaciones sobre esa totalidad se dice que tiene el concepto en la concepción de objeto.

Se han ido trabajando paralelamente los esquemas de resolución e interpretación para que el alumno comprenda que es importante vincular la parte de identificar el problema con la parte de resolución. De nada sirve que un estudiante pueda interpretar un problema y plantearlo por medio de proposiciones si no puede

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

resolverlo por tablas de verdad, así mismo, de nada sirve que conozca los métodos de resolución de tablas de verdad si no es capaz de identificar un problema para resolverlo así.

El alumno en esta etapa ya tiene una concepción de objeto de la tabla de verdad, tanto de identificación como de resolución, ha reflexionado sobre la deducción de las tablas de verdad para los conectivos lógicos, ha abstraído sus propiedades y usado para poder llegar a deducir las leyes generales y pudo identificar diferentes ejemplos en este proceso. Ahora lo que prosigue es que el proceso que ha construido pueda visualizarlo como un todo para transformar ese proceso en uno más general. Para esto se intenta utilizar ejercicios descontextualizados en los cuales necesiten primeramente su identificación y después el proceso de resolución para poder resolver el ejercicio, un ejemplo sería el siguiente: se propone realizar la misma pregunta con la que se inició la parte de lógica matemática que es la siguiente:

1.- ¿Qué se necesita para pasar el curso? Justifique sus respuestas.

Esto es por dos razones, se espera por un lado que el estudiante sea capaz de poder resolver el ejercicio utilizando los conocimientos que ya recordó o aprendió, y por otro lado para que el mismo estudiante compruebe que ha mejorado su aprendizaje. Esto lo lleva al siguiente nivel de abstracción.

ENCAPSULACIÓN

Este proceso se define como la conversión de una estructura dinámica, en este caso el proceso, en una estructura estática, que vendría siendo un objeto, que se genera cuando el individuo debe transformar el objeto para resolver una situación.

Para poder llevar al estudiante a este nivel de abstracción se propone que se continúe con ejercicios de manera descontextualizada como en el caso de la pregunta a-didáctica. Esto es para que comience a utilizar los procesos de identificación y resolución de manera natural, y gracias a los ejercicios sea capaz de interpretar y resolver cualquier problema. Un ejemplo es el siguiente:

Si tenemos un tablero de ajedrez, en el cual le quitamos la última celda de la primera columna y la primera celda de la última columna, ¿es posible cubrir el tablero con 31 fichas de dominó?, pensando que cada ficha de domino cubre dos cuadros del tablero de ajedrez

Como se nota el ejercicio no tiene que ver en primera instancia con lógica, sin embargo, se puede interpretar que cada ficha de dominó cubre dos celdas de tablero de ajedrez, entonces cada ficha cubre una celda negra y una celda blanca, ya que éstas van sincronizadas, una sí, una no. Si nos fijamos en las instrucciones las celdas que quitamos corresponden a dos celdas del mismo color, y como tenemos 31 fichas para cubrir el tablero necesitamos 31 celdas negras y 31 celdas blancas. Aquí es donde utilizamos la lógica, dentro del conectivo de las celdas totales que necesitamos para cubrir el tablero. Como nos quitamos dos celdas del mismo color entonces se entiende que no podemos cubrir el tablero con las fichas de dominó asignadas.

Como se observa el estudiante debe ser capaz de identificar el tipo de problema y poder resolverlo. Con ejercicios de este tipo lo que hacemos es que el estudiante pueda interiorizar sus procesos para poder utilizarlos como un objeto.

DESENCAPSULACIÓN

Este nivel de abstracción consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto.

Para que el alumno pueda resolver ejercicios con los conceptos en el nivel de proceso no solo debe manejarlos como objetos, sino que debe realizar el proceso inverso, esto se refiere a que necesita conocer el procedimiento que utilizó para generar su proceso en objeto y poder regresar para que el objeto se convierta de nuevo en proceso y pueda utilizar los procedimientos para resolver ejercicios.

En el caso del ejercicio pasado se necesita que el alumno pueda identificar el problema como uno de lógica y después pueda resolverlo, para esto es necesario que su concepción de objeto de resolución regrese a una concepción de progreso para que pueda resolver el ejercicio como los diferentes ejemplos que resolvió cuando estaba en este nivel de concepción.

Esta abstracción es fundamental ya que es el puente que necesita el alumno para poder reflexionar sobre el problema que está trabajando.

ESQUEMA

El esquema es el conjunto de los procesos, objetos y acciones que desarrollo el estudiante para comprender un concepto.

En la propuesta se trabajaron dos esquemas de manera paralela, por un lado, la identificación de los problemas y por el otro la resolución, aunque se trabajaron prácticamente juntos se denominan como dos esquemas diferentes por los niveles de abstracción que manejaron, es importante que el profesor, aunque trabaje los esquemas en paralelo, no pierda cada uno de los procesos trabajados, que identifique cada esquema y como se debe ir creando.

Con estos dos esquemas dentro de la estructura mental del alumno como base se pueden ir generando más esquemas dentro de la formación del estudiante. Aunque se trabajan con construcciones mentales diferentes como son los esquemas, se pueden crear en un mismo ejercicio, siempre y cuando el profesor sea consciente de las abstracciones que están realizando los estudiantes y el camino que necesitan seguir para construir el concepto.

CONCLUSIONES

El trabajo que se presentó es un primer avance en la formación de un curso propedéutico bajo la teoría APOE. En el cual se describe una forma para analizar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre la lógica matemática y una descomposición genética para construir los conceptos esperados. Todo basado en una pregunta descontextualizada, a-didáctica, que le permite al profesor ganarse el interés del alumno.

En una primera parte del trabajo se mostró un análisis sobre la pregunta a-didáctica y como, si el alumno puede responder el ejercicio correctamente, demuestra gran conocimiento del concepto de tablas de verdad. Se describen los dos esquemas que necesita el estudiante para responder adecuadamente, por un lado, el esquema de resolución y por otro el de interpretación. Además, se muestran las estructuras mentales que necesita el alumno para comprobar ambos esquemas.

En una segunda parte se realiza una descomposición genética del concepto de tablas de verdad, en el cual se muestran tanto las estructuras mentales como las abstracciones reflexivas que necesita ir trabajando el alumno para una correcta construcción del concepto. En esta etapa se define que es cada una de las construcciones y reflexiones y después se describe cómo se trabajó la propuesta a partir de esta definición, con algunos ejemplos que facilitan su comprensión, trabajando paralelamente tanto el esquema de resolución como el de interpretación.

También se hace referencia a trabajar con modelación y demostración, esto es por dos razones de total interés para el autor, primeramente, por ser dos aspectos que poco se trabajan en las aulas de ingeniería y

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

que es importante que el alumno conozca desde niveles iniciales de su formación y por otro por ser concepciones que necesitan de un manejo del conocimiento muy avanzado, en cual desde la teoría APOE, muestra una concepción de objeto del concepto trabajado. Así es que se trabaja con modelación y demostración dentro de las abstracciones reflexivas para ir creando las diferentes estructuras mentales, el modelar y el demostrar nos ayudan a que el estudiante abstraiga ciertas propiedades que son necesarias para comprender de manera correcta el concepto.

Esta es una primera etapa del curso propedéutico, el siguiente paso es crear descomposiciones genéticas para los conceptos de teoría de conjuntos, ecuaciones e igualdades, inecuaciones y desigualdades y trigonometría, conceptos que son fundamentales para poder crear un aprendizaje en el alumno dentro de materias como análisis diferencial.

REFERENCIAS

Alvarado A. y González M. T., (2013), Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas, *Revista Latinoamericana de matemática educativa*, 16(1), 37 - 63.

Aravena M., Caamaño C. y Giménez J., (2008), Modelos matemáticos a través de proyectos, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 11(1), 49 - 92.

Arrieta J. y Díaz L., (2015), Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 18(1), 19 - 48.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas

Barbosa K. (2003), La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE, *Revista latinoamericana de matemática educativa* 6(3), 199 - 219.

Cañas Gutiérrez, A. M. (2010). Aprendemos Matemáticas. *Innovación y experiencias educativas.*

Carraher T., Carraher D. y Schliemann A. (1991), *En la escuela diez en la vida cero*, Siglo veintiuno editores, séptima edición,

Crespo C. y Farfán R. M. (2005), Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 8(3), 287 - 317.

Crespo C., Farfán R. M. y Lezama J., (2010), Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 13(3), 283 - 306.

Farfán R. M., (1997), La investigación en matemática educativa en la reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 1(0), 6 - 26.

Ferreira A. V. y Burak D. Modelagem Matemática: Uma alternativa de ensino aprendizagem da matemática, Larios V. y González N., (2010), Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica, *Revista latinoamericana de matemática educativa,* 13(4), 147 - 160.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.
Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Educación Matemática*, 221-278.

Noriega J. A. (2015), Importancia y propuesta de un curso propedéutico para estudiantes de nuevo ingreso en ingeniería, Noveno coloquio de posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, 2015.

Rodríguez R., (2010), Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales, *Revista latinoamericana en matemática educativa*, 13(4), 191 - 210.

Solow D. (1993), *Como entender y hacer demostraciones en matemáticas*, Limusa Noriega Editores, México. Primera edición, tercera impresión.

Stewart Ian, (2001), *El laberinto Mágico*, Editorial Critica
Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 5-31.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

EL AJEDREZ, HERRAMIENTA ACCIONADORA DE LAS HABILIDADES COGNITIVAS NECESARIAS PARA EL ESTUDIO DE LA MATEMÁTICA.

CHESS AS TRIGGER TOOL OF THE NECESSARY COGNITIVE SKILLS ON THE PROCESS OF MATH LEARNING.

Edén Ayri Miramontes Hernández
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
e.miramontes0@gmail.com

RESUMEN

El presente artículo expone los beneficios de la práctica sistemática del ajedrez, y a su vez menciona cómo este juego-ciencia puede ser una herramienta accionadora y potencializadora de las habilidades cognitivas necesarias para el estudio de la matemática. Asimismo, se menciona el desarrollo cognitivo definido por Piaget, Se hace una recopilación de las habilidades cognitivas necesarias para el estudio de la matemática y finalmente se muestra cómo se vinculan la matemática y el ajedrez.

Palabras clave: Ajedrez, matemáticas, habilidades cognitivas.

ABSTRACT

This paper presents the benefits of the systematic training of chess, also shows how practicing this science-game could be a triggered tool of the cognitive skills needed to study mathematics, also retrieves the cognitive development described by Piaget, likewise the cognitive skills needed to study mathematics are retrieved, and finally, this paper shows how the chess and mathematics are bounded.

Key words: chess, mathematics, cognitive skills.

LOS BENEFICIOS DEL AJEDREZ, INVESTIGACIONES PREVIAS

Uno de los principales problemas en la enseñanza de la matemática son las dificultades cognitivas mostradas por los alumnos, éstas pueden ser de diferente índole, pero se pueden generalizar de la siguiente manera:

- Capacidad de abstracción limitada.
- Falta de memoria.
- Falta de concentración.
- Limitaciones del cálculo mental.
- Dificultades al intentar crear una heurística para resolver un problema.

Para atacar esta problemática, existen diversas investigaciones y experiencias, tanto en el ámbito deportivo como en el educativo, que se enfocan en el ajedrez, la mayoría de ellos estudian el efecto de éste en el intelecto humano (Charness, 1998; Charness, Tuffiash & Krampe, 2005).

Uno de los primeros estudios que analizaron el efecto del mencionado juego-ciencia, fue realizado en 1925, por los investigadores rusos Djakow, Petrowski y Rudik (1927), éstos investigaron a los grandes maestros del ajedrez que participaron en el torneo de Moscú de 1925, para determinar cuáles eran los factores fundamentales del talento ajedrecístico. Entre otros aspectos, concluyeron que es necesaria una memoria excepcional, habilidad combinatoria, capacidad de concentración y el pensamiento lógico, y que el ajedrez requiere no sólo de esas características para practicarlo, sino que también las desarrolla y ejercita. Los investigadores concluyeron que el ajedrez es un excelente ejercitador de la memoria.

Dicho estudio llevó a conclusiones que eran de esperarse, debido a la naturaleza del ajedrez y de las estructuras mentales necesarias para practicarlo, se decidió que era una buena opción masificar la práctica del ajedrez en la Unión Soviética, con el siguiente comunicado que cita García (2013, pag. 137):

> *"El ajedrez estimula, desarrolla y disciplina la inteligencia; no hay otro juego tan cercano a la lógica pura y a la deducción propias del pensamiento moderno. Sólo eso ya otorga un valor educativo muy grande al ajedrez, pero no es todo: también es una lucha que requiere un gran esfuerzo de voluntad. El número elevado de combinaciones desarrolla la reflexión ordenada y la prudencia. Cada experiencia sirve para aprender y mejorar la capacidad de cálculo. Todas estas cualidades reunidas nos proporcionan un perfil ideal, tanto desde el punto de vista psicológico como intelectual."*

A las investigaciones referidas a las ciencias cognitivas se les ha seguido dando gran importancia; centenares de investigadores en los campos de Psicología, Biología, Fisiología, Neurociencia e Inteligencia Artificial han estudiado las implicaciones entre cerebro, mente y cuerpo en un intento de avanzar en la comprensión de cómo el ser humano piensa, aprende y desarrolla sus capacidades (García, 2001).

Dentro de los trabajos de estas ciencias están los referentes al juego del ajedrez y su relación con el aprendizaje y desarrollo de "estructuras lógico-matemáticas" (Piaget, 1978), así como con las habilidades cognitivas tales como la atención, la concentración, el cálculo, el análisis, el control de los impulsos, el razonamiento lógico, la creatividad, la memoria, la organización, la imaginación, la lectura, entre otras (Blanco 1996), todas ellas esenciales para la aprehensión de conceptos matemáticos y la resolución de problemas de la misma naturaleza.

Kovacic (2012) menciona que dichas investigaciones en general llegaron a la conclusión de que el ajedrez requiere de un manejo adecuado de la habilidad para expresar de forma razonada contestaciones, conclusiones y soluciones a diversos problemas, con lo cual se fomentaría el desarrollo de las capacidades de discriminación, análisis, síntesis y de orientación espacio temporal.

La práctica sistemática de este juego no sólo es beneficio para el intelecto humano, sino que también proporciona técnicas para plantear heurísticas para la resolución de problemas y como lo menciona (MECD, 2014, p. 19,386). En la resolución de un problema de matemática se requieren y ponen en práctica muchas capacidades básicas como leer, reflexionar, planear la heurística, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución y la comunicación de los resultados, dichas capacidades se ejercitan al practicar el mencionado juego.

Asimismo, la práctica del ajedrez estimula las zonas cognitivas en la mente humana de una manera significativa, este hecho otorga un valor educativo importante al ajedrez. "La influencia del ajedrez tanto a nivel cognitivo (atención, memoria, concentración, percepción, razonamiento lógico, orientación espacial, creatividad, imaginación…) como a nivel personal (responsabilidad, control, tenacidad, análisis, planificación, autonomía, discusión, control, tenacidad…) avala su importancia en los sistemas educativos de muchos países del mundo" (Gairín y Fernández, 2010). Mientras que (Martínez-Artero, 2015) cita: "(Maz-machado & Jiménez-Fanjul, 2012) indican que algunos de los componentes de la práctica del ajedrez son la concentración y el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas y del pensamiento lógico, todos ellos necesarios para las matemáticas."

Por lo mencionado anteriormente se reconoce un gran potencial pedagógico en la práctica de este juego-ciencia y se vislumbra la posibilidad de utilizarlo como herramienta en el proceso del aprendizaje; ya que a través de su práctica habitual se desarrollarían ciertas funciones cerebrales que contribuirían a facilitar el aprovechamiento y adquisición de aprendizaje de algunas asignaturas

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

escolares, “con lo cual se observarían mejorías notables en el rendimiento escolar de los alumnos que practican ajedrez de manera sistemática”, (Kovacic, 2012).

Las investigaciones antes expuestas apuestan por la práctica del ajedrez de manera sistemática, ya que cuando un jugador realiza un movimiento, éste va precedido de un proceso reflexivo, que se utiliza para la elección de la jugada (Charness, 1976). Y este tipo de pensamiento reflexivo es esencial para el proceso de aprendizaje de la matemática.

EL DESARROLLO DE LOS PROCESOS COGNITIVOS

La idea central de la epistemología genética de Piaget (1977), gira en torno a que el conocimiento procede de la acción ejercida por el sujeto sobre los objetos, es decir, de la interacción con estos. Piaget (1977) postula que esta interacción siempre está presente propiciando nuevos aprendizajes.

El autor también menciona que el conocimiento es una construcción continua y que cada individuo está ininterrumpidamente creando su propio conocimiento. Asimismo postula que el conocimiento no está preformado ni en los objetos ni en el sujeto, sino que se crea de la interacción entre ellos. Esto conlleva a que constantemente se esté organizando lo que sabemos, es decir, a una permanente construcción y reconstrucción.

Para los empiristas, el conocimiento es una copia de los objetos, pero para el autor de la teoría de la Epistemología Genética, el conocimiento nunca es una copia, sino es una asimilación o una interpretación, es una integración del objeto a la estructura interior del sujeto. Por ello, el conocimiento nunca es directamente moldeado por los objetos observados, siempre es una interpretación o una asimilación de acuerdo con las estructuras internas previamente formadas.

A partir de lo anterior, Piaget (1977) indica que la matemática es construida por la acción del sujeto a partir de la coordinación y de la lógica con que interactúa hacia los objetos; esto es que se construye a partir de cómo interpreta la realidad, es decir, de los conocimientos previos.

Asimismo el autor alude a las estructuras operacionales, y las define como sistemas de transformaciones ejecutadas por el sujeto que pueden ser coordinadas entre sí; menciona que hay una forma internalizada de acciones coordinadas en un sistema lógico cerrado, por ejemplo la clasificación y la seriación.

De acuerdo a lo anterior, una estructura es algo que el niño sabe hacer, y si bien el niño no tiene una idea propia sobre la estructura como tal, sí ejecuta sus acciones sobre lo que debe hacer de forma bien coordinada; esto le permite deducir algunas consecuencias durante el proceso. Así, el pensamiento del niño está formado por una serie de habilidades coordinadas que pone en práctica, aun cuando en su mente no haya una idea abstracta sobre dicha estructura.

Este epistemólogo estableció además *cuatro estadios* por los cuales pasa el desarrollo cognitivo de la mente humana, (sensorio-motor, pre-operacional, etapa de las operaciones concretas, etapa de las operaciones formales), y para Piaget cada nuevo estadio comienza por una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en las precedentes. El estudio de estos es de gran importancia para comprender los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje.

Lo anterior sirve para sustentar que bajo ciertas condiciones, la práctica sistemática de ajedrez puede ayudar a "escalar" estadios con mayor rapidez, es decir, se podría pasar de la etapa de las operaciones concretas a la etapa de las operaciones formales con mayor facilidad. También otorgaría beneficios al individuo una vez alcanzada la cuarta etapa, ya que la práctica sistemática del mencionado juego potencializa la capacidad de razonamiento lógico deductivo e inductivo, capacidades propias de este estadio.

LAS HABILIDADES COGNITIVAS EN LA MATEMÁTICA

Si se habla de accionar y ejercitar las habilidades cognitivas necesarias para la matemática, es preciso determinarlas.

Hernández, Delgado & Fernández (2001) consideraron las habilidades que se presentan con frecuencia en el estudio de la matemática y procuraron generalizar éstas tanto como les fue posible. Siendo imprescindibles para el estudio y formación matemática, las clasificaron de la siguiente manera:

Interpretación:

"…atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate. Permite adaptar a un marco matemático el lenguaje de las otras disciplinas de estudio, para luego traducirlo de nuevo al lenguaje del usuario…" (Malva, Rogiano, Roldán & Banchik 2008, pag, 38). La habilidad de la interpretación matemática tiene relación con lo que el niño conoce previamente y el uso de lenguajes a su alcance. Así el niño puede interiorizar el objeto matemático, comprenderlo y ser capaz de explicarlo con sus propios recursos.

Identificación:

"Distinguir el objeto matemático de estudio matemático por sus propiedades, características o rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan las mismas características distintivas. Su formación complementa al sujeto con un recurso teórico insustituible para la toma de decisiones y la resolución de problemas. Contribuye a la formación de un pensamiento matemático riguroso, reflexivo y profundo. En la formación de esta habilidad es imprescindible la concepción sistemática de una ejercitación variada donde estén presentes ejercicios de corte teórico donde se utilicen las definiciones, así como el trabajo con otras condiciones necesarias y/o suficientes." (Malva, et al 2008, pag 39).

Al redefinir al objeto en estudio por sus propiedades se está poniendo en práctica la habilidad de la clasificación y la discriminación indispensables para la toma de decisiones y la comprensión y resolución de problemas. Esto contribuye a que se forme el pensamiento abstracto y reflexivo. Tiene gran importancia la capacidad de estructurar definiciones y resolver ejercicios de razonamiento.

Recodificar:

"Transferir la información de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Es expresar el mismo tipo de objeto a través de formas diferentes, permite la flexibilidad del pensamiento en la resolución de problemas y abordarlo desde otra perspectiva. Esta habilidad distingue perfectamente al experto del novato. El experto no sólo es capaz de ver analogías y formas que permiten la transformación donde otros están desorientados, sino que se persuade primero de que exista un teorema que justifique tal acción y la validez de la interpretación que se pueda dar al resultado hallado. La habilidad de recodificar posee en su sistema operatorio la acción transformar y esta está básicamente ligada al concepto de función" (Malva, et al 2008, pag 39). El pensamiento flexible, creativo es una habilidad indispensable en la búsqueda de soluciones a un problema. Así, no sólo es importante el resultado, sino la búsqueda de los diversos caminos para llegar a él.

Calcular

"Su formación debe ser analizada en virtud de automatizar aquellos algoritmos de cálculo que realmente sean necesarios y que reporten desarrollo al estudiante" (Malva, et al 2008, pag 41). Esta habilidad, que consiste en saber resolver los algoritmos de manera aprendida debe ser complementada con la reflexión y viceversa para propiciar la comprensión y la resolución de los problemas matemáticos y de la materia en sí.

Hernández, al (2001) plantea otras habilidades cognitivas como son: *algoritmizar, definir, demostrar, modelar, resolver, optimizar.*

Considero importante añadir a la lista la capacidad de *discriminar*, ya que ésta forma parte esencial en la planeación de la heurística para resolver un problema determinado, ya que al interpretar y plantear el camino a seguir para la resolución de un problema, es importante identificar los caminos que no nos son útiles.

Como se ha mencionado en la primera parte, la práctica del ajedrez ejercita las habilidades antes mencionadas. El ajedrecista hace uso de éstas al momento de tomar decisiones y prever las consecuencias que tiene mover una pieza durante la partida.

Asimismo, García (2001, pag 91) define los elementos del pensamiento de alto nivel, clásicos en el jugador que lleva a cabo una partida de ajedrez de nivel, estos son:

- *Selección de estrategia y formación de la representación mental* de posición a la que le gustaría llegar en una etapa posterior del juego.
- *Planificación* de pasos necesarios para ejecutar la estrategia y llegar a obtener el estado deseado de meta.
- *Los procesos de actuación* involucran necesariamente la implementación de un plan.
- *Evaluación de planes (estrategias*). Supone cálculo mental minucioso y sistemático de resultados probables de varios a muchos movimientos por delante.
- Los planes deben ser constantemente actualizados como resultado de los movimientos del adversario, lo que implica sofisticadas *inferencias* y una gran *flexibilidad intelectual.*

Se puede observar que los elementos del pensamiento definidos por García (2001) no sólo coincide con las habilidades cognitivas mencionadas anteriormente (interpretación, identificación, recodificación, calcular, algoritmizar, discriminar, etc), sino que también ejercitan estas habilidades mediante un entrenamiento sistemático.

VÍNCULO ENTRE EL AJEDREZ Y LA MATEMÁTICA

Posiblemente el estudio más significativo que analizó la influencia de la práctica del ajedrez en el aprendizaje de la matemática lo cita García (2013, pag 139):

> *"El estudio más significativo es el de la escuela Olewig de Tréveris (en alemán, Trier); durante más de cuatro años, la mitad de los alumnos de un curso de primaria sustituyó una hora semanal de matemáticas por una hora de ajedrez, mientras la otra mitad seguía recibiendo las mismas horas de matemáticas, sin ajedrez."*

Los resultados de este estudio revelaron que al final del curso, los niños que practicaron ajedrez obtuvieron muchos mejores resultados en matemáticas, a pesar de haber tomado una hora menos de matemáticas por semana.(García, 2013, pag 139).

Ahora resulta prudente mencionar este ejemplo de cómo la matemática se hace presente en el tan mencionado juego. Continúa siendo una incógnita si el creador del ajedrez construyó los movimientos y reglas de éste tomando como base la matemática.

Por otra parte, diversas áreas de la matemática han interactuado con el ajedrez, tales como la teoría de grafos, la combinatoria e incluso el álgebra moderna, a continuación se presentan dos ejemplos donde se involucra la combinatoria en el juego de ajedrez.

En este sentido, Bondsdorff (2009) plantea el siguiente problema:

¿Cuántas partidas de series de movimientos de mínima extensión terminan en mate por el movimiento del alfil del flanco de dama blanca? Sólo mueven las blancas.

Solución:

Sea la partida 1.d4, 2.Af4, 3.Dd3, 4.Dc4, 5.Axc7, 6.Axd8, 7.Dxc8, 8.Aa5++, (igualmente 8.Ab6++, o Ac7++) [1] . Como el séptimo movimiento ha de ser forzosamente Dxc8 y el octavo ocasiona el mate, calcularemos primero de cuántas maneras son realizables los seis primeros movimientos. Para este fin nos valdremos del siguiente planteamiento que indica el número de posibilidades:

- 1.d3, y 2.Dd2 =1,
- 1. d3, y 2.Af4 =6,
- 1. d4, y 2. Dd2 =1,
- 1. d4, y 2Af4 =18,
- 1. d4, y Dd3 =8.

La suma de las posibilidades parciales se deben multiplicar por 3, porque esta cifra representa el número de movimiento con que se puede dar mate: a saber; 8. Aa5++, 8. Ag6++ y 8. Ac7++. El número de partidas será, $3 \, x \, 34$ = 102.

El mismo Bondsdorff (2009) ofrece este otro problema:

¿Cuántas partidas terminan brevemente en mate por series de movimientos exclusivamente de peones o de caballos? Sólo mueven las blancas.

<u>Primer caso:</u>

[1] Notación algebraica utilizada en las partidas de ajedrez.

Éstas adelantan los peones e y g hasta la sexta horizontal; Luego dan mate con exf++, o con 7 gxf7++. El número de partidas es:

$$\frac{6!}{3!\,x\,3!}\,x\,2 = 40.$$

Segundo caso:

Sea, por ejemplo, la partida 1.Cf3, Cd4, Cc6, 4Cxd8, 5Ce6, 6Ccs, 7. Cd5, y 8.Cxc7++. Al caballo del flanco de dama le bastan 3 recorridos para alcanzar el puntos c7, mientras el del rey tiene que hacer 6 recorridos de 4 movimientos cada uno para llegar ad8, de donde puede ocupar a casillas diferentes, lo cual no impide que el otro caballo realice igualmente mate desde c7. Por lo tanto se tiene:

$$\frac{7!}{2! * 5!}\,x\,3\,x\,6\,x\,3 = 1134.$$

Los problemas anteriores son ejemplos de cómo el ejercicio del juego de ajedrez estimula el pensamiento matemático.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Las dificultades cognitivas mencionadas al inicio de este artículo nos dan un punto de partida para el uso del ajedrez como herramienta pedagógica, ya que la práctica de éste no sólo acciona las habilidades cognitivas que el alumno aún no ha desarrollado, sino que también ejercita las ya adquiridas.

Esto no quiere decir que el uso del ajedrez sea la panacea de la enseñanza matemática, ya que no sólo se trata de que los alumnos implicados lo jueguen. La utilización de esta herramienta (ajedrez) va más allá, se requiere de un entrenamiento sistemático que implica la enseñanza de temas tanto estratégicos como tácticos dentro del ajedrez. Estos serán la base del entrenamiento sistemático (resolución de problemas de cálculo, interpretación posiciones específicas, análisis de partidas de grandes maestros del ajedrez, etc). Sólo así se le podrá sacar provecho de este juego como recurso pedagógico.

Se ha hecho evidente que la práctica del ajedrez tiene influencia en la cognición humana (atención, memoria, concentración, percepción, razonamiento lógico, creatividad, imaginación, análisis, planificación, etc), y que no sólo es un juego, sino que también aporta múltiples beneficios al intelecto humano.

Los resultados mencionados en el presente, vislumbran la posibilidad de que el ajedrez pueda ocupar un lugar dentro de las escuelas tanto públicas como privadas, por las tantas virtudes atribuidas a éste para la mente humana.

Esto implicaría la capacitación de los instructores de ajedrez, y esta inversión, puede ser realmente beneficiosa para los alumnos que lo practiquen y estudien. Si se logrará introducir al ajedrez como una herramienta de enseñanza en las escuelas en México, esto podría significar un avance importante en la educación matemática, atacando directamente a la dificultad que lleva la comprensión de ésta.

Asimismo, la práctica de este deporte puede aportar múltiples beneficios y, bajo ciertas condiciones, puede acelerar y facilitar el <<paso>> entre los estadios definidos por Piaget (sensorio-motor, pre-operacional, de las operaciones concretas y las operaciones formales).

El valor educativo atribuido al ajedrez en el presente, da pie al autor para desarrollar una propuesta didáctica basada en un entrenamiento sistemático de éste. Es importante hacer énfasis que dicha propuesta tendrá como objetivo el ejercicio del ajedrez de una forma estructurada de tal manera, que se vincule con el desarrollo de las capacidades cognitivas y el estudio de la matemática, para con ello buscar una alternativa y superar los problemas a los que actualmente se enfrenta su enseñanza.

REFERENCIAS

Blanco, U. (1996). Sistema Instruccional de Ajedrez. (Tesis doctoral no publicada).

Congreso de la República, Caracas.

Bonsdorff, E., Fabel, K., Riihimaa, O. (2009). Ajedrez y matemáticas. España: Ediciones MA40.

Charness, N. (1976). Memory for chess position.Resistance to interference. Journal

of Experimental Psichology: Human learning and memory, 2, 641-653.

Charness, N. (1998). Perception and memory in chess: A royal wedding? Contemporary Psychology, 43, 416-417. http://dx.doi.org/10.1037/001681

Djakow, H., Petrowski, L., & Rudik, J. (1927)."Psychologie des Schachspiels" ["Psicología

del Ajedrez"]. Berlin: Walter de Gruyter.

Ferguson, R. C. (1995, enero). Chess in Education Research Summary. Ponencia presentada en el la Conferencia "Chess in Education A Wise Move ", Manhattan, Estados Unidos.

Fernández Amigo, J., & Gairín Sallán, J. (2008). Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Recuperado de http://ddd.uab.cat/record/36549

García Garrido, Ferrán. (2001). Educando desde el ajedrez. España: Paidotribo.

García, Leontxo. (2013). Ajedrez y ciencia, pasiones mezcladas. España:Planeta.

Hernández, H, Delgado, J., Fernández, B. (2001). Cuestiones de didáctica de la matemática.

Kovacic, Diego María; (2012). AJEDREZ EN LAS ESCUELAS. UNA BUENA MOVIDA. PSIENCIA. Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica, . 29-41.

Malva, Rogiano, Roldán & Banchik (2008, pag, 38).

Martinez-Artero, Rosa (2015), El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, revista Números, Volumen 89, julio 2015, páginas 9-31.

Maz-machado, A., & Jiménez-fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria Chess to work patterns in mathematics in Primary Education, 29(2), 105–111.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE n.° 52, pp. 19349-19420.

Piaget, Jean, García Rolando(1982). Psicogénesis e historia de la ciencia. México: Siglo veintiuno editores.

Yale University. *Piaget explica a Piaget* (1977) [video]. Recuperado de: http://youtu.be/nuDjscvqE08 publicado 28 mayo 2013.

PROPUESTA A-DIDÁCTICA TRANSDISCIPLINARIA PARA RECONOCER LA DEPENDENCIA ENTRE VARIABLES EN EL LABORATORIO DE QUÍMICA EN BACHILLERATO

A transdisciplinary didactic proposal to recognize the dependence between variables in the laboratory of chemistry in high school

Andrea Liliana Rojas Reséndiz
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
andrea.rojas@uaq.edu.mx

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

RESUMEN

En todas las ciencias es fundamental el papel de las matemáticas. Para cualquier persona resulta un obstáculo el diferenciar la dependencia entre variables, sin embargo, es esencial para identificar las causas y efectos de cualquier fenómeno. En los cursos de matemáticas convencionales no se suele ligar a otras áreas del conocimiento con ejemplos reales por lo que los estudiantes suelen no encontrarle utilidad ni sentido a varios de los conceptos matemáticos. Este problema se puede trabajar y mejorar con un enfoque transdisciplinario. La propuesta que planteamos en este trabajo es una propuesta para utilizar el Laboratorio de Química como materia para desarrollar habilidades matemáticas a partir de una situación a-didáctica, basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Los alumnos realizarán mediciones de densidad, a partir de las cuales descubrirán cómo esta propiedad tiene una relación dependiente con las variables: masa y volumen; con la intención de que después de varias actividades a los alumnos les quede claro en distintos ambientes científicos la dependencia entre variables. Dicha propuesta está en fase de desarrollo debido a los tiempos de inversión, sin embargo, en este trabajo se muestran los resultados esperados.

Palabras clave: dependencia entre variables, teoría de las situaciones didácticas, situación a-didáctica.

ABSTRACT

On overall science, Mathematics play an indisputable rol. In order to identified causes and phenomes, it is deeply necessary to determine the right relation among variables. In some courses teachers tend to exemplified drivel mathematic situations, not meaningful, therefor students find Mathematics useless. This could be remedied with a transdisciplinary approach. As an answer, this paper gives evidence of Mathematics skills developed under real problems, focusing on the "Theory of didactical situations", starting from a lecture like situation at the Chemistry Laboratory where pupils must make calculations in order to get the mass and volume and be able to identify different environments in which they can apply meaningfully some math concepts.

Key words: dependence between variables, theory of didactic situations, a-didactic situation.

INTRODUCCIÓN

Para las matemáticas la distinción entre variables dependientes e independientes no es tangible a menos que se pongan en un contexto. Para otras ciencias es mucho más sencilla la identificación de este tipo de variables. Nuestra propuesta se contextualiza en el Laboratorio de Química, pues es una materia que se presta con facilidad al trabajo de análisis de la dependencia entre variables. Esta materia se imparte en el bachillerato de la Universidad Autónoma de Querétaro en el tercer semestre, antes del estudio del Cálculo de una variable, es decir, antes de que el estudiante estudie de manera específica la dependencia entre variables.

La densidad como variable dependiente

En la materia de Laboratorio de Química existe una práctica llamada "Mediciones fundamentales: masa, volumen y densidad". La densidad es una propiedad intensiva, es decir no depende de la cantidad de materia que contenga, es una propiedad física de la materia, es una magnitud escalar que tienen las diferentes sustancias.

La densidad absoluta se define por la relación entre la masa y el volumen de una sustancia, a temperatura y presión fijas, de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Donde: ρ = Densidad, m = Masa, V = Volumen.

Podemos decir que la densidad de una sustancia depende de la masa y del volumen de una solución por lo que para mostrar cuales son las variables dependientes y las independientes se realizará la actividad propuesta.

Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) es una de las teorías que intenta explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje, creada por Guy Brousseau en los años sesenta del siglo pasado. La TSD se conoció mejor a partir de 1986 con la tesis "Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques". Esta teoría consolidó a la Didáctica de las Matemáticas como la ciencia que lleva su nombre.
La TSD toma en consideración el siguiente esquema triangular:

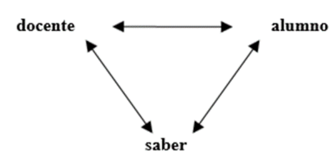


Figura 1. Triángulo de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Los elementos del triángulo los describe D'Amore (2006) de la siguiente forma:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

- el *saber*. Su definición pertenece al dominio de los expertos de la disciplina, el saber no está en los libros, es la comprensión del libro, el saber es una actividad intelectual humana;
- los *estudiantes*. Como sujetos biológicos, afectivos, epistémicos (psicología del aprendizaje) o sociales;
- el *maestro*. El mismo puede ser estudiado como sujeto social, institucional (estatuto, funciones), pedagógico (sus modelos implícitos) y afectivo.

Plantea Cornu & Vergnioux (1992) que el tratar con la enseñanza y el aprendizaje siempre tendrá que relacionar al maestro, al saber y al estudiante, por lo que no se debe de menospreciar a ninguno. Así mismo, Yves Chevallard (1985) explica que el maestro se ve inmerso en relaciones con el saber que son muy delicadas; entre ellas, la *transposición didáctica* del *saber sabio* (que surge de la investigación), al *saber enseñado* (el de la práctica en el aula). Es decir, el saber es el conocimiento reconocido por una institución, la interpretación de ese saber es el saber por enseñar que transmitirá el profesor a los alumnos, y el saber que en realidad termina apropiándose el alumno es el *saber enseñado*. Se sugiere que el saber enseñado no debe ser demasiado cercano ni distante al saber sociofamiliar, si es muy cercano al saber matemático será incomprensible y si es muy lejano al saber matemático será superado por el sociofamiliar, por lo que, deberá existir un equilibrio.

Fuera del aula existen influencias, ya sea el ambiente social en el que se vive (la familia, la sociedad, la cultura, etc.) o el sistema escolar (la Universidad, los programas de estudio, la Secretaria de Educación Pública, etc.), a estas influencias se les llama *noosfera*, concepto introducido por el filósofo francés Pierre Teilhard de Chardin; la noosfera se deberá tomar en cuenta por parte del profesor en su acción didáctica.
Brousseau (1986) reconoce dos formas de crear una situación:

- *Situación didáctica*
  Es una situación que el maestro crea teniendo en cuenta el estado cognitivo de sus estudiantes, las exigencias del currículo, la transposición, el ambiente; él propone la situación a sus propios estudiantes de forma explícita, operando como mediador entre el saber por enseñar y los propios estudiantes, declarando explícitamente lo que quiere obtener, interviniendo activamente en su proceso de aprendizaje, poniéndose en el lugar de los estudiantes en el intento de explicar cada detalle, de declarar abiertamente lo que hay que hacer, lo que hay qué decir, cómo se hace para resolver, para escribir, etc. Todo es explícito, tanto que el *contrato didáctico* es el elemento triunfante: el estudiante está ocupado no tanto en aprender matemáticas sino en aprender cuáles son las expectativas del maestro, sobre todo las implícitas.
  Para resolver la cuestión del aprendizaje es necesario romper el contrato didáctico.

- *Situación a-didáctica*

  Es una situación que el maestro crea teniendo en cuenta el estado cognitivo de sus estudiantes, de las exigencias del currículo, de la transposición, del ambiente; él la plantea de forma *indirecta* o, mejor, si es posible, *no la propone* de hecho, pero hace que sea necesario entrar en ésta.

  En esta situación el profesor propone un trabajo o actividad sin decir qué objetivos pretende alcanzar. Se desarrollan necesariamente las siguientes seis fases implicadas en la situación a-didáctica:

1. Devolución. "Proceso o actividad responsable a través de la cual el maestro propone al estudiante que empeñe su propia responsabilidad en la resolución de un problema (más en general: en una actividad cognitiva) que se convierte entonces en problema del estudiante, aceptando las consecuencias de esta transferencia momentánea de responsabilidad" (D'Amore, 2006). Por lo que, el estudiante sabe que está aceptando la responsabilidad de aprender algo, pues entiende que el objetivo de la actividad es el aprendizaje, pero no sabe qué está por aceptar.

2. Implicación. Esfuerzo relativo de los estudiantes, asumido como responsabilidad personal. El alumno trabaja, busca, descubre, discute, pero el profesor actúa sólo como orientador de la situación, limitándose a vigilar la actividad.

3. Conocimiento personal. Construcción personal del conocimiento por parte de los alumnos, hecho privado que el maestro reconoce como el conocimiento deseado. El profesor invita al estudiante a alcanzar el conocimiento personal a defender su construcción públicamente (sin que nadie sepa si es correcta o no su construcción).

4. Validación. Defensa que obliga al estudiante a pasar de un modelo interno a un modelo externo buscando una forma de comunicar su conocimiento a los otros. El estudiante después de defender su construcción personal, hará suyo el saber, pues tendrá que haber entendido cómo decir su construcción mental en forma explícita. Al tratar de explicar por primera vez su construcción no quedará completamente claro pero después de estructurarlo algunas veces funcionará.

5. Socialización del conocimiento. Es la variedad de formas en cómo se pueden transmitir los conocimiento matemáticos, cuando los alumnos logran expresar sus ideas frente a los otros estudiantes y su profesor.

6. Institucionalización. Consiste en reconocer el *estatus* oficial del conocimiento adquirido, declara la posibilidad de ser utilizado, su *estatus* teórico, dando el nombre con el cual lo reconoce la sociedad. El maestro

deja de tener el simple rol de observador y regresa a ser maestro, se encarga de institucionalizar el conocimiento, devolviendo el saber a los estudiantes.

El contrato didáctico no tiene un papel importante en este caso, pues el maestro no declara qué desea obtener y el alumno deja de adivinar las expectativas del profesor.
Tanto en la situación didáctica como en la a-didáctica se tiene un objetivo cognitivo, pero en el primer caso el profesor lo evidencia, y por tanto se corre el riesgo de mezclar el contenido del saber matemático con lo que espera que le digan los alumnos; en el segundo caso el objetivo está oculto. Sin embargo, en ambos casos la noosfera puede ser aprovechada de manera positiva o negativa.

Transdisciplinariedad

Actualmente enfrentamos al proceso de separación y delimitación de objetos de estudio en disciplinas como la física, la química, la biología, y el conocimiento social que expone Morín (2012), a consecuencia de varios siglos de influencia, nos coloca frente a una crisis de crecimiento: la construcción disciplinaria del conocimiento.

En la Conferencia Internacional sobre Transdisciplinariedad (Bonazzi y Moroni, 2000) la Transdisciplinariedad es definida como una nueva forma de aprendizaje y resolución de problemas involucrando la cooperación entre diferentes partes de la sociedad y la academia para enfrentar los complejos desafíos de nuestras sociedades.

Morín (2012) define la Transdisciplina como una forma de organización de los conocimientos que trascienden las disciplinas de una forma radical. Con la necesidad de que los conocimientos científicos se nutran y aporten una mirada global que no se reduzca a las disciplinas ni a sus campos, que vaya en la dirección de considerar el mundo en su unidad diversa. Que no lo separe, aunque distinga las diferencias. La transdisciplina representa la aspiración a un conocimiento lo más completo posible, que sea capaz de dialogar con la diversidad de los saberes humanos.

La Transdisciplinariedad trabaja en un campo de investigación tanto orientada como aplicada. En la investigación orientada los esfuerzos se dirigen a áreas específicas del conocimiento y con la investigación aplicada sirve directamente a ciertos propósitos del mismo conocimiento.
El manejo de las matemáticas proporciona un desarrollo fundamental para el manejo de otras ciencias, la tecnología e incluso la vida cotidiana. Pero, en muchas ocasiones no le damos ese valor desde el aula, y alejamos los procesos y conceptos matemáticos de la realidad que viven los estudiantes.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Uzuriaga y Martínez (2006) resaltan que la educación matemática debe ser valorada y rescatada por los matemáticos, pues es claro que debe combinar una muy buena solidez y conocimientos matemáticos con teorías educativas para centrar nuestra atención en desarrollar, o por lo menos, usar adecuada y críticamente, metodologías que le permitan a nuestros alumnos un aprendizaje a lo largo de la vida, en un contexto histórico cultural.

Rodríguez (2011) afirma que se debe ofrecer al estudiante un acercamiento a otras ciencias desde la matemática y viceversa, percibiendo que todos los campos del saber están relacionados de alguna manera y mostrar la profunda transdisciplinariedad de las ciencias.

Finalmente, la transdisciplinariedad se consigue cuando existe la coordinación entre diferentes niveles y distintas áreas del conocimiento. Nuestra intención es elaborar una propuesta de trabajo con las matemáticas desde otra ciencia, específicamente desde la Química.

PROPUESTA DE LA ACTIVIDAD

En México, por lo regular, en las escuelas públicas se trabaja con grupos muy numerosos. En nuestra se trabaja con aproximadamente 50 estudiantes por lo que el grupo se divide en dos subgrupos para poder llevar a cabo la actividad. Por otra parte, la actividad se lleva a cabo en dos sesiones con equipos formados por tres alumnos a los que se les entrega cierto material.

Sesión 1.- Medición de densidades de soluciones salinas

Reactivos y materiales

- Sal.
- Agua.
- Vaso de precipitados de 25 mL.
- Pipetas volumétricas de 10 mL.
- Balanza granataria.
- 10 soluciones de sal con las siguientes concentraciones: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 Molar.

Procedimiento:

- Calibre la balanza granataria.
- Pese el vaso vacío. Registre el dato obtenido en su cuaderno.
- Mida 10 mL de solución de cada concentración en pipeta volumétrica.
- Pese el vaso con el líquido. Registre el dato obtenido en su cuaderno.
- A continuación, ejecute la siguiente operación: al valor de la probeta con líquido le resta el valor de la probeta vacía, este número corresponde al valor de la masa del líquido.
- Escriba el valor en la columna de la tabla 1.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Tabla 1. Densidades de soluciones salinas

Solución (M)	Volumen (mL)	Masa (g)	Densidad (g/mL)
0.5	10		
1	10		
1.5	10		
2	10		
2.5	10		
3	10		
3.5	10		
4	10		
4.5	10		
5	10		

Sesión 2.- Medición de densidades de líquidos y sólidos

Reactivos y material:

- Miel de abeja.
- Glicerina.
- Agua.
- Aceite comestible.
- Alcohol etílico 96°.
- Colores vegetales.
- Probetas de 50 mL.
- Vasos de precipitados.
- Balanza granataria.

Procedimiento:

- Calibre la balanza granataria.
- Mida con exactitud 30 g de cada solución en una probeta con la balanza y mida su volumen con exactitud.
- Registre el dato obtenido en la tabla 2.
- Determine la densidad con las operaciones necesarias.

Tabla 2. Densidades de distintas sustancias

Solución (Nombre)	Volumen (mL)	Masa (g)	Densidad (g/mL)
Miel		30	
Glicerina		30	
Agua		30	
Aceite		30	
Alcohol		30	

- Coloree cada sustancia con colorante vegetal diferente y vierta dentro de un vaso de precipitados de 100 mL en el siguiente orden: miel, glicerina, agua, aceite, alcohol.
- Dibuje el vaso de precipitados final con colores o tomar una foto.

Al finalizar ambas actividades será necesario comparar los datos de las tablas y observar qué ocurre con cada variable. Los alumnos tratarán de explicar por qué se comportan las sustancias de esa forma y expondrán sus conclusiones grupales frente al grupo completo.

HIPÓTESIS DE LOS RESULTADOS

Las hipótesis de cómo se desarrollarán las actividades son las siguientes, tomadas de los estudios de Guy Brousseau:

- **Devolución**. El profesor propone realizar las actividades para el Laboratorio, sin que los alumnos sepan que el objetivo es reconocer los tipos de variables en las propiedades físicas de la materia y la dependencia entre variables.
- **Implicación**. El alumno realizará las prácticas dentro del laboratorio, aceptando realizar las tareas de los cálculos y mediciones debidas para llenar las tablas, discutirá y buscará qué ocurre con las variables en las tablas y cómo se comportan. Sin que el profesor dé respuestas a las preguntas, limitándose únicamente a observar cómo trabajan. Surgirán las preguntas de ¿qué ocurre cuando cambiamos la masa?, ¿qué ocurre cuando cambiamos el volumen? ¿cómo influyen los cambios en los resultados de la densidad? ¿qué podemos hacer para cambiar los resultados de la densidad?
- **Conocimiento personal**. El alumno debe descubrir y encontrar cómo se comporta la densidad haciendo variaciones en la masa y el volumen, dándose cuenta que al aumentar la masa, la densidad aumenta, y por el contrario, al aumentar el volumen, la densidad disminuye. También se dará cuenta que la densidad depende del volumen y de la masa, por lo que las variables independientes serán el volumen y la masa. El profesor localizará a los alumnos que hayan logrado entender la dependencia e independencia de las variables y los invitará a que pasen a realizar la defensa de su construcción mental frente al grupo, sin que ellos sepan si es correcto lo que encontraron.
- **Validación**. Al alumno se le invitará a explicar a sus compañeros lo que descubrió. Se espera que al tratar de defender su postura e intentar expresarla le quede más claro, igualmente puede investigar más sobre el tema. El profesor podrá realizar preguntas que ayuden a que la construcción de sus conocimientos sea mucho mejor estructurada.
- **Socialización del conocimiento**. En cada equipo se discutirán sus conclusiones y buscarán dar explicación al comportamiento de las variables de acuerdo a lo que observaron. Por último lo darán a conocer al grupo entero.
- **Institucionalización**. El profesor dejará de ser observador y reconocerá ante los alumnos cómo se llaman los fenómenos que ellos encontraron y a qué se deben, en este caso se trata que el profesor haga explícito que existen variables que dependen de otras llamándolas *variables dependientes*, así como existen variables que no dependen de otras y que se llaman *variables independientes*. Lo sustancial es institucionalizar lo reconocido por el sistema oficial como el conocimiento que se logró obtener.

RESULTADOS ESPERADOS

Se espera alcanzar el objetivo de que los alumnos logren reconocer las diferencias, los comportamientos y la influencia entre variables dependientes e independientes, mediante el diseño de una actividad planeada para indagar en conceptos matemáticos desde otras áreas, beneficiando así el interés por el aprendizaje de las matemáticas a través de otras ciencias, aspirando a que los alumnos encuentren una estrecha relación entre su trabajo en la asignatura de Matemáticas con otras materias, en este caso con el Laboratorio de Química.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo agradecen ampliamente el apoyo y el financiamiento por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Querétaro (CONCYTEQ) y a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) para desarrollar este trabajo.

REFERENCIAS

Bonazzi A., & Moroni A. (2000). *Complexity and Transdisciplinarity for Environmental Education.* En "Transdisciplinarity: Joint Problem-Solving among Science, Technology and Society", Workbook II: Mutual Learning Sessions. Haffmans Sachbuchg Verlag, Zurich.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions.* París: Hachette.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Morin, E. (2012). ¿Qué es Transdisciplinariedad?. agosto 24, 2016, de Multiversidad Mundo Real Sitio web: http://www.edgarmorin.org/que-es-transdisciplinariedad.html

Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números*, (77), 35-49.

Uzuriaga, V. L., & Martínez, A. (2006). Retos de la enseñanza de las matemáticas en el nuevo milenio. *Scientia et Technica, 2*(31).

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

PädiUAQ: Revista de proyectos y textos académicos en
Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

Año 1. Núm. 001, abril de 2017, es una publicación
semestral editada y publicada por la
Universidad Autónoma de Querétaro,
División de Investigación y Posgrado
de la Facultad de Ingeniería.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
División de Investigación y Posgrado.
Facultad de Ingeniería, UAQ
Tel. 442-192 1200 ext. 6023

www.ingenieria.uaq.mx/revistapadi