PädiUAQ 14

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

ISSN: 2954-4025

VOLUMEN 7, NÚMERO 14

JULIO-DICIEMBRE 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

PädiUAQ, Vol. 7, No. 14, julio-diciembre 2024, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., c.p. 76010, Tel. (442) 192-12-00 ext. 6023, https://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padiuaq@uaq.mx. Editor responsable: Víctor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-040413274400-102, ISSN: 2954-4025, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Victor Larios Osorio, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., c.p. 76010. Fecha de última modificación, 26 de junio de 2024.

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

EQUIPO EDITORIAL

Andrea Cristina Garza Sandoval
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Soid Ruiz Ramírez
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Julia Valeria Chávez Aguado
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Miriam Hernández Ramírez
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Mariana González Montiel
Universidad Autónoma de Querétaro, México
CORRECCIÓN DE ESTILO

COMITÉ CIENTÍFICO

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Víctor Larios Osorio

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México
vil@uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-4454-8516

Resumen

En este texto se hace una breve reflexión sobre la importancia de los recursos disponibles en el desarrollo de las matemáticas para la realización de las prácticas matemáticas que han llevado al planteamiento de nociones que se estudian en la escuela secundaria. Se hace énfasis en la importancia del uso de lenguajes y de medios de representación apropiados para los desarrollos matemáticos y para su comprensión.

Palabras clave: desarrollo matemático, herramientas, lenguaje matemático.

Abstract

In this text, a brief reflection is made on the importance of the resources available in the development of Mathematics for the realization of mathematical practices that have led to the formulation of notions that are studied in secondary school. Emphasis is placed on the importance of the use of languages and means of representation appropriate for mathematical developments and their understanding.

Keywords: mathematical development, tools, mathematical language.

Introducción

Para comenzar plantearemos algunas preguntas que, aunque especulativas, pretenden ser provocadoras, y cuyo trasfondo se abordará más adelante: ¿Si Isaac Newton o Gottfried Leibniz hubiesen nacido unos doscientos años antes de sus contextos históricos, habrían podido desarrollar el Cálculo tal como lo hicieron?, ¿por qué la civilización maya, por ejemplo, no desarrolló el álgebra, a pesar de que pudieron llevar a cabo precisas observaciones astronómicas, como el cálculo de la duración del año que se vio reflejado en sus construcciones?

Actualmente, la humanidad tiene naves espaciales, logró sintetizar vacunas contra un nuevo virus en menos de un año, encontró maneras de convertir la energía a fin de utilizarla en sus proyectos, etcétera. ¿Las personas de hace unos miles de años tenían una menor capacidad cognitiva, ya que no alcanzaron ese tipo de logros tecnológicos? Abordaremos parcialmente estas inquietudes a continuación.

A manera de desarrollo

Algunas investigaciones en neurobiología y en psicología evolutiva (Dehaene, 2021; Geary, 2013) indican que los humanos compartimos rasgos con algunos animales (mamíferos, principalmente), como:

— El aprendizaje por imitación

— El uso de herramientas

— Las intuiciones matemáticas

Además, el mismo tipo de investigaciones evidencian nuestra capacidad de pensar en abstracto y desarrollar el lenguaje, aunque sobre esto último se jerarquiza el habla, más que la escritura. Lo que es innato en nosotros es el aprendizaje de la lengua, sea cual sea; se trata de un instinto tan irreprimible que el lenguaje aparece de forma paulatina, en el transcurso de algunas generaciones, entre los humanos que carecen de él (Dehaene, 2021, p. 111).

He elegido estos puntos a conveniencia, para poder desarrollarlos un poco más. En el primer caso, los humanos nos hemos estructurado socialmente y hemos pasado de conformar tribus de pocos individuos hasta países con cientos de millones de habitantes. Un medio para lograr esta organización de grupos tan compleja ha sido nuestra capacidad de trascender el aprendizaje por imitación y llevar a cabo procesos conscientes de enseñanza, lo cual se constituye como la *educación* de los individuos. Estos procesos y la natural curiosidad de los humanos (que también es un rasgo confirmado en las investigaciones de neurociencias) nos llevaron a desarrollar constructos como el método científico. Porque no sólo buscamos conocimientos para comprender el mundo que nos rodea, sino que también hemos buscado compartirlos en las sociedades. Esta tendencia a la difusión del conocimiento supone una ventaja evolutiva para nuestra especie (Geary, 2013).

Con respecto al segundo caso, los humanos tenemos la capacidad de utilizar herramientas, al igual que otras especies, pero en este punto hay que señalar un aspecto fundamental: nuestra aptitud para el pensamiento abstracto y el desarrollo del lenguaje. En ese sentido, algunas de las herramientas no son físicas, sino mentales. Así, logramos incorporarlas cognitivamente e internalizarlas al grado de "automatizar" su uso. En resumen, las herramientas se transforman en *instrumentos* (Vygotski, 1979).

Uno de esos instrumentos es el lenguaje, que permite expresar ideas complejas y no se restringe a la coloquialidad, sino que también abarca la posibilidad de desarrollar y utilizar otros tipos de lenguajes. Algunos de los más conocidos (los que nos interesan en este breve texto) son los expresados en las matemáticas actuales. Así, cuando se internaliza

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

este instrumento, ayuda a construir imágenes mentales de objetos manipulables de formas específicas, claro está, con sus respectivas ventajas y limitaciones.

Ahora bien, a lo largo de los años, se han estudiado situaciones y problemas considerando las herramientas disponibles. Y esto quiere decir, en el caso particular de las matemáticas, que el cómo se expresan los objetos matemáticos en un momento dado afecta el modo de abordar el estudio de esas situaciones o problemas, porque son las maneras de manipulación de los objetos abstractos. Empero, hay que decirlo, el modo de expresión no es lo único que influye en las *prácticas matemáticas*, ya que existen otras opciones pertenecientes a la filosofía de las matemáticas y de la ciencia predominante en un cierto momento, como es el *método*.

Consideremos, por ejemplo, el caso de la noción de *derivada*, que se estudia en los cursos de Cálculo de bachillerato y primer año de algunas carreras universitarias. Este objeto matemático no se desarrolló arbitrariamente ni fue producto de un capricho, sino que es el resultado de abordar el estudio de tres situaciones específicas interrelacionadas: la obtención de rectas tangentes a ciertas líneas curvas, el cálculo de máximos y mínimos en relaciones (que podrían ser funcionales) y el estudio del movimiento (variación y velocidad).

En un estudio histórico-epistemológico, autores como Pino-Fan, Godino y Font (2011) muestran cómo a lo largo del tiempo hubo nueve momentos en que se dieron prácticas matemáticas específicas, desde la época de la Grecia clásica hasta el siglo XX. Según los autores, las prácticas matemáticas han cambiado en los diferentes momentos de acuerdo con los recursos disponibles, como los métodos y los lenguajes. Así, el contenido de los cursos de bachillerato se ha obtenido a través de un largo proceso evolutivo que fue posible gracias a la incorporación de nuevos instrumentos; entre ellos, podemos destacar el lenguaje algebraico, el plano cartesiano y el método analítico. No obstante, tal enriquecimiento se realizó hasta hace apenas un par de siglos.

La evolución de las prácticas matemáticas se puede analizar por el lado de la educación, modelándolas con lo que se llama las *configuraciones epistémicas* de los objetos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). El análisis es válido para el caso de comunidades como la matemática, pero también para el de las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los individuos (a las que se les denomina *configuraciones cognitivas*). Esto permite identificar cómo interviene cada elemento de las prácticas matemáticas y, para el caso particular del lenguaje y de las representaciones que utilizamos, cómo afecta su uso.

La percepción visual de las representaciones de los objetos matemáticos (tanto gráficas como simbólicas) también nos impone limitaciones y está vinculada con nuestras capacidades biológicas. Según otros trabajos en neurociencias, es un error considerar "que las operaciones más refinadas de la mente están separadas de la estructura y funcionamiento de un organismo biológico" (Damásio, 2023, p. 334). Es decir, al parecer estamos limitados por nuestro desarrollo evolutivo y biológico.

A manera de conclusión

El tema de este ensayo es demasiado amplio para abordarlo a cabalidad en este espacio, pero no es esa la intención, sino la de plantear de manera provocativa algunas interrogantes cuyas respuestas nos muestran la importancia de las herramientas abstractas que hemos desarrollado para estudiar ciertas situaciones.

Así, podemos decir que Newton y Leibniz pudieron llevar a cabo sus desarrollos del cálculo porque tenían a su disposición las herramientas lingüísticas y metodológicas necesarias que en momentos previos no existían. En cambio, los mayas no pudieron desarrollar algunos temas de matemáticas porque carecían de los recursos que se los permitieran.

Entonces, resulta que los recursos a los que tenemos acceso están restringidos por el contexto histórico, sociocultural, etcétera. en el que nos ubicamos e incluyen los medios y formas en que se representan los objetos matemáticos. Es decir, el uso de un lenguaje apropiado como herramienta es determinante para el desarrollo satisfactorio de los procesos matemáticos. Es un tema importante en la escuela para que los alumnos puedan entender lo que estudian en su paso por las aulas.

Otros temas relacionados se quedan en el tintero, como las herramientas que permiten realizar representaciones gráficas o procesos algorítmicos rápidos, tal es el caso de la tecnología digital.

Referencias

Damásio, A. C. (2023). *El error de Descartes.* México: Editorial Grupo Planeta.

Dehaene, S. (2021). *¿Cómo aprendemos?* Buenos Aires, Argentina: Siglo Veintiuno Editores.

Geary, D. C. (2013). El cerebro primitivo en las aulas modernas. *Mente y Cerebro*, (60), 28-33.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. Doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa*, 13(1), 141-178.

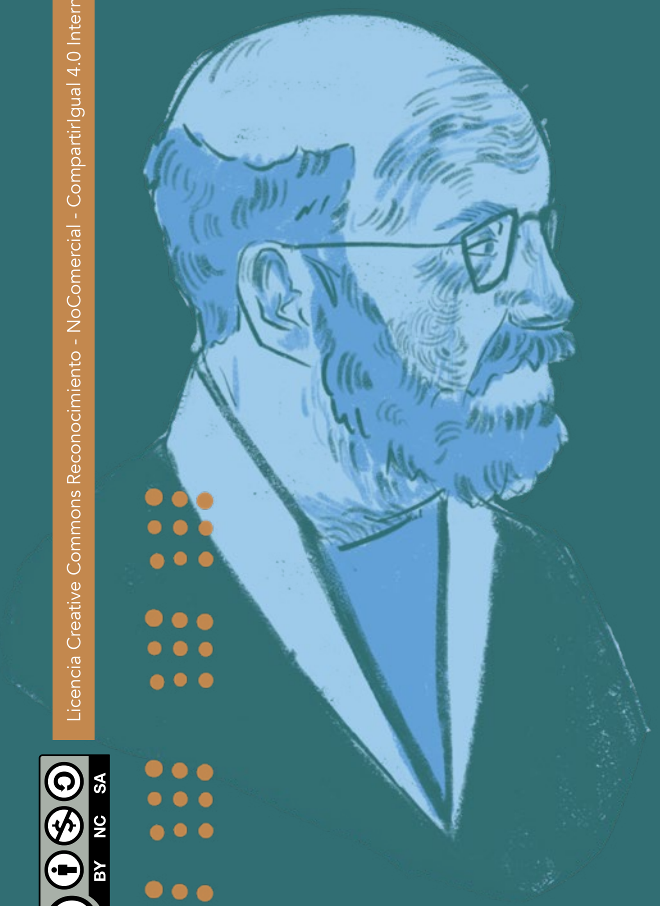
Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Madrid, España: Editorial Crítica.

INICIO

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL RELACIONAR UNA FUNCIÓN CON SU FUNCIÓN DERIVADA DESDE UN ENFOQUE GRÁFICO

CHARACTERIZATION OF UNIVERSITY STUDENTS' KNOWLEDGE AT ASSOCIATING A FUNCTION WITH ITS DERIVATIVE FUNCTION THROUGH A GRAPHIC APPROACH



José Antonio Palacios Briseño[1]
Cecilia Hernández Garcíadiego

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

[1]jose.antonio.palacios@uaq.mx

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo analizar cómo relacionan ocho estudiantes universitarios una función con su función derivada en una actividad de enfoque meramente gráfico. Dicha actividad forma parte de un cuestionario de diagnóstico utilizado en una investigación más amplia, cuyo objetivo es construir el concepto de derivada en estudiantes universitarios con ayuda de la teoría APOE, que proporciona estructuras mentales necesarias para la comprensión de un concepto matemático: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. El diseño del cuestionario y los detalles de la actividad a analizar se presentan en la primera parte del escrito, mientras que en la segunda parte se pueden observar los análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas observadas. En general, los resultados muestran deficiencias en los estudiantes al enfrentarse a ejercicios de enfoque gráfico. Asimismo, las justificaciones observadas en una gran parte de los estudiantes muestran una inclinación por la resolución de ejercicios desde un enfoque algebraico, dejando así a un lado el aspecto gráfico de la actividad. Se espera que la información recabada sea de utilidad para futuras investigaciones como antecedentes de su trabajo y también para que profesores en activo incentiven la resolución de este tipo de actividades en las aulas.

Palabras clave: aspecto gráfico, cálculo diferencial, derivada, teoría APOE.

Abstract

This paper aims to analyze how eight university students associate a function with its derivative in a task with a purely graphical approach. This task is part of a diagnostic test used in a broader research whose objective is to build the concept of derivative in university students with the help of the APOS theory, which provides mental structures required to understand a mathematical concept: *action*, *process*, *object*, and *scheme*. The first part of the paper shows the design of the questionnaire and the details of the task to analyze, meanwhile, the second part presents the qualitative and quantitative analyses of the observed answers. In general, the results show deficiencies when students faced graphic focus exercises. Likewise, the justifications observed in the majority of the students present an inclination towards solving exercises from an algebraic perspective, thus overlooking the graphical nature of the activity. We assume that future research may use these results as background for their works, and active teachers could encourage their students to solve this type of tasks in the classrooms.

Keywords: graphic aspect, differential calculus, derivative, APOS theory.

Introducción

El cálculo tiene como una de sus ideas principales el concepto de derivada, el cual es una base tanto para la comprensión del cálculo como de otras ramas científicas, como puede ser la física. Así, el concepto de derivada es un tema ampliamente investigado, ya sea al analizar su comprensión por parte de los estudiantes (Artigue *et al.*, 1995; Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018; Domínguez Contreras y Sánchez Galeano, 2016; Fuentealba *et al.*, 2018; Londoño *et al.*, 2013; Sánchez Matamoros, 2010) o caracterizar los conocimientos de los profesores para una enseñanza correcta del concepto (Amaro, 2020; Badillo *et al.*, 2011; Castro *et al.*, 2015; Gavilán *et al.*, 2007).

La complejidad en el aprendizaje y la comprensión de este concepto provienen de diferentes raíces. Una de ellas la señalan Artigue *et al.* (1995), pues comparten que la mecanización algebraica y memorización en el proceso de aprendizaje de la derivada son una barrera que impide al estudiante la comprensión más amplia del concepto y de sus métodos de solución en ejercicios conceptuales o problemas. La comprensión de la derivada requiere de sobrepasar dicha barrera (Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018; González García *et al.*, 2018). Esta opinión la comparten Berry y Nyman (2003), quienes afirman que en cursos iniciales de Cálculo los estudiantes no realizan abstracciones mentales que les permitan asimilar el concepto y se quedan solo en la memorización de reglas de derivación.

Además, en el trabajo de investigación realizado por Amaro (2020) se tiene como uno de sus resultados el hecho de que incluso profesores suelen memorizar el concepto de derivada como "la pendiente de la recta tangente a una función en un punto" o como "la tasa de cambio instantánea" junto a algoritmos y fórmulas, pero presentan dificultades para resolver ejercicios conceptuales que exigen una reflexión compleja. Esta situación es claramente extrapolable a los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes que son capaces de memorizar definiciones y algoritmos no cuentan con la habilidad de entender los resultados del cálculo de la derivada de una función en un punto determinado como un número que está estrechamente ligado con una nueva expresión: la función derivada (Park, 2013). Asiala *et al.* (1997) explican la importancia de que los estudiantes entiendan la relación entre el valor numérico de la función derivada en un punto con el valor de la pendiente de la recta tangente a la función original en el mismo punto. Además, afirman que la representación gráfica de la pendiente de la recta tangente aproxima al estudiante a comprender el valor de la función derivada como una nueva función.

> El objetivo de este estudio es analizar cómo relacionan ocho estudiantes universitarios una función derivada en una actividad de enfoque meramente gráfico con ayuda de la teoría APOE, que proporciona estructuras mentales necesarias para la comprensión de un concepto matemático.

Del análisis de estas situaciones surge la pregunta: ¿cómo relacionan los estudiantes una función con su función derivada desde una representación puramente gráfica?

Para responder presentamos resultados parciales de una investigación más amplia enfocada en la caracterización del conocimiento presentado por estudiantes universitarios respecto al concepto de derivada. Dicha caracterización se fundamenta en las estructuras mentales de la teoría APOE (Dubinsky, 1991). Así, en este artículo se busca, primeramente, ejemplificar el uso de las estructuras mentales contempladas dentro de la teoría APOE para el diseño y análisis de las actividades del cuestionario a utilizar. Posteriormente, se realiza la caracterización del conocimiento sobre el concepto de derivada a partir de una muestra de ocho estudiantes universitarios de primer semestre pertenecientes a diferentes ingenierías. A estos estudiantes se les aplicó dicho cuestionario con cinco actividades sobre derivadas, el cual fue una herramienta de diagnóstico acerca de los conocimientos presentados por los estudiantes antes de cualquier intervención en el aula. De entre las cinco actividades se ha elegido una, la cual analiza la capacidad del estudiante para relacionar una función f y su función derivada f' desde una representación gráfica.

Marco teórico y metodología

Teoría APOE

La investigación se realiza desde el marco de la teoría constructivista APOE desarrollada por Dubinsky (1991) para describir la construcción de un concepto matemático a través de estructuras mentales, que realiza el estudiante al momento de su aprendizaje. APOE señala que, para lograr la comprensión de un concepto, el estudiante debe transitar por cada una de las estructuras mentales que le dan nombre: acción, proceso, objeto y esquema.

La descomposición genética es un elemento esencial de este modelo, ya que describe las estructuras mentales específicas para construir un concepto de interés (Fuentealba *et al.*, 2019). Las actividades que conforman el cuestionario de diagnóstico se basan en las descomposiciones genéticas propuestas por Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012).

De manera general, se dice que un estudiante muestra una *concepción acción* cuando necesita instrucciones sobre cómo realizar paso a paso una operación (Dubinsky y McDonald, 2001). En cambio, el estudiante evidencia una *concepción proceso* cuando realiza de manera reiterada dichas acciones, reflexionando sobre ellas e incorporándolas a su consciencia (Gutiérrez y Valdivé, 2012). Mientras tanto, la *concepción objeto* es presentada cuando el estudiante es capaz de ver un proceso como un todo y realizar diversas transformaciones u operaciones sobre un concepto (Trigueros, 2005). Por último, la *concepción esquema* puede ser descrita como "la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática" (Trigueros, 2005).

Por otra parte, Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012) presentan sus respectivas descomposiciones genéticas del concepto de derivada tomando como base otras nociones, como la recta secante, y la tangente. Para estos autores, el estudiante muestra una *concepción acción* cuando es capaz de trazar una recta secante que corte a una curva en unos puntos cualesquiera P y Q y calcular su pendiente. Por otro lado, muestra una *concepción proceso* si es capaz de comprender que una recta secante puede cortar puntos P y Q cada vez más cercanos a lo largo de la curva. Además, si el estudiante interioriza este proceso y observa qué ocurre con la recta secante cuando Q tiende a P afirmando que la recta tangente no es otra cosa más que la posición límite de la recta secante, se dice que tal estudiante muestra una *concepción objeto*.

Es importante recalcar dos cuestiones. La primera de ellas es recordar que diferentes concepciones objeto pueden nacer del desarrollo de acciones, procesos y otros objetos en el estudiante. En consecuencia, los autores también comparten que el estudiante muestra una *concepción objeto* cuando tiene la habilidad de analizar las relaciones entre una función y su función derivada desde sus representaciones gráficas. La segunda cuestión importante a remarcar es que, según Gutiérrez y Valdivé (2012), la construcción de la estructura mental esquema ocurre cuando el estudiante es capaz de resolver problemas de optimización (geometría), mecánica clásica (física) y crecimiento o decrecimiento de magnitudes (biología). Por lo tanto, en el cuestionario mencionado no se analiza una *concepción esquema* en el estudiante, pues esta queda fuera del diseño de las actividades, las cuales se enfocan en estudiar la comprensión del concepto a través de ejercicios conceptuales excluyendo cualquier tipo de problema de aplicación.

Por último, la metodología utilizada es de tipo mixta, ya que se analizarán cualitativamente la concepción y justificación matemáticas mostradas por el estudiante y se tomará en cuenta la variable de corrección dentro de un análisis cuantitativo: respuesta correcta y respuesta incorrecta.

Muestra

Se contó con la participación de estudiantes de segundo semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, Campus Centro Universitario. El total de la muestra fue de ocho estudiantes, los cuales tenían como requisitos para formar parte del estudio: ser mayores de edad, haber aprobado Cálculo diferencial y estar cursando Cálculo integral en el semestre en que se aplicó el cuestionario.

Cuestionario

El cuestionario diseñado consta de cinco actividades y se centra principalmente en la comprensión del concepto de derivada desde la representación gráfica. Para analizar este nivel de comprensión, se incluyeron actividades que correspondieran a cada una de las estructuras mentales presentadas en las descomposiciones genéticas realizadas por Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012).

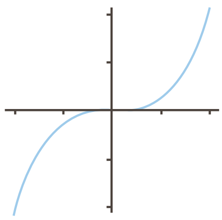
La Actividad 1 fue diseñada para activar la estructura mental *acción* en el estudiante al instarlo a identificar dos puntos en una función, trazar una recta secante que pase por estos y calcular la pendiente de dicha recta. Dentro de la Actividad 2 se analiza la *concepción proceso*, observando si el estudiante es capaz de determinar el número de rectas secantes que pueden ser trazadas a lo largo de una circunferencia. Para las Actividades 3, 4 y 5 se observa si el estudiante es capaz de construir una estructura mental objeto. La Actividad 3 fue diseñada para verificar si el estudiante comprende la definición de la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes; las últimas dos actividades se enfocan en que el estudiante analice la relación entre una función y su derivada. La Actividad 4 fue aplicada para que el estudiante analizara gráficamente una función y determinara su derivada de entre varias opciones. Por otra parte, la Actividad 5 busca que el estudiante bosqueje una función después del análisis de su función derivada. Esta penúltima actividad ha sido elegida como objeto de estudio para el presente trabajo.

La actividad

En esta sección se presenta a detalle la actividad del cuestionario diagnóstico que será analizada, la cual ha sido seleccionada porque se considera que en ella se representan las características necesarias para responder la pregunta de investigación planteada.

La Actividad 4 en la Figura 1 fue seleccionada de Badillo *et al.* (2011) y proporciona información vital sobre el conocimiento del estudiante respecto a la relación entre una función f y su derivada f'; se requiere analizar una función presentada y seleccionar la función derivada de entre un grupo de opciones a partir de observar la función original. Además, el enfoque gráfico hace de esta una actividad atípica para los estudiantes, puesto que dentro del aula predominan las evaluaciones que priorizan el aspecto algebraico (Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018). Dicha actividad exige al estudiante recordar que f' constituye una nueva función y que puede ser representada en el plano cartesiano a lo largo del dominio de la función original o en un dominio más pequeño, dependiendo de las funciones a tratar. La presente tarea puede completarse siguiendo diferentes caminos, por ejemplo, el estudiante puede estimar el valor de la derivada en cualquier valor de x, al trazar la recta tangente en un punto x sobre la curva y estimando su pendiente. Otro camino posible es observar las opciones de derivadas presentadas y así determinar la monotonía de la función original. Sin embargo, aun cuando las respuestas esperadas se pueden encasillar en estas dos opciones, la presentación gráfica en la actividad deja abierto el análisis subjetivo de cada estudiante y, por lo tanto, la posibilidad de conocer cómo enfrenta este tipo de ejercicios conceptuales donde el contexto es puramente visual.

Actividad 4. Si se tiene el gráfico de la siguiente función:



¿Cuál de las siguientes figuras muestra la función derivada que le corresponde? Fundamente tu respuesta.

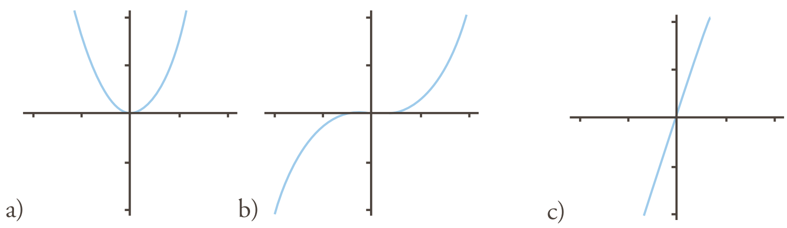


Figura 1. Actividad 4 del cuestionario.

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Análisis de las respuestas

Como se anticipó en la sección anterior, se esperaba que los estudiantes introdujeran de manera formal la noción de la pendiente de la recta tangente y/o la monotonía de la función, y que dichas nociones les ayudaran a relacionar la función f presentada con su respectiva respuesta correcta a). Sin embargo, aun cuando se pueden ver vestigios de estas ideas en algunas pocas respuestas, las justificaciones presentadas por cada estudiante tienen características distintas a las esperadas. De tal modo, en esta sección se analiza las características de cada tipo de respuesta (TR) junto a un respectivo ejemplo representativo analizado de un estudiante (E).

Se identificaron 5 tipos de prácticas matemáticas que se han catalogado como:

1) Determinación de una expresión simbólica-Recta tangente

2) Análisis del grado de una función

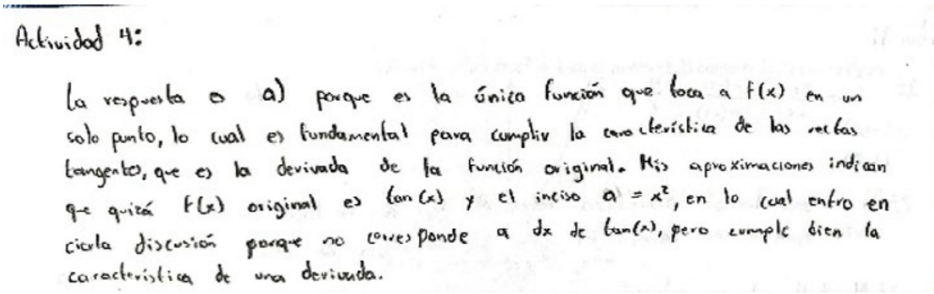
3) Análisis de intervalos de incremento y disminución

4) Relación de los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función

5) Nociones de la segunda derivada

TR1: Determinación de una expresión simbólica - Recta tangente

Una de las características de este tipo de solución yace en que el estudiante, a partir de la gráfica de la función presentada (la cual llamaremos f de ahora en adelante), intenta determinar una expresión simbólica que la represente. Otra característica es que incluya dentro de sus respuestas los términos *recta* o *recta tangente* (Figura 2).


Actividad 4:

La respuesta a a) porque es la única función que toca a f(x) en un solo punto, lo cual es fundamental para cumplir la característica de las rectas tangentes, que es la derivada de la función original. Mis aproximaciones indican que quizá f(x) original es tan(x) y el inciso a) = x^2, en lo cual entro en cierta discusión porque no corresponde a dx de tan(x), pero cumple bien la característica de una derivada.

FIGURA 2. Respuesta y fundamentos compartidos por E1.

Es evidente que E1, a falta de información algebraica o tabular dentro de las instrucciones de la actividad, invoca una función explícita, en este caso $f'(x) = \tan x$, pues dicha función guarda una gran similitud con f cuando $-\pi < x < \pi$. Se intuye que el estudiante realiza este paso para determinar con reglas de derivación la expresión simbólica para $f'(x)$ y así determinar la gráfica que represente la función derivada.

Anteriormente, E1 adjudica la característica propia de la recta tangente a la función derivada: tocar en un solo punto una curva. Aun sin concretar adecuadamente dicha idea, su suposición le ayuda a seleccionar correctamente la opción a). Su respuesta nos da la oportunidad de inferir que el estudiante es incapaz de notar que tanto la función del inciso a) como la de la opción c) tocan de nuevo f, puesto que todas las gráficas presentadas se despliegan en el dominio de los números reales ($\mathbb{R}$), aunque el ejercicio solamente muestre un segmento limitado.

E1 no logra concretar una justificación idónea entrelazando ambos tópicos de su justificación, dado que, incluso cuando anteriormente había seleccionado de manera correcta la respuesta (partiendo de ideas erróneas), intenta determinar una expresión simbólica para representar la función derivada, en su caso $f'(x) = x^2$. Su intuición algebraica le reafirma que esta función explícita f' no es la derivada de la f que determinó anteriormente. Con lo anterior, se podría argumentar que los estudiantes que presentan este tipo de respuesta a través de la práctica matemática realizada no cuentan con el conocimiento necesario para resolver la actividad; por ende, no muestran evidencia suficiente de poseer la concepción mental *objeto*.

TR2: Análisis del grado de una función

La característica principal de este tipo de respuesta radica en que el estudiante, a partir del enfoque meramente visual de la actividad, intenta dar una respuesta correcta analizando el grado de la función f y afirmando que f' debe ser de grado menor (Figura 3).

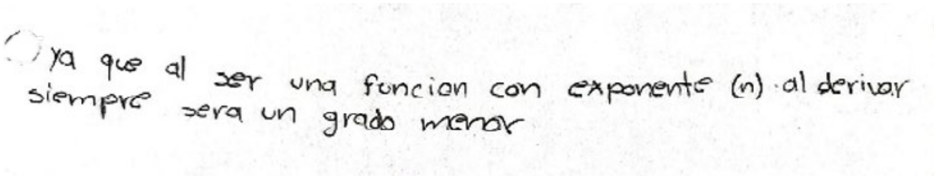

ya que al ser una funcion con exponente (n) al derivar siempre sera un grado menor

Figura 3. Fundamentos compartidos por E2.

Es posible intuir que el estudiante, a pesar de la falta de una expresión simbólica para cada función presentada, sabe que las funciones polinomiales pueden representarse como $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$ con $a_n \neq 0$ (siendo los coeficientes números reales y *n* el grado de la función), y las relaciona con las curvas presentadas. Además, dentro de su respuesta se observan elementos que describen un conocimiento de las reglas de derivación, $f(x) = \frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ para este caso en específico.

Sin embargo, el estudiante parece no percatarse de que la respuesta seleccionada no es la función derivada de f, pues afirma que la alternativa correcta es la opción c). La justificación presentada es más que suficiente para resolver de manera correcta la actividad, pero la falta de conocimiento sobre gráficas de funciones polinomiales lleva a argumentar que E2 no puede mostrar una concepción mental *objeto*.

TR3: Análisis de intervalos de incremento y disminución

La característica del presente tipo de solución radica en que el estudiante, sin más que las gráficas presentadas en la actividad, determina su respuesta partiendo del "movimiento" de la curva dentro de los parámetros presentados (Figura 4).

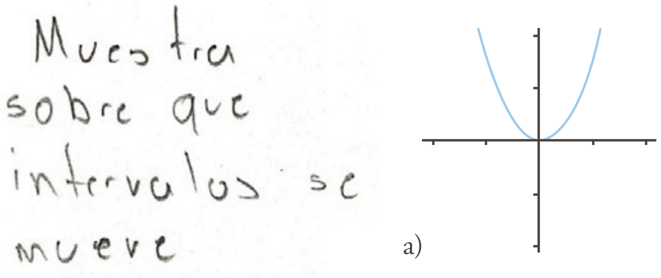


Figura 4.
Respuesta y fundamentos compartidos por E3.

La brevedad de la respuesta nos lleva a inferir gran parte de su justificación. Por una parte, podría decirse que el estudiante E3, con el término *intervalos* que presenta, hace referencia a los intervalos de incremento y disminución de la función f, lo que lo llevaría a determinar la monotonía de la función a lo largo del dominio presentado. Por otra parte, pudo haber relacionado dicha monotonía con el signo de la función derivada, para así terminar conjeturando que la función f es creciente en la gráfica presentada y, por ende, $f'(x) \geq 0$ en el dominio observado.

Estas deducciones, junto a la brevedad de la justificación, no dan pie para argumentar que el estudiante realizó alguna interpretación errónea en sus fundamentos y/o en su respuesta. Por lo tanto, se le adjudica la construcción de la estructura mental *objeto*.

TR4: Relación de los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función

El presente tipo de respuesta muestra una combinación de los dos tipos anteriores. El estudiante justifica su elección a través del análisis del grado de la función y su relación con los intervalos de incremento y disminución. Tal razonamiento se retrata en la justificación de E4 (Figura 5).

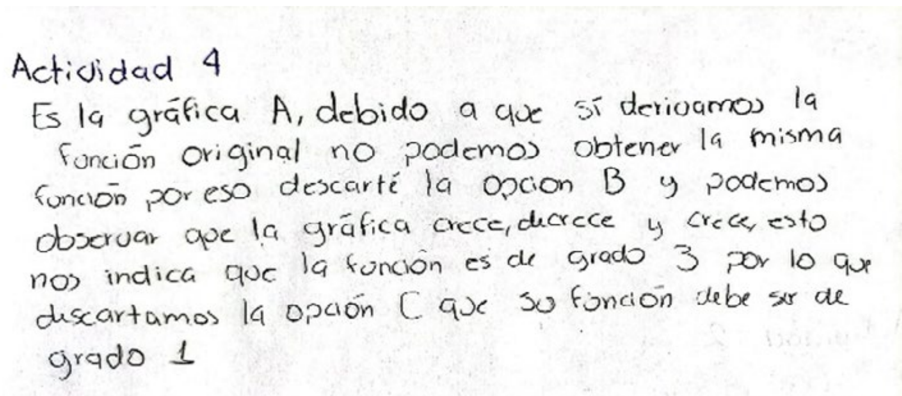

Actividad 4
Es la gráfica A, debido a que si derivamos la función original no podemos obtener la misma función por eso descarté la opción B y podemos observar que la gráfica crece, decrece y crece, esto nos indica que la función es de grado 3 por lo que descartamos la opción C que su función debe ser de grado 1

Figura 5.
Respuesta y fundamentos compartidos por E5.

En esta respuesta se observa que el estudiante E4, sin generalizar, determina correctamente que la función derivada de f no puede ser representada como ella misma; de esta manera, descarta la opción b). Por otra parte, la característica importante en su respuesta radica en el pensamiento que lo lleva a relacionar los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función. Así, afirma que la función f es de grado 3 pero la opción c) es de grado 1, mostrando así vestigios de conocimiento acerca de la reglas de derivación, $f'(x) = \frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ para este caso en específico. Es importante recordar que no hay una relación entre el número de intervalos de incremento y disminución con el grado de una función, por lo que se podría intuir que dicha noción errónea sustituye en la mente del estudiante a aquella que nos dice que una función de grado n tiene una cantidad n de raíces. Sin embargo, esto tampoco es cierto para toda función polinomial, pues el número de raíces de una función puede ser menor a su grado. No obstante dicha relación propuesta por E4, muestra conocimiento argumentando que observa en las gráficas funciones polinomiales y reconoce el grado de dichas funciones. Como consecuencia, se le adjudica una concepción mental *objeto* a los estudiantes que presentan este tipo de respuesta.

TR5: Nociones de la segunda derivada

La característica más importante de este último tipo de respuesta es la inserción de términos matemáticos relacionados al tema de la segunda derivada. La Figura 6 muestra la justificación del estudiante E5, la cual ejemplifica el presente tipo de respuesta:

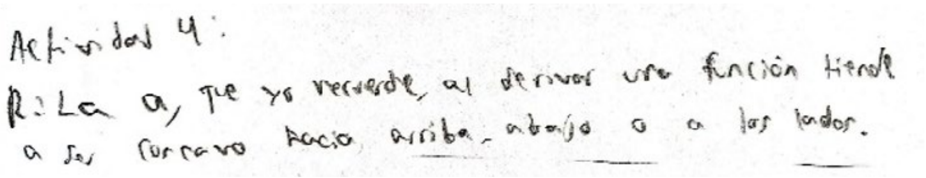

Actividad 4:
R: La a, que yo recuerde, al derivar una función tiende a ser concavo hacia arriba, abajo o a los lados.

Figura 6. Respuesta y fundamentos compartidos por E5.

Se puede ver que el estudiante utiliza el término *cóncava* para tratar de justificar su respuesta, afirmando que la concavidad de una función resulta de derivarla, pero no específica cómo su justificación aplica a la respuesta seleccionada. El estudiante E5 pasa por alto que el término que introduce se relaciona de mejor manera con la segunda derivada f'', la cual, al igual que f', nos proporciona información sobre la forma de la gráfica de f. La información que nos presenta ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba, mientras que si $f'' < 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo. El estudiante parece ignorar que, al utilizar el término de la concavidad en su justificación, sería más adecuado encontrar la segunda derivada de f que la función f' solicitada. Se argumenta que los estudiantes que presentan este tipo de respuesta no muestran una concepción mental *objeto* para esta actividad.

Análisis de resultados

La caracterización de las respuestas presentadas por los estudiantes en la Actividad 4 se realizó a través del análisis cualitativo dentro de la sección anterior. Para el análisis cuantitativo se tomaron como respuestas correctas aquellas que mostraran vestigios de una justificación válida para fundamentar que el estudiante muestra la *concepción objeto*. En la Tabla 1 se muestran los resultados de acuerdo con el grado de corrección:

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje del grado de corrección.

Grado de corrección	Frecuencia	%
Correcta	3	37.5
Incorrecta	5	62.5
Total	8	100

El grado de corrección evidencia que solo el 37.5 % de los estudiantes logró mostrar justificaciones suficientemente estructuradas para resolver la Actividad 4 analizada. Más de la mitad de los estudiantes exhiben dificultades para resolver este tipo de actividad conceptual con un enfoque gráfico. Por otra parte, la Tabla 2 proporciona información relevante sobre el tipo de respuesta utilizado por cada estudiante para la resolución de la actividad:

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje del tipo de respuestas observadas.

Tipo de respuesta	Frecuencia	%
TR1: Determinación de una expresión simbólica-Recta tangente	2	25
TR2: Análisis del grado de una función	1	12.5
TR3: Análisis de intervalos de incremento y disminución	1	12.5
TR4: Relación de los intervalos incremento y disminución con el grado de una función	2	25
TR5: Nociones de la segunda derivada	2	25
Total	8	100

Directa o indirectamente en su respuesta, cinco (62.5 %) de los estudiantes necesitan recurrir a la expresión simbólica de la función para resolver la actividad, ya sea determinando una expresión simbólica (TR1) o tratando de intuir una expresión simbólica a partir del grado de una función (TR2, TR4). Disponer de la expresión simbólica les supondría una ayuda para que, mediante reglas de derivación, puedan determinar f' algorítmicamente. Así, queda claro que el estudiante trata de llevar la actividad de la representación gráfica a la representación simbólica. Estos intentos reafirman los estudios según los cuales los conocimientos del estudiante respecto al concepto de derivada se basan principalmente en las reproducciones de procedimientos mecánicos (reglas de derivación) para la resolución de ejercicios (Artigue *et al.*, 1995; Asiala *et al.*, 1997; Berry y Nyman, 2003; Briceño *et al.*, 2018; González García *et al.*, 2018; Londoño *et al.*, 2013).

Por su parte, uno (12.5 %) de los estudiantes realiza una justificación acertada determinando que las funciones presentadas son polinomiales, y posteriormente afirma que f' debe ser un grado menor que f (TR2). Sin embargo, el estudiante muestra deficiencias para determinar correctamente la gráfica de la función derivada, inclusive cuando su justificación para este caso en específico es acertada. Esta clase de error resalta la dificultad en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes debido a la flaqueza de los conocimientos previos, por ejemplo, la dificultad para distinguir la gráfica de una función (González García *et al.*, 2018).

Conclusiones

En el presente escrito se ha caracterizado el conocimiento presentado por estudiantes universitarios alusivo a la capacidad de relacionar una función con su función derivada en una actividad de enfoque exclusivamente gráfico. Dicha caracterización fue lograda con ayuda del cuestionario diagnóstico creado a partir de un enfoque de descomposición genética determinada para el presente trabajo de investigación, la cual es provista por la teoría APOE y fue de gran ayuda para seleccionar la secuencia de actividades que permitieran analizar y caracterizar las estructuras mentales utilizadas por los estudiantes para construir el concepto de derivada.

La estructura mental de estudio analizada en este trabajo es la de *objeto*. Las justificaciones matemáticas presentadas en dicha actividad permitieron identificar varios tipos de respuestas, las cuales llevaron a conocer cómo los estudiantes relacionan una función con su derivada cuando se les presentan únicamente las gráficas de f y sus posibles f'. A partir de estas justificaciones se decidió, con fundamentos en la descomposición genética del concepto, si el estudiante mostraba o no la concepción mental *objeto*. Por ello, la teoría APOE fue imprescindible para el desarrollo del cuestionario de diagnóstico y, además, para caracterizar el *nivel* de comprensión que maneja un estudiante en un ejercicio o actividad matemática.

Los resultados de los análisis cualitativo y cuantitativo muestran que los estudiantes presentan deficiencias para resolver tareas donde se les solicite interpretar gráficamente el concepto de derivada. Para este caso necesitaban extraer información de una función presentada y con ella determinar su derivada. Resultados como estos solo evidencian que sigue vigente el tratamiento algorítmico que se le da al concepto de derivada en los salones de clases.

De manera general, se ha exhibido cómo el conocimiento algorítmico es insuficiente para abordar ejercicios conceptuales que vayan más allá de la utilización de reglas y/o fórmulas para su resolución, pues para ello es necesario comprender la representación gráfica del concepto. Urge la promoción del análisis global de los conceptos matemáticos en los salones de clases para que el estudiante pueda confirmar la coherencia de su trabajo analizando los dos enfoques que suelen presentar los conceptos matemáticos: el algorítmico y el gráfico.

Un trabajo de este tipo busca promover las representaciones visuales en los salones del aula para una enseñanza íntegra de las matemáticas. Asimismo, se entiende que este trabajo de investigación puede ser de ayuda para mejorar la capacidad de anticipación en profesores, al momento de trabajar en clases con el enfoque gráfico del concepto de derivada. Ambas razones justifican la elaboración de material didáctico que mejore la enseñanza gráfica del concepto de derivada con el objetivo de disminuir su incomprensión y de anticipar las debilidades conceptuales que presentan los estudiantes.

Referencias

Amaro, G. (2020). *Análisis de la construcción de derivada en profesores de matemáticas de nivel medio superior basado en la Teoría APOE*. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/43ce21d9-c058-4f9e-a765-dfdc-19d3b43f

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica. https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/40560

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431. Doi: 10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(2), 191-206. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n2-badillo-azcarate-font

Berry, J. y Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495. Doi: 10.1016/J.JMATHB.2003.09.006

Briceño, E., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y Su Enseñanza*, 10, 31-47. Doi: 10.61174/recacym.v10i1.23

Castro, W., Pino-Fan, L. y Font, V. (2015). El conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la derivada de profesores colombianos activos. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *28* (pp. 1590-1597). Comité Latinoamericano de Matemática

Educativa A.C. https://www.researchgate.net/publication/281038402_EL_CONOCIMIENTO_DIDACTICO-MATEMATICO_PARA_LA_ENSENANZA_DE_LA_DERIVADA_DE_PROFESORES_COLOMBIANOS_ACTIVOS

Domínguez, V. y Sánchez, M. (2016). El concepto de derivada en estudiantes de educación media. *Eco Matemático*, *7*(1), 86-91. Doi: 10.22463/17948231.1105

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp.160-202). Springer. Doi: 10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275-282). Springer. Doi: org/10.1007/0-306-47231-7_25

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(2). Doi: 10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez, G. y Cárcamo, A. (2018). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2). Doi: 10.29333/EJMSTE/100640

Gavilán, J., García, M. y Linares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *25*(2), 157-170. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/87869

González, A., Muñiz, L. y Rodríguez, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449-462. Doi: 10.17811/RIFIE.47.4.2018.449-462

Gutiérrez, L. y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia*, *6*(3), 104-122. https://dialnet.unirioja.

es/servlet/articulo?codigo=5305449

Londoño, N., Kakes, A. y Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 935-942. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. https://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 624-640. Doi: 10.1080/0020739X.2013.795248

Sánchez, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto)* [Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla]. https://idus.us.es/handle/11441/73311

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31. Doi: 10.24844/EM1701.01

INICIO

02

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA FAVORECER EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE PATRONES FIGURALES EN GEOGEBRA

DIDACTIC PROPOSAL TO PROMOTE ALGEBRAIC REASONING THROUGH FIGURAL PATTERNS IN GEOGEBRA

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

Cecilia Vianey Muñoz Chávez[1]
Luisa Ramírez Granados[2]
Lilia Patricia Aké Tec[3]

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

[1] cecymunoz238@gmail.com
[2] luisa.ramirez@uaq.com

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo mostrar una propuesta didáctica para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato mediante el uso de GeoGebra. La metodología empleada es cualitativa y se basa en el diseño que tiene por fundamento tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico. Asimismo, este diseño considera tres etapas: selección de la sucesión, adaptación de la sucesión a un patrón figural y generación del patrón figural en GeoGebra. Como resultado, se presenta el diseño de actividades referentes a patrones figurales y su adaptación al ambiente GeoGebra. En conclusión, los patrones funcionan como una herramienta para introducir el álgebra escolar, ya que favorecen la notación algebraica y están relacionados con la noción de sucesión; además, el uso del software es un apoyo tanto para el aprendizaje y enseñanza del álgebra como para el acercamiento del alumno y profesor a esta tecnología.

Palabras clave: GeoGebra, razonamiento algebraico, patrones, sucesiones.

Abstract

This study's objective is to present a didactic proposal to promote algebraic reasoning in high school students working with GeoGebra. A qualitative methodology, design-based research, was used because of its foundation on three axes: didactic, mathematical, and technological. The design considers three stages: sequence selection, adaptation to a figural pattern and finally generation of the figural pattern in GeoGebra. As a result, design of activities related to figural patterns and their adaptation to GeoGebra's environment is presented. It is concluded that patterns turn out to be a tool to introduce school algebra since algebraic notation and notion of succession are related. In addition, using proposed software contributes teacher and student's approach to apply technology as a support tool for learning and teaching algebra.

Keywords: GeoGebra, algebraic reasoning, patterns, successions.

Introducción

El estudio del álgebra en los distintos niveles educativos ha sido, a través de los años, una asignatura que representa dificultad para los estudiantes, debido al carácter simbólico y la manipulación sintáctica desprovista de significado (Castro, 2012). Sánchez y del Valle (2016) mencionan que, entre las causas de las dificultades en el álgebra, se encuentran:

a. El tratamiento inadecuado de los símbolos;

b. la falta de generalización aritmético-algebraica;

c. la no interpretación del álgebra como proceso de operacionalización;

d. el uso inadecuado del lenguaje simbólico-literal;

e. la ausencia del desarrollo abstracto.

También existen dificultades de índole operacional como:

f. La forma de ver el signo igual (=) que influye en el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas;

g. la notación algebraica;

h. la falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas.

El punto anterior coincide con lo que Both *et al.* (2017) mencionan respecto a la incapacidad de los estudiantes frente a problemas que impliquen expresiones equivalentes. Para agravar las cosas, surgen problemas relacionados con la no comprensión del significado de las letras, derivada de tareas que involucran incógnitas, variables y parámetros.

Por otro lado, Castellanos y Obando (2009) consideran que aspectos como la naturaleza, el significado de los símbolos y las letras, el uso inapropiado de fórmulas o las reglas de procedimientos son fuente de dificultades. Además, los autores añaden que los estudiantes presentan complicaciones al realizar generalizaciones de expresiones algebraicas, producto del análisis de determinadas situaciones particulares. En síntesis, el desempeño de los estudiantes en la materia del Álgebra sufre carencias alarmantes. Un análisis hecho por García *et al.* (2018) muestra que las puntuaciones más bajas en Matemáticas se tienen en Brasil y México, según los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Estos autores enfatizan la necesidad de incluir políticas de apoyo a estudiantes que carecen de habilidades básicas en matemáticas en los niveles de educación media superior y superior.

> El presente estudio tiene por objetivo mostrar una propuesta didáctica para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato mediante el uso de GeoGebra. La metodología empleada es cualitativa.

Un factor que afecta en la falta de aprendizaje de los estudiantes, respecto al álgebra escolar, es la enseñanza tradicional que genera que la interpreten como solución de ecuaciones, factorización de polinomios, análisis de funciones y gráficas (Castro, 2012). En consecuencia, la enseñanza ligada a una interpretación manipulativa de símbolos y la realización de operaciones conlleva a que los estudiantes carezcan de comprensión en la resolución de situaciones algebraicas; es decir, la matematización de situaciones mediante la extracción y el reconocimiento de las matemáticas contenidas en situaciones del mundo real, o bien una situación diferente al contexto simbólico del álgebra (Flores y Auzmendi, 2016). De esta manera, al pretender que un estudiante obtenga un alto nivel de comprensión, es menester que pueda usar los procesos de matematización que incluyen pensar, razonar, argumentar, justificar, comunicar, modelar, plantear, resolver problemas y representarlos.

La información recabada manifiesta la problemática en torno al ámbito del álgebra, por lo cual es necesario cimentar propuestas didácticas con bases sólidas en el álgebra que provean al alumno de un razonamiento matemático. Para este propósito, se pretende elaborar actividades que promuevan el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas como el análisis, la generalización, la validación y la capacidad de utilizar diferentes métodos. Asimismo, dichas propuestas didácticas deben fungir como herramientas para el docente, que sirvan en su gestión educativa para promover la construcción del razonamiento matemático. Por este motivo, es menester implementar propuestas didácticas que permitan tanto a los profesores una adecuada gestión en el aula como a los alumnos desarrollar el razonamiento algebraico.

Autores como Muñoz y Ríos (2008) mencionan que la mayoría de los estudiantes, incluidos docentes, no le encuentran utilidad a varios de los conceptos algebraicos. De esa manera, los docentes consideran irrelevante la implementación de actividades que permitan trabajar con generalizaciones y posteriormente conjeturar y extraer relaciones importantes, a partir del análisis de un caso determinado.

Al respecto, durante las últimas décadas se han extraído investigaciones que apoyan la introducción de los *patrones*, uno de los enfoques que favorecen el razonamiento algebraico a través del análisis, la generalización, la validación e incluso la necesidad de utilizar literales (Rivera, 2010; Valenzuela y Gutiérrez, 2018); la noción antes mencionada se despliega en el apartado del marco teórico. De esta manera, como primer paso para desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes se encuentra el diseño de propuestas didácticas que lo permitan. Por tal motivo, el objetivo del artículo es diseñar una propuesta didáctica para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula de bachillerato basada en *patrones* a través del software GeoGebra. Es importante mencionar que este enfoque se ha utilizado en investigaciones que van desde la primaria (6-12 años) hasta el bachillerato (16-18 años) en búsqueda de promover el razonamiento algebraico, a pesar de que el diseño está adaptado para estudiantes de bachillerato.

Marco teórico

Los aspectos teóricos a considerar para el diseño de la propuesta se fundamentan en tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico. Como *fundamento didáctico* se encuentra la orientación del estudio de los patrones. Hay que reconocer que un patrón es una regla o ley de for-

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

mación de una sucesión finita o infinita de objetos matemáticos o no matemáticos (Carmona, 2016). La regla se deduce a partir de una generalización; en primera instancia, para generalizar el patrón es necesario el análisis de la forma en la que se dan los cambios entre cada elemento, tanto de manera numérica como de manera visual; en otras palabras, hay que encontrar las características comunes entre los elementos que se analizan (López, 2016). En el estudio de los patrones destacan los lineales, cuadráticos, numéricos y figurales. El diseño de la presente propuesta didáctica considera los patrones figurales, que proporcionan un apoyo visual que facilita encontrar la regla general de la secuencia y otorgan significado a los símbolos y signos algebraicos. En la Figura 1 se exhibe un patrón lineal figural.

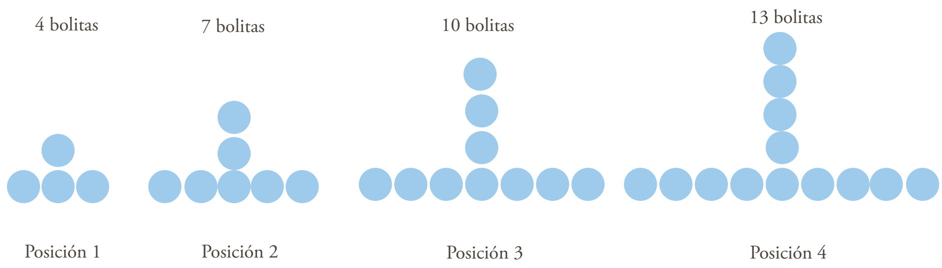


FIGURA 1.
Patrón lineal figural.

De la Figura 1 se analiza que la posición 5 estará conformada por 16 bolitas y en la posición 6 se tendrán 19 bolitas. La generalización consiste en determinar una regla general que permita encontrar cualquier término, como el término *n*-ésimo. En este caso particular, es por medio de la expresión (1):

$$a_n = 3n + 1 \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Por otro lado, se observa en la Figura 2 el caso de los patrones cuadráticos figurales:

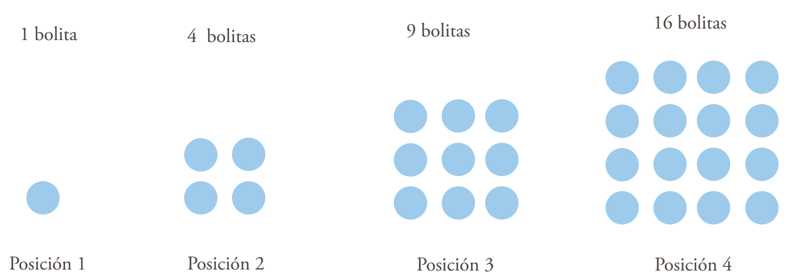


FIGURA 2.
Patrón cuadrático figural.

En la Figura 2 se analiza el arreglo en la posición 5, conformada por 25 bolitas; asimismo, la posición 6 tendrá 36 bolitas. Estas consideraciones fundamentan que la generalización (la regla que permite calcular el término *n*-ésimo) se exprese de la siguiente manera (2):

$$a_n = n^2 \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

En el caso de los patrones cuadráticos figurales, el estudiante utiliza una estrategia funcional para describir el comportamiento del patrón. Por ejemplo, en la Figura 2 se propone una relación (3):

$$f(n) = n^2 \qquad (3)$$

Por consiguiente, los alumnos lograrán calcular cuántas bolitas habrá en la posición *n*-ésima. Para el caso de los patrones lineales figurales, también es factible seguir la estrategia de relacionar la posición de la figura y el número de elementos de esta mediante la función afín (4).

$$f(n) = a \bullet n + b \; (b \neq 0) \qquad (4)$$

Donde:

a es el patrón de crecimiento;

b es el término que se mantiene constante.

En este sentido, Carmona (2016) expone las siguientes fases para definir un patrón:

— Fase 1. Describir el patrón: a los estudiantes se les dificulta comunicar lo que han percibido, por lo que en esta etapa se sugiere expresar la percepción a través de pruebas en voz alta.

— Fase 2. Registrar un patrón: en esta etapa se plasman las ideas en un lenguaje visible vía símbolos, comunicación escrita y recursos gráficos. Así el estudiante podrá comprobar y modificar los patrones al escribir las ideas y discutirlas.

— Fase 3. Validar la formulación: en esta etapa se verifica la utilidad de la regla encontrada.

De los patrones figurales lineales y cuadráticos, la propuesta didáctica considera los patrones figurales lineales, cuya definición se contempló en el posicionamiento de Carmona (2016). Por otro lado, para algunos autores como Zapatera (2018), solicitar de manera directa el término *n*-ésimo de una serie implica un reto para los estudiantes de cualquier nivel educativo. A tal fin, el posicionamiento planteado por Zapatera (2018) resulta apropiado para el presente artículo, por lo que se ha incorporado al diseño de la propuesta didáctica. El autor estipula las siguientes consignas de generalización:

— Una generalización cercana en la que se solicita calcular el valor $f(n)$ para "pequeño"; por ejemplo $n = 5$ puede obtenerse mediante el recuento, utilizando dibujos o llevando el recuento a través de una tabla de valores.

— Una generalización lejana en la que se solicita calcular el valor de $f(n)$ para *n* "grande" y requiere la identificación de un comportamiento invariante que no necesariamente se ajusta a una regla general.

— Una expresión de la regla general que puede denotarse de manera verbal, pero en niveles educativos avanzados tendría que expresarse en términos algebraicos. Esta regla general permite calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n.

— Un proceso inverso para encontrar el valor de la posición (n) dado el número de elementos $f(n)$.

El *fundamento matemático* asociado al estudio de los patrones es la noción de sucesión; cabe señalar que una sucesión es un conjunto de objetos, números, figuras, etcétera. colocado en un orden específico. Hay un primer término, el cual puede denominarse a_1, un segundo a_2, un tercero a_3 y así sucesivamente con "n" entero y a_n el n-ésimo término; "a" es una función de "n" (Stewart *et al.*, 2010). La utilidad de esta noción es amplia, ya que el alumno desde los primeros cursos de educación básica comienza a estudiar secuencias y "conforme avanza los diferentes niveles educativos" se aproxima al estudio de las sucesiones.

Finalmente, el *fundamento tecnológico* consiste en integrar GeoGebra para comprender de manera visual el desarrollo del patrón. En este sentido, Avecilla *et al.* (2015) mencionan que:

> los estudiantes pueden beneficiarse de diferentes formas de integración de la tecnología, ya que nuevas oportunidades de apren-

> dizaje se proporcionan en entornos tecnológicos. Lo previo podría proveer a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento con base en la visualización y exploración de objetos y conceptos matemáticos en entornos multimedia (p. 121).

La plataforma GeoGebra se desempeña como una herramienta facilitadora de procesos de abstracción, ya que puede mostrar cómo construir una relación entre un modelo geométrico y uno algebraico (Avecilla *et al.*, 2015). En otras palabras, es un apoyo considerable a la hora de trabajar en el reconocimiento de patrones que lleven consigo a la generalización de estos, pues se tiene una representación visual de lo estudiado.

En torno a los tres ejes descritos se procedió, como primera instancia, al diseño de la propuesta didáctica de la concepción del patrón figural, la cual se desarrolla en tres etapas:

1. la selección de la sucesión;
2. la adaptación de la sucesión a un patrón figural;
3. la generación del patrón figural en GeoGebra.

A posteriori, en una segunda parte se propusieron consignas específicas para que los estudiantes generen acciones matemáticas.

Metodología

Se adopta una metodología cualitativa (Leatham, 2019) de tipo documental basada en el diseño de tareas (Liang y Hoyles, 2013) y fundamentada en los tres ejes mencionados en el marco teórico. En la primera parte del diseño de la propuesta se consideraron tres etapas:

1. la selección de la sucesión;
2. la adaptación de la sucesión a un patrón figural;
3. la generación del patrón figural en GeoGebra.

En la *primera etapa* de selección de la sucesión se determina el término *n*-ésimo de la sucesión. Por ejemplo, la expresión (1):

$$a_n = 3n + 1 \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

En la *segunda etapa* se adapta a un patrón figural, una vez determinado el término *n*-ésimo. Por ejemplo, en la Figura 3 la secuencia se comporta de acuerdo a la expresión (1):

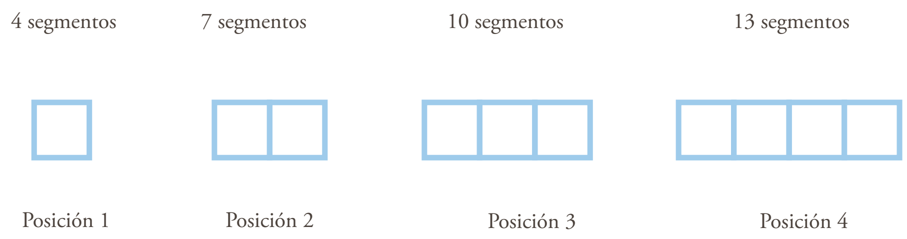


FIGURA 3.
Patrón figural lineal equivalente.

Asimismo, el patrón de la Figura 1 también tiene el mismo comportamiento. De esta manera, es relevante la adaptación de la sucesión al patrón figural debido a la influencia del análisis visual, el cual incide en la descripción y el registro del patrón (Carmona, 2016). Por ejemplo, para el patrón de la Figura 3 puede obtenerse la expresión (1) si visualmente se advierte que el segmento vertical que cierra el último cuadrado es representado por la constante "+ 1". Es decir, en la primera posición hay 3 segmentos más un segmento que cierra el cuadrado (remarcado en color morado), en la segunda posición hay seis segmentos más un segmento que cierra el cuadrado y así sucesivamente (Figura 4).

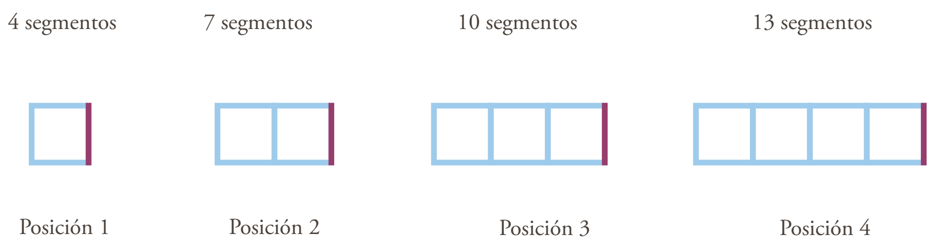


FIGURA 4.
Patrón figural lineal equivalente descompuesto.

En el patrón de la Figura 1 puede analizarse visualmente la agrupación de bolitas. Así, en la segunda posición, hay dos grupos de dos bolitas en la horizontal y sobra una bolita; en la línea vertical hay un grupo de dos bolitas. En la tercera posición, hay dos grupos de 3 bolitas en la horizontal, sobra una bolita y en la línea vertical hay un grupo de tres bolitas (Figura 5).

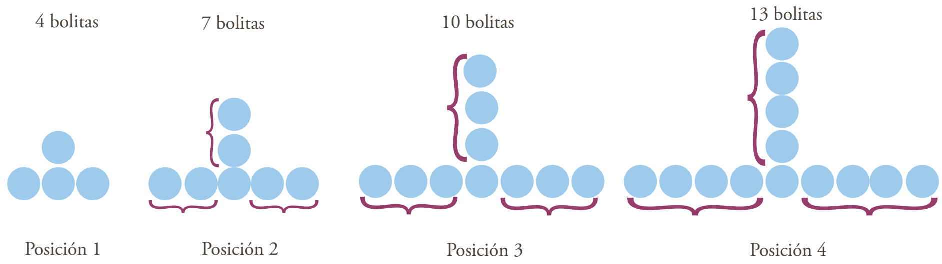


FIGURA 5.
Patrón figural lineal descompuesto.

Con la descomposición anterior se obtiene la expresión (5) y, a su vez, se advierte que (1) y (5) son expresiones equivalentes.

$$a_n = (2n + 1) + n \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

En la *tercera etapa,* una vez que la sucesión fue seleccionada y adaptada a algún patrón figural, se procede a incorporarla en la plataforma GeoGebra. A continuación, se mostrará en la Figura 6 la incorporación del patrón, de manera que GeoGebra facilita el análisis visual del patrón al generar tantos elementos de la sucesión como se defina.

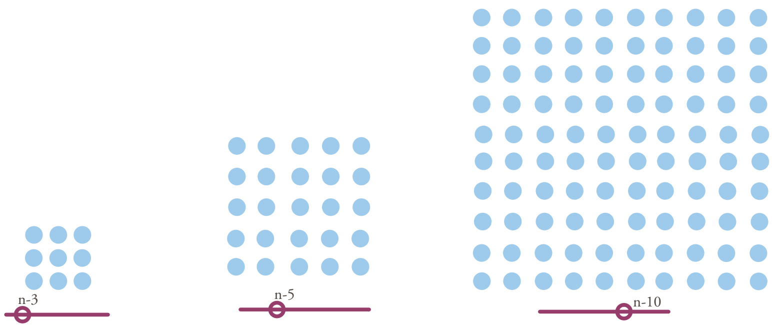
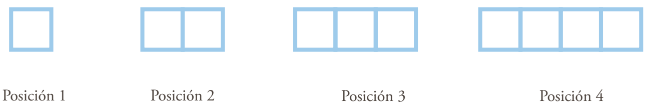


FIGURA 6.
Patrón figural cuadrático en GeoGebra.

Antes que nada, una de las limitantes del trabajo en lápiz y papel es reproducir la secuencia de las figuras dadas. Sin embargo, GeoGebra favorece la generación de diversas posiciones del patrón y coadyuva a que el estudiante valide sus propuestas para el término *n*-ésimo, lo que Carmona (2016) denomina como "validar la formulación".

En la segunda parte del diseño de la propuesta, el planteamiento de consignas se realizó de acuerdo a la propuesta de Zapatera (2018) sobre determinar los términos cercanos y lejanos, el término *n*-ésimo y el proceso inverso. De esta manera, una tarea de la propuesta didáctica logra estructurarse de la siguiente forma:

Analiza la siguiente figura y utiliza el material dispuesto en GeoGebra para contestar las preguntas que se te plantean:



1. En la posición 7, ¿cuántos palitos habrán formado los cuadrados adosados?
2. En la posición 18, ¿cuántos palitos habrán formado los cuadrados adosados?
3. ¿Cuántos palitos habrá en la posición *n*-ésima?
4. Si tenemos 49 palitos, ¿en qué posición nos encontramos?

Figura 7. Ejemplo de tarea sobre un patrón figural lineal.

A continuación, se expone como resultado la propuesta didáctica para el trabajo con patrones lineales figurales, cuyo diseño fue realizado a partir de la explicación metodológica previa.

Resultados

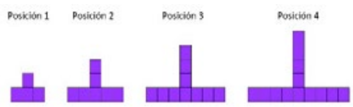
La propuesta didáctica estuvo integrada por cuatro tareas sobre patrones lineales. Como se ha descrito anteriormente, en el primer paso fueron seleccionadas las sucesiones y determinados los términos *n*-ésimos de cada una, como se muestra en la Tabla 1.

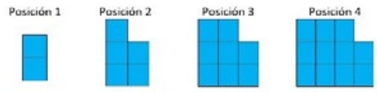
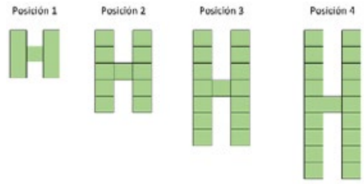
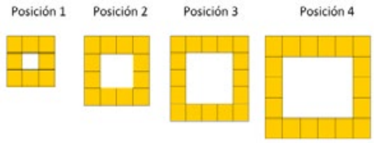
Tabla 1. Términos *n*-ésimos seleccionados.

Término n-ésimo	Expresión
$a_n = 3n + 1$	(1)
$a_n = 3n + 1$	(6)
$a_n = 4n + 3$	(7)
$a_n = 4n + 4$	(8)

Una vez seleccionadas las sucesiones y determinado su respectivo término *n*-ésimo, como segundo paso se procede a adaptarlas a un patrón figural. Las figuras seleccionadas para las expresiones son presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2. Figuras seleccionadas para las sucesiones.

Expresión	Figura
(1)	

(6)	
(7)	
(8)	

Posterior a la determinación de la figura, se procede a su generación en GeoGebra, como tercer paso. En el caso de la expresión (1), fueron implementados los comandos *secuencia y segmentos* de GeoGebra. Es así como la figura se descompuso en segmentos y programó de acuerdo a su posicionamiento en el plano cartesiano. Asimismo, se generó la fila de cuadrados horizontales, como puede apreciarse en la Figura 8; a su vez, se advierte en la posición 1 que las coordenadas de los extremos son (0,0) y (3,0) para generar la base de la figura. Ahora bien, para la posición 2 se tienen las coordenadas (0,0) y (5,0); por otro lado, para la posición 3 se tienen (0,0) y (7,0).

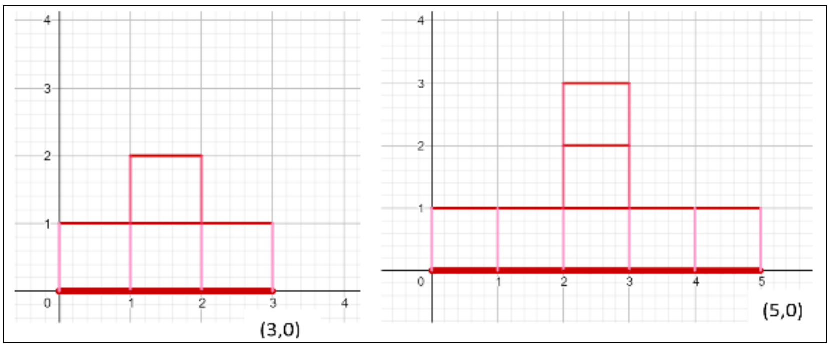


Figura 8.
Generación de la base del patrón figural (1).

Es necesario recalcar que, de continuar sucesivamente las coordenadas, cambiarán los puntos extremos finales de las figuras, en específico, la abscisa que va incrementando en 2: (3,0), (5,0), (7,0), (9,0), (11,0), etc., la cual representa el siguiente comportamiento: ($2i + 1$,0).

Para generar la línea superior paralela a la base, se continúa con el mismo razonamiento e identificación de las coordenadas que van cambiando. Al llegar a este punto, se utilizaron los comandos secuencia y segmento de GeoGebra, por lo que para la posición 1, las coordenadas de los extremos son (0,1) y (3,1), y la posición 2 es (0,1) y (5,1). De esta manera, la abscisa obtenida incrementará en 2 y la ordenada se mantendrá constante en 1: (3,1), (5,1), (7,1), (9,1), etc., representando el siguiente comportamiento: ($2i$ + 1,1). Así, los razonamientos para generar estas dos líneas en GeoGebra se aprecian en la Figura 9.

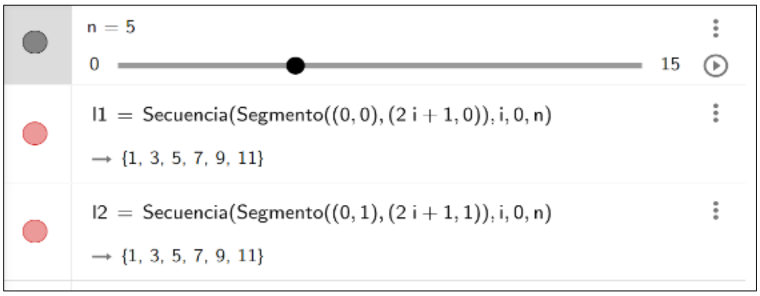


FIGURA 9.
Comandos utilizados en GeoGebra para la base 1.

Por otro lado, para generar las líneas verticales se siguieron razonamientos similares a los previos; a su vez, fueron utilizados los mismos comandos. De la Figura 10 se analizó que las líneas verticales tienen como coordenadas en los extremos (i,0) e (i,1), donde i varía desde 1 hasta $2n$ + 1 y el último segmento, que cerrará el rectángulo, tendrá como puntos extremos los puntos ($2n$ + 1,0) y ($2n$ + 1,1).

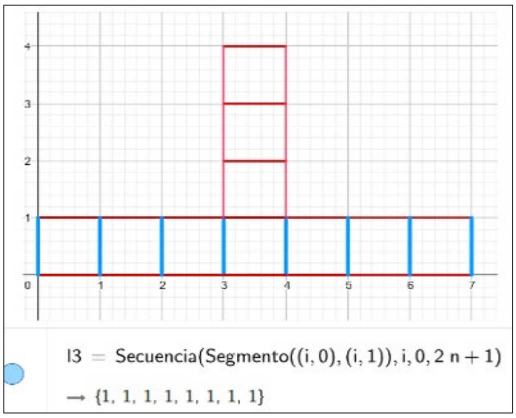


FIGURA 10.
Comandos utilizados en GeoGebra para la base 2.

Finalmente, la Figura 11 denota que para graficar los cuadrados apilados en vertical se comienza con la primera línea, y para la posición 1 se cuenta con las coordenadas de los extremos (1,1) y (1,2); la posición 2 tiene (2,1) y (2,3), y para la posición 3 es (3,1) y (3,4). Así, la abscisa del primer punto extremo tiene el comportamiento (n,1) y el otro extremo (n,n + 1). La segunda línea es paralela a la primera y por consiguiente, se desplaza una unidad hacia la derecha. Dado que estos dos puntos dependen estrictamente de n, solo se utiliza el comando segmento de GeoGebra.

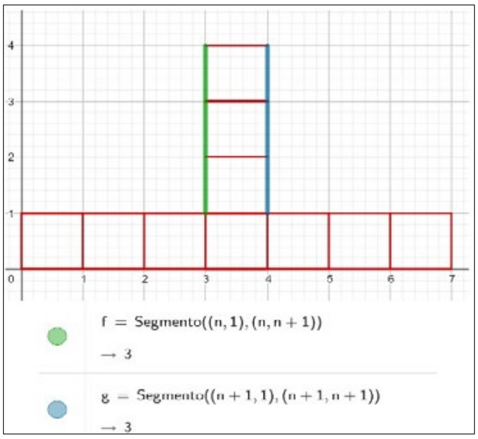


Figura 11.
Comandos utilizados en GeoGebra para los cuadrados apilados en vertical.

Como último paso, para graficar las líneas horizontales que dividen este rectángulo en cuadrados apilados, se identifica que los extremos de cada segmento tengan el comportamiento (n,i) y $(n + 1,i)$. A continuación, en la Figura 12 se presentan los diseños desarrollados en GeoGebra para cada una de las sucesiones seleccionadas.

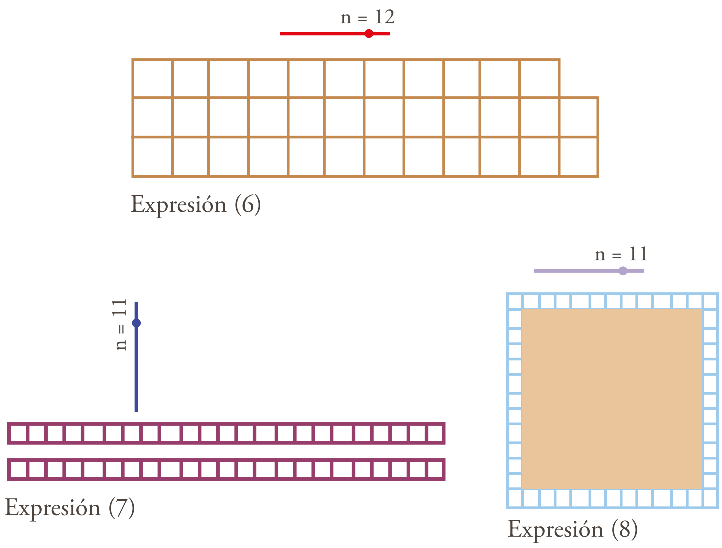
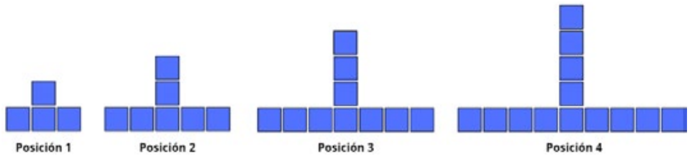


Figura 12.
Patrones generados en GeoGebra.

Una vez generados los patrones en GeoGebra, son incorporadas las consignas y las instrucciones que guían la generalización. Como resultado, una de las tareas que integra la propuesta didáctica quedaría diseñada de la siguiente forma para el caso de la expresión (1):

Analiza la siguiente secuencia de figuras. Advertirás que en la primera posición hay 4 cuadritos, en la segunda posición hay 7 cuadritos, en la tercera posición hay 10 cuadritos y en la cuarta posición hay 13 cuadritos:



Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/vtwvzngw) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 6 y 7, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
2. En las posiciones 17 y 18, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
3. ¿Cuántos cuadritos morados habrá en la posición *n*-ésima?
4. Si tenemos 73 cuadritos morados, ¿en qué posición nos encontramos?

Tabla 3. Primera tarea sobre generalización de patrones de la propuesta didáctica.

El resto de las tareas que integran la propuesta didáctica y basan sus patrones generados en GeoGebra siguen la misma lógica respecto a su diseño (Figura 12).

Conclusiones

En definitiva, los patrones resultaron ser una herramienta eficaz para introducir el álgebra escolar al favorecer la notación algebraica y por su adecuada relación con la noción de sucesión. Por extensión, la generalización de patrones permite al estudiante describir el patrón y comunicar los cambios presentados en las posiciones de las figuras. Al respecto, también promueve la necesidad de utilizar literales para registrar el patrón en su término *n*-ésimo. El apoyo del ambiente dinámico GeoGebra facilita a los estudiantes validar sus posibles expresiones de la regla general, al trazar figuras de posiciones magnas (posición 30, posición 106, etc.). Además, el uso del software le permite tanto al alumno como al profesor usar este tipo de tecnología como un apoyo para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

El planteamiento de la propuesta didáctica genera varias implicaciones. En primera instancia, supone que estudiantes y docentes incorporen este tipo de tareas matemáticas con el uso de recursos tecnológicos, como GeoGebra. La segunda implicación está ligada al diseño de tareas para la generalización de patrones, ya que, si se desea promover el razonamiento algebraico en los estudiantes, es imprescindible proponer tareas en el aula. Por último, la tercera implicación se relaciona con la formación de los profesores de matemáticas, puesto que deben poseer un desarrollado criterio para seleccionar o diseñar este tipo de tareas. Es menester incorporar estos elementos como parte de su conocimiento especializado.

Un punto de partida es focalizar el tipo de tareas propuestas en el aula. Al respecto, García (2019) menciona que la mayoría de las investigaciones no se centran en la descripción del diseño de tareas, al contrario, se presentan como un producto finalizado para la recolección de datos empíricos.

En este sentido, lo expuesto en este artículo explicita los elementos teóricos y metodológicos para diseñar tareas sobre los patrones. Al presentar un diseño de propuesta didáctica, existen limitados datos empíricos que evidencien su funcionalidad; sin embargo, los diversos estudios realizados con estudiantes proporcionan un panorama positivo sobre la aplicación de este enfoque de generalización de patrones en el aula (Rivera, 2013; Kieran *et al.*, 2016; Valenzuela y Gutiérrez, 2018). Como línea de investigación abierta, se sugiere la aplicación en amplias muestras de estudiantes de bachillerato. La generalización de patrones es un enfoque que ha sido estudiado desde diferentes posicionamientos teóricos, los niveles de algebrización de Godino *et al*. (2015), los estadios de generalización de patrones de Zapatera (2019), y bajo metodologías como los experimentos de enseñanza e ingeniería didáctica (Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022; Aké, *et al.*, 2014). De esta manera, la presente propuesta didáctica es pertinente para el estudio del desarrollo del razonamiento algebraico, ya que abre la posibilidad de considerar diversos posicionamientos teóricos y metodológicos, así como la incorporación de elementos que permitan estudiar y fundamentar el uso de esta tecnología en el aula.

Agradecimientos

Las autoras agradecen a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro por el financiamiento otorgado para este estudio, que es parte de un proyecto más amplio en el marco de los Proyectos de Atención a Problemas Nacionales. Asimismo, por proporcionarle una beca de licenciatura a la primera autora de este manuscrito.

Referencias

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (5), 25-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.70

Avecilla Barahona, F., Cárdenas Barrera, O., Vaca Barahona, B. e Hidalgo Ponce, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, *28*(5), 121-132.

Carmona Sánchez, I. (2016). *El potencial de los estudiantes de bachillerato en el reconocimiento de patrones: un estudio de casos.* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1002

Castellanos, M. T. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico.* Conferencia del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 75-94.

Flores López, W. O. y Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e interculturalidad*, *19*(2), 54-64.

García, M., López, A. y Díaz, A. (2018). Análisis del desempeño de estudiantes en tareas matemáticas. Estudio exploratorio en el Instituto Politécnico Nacional de México. *Formación Universitaria*, *11*(5), 41-54. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000500041

Godino, J. D., Neto, T., Aké, L., Etchegaray, S.,Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its*

Nature, its Learning, its Teaching. Springer.

Leatham, K. R. (2019). *Designing, conducting, and publishing quality research in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5.

Liang, B. C. y Hoyles, C. (2013). *Rethinking and researching task design in pattern generalisation.* Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, *2*, 193-200.

López Acosta, L. A. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional].

Muñoz, M. y Ríos, C. (2008). *Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra.* Conferencia del 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

Rivera, F. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. *Psychological and pedagogical considerations.* Springer. http://Doi:10.1007/978-94-007-2712-0

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Sánchez Acevedo, N. y Del Valle, M. E. (2016). Álgebra Escolar: Una revisión preliminar en relación a errores y dificultades. *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques*, *1*(3), 60-75.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2010). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* CENCAGE Learning.

Valenzuela García, J. y Gutiérrez Marfileño, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, *30*(2), 49-72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Zapatera, L. A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación* *en Matemática Educativa, 21*(1), 87-114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, L. A. (2019). Descriptores del Desarrollo de la Mirada Profesional en el Contexto de la Generalización de Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*, 1464-1486. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

03

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y PENSAMIENTO REFLEXIVO

MATHEMATICS EDUCATION AND REFLECTIVE THOUGHT

Ángel Homero Flores Samaniego

Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad de México, México
ahfs@unam.mx
https://orcid.org/0000-0001-5615-0049

Resumen

¿Qué somos?¿docentes, profesores, formadores, educadores, maestros, instructores?, ¿cuál es nuestro ámbito de acción? ¿La educación matemática, la didáctica de la matemática, la enseñanza de la matemática, la matemática educativa, la docencia en matemática?, ¿Qué papel deben jugar la pedagogía y la didáctica en el proceso educativo de los estudiantes, entendido como su inserción en la sociedad como ciudadanos que contribuyen a su desarrollo?, ¿el estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso? En el presente ensayo se buscará respuesta a estas preguntas desde la perspectiva Deweyana sobre pensamiento reflexivo y aprendizaje. La reflexión termina con el planteamiento de las bases de un modelo de intervención didáctica que fomenta el pensamiento reflexivo en un ambiente de tolerancia, respeto y cooperación; un ambiente en el que se contemplan cinco dimensiones importantes: contenido curricular, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, identidad y pertenencia, y retroalimentación formativa. Todo en un afán de simplificar la didáctica y el quehacer en el aula.

Palabras clave: ambiente de aprendizaje, educación matemática, investigación educativa, pensamiento reflexivo.

Abstract

What are we? Teachers, professors, trainers, educators, masters, instructors? What is our scope of action? Mathematics education, mathematics didactics, mathematics teaching, educational mathematics? What role should pedagogy and didactics play in the educational process of students, understood as their insertion into society as citizens who contribute to its development? Can the study of mathematics at school contribute to this process? In this essay we will seek answers to these questions from the Deweyan perspective on reflective thinking and learning. The reflection ends with the approach of the bases of a didactic intervention model in which reflective thinking is encouraged in an environment of tolerance, respect, and cooperation; an environment in which five equally important dimensions are considered: curricular content, cognitive demand, equitable access to content, identity and belonging, and formative feedback. All to simplify didactics and tasks in the classroom.

Keywords: learning environment, mathematics education, educational research, reflective thinking.

Introducción

Tanto por el contenido como por el origen, la actividad y la mente [humanas] son sociales: son actividad social y mente social… Si el hombre es, por naturaleza, un ser social, sólo puede desarrollar su verdadera naturaleza en la sociedad y el poder de su naturaleza no deberá medirse por el poder de los individuos privados sino por el de la sociedad.

Karl Marx

¿Qué somos? ¿Docentes, profesores, formadores, educadores, maestros, instructores? ¿Cuál es nuestro ámbito de acción? ¿La educación matemática, la didáctica de la matemática, la enseñanza de la matemática, la matemática educativa, la docencia en matemática?

En alguna ocasión, en el contexto de un congreso sobre educación matemática, un catedrático-investigador de una universidad mexicana decía que, en el ámbito de la educación escolarizada, un educador atiende a niños de preescolar, un docente a estudiantes de los niveles primario, secundario y medio superior, mientras que un profesor o maestro es el profesional que enseña en el nivel superior. Con respecto a la matemática –decía–, un educador, además de instruir en cuestiones de comportamiento, enseña algunos aspectos básicos de la matemática. Un docente se dedica, básicamente, a enseñar matemática y su papel como educador es mínimo y va disminuyendo conforme se avanza en los niveles escolares. Finalmente, el profesor o maestro (académico o catedrático) dicta cátedra de matemáticas en las universidades y parte de sus actividades es hacer investigación, ya sea en el campo de su conocimiento o en educación. Esta visión de la docencia se encuentra no solo en académicos universitarios, sino también en docentes de niveles básicos.

Ahora bien, el término *educación matemática* se utiliza en ciertos casos como sinónimo de *didáctica matemática*, y en otros como sinónimo de *investigación educativa en matemática*. En algunas instituciones de educación superior de México y en algunos países latinoamericanos, se utiliza el término *matemática educativa* (acuñado en el Cinvestav-IPN de México) para referirse a la investigación educativa en matemáticas:

> A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar las matemáticas y la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa (Cantoral y Farfán, 2003).

> En el presente ensayo se buscará simplificar la didáctica y el quehacer en el aula desde la perspectiva deweyana sobre Pensamiento reflexivo y el aprendizaje. La reflexión termina con el planteamiento de las bases de un modelo de intervención didáctica que fomenta el pensamiento reflexivo.

El término *educación matemática* se refiere a lo relativo a la enseñanza-aprendizaje de la matemática (casi siempre en un ambiente escolarizado). Por su parte, España y Francia atribuyen al término un significado parecido al de *educación matemática*:

> En los años 70 surge en Francia la acepción de “Didáctica de las Matemáticas” por el investigador Guy Brousseau, quien levanta bajo este nombre una nueva disciplina científica que estudia la comunicación de conocimientos y de sus transformaciones, por medio de una epistemología experimental que intenta teorizar sobre la producción y circulación de los saberes (Vidal, R, 2016, p. 1).

En países como Inglaterra y Estados Unidos, se utiliza el término *mathematics education* para hablar de cuestiones de enseñanza-aprendizaje de la matemática o de la investigación educativa en matemática. Por si fuera poco, hay autores que toman los términos como sinónimos:

> La mayoría de las actividades de la ME [matemática educativa] están relacionadas con la problemática que se presenta en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La denominación varía de acuerdo a las diferentes regiones geográficas, ya que en Europa se denomina didáctica de las matemáticas, para los de habla inglesa Mathematics Education y Educación Matemática en varios países de habla hispana (Nieto, Viramontes y López, 2009, p. 16).

Ante este panorama cobran sentido las preguntas con que inicia este texto y se pueden resumir en lo siguiente: ¿qué somos y cuál es nuestro campo de trabajo o de actividad? En el presente ensayo, además de responder a la pregunta anterior, se hace una reflexión sobre el quehacer educativo en el ámbito de la matemática y sobre el papel de la pedagogía y la didáctica en este quehacer; sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático y, por último, sobre el papel de la matemática en el desarrollo educativo del estudiante.

Pedagogía, didáctica y educación

En el presente ensayo se retoma la concepción de pedagogía como la ciencia de la educación que describe y explica el fenómeno educativo en sus vínculos con la praxis social de humanización (Franco, 2012) y se entiende como humanización el proceso de integración de un individuo a una sociedad dada. Es innegable que el ser humano es un animal social, como apuntala Marx; su esencia, aquello que lo caracteriza, se desarrolla y tiene sentido en el seno de una sociedad. En consecuencia, la sociedad es la encargada de educar (humanizar) a sus integrantes, de forma que colaboren en su desarrollo y la enriquezcan. Se considera, señala Engels, que el pensamiento y la consciencia del humano son producto de su cerebro, que a su vez es resultado de la naturaleza (Antidhüring, 1878, 2003). Entonces, pensamiento y consciencia deben ser parte de la conexión natural: la sociedad en armonía con la naturaleza.

Parte de la pedagogía se encarga del estudio de los fenómenos educativos en el seno de los sistemas escolarizados y tiene influencia en la didáctica, que diseña y estudia las técnicas y las estrategias de aprendizaje en la escuela. En consecuencia, la escuela es fundamental en el proceso de humanización de los integrantes de una sociedad (Figura 1).

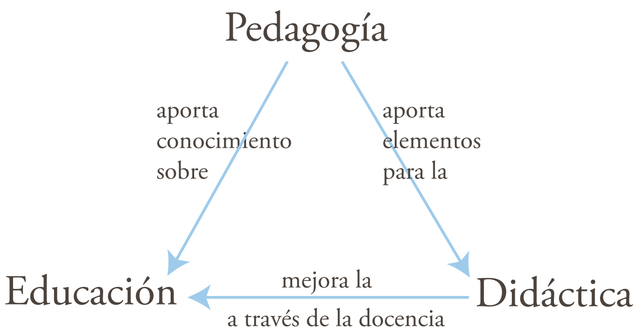


Figura 1. Relación entre pedagogía, didáctica y educación.

En el ámbito del aprendizaje escolar de la matemática, la pedagogía se encarga de estudiar los fenómenos educativos dentro de un aula de matemática y aportar estrategias, métodos y técnicas para mejorar la educación matemática de los estudiantes, es decir, enriquecer la didáctica matemática. La educación matemática es tanto el proceso de aprendizaje de la disciplina como el cúmulo de conocimiento matemático del estudiante y su correcta aplicación en múltiples contextos, ya sean escolarizados o no.

Cuando se habla de docencia, se hace referencia al quehacer de un profesor dentro del aula; por tanto, el docente de matemática es el encargado de fomentar el aprendizaje de la disciplina en la escuela (independientemente del nivel educativo en el que se desempeñe). Gracias a su preparación y compromiso con su labor educativa, el docente hará una mejor práctica de la didáctica, incorporando elementos aportados por la pedagogía.

Cuando se habla de didáctica, se dice que su objetivo es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje: la enseñanza como actividad indispensable para lograr el aprendizaje. En este sentido, se generaliza la concepción de didáctica matemática en los términos que expresan Arteaga y Macías (2016):

> La didáctica de las matemáticas centra su interés en aquellos aspectos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (metodologías y teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, etc.) de este campo de conocimiento, facilitando a maestros y profesores herramientas necesarias para impartir la docencia sobre unos cimientos consistentes, orientándole y guiándole en el ejercicio de su profesión en beneficio del aprendizaje de sus alumnos.

La docencia se imparte[1] y los modelos de enseñanza-aprendizaje apuntan a mejorar las técnicas y las estrategias de enseñanza para propiciar o fomentar un mejor aprendizaje (o un "aprendizaje significativo", como suele decirse en el ámbito). Vastos modelos se basan en el llamado *triángulo didáctico* o *triángulo pedagógico*, en el que se muestran las relaciones entre el saber, el profesor y el estudiante. La enseñanza es la relación que existe entre el profesor y el saber (el profesor enseña el saber o conocimiento), el aprendizaje es la relación entre el saber y el estudiante (el estudiante aprende un cierto saber) y la formación es la relación que media entre el profesor y el estudiante (el profesor forma al estudiante). En la Figura 2 se aprecia el triángulo pedagógico diseñado por Houssaye (1988).

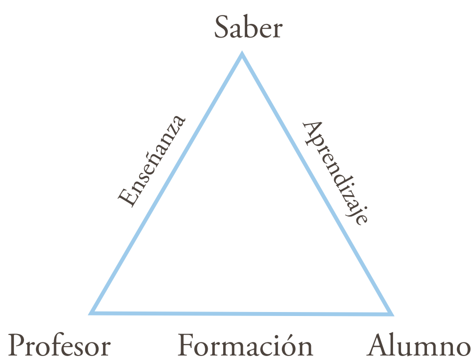


Figura 2. Triángulo pedagógico. Reproducido en Ibáñez (2007).

Conceptos como *transposición didáctica* se acuñaron en el seno de teorías destinadas a mejorar la enseñanza del saber:

[1]Impartir, dar o distribuir algo, especialmente de carácter no material: https://dle.rae.es/impartir

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

> ...un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985).

En la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (1977) se transforman situaciones a-didácticas (que no tienen una intención de enseñanza) en situaciones didácticas (con las cuales se enseña un cierto saber), a través de la transposición didáctica. Por lo general, la interpretación de la teoría de Brousseau tiene un sesgo hacia la enseñanza para mejorar el aprendizaje. En una didáctica de este tipo, se parte del supuesto de que el profesor es el experto tanto en la disciplina como en didáctica, y es capaz de hacer la transposición didáctica y enseñar el conocimiento; es decir, el aprendizaje del contenido matemático, o de cualquier materia, dependerá de la experiencia y sapiencia del profesor y de su manejo de la didáctica.

Este modelo de enseñanza-aprendizaje conlleva una carga ideológica enorme: existe un ser superior que posee el conocimiento, los medios y la disposición para enseñarlo a sus estudiantes. Este ser decide si sus estudiantes han aprendido lo que él les enseña y para ello los examina meticulosamente. En caso negativo, él decide si el estudiante tiene derecho a seguir adelante con las materias siguientes y, en muchos casos, su decisión determina si el estudiante sigue o no con sus estudios. Este esquema de enseñanza ha estado vigente en nuestras escuelas (en particular en el sistema superior) desde hace varios siglos, independientemente de teorías constructivistas o socioculturales que dicen cómo aprende el ser humano. El concepto de *evaluación* como sinónimo de *calificación* a través de exámenes es una prueba fehaciente de esto. ¿Podemos imaginar los niveles medio, medio superior y superior mexicanos sin exámenes extraordinarios?

El esquema presentado en el párrafo anterior apunta a una educación elitista en la que pocos alcanzan el éxito en la sociedad; solo llegan aquellos que se apegan a las reglas del juego y hacen lo que se les dice, pues de este modo sus problemas en la escuela serán menos y la probabilidad de éxito (medido en ingresos monetarios) mayor. En el contexto de una sociedad democrática que vive y se desarrolla en un entorno de degradación ambiental evidenciada principalmente por fenómenos como el calentamiento global y la extinción de especies animales y vegetales, ¿qué papel deben jugar la pedagogía y la didáctica en el proceso de humanización de los estudiantes?, ¿el estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso?

La respuesta a la primera pregunta parte del enfoque que le demos a la didáctica y, tomando en cuenta esto, qué tiene que decir la pedagogía. Se empieza considerando que el binomio enseñanza-aprendizaje no es una unidad indisoluble y que la didáctica puede enfocarse en el aprendizaje y dejar de lado la intermediaria, a menudo negativa, de la enseñanza (o por lo menos negarle protagonismo).

En primer lugar, el profesor dejaría de ser el experto que enseña, que da la luz, para convertirse en un organizador y diseñador de actividades y en un recurso más del estudiante para el aprendizaje propuesto en el currículo. En segundo, el estudiante no sería un objeto susceptible para enseñarle y del cual el profesor debe extraer evidencias del aprendizaje mediante un examen riguroso de su conocimiento. Por el contrario, el estudiante es un aprendiz que, mediante su desempeño y actividad en el grupo, proporciona evidencias de su aprendizaje. Estas evidencias las evalúan los demás integrantes del grupo (profesor y compañeros estudiantes) que conforman una suerte de comunidad de aprendizaje, entendida como un conjunto de personas que conviven armónicamente en busca de un conocimiento común. En tercero, al conformarse en una comunidad de aprendizaje, es posible que el grupo fomente valores como tolerancia, respeto y cooperación en un afán por conseguir el objetivo común: el aprendizaje de la materia.

Por último, si se forman líderes no sería por decreto o por temor, como se da con frecuencia en una didáctica centrada en la enseñanza, sino por su capacidad de aprender y compartir su conocimiento con los demás. Es factible que los estudiantes sean aprendices con un conocimiento aceptable de la materia, con disponibilidad para compartirlo, y que se identifiquen como una parte activa de la comunidad. Se tendría un espacio en que la autoestima y la confianza de los estudiantes serían altas.

La respuesta a la segunda pregunta es positiva: el aprendizaje de la matemática puede contribuir al proceso de humanización del estudiante; es decir, a su formación como ser que se desempeña dentro de una sociedad y trabaja para su desarrollo y avance con la convicción de que de ello dependerá su propio bienestar. Para que dicha humanización sea posible, es necesario hacer una reflexión sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático.

La matemática y el pensamiento matemático

La matemática es el cuerpo de conocimiento relativo a los números y al espacio; en cuanto a los primeros, estudia sus operaciones, interrelaciones, combinaciones, generalizaciones y abstracciones; con respecto al segundo, estudia su estructura, medición y transformaciones. Se trata de una teoría o ciencia aplicada que explica la realidad a través del modelado (o modelaje) matemático. Es una herramienta en la resolución de problemas en ámbitos no matemáticos; constituye una metaciencia en el sentido de que se estudia a sí misma y aborda problemas que surgen de la matemática; además, funge como un lenguaje para comunicar información y aclarar ideas (Merriam Webster's Collegiate, Dictionary, 1993; SUMEM, 2014).

El conocimiento matemático se genera a través de la acción, la experimentación y la reflexión sobre lo actuado y lo experimentado, independientemente del uso de la matemática como teoría aplicada o metaciencia. Se cimienta en la definición de objetos matemáticos, afirmaciones y hechos fundamentales con respecto a la relación entre tales objetos que se dan por verdaderos o válidos (definiciones y axiomas o postulados); surge como una conjetura que debe validarse tomando en cuenta las definiciones y los axiomas: una vez confirmada, adquiere el rango de *teorema*, que a su vez comparte el mismo nivel que un axioma.

La reflexión matemática que lleva al conocimiento está conformada por una serie de razonamientos que constituyen lo que aquí se denomina *pensamiento matemático*; por consiguiente, no es otra cosa que una manifestación del pensamiento reflexivo en el quehacer matemático. Según Dewey (1910), el pensamiento reflexivo es un razonamiento en el que reconsideramos nuestras creencias debido a información nueva; se manifiesta como una concatenación de ideas en las que una de ellas es consecuencia de la anterior.

Dewey define cinco pasos lógicos del pensamiento reflexivo (Flores, 2017):

1. La sensación de una dificultad o su percepción.
2. Su ubicación y su definición.
3. Sugerencias de posibles soluciones o explicaciones en la forma de hipótesis o conjeturas.
4. El desarrollo, mediante razonamientos lógicos, de las implicaciones de las conjeturas.
5. Observación y experimentación más detalladas que llevan a la aceptación o al rechazo de la conjetura.

Esta secuencia se conoce como *razonamiento abductivo*, caracterizado por Peirce (2014) de la siguiente manera:

> Se percibe un cierto hecho (H) que asombra o llama la atención. Se piensa: si C fuera cierto, entonces estaríamos observando el hecho H, y como lo estamos observando, entonces es plausible (posible) que C sea cierto. C es la conjetura que, de ser cierta o válida, explicaría el hecho H, por tanto, el siguiente paso es buscar la validez de la conjetura.

En el desarrollo de la ciencia hay una infinidad de ejemplos de este tipo de razonamiento. La explicación del efecto fotoeléctrico es uno; se observa que, al incidir cierto tipo de luz sobre algunos metales, estos emiten electrones (H); si la luz, en lugar de comportarse como una onda, se comportara como una partícula (C), entonces se observaría el efecto fotoeléctrico. En consecuencia, es factible que la luz se comporte como un haz de partículas. Albert Einstein publicó esta conjetura en un texto de 1905, *Heurística de la generación y la conversión de la luz*, cuya demostración lo llevó a obtener el Premio Nobel en 1921.

El pensamiento reflexivo de una persona será más efectivo cuanta más información y conocimiento tenga. En el ámbito de la matemática, la

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

aplicación de la teoría y la forma de argumentar y validar conjeturas será mejor en la medida en que el individuo avance y profundice en la disciplina. Por tanto, cuando se habla de un pensamiento matemático avanzado, en realidad se habla de un pensamiento reflexivo ejercido por un individuo cuyo conocimiento matemático es avanzado.

Consideremos el siguiente episodio (que sucedió en una de mis clases): al inicio del estudio de la geometría analítica en un curso de bachillerato, se pide a los estudiantes hallar una de las alturas de un triángulo del cual sólo se tienen las coordenadas de sus vértices. El profesor esperaba que los estudiantes usaran la fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta. Los alumnos trabajaban en parejas. Uno de los equipos obtuvo su altura aplicando la ley de cosenos al triángulo para obtener uno de sus ángulos interiores y con el seno de este hacer el cálculo. El profesor preguntó por qué no habían usado la fórmula de la distancia de un punto a una recta, a lo que los estudiantes respondieron que sí lo habían considerado, pero como no tenían la ecuación de la recta y no estaban seguros de cómo obtenerla, decidieron aplicar lo que sabían de trigonometría.

¿Cuál de los dos procedimientos es más efectivo? ¿De haber sabido cómo encontrar la ecuación de la recta teniendo dos de sus puntos, habrían usado la fórmula? ¿El razonamiento que usaron los estudiantes para resolver el problema es más avanzado o complejo que si hubieran usado la fórmula? La cuestión es que el conocimiento provee recursos para que el pensamiento reflexivo sea más efectivo; no hay escalas en el pensamiento reflexivo (o en el pensamiento matemático).

En este tenor, se suele dividir el pensamiento matemático en varios tipos: numérico, algebraico, geométrico, variacional, probabilístico, etcétera. Si consideramos que, para su estudio, la matemática es un único cuerpo de conocimiento que se divide en ramas, como la geometría, la trigonometría o la topología, entonces no tiene sentido dividir el pensamiento matemático en una miríada de pensamientos que sólo vienen a complicar el panorama de la didáctica y de la educación matemática: el pensamiento matemático es uno y se manifiesta con características diferentes dependiendo de la rama en que se aplica.

Otra cuestión importante es que el conocimiento generado por el pensamiento reflexivo puede ser adoptado socialmente y utilizado en la medida de su efectividad. Por ejemplo, en una actividad de preescolar (Brizuela, 2013), estudiantes entre 3.5 y 4 años tenían que dividir algunas figuras geométricas en cuatro partes iguales. Una de las estudiantes se dio cuenta de que si trazaba una cruz sobre la superficie que quería dividir, podría obtener cuatro partes iguales. Usó este procedimiento en sus actividades y le explicó a sus compañeros: más adelante, la totalidad de los integrantes del grupo usaban lo que ellos llamaron *la regla de la cruz* para dividir figuras en cuatro partes iguales. Las figuras que usaron fueron círculos, rectángulos y cuadrados, por lo que la regla se podía aplicar sin problemas.

La regla de la cruz no es una regla general, y es fácilmente refutable si usamos figuras asimétricas, pero ese no es el punto a resaltar en este caso, sino que una conjetura (la regla de la cruz o cualquier otra) es válida en la medida que se pueda aplicar para resolver problemas o explicar fenómenos. De hecho, dejó de tener vigencia cuando, al final de la actividad, se partió un pastel que había que repartir proporcionalmente entre 10 personas: 9 estudiantes y la maestra. Una situación similar es la que retoma Lakatos en su ensayo *Pruebas y refutaciones* (1976), el cual es una ilustración del pensamiento reflexivo en el seno de una sociedad matemática a lo largo de varios siglos.

En resumen, el pensamiento matemático juega un papel relevante en la generación y en la validación de conocimiento matemático. El razonamiento abductivo es, en la mayoría de los casos, el detonante del pensamiento reflexivo. Una vez planteada una conjetura como explicación plausible de nuestra observación o nuestro resultado, buscamos validarla mediante procedimientos inductivos y deductivos en lo que llamamos *esquemas de argumentación* (Flores, 2007; 2017). Ahora bien, es hacedero fomentar y desarrollar el pensamiento reflexivo en un ámbito escolar. El estudio de la matemática es uno de los vehículos que conducen a este desarrollo y, a su vez, el uso del pensamiento reflexivo facilita enormemente el aprendizaje de la matemática. Es decir, ambas nociones conforman un círculo virtuoso que se optimizaría si la docencia estuviera fundamentada en una didáctica centrada en el aprendizaje.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

Educación matemática y didáctica

Al inicio del presente texto se definió la *educación matemática* como el proceso de aprendizaje de la matemática, el bagaje de conocimiento matemático que posee un individuo y su correcta aplicación.

En una didáctica centrada en el aprendizaje se consideran dos aspectos primordiales: las actividades y el ambiente de aprendizaje. Para que, sin importar su nivel educativo, los estudiantes tengan una buena educación (apliquen el conocimiento matemático de manera correcta) se toman en cuenta las cuatro funciones de la matemática en el desarrollo de las actividades de aprendizaje en el aula: herramienta, ciencia o teoría aplicada, metaciencia y lenguaje. Para su estudio y aplicación, se pueden clasificar las actividades de aprendizaje como actividades de exploración y formación de conjeturas, resolución de problemas y modelado.

El primer tipo de actividades, por lo general, se da en el ámbito de la geometría y refuerza el desarrollo del pensamiento reflexivo en cuanto al uso de esquemas de argumentación en la validación de conjeturas. El segundo tipo de actividades fomenta el desarrollo de heurísticas de resolución de problemas y la aplicación de algoritmos. Al final, en las actividades de modelado se pone énfasis en la aplicación de la matemática para la explicación de fenómenos naturales o no, matemáticos o no.

Los elementos de la clasificación no son mutuamente excluyentes; es decir, se pueden tener actividades donde predomina el modelado, pero esto no descarta la formación de conjeturas ni la resolución de problemas de aplicación; la clasificación obedece al énfasis que se pone en alguno de los aspectos sin obviar los otros. A modo de ejemplo, se propone la siguiente actividad diseñada a partir de un problema clásico de optimización en cálculo diferencial.

Se pide a los estudiantes que doblen una hoja rectangular de papel de modo que una de las esquinas superiores quede justo en el borde inferior (Figura 3).

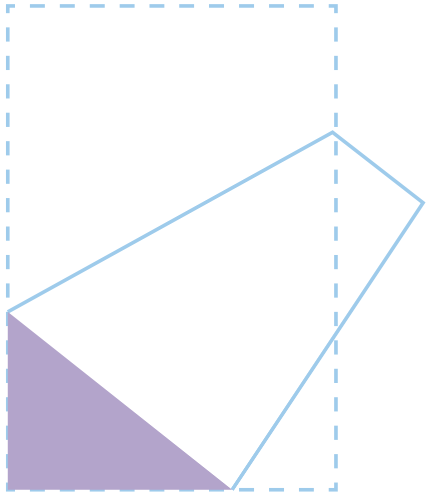


Figura 3.
Hoja doblada.

Como se aprecia en la Figura 3, al plegar la hoja se forma el triángulo rectángulo resaltado, cuya área depende de la ubicación de la esquina superior en el borde inferior. La primera pregunta que se puede plantear es: ¿cómo varía el área del triángulo con respecto a la longitud del lado formado por el borde inferior de la hoja?

Quien realice la actividad puede hacer el siguiente razonamiento: el área del triángulo está en dos dimensiones y la longitud del lado inferior es una dimensión; por tanto, el área será una función cuadrática con respecto al lado, y deberá entonces enfocarse a validar su conjetura, para lo cual debe resolver el problema de expresar el área en términos de la longitud del lado. También se podría considerar la actividad como el estudio del fenómeno que aparece cuando se dobla la hoja, en particular, hallar el modelo matemático que exprese la variación del área como función de la longitud de uno de sus lados. Si además se pide la simulación de la hoja doblada con un software de geometría dinámica (GD), la actividad adquiere una dimensión diferente en la que las posibilidades de acción aumentan: por ejemplo, el conocimiento geométrico (y del software) necesario para construir un modelo que resista la prueba del arrastre, o la posibilidad de medir área y lado, graficarlos en un sistema de coordenadas y ajustar la curva que mejor se adapte a los puntos.

La otra pregunta que se plantea es: ¿qué medida debe tener el lado del triángulo para que su área sea máxima? El resultado se puede hallar explorando la función con el software de GD o utilizando el concepto de derivada de una función, si se está en un curso de Cálculo.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

En todas las actividades es importante que los estudiantes expliquen y justifiquen sus resultados y estrategias de modo que convenzan a sus compañeros y docente. Así, actividades como la anterior ponen a prueba el conocimiento del estudiante y le hacen formar conjeturas, explorar posibles explicaciones y resolver problemas; el conocimiento se optimiza si se tiene el ambiente de aprendizaje propicio.

Ambiente de aprendizaje

La adquisición del conocimiento (o aprendizaje) se da actuando sobre aquellos objetos que se quieren conocer, reflexionando sobre ellos y sus relaciones con otros objetos; este es el principio que llamamos *aprender haciendo.* Para que el principio sea efectivo, debe tener un ambiente de aprendizaje adecuado donde el estudiante se sienta seguro de sí mismo, cómodo y parte de la comunidad que se forma en el aula. Tal comodidad se logra si se fomentan tres valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación (Flores y Gómez, 2009).

Tolerancia. Es la capacidad de aceptar las cosas y a las personas por lo que son. Se asume que la tolerancia es la virtud de considerar y, en su caso, aceptar las ideas de los demás, lo que lleva a una convivencia armónica en la que se eliminan prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.

Respeto. Es el reconocimiento del derecho a ser de las personas, los animales y las cosas; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento, además, de su dignidad. Implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto debe empezar por el propio individuo: respeto a nuestro cuerpo y al entorno. En el aula, entraña que el estudiante se pueda expresar libremente, sin temores y con una confianza absoluta de que será escuchado y sus ideas tomadas en cuenta y debatidas, si es el caso. El respeto y la tolerancia reportan un aumento en la autoestima de los estudiantes.

Cooperación. Es el trabajo conjunto para el logro de metas comunes. El objetivo de la cooperación es el beneficio mutuo; en el estudiante, involucra la capacidad de hacer de lado sus ideas y propuestas, cuando sea necesario, con el fin de alcanzar los objetivos comunes de aprendizaje propuestos en el currículo.

Un ambiente de aprendizaje en el aula donde haya tolerancia, respeto y cooperación se convierte en una comunidad de aprendizaje en que todos sus integrantes se esfuerzan por lograr un fin común: la adquisición del conocimiento. El ambiente de aprendizaje debe tomar en cuenta las dimensiones que lo componen (Schoenfeld, 2016): contenido curricular, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, identidad y pertenencia, y retroalimentación formativa.

Contenido Curricular. Se refiere a la temática, los aprendizajes, las estrategias de aprendizaje y los objetivos contemplados en el currículo acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar cualquier situación. En un currículo matemático donde las actividades están muy dirigidas, los estudiantes sólo cumplen con instrucciones y órdenes, y hay poco espacio para la discusión, el análisis, la exploración y la reflexión; un ambiente así no contribuye a un buen aprendizaje.

Demanda Cognitiva. Se refiere al grado de complejidad con que se debe manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje. La demanda cognitiva de las actividades debe ser tal que impliquen un reto para el estudiante sin llegar a imposibles. No es lo mismo solicitar que se despeje la incógnita de la ecuación $1.5x + 300 = 2000$ que preguntar: ¿en cuánto tiempo se llenará un tanque de 2000 litros de agua si se empieza a llenar a razón de 1.5 litros por segundo, tomando en cuenta que tiene 300 litros al comenzar a llenarse? Y pedir una explicación de por qué se cree que la respuesta es correcta. Un buen ambiente de aprendizaje sería aquel donde la demanda cognitiva de las actividades fuera la adecuada respecto al nivel educativo y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para que al ejecutarla permita el avance en su conocimiento.

Acceso equitativo al contenido. Se refiere a las oportunidades que tienen los estudiantes para aprender. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo ayuda con mucho a establecerlo, así como la supervisión continua del profesor. En un ambiente de aprendizaje equitativo se dejan de lado prejuicios concernientes a género, raza, religión, preferencia sexual o estatus social, y se da voz a todos los integrantes de la comunidad. La tolerancia, el respeto y la cooperación son los mayores valores en la convivencia de sus integrantes.

Identidad y pertenencia. Se refiere al grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje y parte de la comunidad conformada por el grupo. Parte de esta identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los otros estudiantes y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices como él. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz efectivo. Una persona que se identifica con una sociedad y se siente miembro de ella se convierte en un agente de su desarrollo.

Retroalimentación Formativa. Se refiere a las actividades y a la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven para identificar errores y debilidades en el aprendizaje; la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir los errores mediante lo que denominamos *intervenciones de retroalimentación*, y a mediano y largo plazo serviría para mejorar la edición posterior del curso y prepondedaría cambios en el currículo (Gómez, 2022).

En un aula de clase fundamentada en una didáctica centrada en el aprendizaje de los estudiantes, uno de los papeles que asumiría el profesor sería como organizador de un ambiente de aprendizaje que tome en cuenta estas cinco dimensiones. El profesor buscará un equilibrio entre ellas: el papel del profesor cambia para convertirse en un organizador, diseñador y evaluador de actividades de aprendizaje.

El papel de la evaluación

La evaluación en una didáctica centrada en el aprendizaje adquiere un papel crucial en la mejora del desempeño del estudiante: se transforma en el proceso de obtención de evidencias sobre el aprendizaje con el fin de mejorarlo y fomentarlo. Para que sea más efectiva se debe tomar en cuenta cómo el ser humano adquiere su conocimiento en una sociedad, en términos del desarrollo de su pensamiento reflexivo.

Para el profesor, la evaluación debe ser un indicador de la efectividad de las actividades de aprendizaje que propone al grupo, de la pertinencia del currículo que está poniendo en marcha y del desarrollo del aprendizaje del estudiante. La retroalimentación formativa es fundamental en la evaluación del profesor. Para el estudiante, la evaluación será una oportunidad para corregir errores y actitudes, para mostrar el grado de adquisición de su conocimiento y para afianzar su autoestima. El sentido de identidad como un aprendiz efectivo y de pertenencia a la comunidad de aprendizaje en que se conformó el grupo es resultado de una evaluación positiva del estudiante sobre sus propios desarrollo y desempeño.

Un aspecto importante de la evaluación del aprendizaje que hace el profesor tiene que ver con la retroalimentación formativa. Esta labor llega al aula como *intervenciones de retroalimentación*, que son la serie de actividades, presentaciones y ejercicios encaminados a eliminar los errores detectados durante las actividades de aprendizaje. La puesta en práctica de estas intervenciones lleva, a mediano plazo, a mejorar ediciones posteriores del mismo curso y, a largo plazo, a sugerir cambios en el currículo. La retroalimentación formativa se convertiría en la base para realizar las revisiones y los cambios curriculares con propuestas surgidas directamente del aula, en contraposición al proceso actual, en el que las reformas curriculares son hechas a sugerencia de organismos internacionales o por iniciativa de las autoridades gubernamentales. Para que esto sea efectivo, es necesario que la labor docente deje de ser una actividad aislada y se lleve a cabo en colegiados de profesores de la misma materia y de materias de otras áreas.

Como algo secundario, la evaluación dará información para asignar una nota o calificación al estudiante, y la comunidad tendría voz y voto en la asignación de tales notas; no es el profesor quien decide si el estudiante ha aprendido y tiene derecho a seguir en cursos posteriores.

Reflexiones finales

La pedagogía es el cuerpo de conocimiento que se encarga del estudio de los fenómenos educativos; por su parte, la didáctica es el conjunto de métodos, técnicas y estrategias encaminadas a mejorar la educación escolar del estudiante a través de la docencia.

En un afán de simplificación, se considera que un educador, profesor, maestro o docente (prefiero no utilizar el término instructor) es todo profesional dedicado a mejorar la educación en un ámbito escolar, no debe haber distinciones entre ellos. Un buen docente, sin importar el nivel educativo en el que se desempeñe, es aquel que siempre busca mejorar su praxis mediante el estudio, la investigación y el trabajo colegiado. Lo que se ha dado por llamar *Matemática Educativa* no es otra cosa que la investigación educativa en el ámbito del aprendizaje de la matemática (es decir, es parte de la pedagogía, y tal vez sería más correcto llamarla *Pedagogía Matemática*).

En últimas, no deberíamos confundir *educación matemática* con *didáctica de la matemática*, pues la primera se refiere al conocimiento matemático y el uso correcto que le da un individuo, mientras que la segunda trata sobre formas de aprender matemática en un contexto escolar (principalmente el aula). En la actualidad, el sistema educativo alecciona al estudiante y lo prepara para obedecer las reglas sin someterlas al escrutinio del pensamiento reflexivo (ha servido para *instruir* al estudiante). La escuela debería ser el conducto por el cual la sociedad prepare a sus integrantes para servirla y mejorarla; la escuela debe ser el vehículo por el que el ser humano se integre a la sociedad (se humanice). Por tanto, si se quieren fomentar los valores de una verdadera democracia que nos lleve a un régimen social de convivencia pacífica y desarrollo armónico, tanto la pedagogía como la didáctica deberían estar encaminadas al logro de tales objetivos dentro y fuera de la escuela. La escuela debe contribuir a la humanización de los individuos, no instruirlos, adoctrinarlos ni domesticarlos.

Es posible lograr lo anterior si cambiamos el paradigma de didáctica centrada en la enseñanza-aprendizaje por una didáctica centrada en el aprendizaje (hablar de una didáctica centrada en el profesor o en el estudiante no tiene sentido, pues toda didáctica se centra en el estudiante: el aprendizaje del estudiante es el objetivo último de toda didáctica), en la que el grupo escolar se convierte en una comunidad de aprendizaje con un objetivo común: el aprendizaje del conocimiento propuesto en el currículo.

¿Cómo se traduce esto en el contexto de la educación matemática? Si el ser humano aprende mediante sus acciones y la reflexión sobre tales, entonces, en la escuela el estudiante debe manipular los objetos matemáticos y reflexionar sobre sus acciones y descubrimientos. El profesor es el organizador del ambiente de aprendizaje y el mediador entre el conocimiento y su aprendizaje. Su papel no es enseñar el conocimiento, sino propiciar la reflexión sobre lo que se hace y esta reflexión es la que lleva al conocimiento. La evaluación debe servir para obtener evidencias de lo aprendido con el fin de mejorar los aprendizajes, nunca debe tener un carácter punitivo o ser motivo de chantaje.

El conocimiento es útil en la medida en que se acepta por los demás y ayuda a entender la realidad y a resolver problemas. Por tanto, las acciones y las reflexiones en el aula deben hacerse de manera colectiva, ya sea en equipos pequeños o en sesiones plenarias. De manera individual, cada estudiante decide si el fragmento de conocimiento analizado y discutido es útil o no, o si debe considerarlo en el futuro: el aprendizaje, a fin de cuentas, es un acto privado (Juárez, 2015).

En el ámbito escolar, el análisis y el estudio de los objetos matemáticos y sus relaciones contribuyen, en gran medida, al desarrollo del pensamiento matemático, mismo que es considerado una manifestación del pensamiento reflexivo de argumentación mediante actividades de formación de conjeturas y su validación. En consecuencia, tendrá elementos para realizar demostraciones matemáticas, pero también tendrá elementos para abordar problemas y situaciones fuera del ámbito matemático que le darían mayores recursos para tomar decisiones.

Una comunidad de aprendizaje eficiente se basa en tres principios o valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación, valores esenciales para convivir de manera pacífica, democrática y equitativa. Los estudiantes que trabajan en un ambiente con estas características se sienten seguros y acogidos por su comunidad y, por consiguiente, son elevadas las tasas de su aprendizaje.

Para que toda docencia sea efectiva, y en particular aquella sustentada en una didáctica centrada en el aprendizaje, es necesario tener una planeación didáctica conjunta y hacer trabajo colegiado; de este modo, el quehacer docente dejaría de estar aislado y se trabajaría en el diseño de estrategias de aprendizaje comunes. Esta labor conjunta se enriquecería más si el trabajo colegiado fuera hecho por profesores de las materias que conforman el currículo, y si el mismo currículo se diseñara tomando en cuenta las necesidades comunes de todas las materias. De este modo, sería posible que todos avancen en la dirección propuesta y no suceda, como es el caso en la mayoría de las escuelas, que cada profesor tire en una dirección distinta y, en vez de avanzar, sólo se camine en círculos sin llegar a ningún lado. En muchas ocasiones, lo que un profesor avanza en un cierto curso lo deshace el profesor del siguiente.

La investigación educativa en el aula, junto con la experiencia del profesor, debería ser el motor (o uno de los motores) que ponga en marcha el aprendizaje de nuestros estudiantes en todos los niveles. La instrumentación de una didáctica centrada en el aprendizaje, vía la evaluación en el aula y la retroalimentación formativa, sería la base para que el propio docente haga la investigación necesaria y deje de ser el técnico que aplica los resultados. Las recomendaciones hechas por terceros muchas veces provienen personas que nunca han pisado un aula de clase del nivel en el que se hacen dichas sugerencias.

La mayoría de las investigaciones educativas se hacen en el contexto de un posgrado en educación y sólo han servido para que se obtenga un grado o para que el asesor del trabajo obtenga créditos que lo posicionen mejor como investigador (un nivel más alto en el Sistema Nacional de Investigadores, si hablamos del contexto mexicano) y obtenga una mejor remuneración y un mayor prestigio; es decir, tiene un valor utilitario.

El principal obstáculo para instrumentar una didáctica centrada en el aprendizaje es la resistencia de la mayoría de los docentes con los que he interactuado: no conciben, o no les convence, un aprendizaje sin la mediación de su enseñanza. Es difícil abandonar nuestra zona de comodidad y adentrarse en los terrenos pantanosos de lo nuevo y lo desconocido. En este sentido, se vuelve imperativo un programa de formación docente que tome en cuenta los principios de la didáctica centrada en el aprendizaje, y que los esfuerzos hechos por unos pocos no se vean opacados por la enseñanza tradicional, disminuyendo sus probabilidades de éxito a casi cero.

Como dijo alguna vez un buen colega uruguayo: *¡Es bárbaro lo que los gurises* (muchachos, niños) *pueden hacer si vos los dejás, che!*

Referencias

Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. España: Universidad Internacional de la Rioja.

Brizuela, P. (2013). *La resolución de problemas de reparto a través del trabajo colaborativo* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Veracruzana].

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Países Bajos Dordrecht, Kluwer.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Estados Unidos de América: D. C. Heath & Co. Publishers.

Engels, F. (1878). *La revolución de la ciencia de Eugenio Dühring (Antidüring).* Tomado de la edición en español de 2003, en Marxist Inernet Archive. https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/; https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/).

Flores, A. H. (2007). Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y el Quehacer Científico. *Pädi: Revista de Proyectos y Textos Académicos de Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*, *1*(1), 27-39.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21(2), 117-142.

Franco, M. A. (2012). *Pedagogia e prática docente*. Brasil: Cortez Editora.

Gómez, A. (2022). *Retroalimentación Formativa en el Aula de Matemática* [Tesis de doctorado, Instituto Politécnico Nacional].

Ibáñez, C. (2007). Un análisis crítico del modelo del triángulo pedagógico: una propuesta alternativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(32), 435-456.

Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje, apuntes para una pedagogía persuasiva*. México: Universidad Pedagógica Nacional.

Houssaye, J. (1988). *Triangle pédagogique: théorie et prati-*

ques de l'éducation scolaire. Suiza: Editions Peter Lang.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery*. Reino Unido: Cambridge University Press.

Merriam-Webster (1993). *Merriam Webster's Collegiate Dictionary*. Estados Unidos de América: Merriam-Webster, Inc.

Nieto, N., Viramontes, J. de D. y López, F. (2009). ¿Qué es matemática educativa? *Culcyt/ Educación Matemática*, *6*(35), 16–21.

Peirce, C. S. (2014). *Illustrations of the logic of science*. Estados Unidos de América: Open Court.

Schoenfeld, A. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley: Graduate School of Education. http://tru.berkeley.edu.

SUMEM (2014). *Consideraciones para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM*. México: Secretaría de Desarrollo Institucional-Universidad Nacional Autónoma de México.

Vidal, R. (2016). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de las Situaciones*. https://educrea.cl/wp-content/uploads/2016/01/DOC-La-Didactica.pdf

INICIO

04

CARACTERIZACIÓN Y TIPIFICACIÓN DE ERRORES AL RESOLVER ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE

CHARACTERIZATION AND TYPIFICATION OF ERRORS WHILE SOLVING LINEAR EQUATIONS OF ONE VARIABLE

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

Iván Josafat Teodoro[1]
Teresa de Jesús Valerio López[2]

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

[1] josafatphysical@gmail.com
[2] valeriotere@uaq.mx

Resumen

En este trabajo se presenta una caracterización y tipificación de los errores más comunes que cometieron los alumnos del CECYTEM al resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática. Para llevar a cabo esta investigación se aplicó a una muestra de treinta alumnos una prueba diagnóstica a través de una hoja impresa el 16 de febrero de 2023 en las instalaciones del plantel Acambay. Algunas dificultades encontradas por parte de la caracterización fueron: buscar al azar el valor de la incógnita y asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor. Asimismo, por parte de la tipificación se halló que los errores se deben a: formación deficiente, inflexibilidad de pensamiento, deducciones lógicamente inválidas, problemas de lenguaje matemático, conceptos distorsionados y falta de comprobación del resultado.

Palabras clave: caracterización de errores, ecuaciones lineales de una variable, tipificación de errores, transformación de expresiones.

Abstract

This paper presents a characterization and typification of the most common errors committed by CECYTEM students when solving linear equations of one variable in physical-mathematical field tasks. To carry out this research, a printed diagnostic test was applied to thirty students on February 16th, 2023, at the Acambay school facilities. Some difficulties found by the characterization were: randomly attempting to determine the value of the unknown, and associating the number that appears next the unknown as its value. Additionally, according to the error typification, it was found that the errors are due to: poor learning, inaccuracy of thought, illogical deductions, math language problems, unintelligible concepts and lack of results verification.

Keywords: characterization of errors, linear equations of one variable, error typification, transformation of expressions.

Introducción

A menudo los profesores piensan que los alumnos siguen de forma puntual la metodología instruida para resolver problemas dentro del aula de clases; sin embargo, esto no siempre pasa debido a que frecuentemente los aprendices emplean su propia técnica para dilucidarlos. Cuando el profesor revisa el medio utilizado para dar solución a estos problemas, casi siempre se percata de que existen procedimientos inadecuados e inconsistentes, y afirma que los estudiantes han presentado errores (Brousseau *et al.*, 1986). Dada esta situación, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las causas de los errores (tipificar) que manifiestan los estudiantes al resolver expresiones de una variable en tareas del área física-matemática?

En este artículo se presenta una caracterización y una tipificación de los errores más comunes que cometen los alumnos del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (CECYTEM) Plantel Acambay, cuando intentan resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática.

Marco teórico

La tipificación de errores que se muestra en este trabajo está basada en las clasificaciones propuestas por Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar *et al.* (1987). Se eligieron estas clasificaciones porque describen las características de los errores que presentaron los alumnos en esta investigación.

Por una parte, el primer autor establece la siguiente clasificación:

— Errores causados por inflexibilidad de pensamiento. Se presentan cuando los alumnos intentan resolver problemas nuevos utilizando algoritmos o técnicas que les fueron de utilidad en la solución de ejercicios previos, aquí los estudiantes no permiten el procesamiento de la nueva información.

— Errores provocados por problemas de lenguaje. La ausencia de conocimiento de la sintaxis o semántica que está presente en un escrito matemático es sin duda la raíz de diversos fallos.

— Errores debidos a formación deficiente. Aquí se incluyen los errores causados por la falta de conceptos previos y por una enseñanza incompleta de técnicas, algoritmos o procedimientos para resolver ejercicios matemáticos.

Por otra parte, la clasificación del segundo autor incluye:

— Deducciones lógicamente inválidas. Errores derivados de falacias de razonamiento, ya que el resultado propuesto no tiene relación lógica con el problema planteado.

— Conceptos distorsionados. Errores causados por la alteración de leyes, teoremas o fórmulas que están establecidas universalmente y se reescriben de forma incorrecta para posteriormente hacer uso de ellas.

— Falta de comprobación del resultado. El no verificar la solución encontrada en los ejercicios es un error prevalente cometido por los alumnos.

> En este trabajo se presenta una caracterización y tipificación de los errores más comunes que cometieron los alumnos del CECYTEM al resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática.

Es importante mencionar que un error puede ser causado por más de una razón, ya que el alumno puede deducir un resultado incorrecto por formación deficiente o por distorsionar alguna noción.

Metodología

Para obtener la caracterización de errores se abordaron los siguientes pasos:

1. Se diseñó el instrumento para la recolección de datos (prueba diagnóstica), en el que se elicitó la solución de seis ecuaciones lineales de una variable del área de matemáticas, y dos despejes de una ecuación lineal (fórmula para calcular velocidad en función de distancia y tiempo) del área de física. Las ecuaciones que se pidieron resolver se muestran en la Tabla 1.

Nº	Ecuación	Variable por despejar
1	$4x - 2 = x + 6$	x
2	$4y - 3 = 1 - y$	y
3	$4x - 9x = 6 - 2$	x
4	$4 = \frac{5}{2x-1}$	x
5	$2 = \frac{3}{x} - 1$	x
6	$3(x + 5) = 8$	x
7	$v = \frac{d}{t}$	d
8	$v = \frac{d}{t}$	t

Tabla 1. Ecuaciones contenidas en la prueba diagnóstica.

2. Se invitó a participar en la investigación a una población de 150 alumnos del CECYTEM, de los cuales se trabajó con una muestra de treinta estudiantes que decidieron participar de manera voluntaria.
3. Se imprimió la prueba diagnóstica y se aplicó de manera individual a los treinta alumnos en las instalaciones del colegio el 16 de febrero del año 2023. Se dio la instrucción específica de que, además del desarrollo matemático necesario para dar solución a los ejercicios, redactaran por escrito cada paso que estaban dando y justificaran por qué lo estaban haciendo; la aplicación tomó un tiempo de dos horas.

Resultados, análisis y discusión

A continuación, se exponen las características de los errores encontrados al aplicar la prueba diagnóstica y una tipificación de los mismos con base en la clasificación dada por Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar *et al.* (1987).

En la Tabla 2 se muestran errores causados por inflexibilidad de pensamiento. Las características encontradas para esta tipificación son las siguientes: los alumnos buscan tener la incógnita del lado izquierdo de la igualdad o en el numerador, como se muestra en los tres primeros ejemplos; por otro lado, cuando intentan solucionar las Ecuaciones (7) y (8) mencionan que necesitan conocer los valores de *v*, *d* y *t* para poder resolverlas (Ejemplo 4) o solo colocan valores numéricos al azar en la ecuación y afirman que está solucionada (Ejemplo 5). Otro error que manifiestan es asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor (Ejemplo 7) o asignarle un signo a una variable equivocada, como se ilustra en el Ejemplo 8.

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$4 = \frac{5}{2x-1}$	$x4 = \frac{5}{2x-1}$
2	$\frac{1}{x}$	x
3	$3 = \frac{3}{x}$	$(-3)(3) = x$
4	$v = \frac{d}{t}, d= ?$	$v = ?, d = ?, t =?$
5	$v = \frac{d}{t}, t= ?$	$v = \frac{52}{3}$
6	$5x = 2$	$v = \frac{2}{-5}$
7	$x + 6$	$x = 6$
8	$4x = x + 4$ restar x de ambos lados	$x - 4x = x + 4 - x$

Tabla 2.
Errores causados por inflexibilidad de pensamiento.

Por otra parte, en la Tabla 3 se exhiben ejemplos de errores causados por problemas de lenguaje. Las características para esta tipificación son las siguientes: los alumnos manifiestan una interpretación errónea de la semántica en $5x\ 4$, ya que esta expresión no representa un producto aritmético pero ellos así lo concluyen (Ejemplo 1). También exponen una semántica diferente al afirmar que la v de velocidad representa el símbolo de "variable" (Ejemplo 2), y evidencian lenguaje algebraico incorrecto cuando describen de forma escrita el procedimiento que siguieron para resolver los ejercicios (Ejemplo 3).

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$5x$ 4	20
2	v - velocidad	v - variable
3	Juntar términos semejantes	Factorizar términos semejantes

Tabla 3. Errores provocados por problemas de lenguaje.

En la Tabla 4 se exhiben errores causados por formación deficiente. Las características encontradas en esta tipificación son las siguientes: los estudiantes manifiestan falta de conocimientos en operaciones con términos semejantes (Ejemplos 1-8) y dificultades al trabajar con operaciones aritméticas básicas (Ejemplos 9-12), con la aplicación correcta de la propiedad distributiva (Ejemplos 13-14) y con el dominio de operaciones algebraicas (Ejemplos 15-25).

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$-y - 4y$	$3y$
2	$4x + 2$	$4x + 2x$
3	$4y - 3$	$4 - 3$
4	$4x + 2$	$4 + x + 2$
5	$4y - 3$	$1y$
6	$4 - y$	$4y$
7	$4y - 3 = 1 - y$	$5y = 4$
8	$6x$	$6 + x$
9	4	-4
10	$\frac{-3}{-3}$	-1
11	$6 - 2$	-4
12	$3(x + 5) = 8$	$3(x + 5) = 5$
13	$\left(\frac{1}{2}\right)(4x + 2)$	$4x$
14	$4(4y = 0.5y)$	$y = 2y$
15	$x\left(\frac{3}{x} - 1\right)$	$\frac{3x}{x} - 1$
16	$-4x + (4x)$	$-4x(4x)$
17	$4x - 9x$	$9x - 4x$
18	$4 = \frac{5}{2x - 1}$	$(5)(4) = 2x - 1$

Tabla 4. Errores debidos a formación deficiente.

19	$2=\frac{3}{x}-1$	$2x=3-1$
20	$2=\frac{3}{x}-1$	$3+2=x-1$
21	$\frac{3}{x}-1$	$x-1$
22	$3(x+5)=8$	$x+5=8-3$
23	$\frac{5}{2x-1}$	$\frac{5}{2x}-1$
24	$(x)\left(4=\frac{5}{2x-1}\right)$	$4x=\frac{5}{2-1}$
25	$4=\frac{5}{2x-1}$	Sustituye la variable x a prueba y error hasta que el resultado sea 4

En la Tabla 5 se muestran errores causados por deducciones inválidas lógicamente. Las características encontradas en esta tipificación son las siguientes: cuando se pidió a los alumnos despejar las Ecuaciones (7) y (8) para las variables d y t respectivamente, ellos colocaron una expresión sin sentido físico ni matemático (Ejemplo 1). Por otra parte, cuando se solicitó resolver la misma ecuación para las mismas variables, los alumnos concluían enunciados sin sentido lógico (Ejemplos 2 y 3); un último error fue pensar que solucionar la ecuación significaba colocar las variables en orden alfabético (Ejemplo 4).

Tabla 5.
Deducciones lógicamente inválidas.

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$v=\frac{d}{t}$, $t=?$ o $d=?$	$d=\frac{v}{t}$; $t=dv$
2	$v=\frac{d}{t}$, $t=?$	Despejamos a d en lugar de t. Despejamos a v en lugar de t. Primero se va a despejar el tiempo para obtener la distancia.
3	$v=\frac{d}{t}$, $d=?$	Realizo el despeje de v y de t para obtener el resultado. Despejamos a t que como está dividiendo pasa multiplicando.
4	$v=\frac{d}{t}$, $t=?$	$d=tv$

En la Tabla 6 se muestra un error causado por conceptos distorsionados. La característica encontrada en esta tipificación fue la siguiente: cuando se les indicó a los alumnos resolver la Ecuación (8) para la variable d, sólo realizaron el cambio de lugares entre las variables de la expresión (Ejemplo 1), lo cual es incorrecto porque están distorsionando la ecuación original.

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$v = \frac{d}{t}$, $d = ?$	$d = \frac{v}{t}$

Tabla 6. Conceptos distorsionados.

Por último, en la Tabla 7 se muestra un error causado por falta de comprobación del resultado. La característica encontrada en esta tipificación fue la siguiente: los alumnos no realizan la comprobación del resultado que obtuvieron para verificar que el dato encontrado sea correcto; a consecuencia de esto, el valor que presentan como solución de la ecuación no siempre es el adecuado.

Ejemplo	A partir de:	Los alumnos concluyen:
1	$4y - 3 = 1 - y$	$y = \frac{5}{4}$

Tabla 7. Falta de comprobación del resultado.

Análisis global de la tipificación de errores

En la Figura 1 se puede visualizar el porcentaje correspondiente a cada tipificación encontrada en esta investigación. Se halló que el 59.52 % de los errores se deben a una formación deficiente, el 19.04 % a inflexibilidad de pensamiento, el 9.52 % a deducciones lógicamente inválidas, el 7.14 % a problemas de lenguaje, mientras que tantos conceptos distorsionados como falta de comprobación del resultado exhibieron 2.38 % cada una.

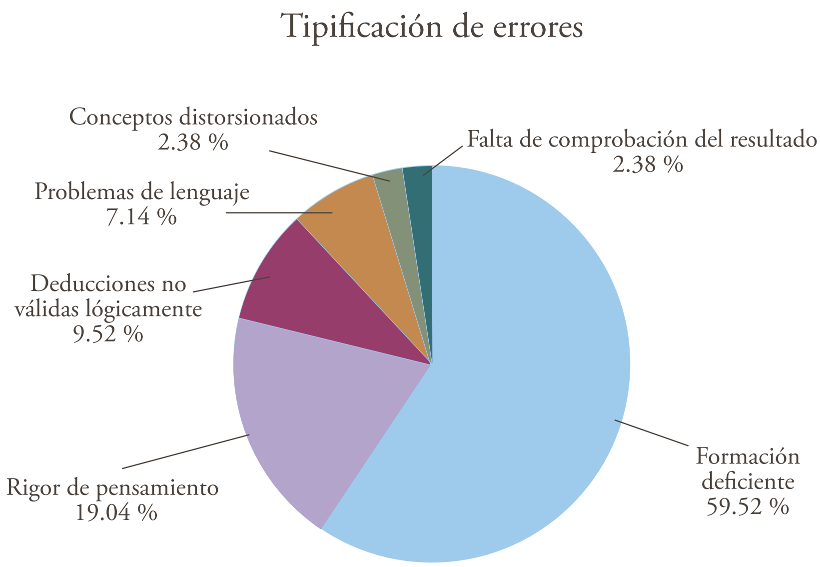


Figura 1. Tipificación obtenida en la presente investigación.

Como se puede observar en la Figura 1, la mayor parte de los errores que manifiestan los alumnos al resolver ecuaciones lineales de una variable en tareas del área físico-matemático son causados por una formación deficiente; en consecuencia, es importante que en la educación previa a la de nivel medio superior se logre adquirir un aprendizaje significativo en los temas que se abordan para que de esta manera se puedan evitar dichos errores.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una caracterización y tipificación de errores cometidos por treinta alumnos del CECYTEM Plantel Acambay al resolver expresiones de una variable en tareas del área físico-matemática. Por parte de la caracterización, se encontraron las siguientes dificultades:

— buscar al azar el valor de la incógnita,

— desear tener la incógnita siempre del lado izquierdo de la ecuación,

— asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor,

— realizar un procedimiento incoherente,

— colocar la suma o resta de una variable y un número como un producto, separar un producto y expresarlo como una suma o resta,

— restar o sumar una variable con un número,

— agregar una variable a una expresión sin justificación,

— eliminar sin argumento una variable de una expresión y no usar un lenguaje algebraico apropiado.

Asimismo, por parte de la tipificación, se halló que el 59.52 % de los errores se deben a una formación deficiente; el 19.04 % a inflexibilidad de pensamiento, el 9.54 % a deducciones lógicamente inválidas, el 7.14 % a problemas de lenguaje mientras que tanto conceptos distorsionados como falta de comprobación del resultado exhibieron 2.38 % cada una.

Los resultados de la presente investigación son la base para diseñar y aplicar un manual didáctico que coadyuve a la comprensión de la transformación de expresiones que se utilizan para resolver ecuaciones lineales de una variable. Este manual hará énfasis en explicaciones que sirvan para evitar los errores que fueron detectados en esta investigación. Por otra parte, es importante mencionar que este producto es fundamental para continuar con el desarrollo del proyecto de tesis del autor que cursa la maestría en Didáctica de las Ciencias en la Universidad Autónoma de Querétaro.

Para culminar, cabe destacar que se proyecta a futuro la implementación del manual en la comunidad estudiantil para disminuir los obstáculos que presentan al resolver y despejar expresiones lineales de una variable.

Agradecimientos

El autor agradece a los treinta alumnos que participaron como muestra para esta investigación, al CECYTEM Plantel Acambay por las instalaciones facilitadas para el desarrollo de la misma y a la M. D. M. Teresa de Jesús Valerio López por el asesoramiento puntual de este trabajo.

Referencias

Brousseau, G., Davis, R. B. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, G. y Otte M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 205-241). Springer Dordrecht. DOI: 10.1007/978-94-009-4504-3

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 3-14. DOI: 10.2307/749532

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1* (1), 16-20. https://www.jstor.org/stable/40247696

RINCÓN MATEMÁTICO

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

THE ALGEBRAIC LANGUAGE

Jesús Jerónimo Castro[1*]
Rafael Iván Ayala Figueroa[2]**
Víctor Antonio Aguilar Arteaga[*]
Víctor Larios Osorio[*]

[*]Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México
[**] Tecnológico Nacional de México,
plantel Mexicali, Mexicali, México

[1] jesus.jeronimo@uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-6601-0004
[2] rafaelivan@itmexicali.edu.mx
https://orcid.org/0000-0001-9988-1626

Introducción

El lenguaje algebraico es un medio que representa situaciones de diversos contextos (escolares, profesionales, de la vida real, etc.) y que permite manipular objetos matemáticos que tienen su contraparte en muy variados contextos. Se trata de una capacidad fundamental para el desarrollo escolar. Además, como cualquier lenguaje, el alumno debe internalizarlo y aprehenderlo de manera "automática", ya que así no se convertirá en un obstáculo para el aprendizaje de otros conceptos más complejos. En este trabajo se presentarán algunos problemas y ejercicios, agrupados de acuerdo con la temática, que podrán ser resueltos de varias formas; empero, valdría la pena intentar expresarlos con lenguaje algebraico. Esperamos que el lector se divierta y se entretenga con este material.

1. Ecuaciones con una variable

Ejemplo 1.1. ¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla, y la séptima parte de su existencia transcurrió a en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

Solución. De las condiciones del problema se obtiene la ecuación:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

De la cual se obtiene que $x = 84$

Ejemplo 1.2. (Ladrones Fuertemente Jerarquizados). Un grupo de ladrones (los LFJ) roba monedas de oro de un banco. Los ladrones tienen jerarquía, entonces el de mayor jerarquía dijo: *propongo que al de menor jerarquía se le dé una moneda, al que sigue 2, luego 3, y así sucesivamente*. Entonces el de menor jerarquía protestó y dijo: *propongo que cada uno tenga 5 monedas*. Si en ambos casos las monedas alcanzan perfectamente, ¿cuántos ladrones eran?

Solución. Contaremos de dos formas las monedas robadas. Supongamos que hay n ladrones. Con la manera de repartir propuesta por el ladrón de mayor jerarquía tenemos que la cantidad de monedas es:

$$1 + 2 + \cdots + n + \frac{n(n+1)}{2}$$

Por otro lado, en la propuesta del ladrón de menor jerarquía tenemos que la cantidad de monedas es $5n$. Como ambas cantidades deben ser iguales, obtenemos la ecuación:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5n$$

De donde se obtiene que $n = 9$. Por lo tanto, son 9 ladrones.

Ejemplo 1.3. A una velada asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga, con ocho; Vera, con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

Solución. Supongamos que la cantidad de mujeres en la fiesta es n. La primera de ellas bailó con 7 hombres, lo que podemos expresar como $6 + 1$. La segunda de las mujeres bailó entonces con $6 + 2$, y así sucesivamente hasta la última que bailó con $6 + n$. En total había 20 personas, entonces $n + 6 + n = 20$, de donde se obtiene que $n = 7$. Por lo tanto, había 13 muchachos en la fiesta.

En el siguiente ejemplo podemos observar cómo la geometría y el álgebra, en ocasiones, se armonizan y resultan en demostraciones de gran belleza.

Ejemplo 1.4. Expresa el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.

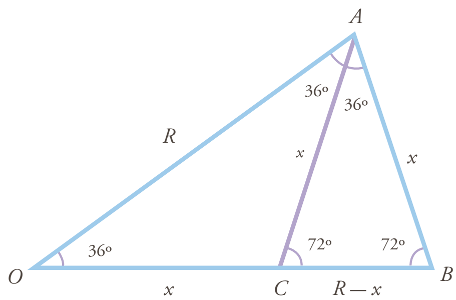
Solución. Sean $AB = x$ uno de los lados del decágono, O el centro de la circunferencia y R su radio. Sea C un punto sobre el lado OB de tal manera que $\measuredangle OAB = \measuredangle CAB = 36°$. Así, obtenemos el triángulo $\triangle CAB$, el cual es semejante al triángulo $\triangle OAB$. Al utilizar la proporción entre los lados tenemos:

$$\frac{x}{R} = \frac{R - x}{x}$$

Esto da lugar a la siguiente ecuación (aquí se acabó la geometría y le toca el turno al álgebra):

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

La cual tiene como raíces a $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ y $-R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. Claramente, la segunda no puede ser solución de nuestro problema, ya que no existen longitudes negativas. Por lo tanto, la solución es $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.



Ejercicios

Ejercicio 1.1. Un rectángulo tiene lados de longitudes a y b, con $a < b$. Se sabe que, si recortamos un cuadrado del lado a de dicho rectángulo, entonces obtenemos un rectángulo semejante al original. Encuentra la razón a/b.

Solución. $\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Ejercicio 1.2. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. Las alturas son de 30 y 20 codos; la distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un ave. De súbito, ambos pájaros avistan un pez que aparece en la superficie del agua entre las dos palmeras. Los cazadores se lanzaron y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

Solución. A 20 codos.

Ejercicio 1.3. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

Solución. 12 personas.

2. Ecuaciones con dos o más variables

Ejemplo 2.1. Un barco navega durante 5 horas sin interrupción río abajo desde la ciudad A hasta la ciudad B. De regreso avanza contra la corriente durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará una balsa para desplazarse de la ciudad A a la ciudad B, yendo a la misma velocidad de la corriente?

Solución. 35 horas.

Ejemplo 2.2. Encontrar un número de tres cifras distintas tal que, si se le resta el número con las cifras invertidas, se obtiene un número con las mismas tres cifras.

Solución. 954.

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Dos campesinas llevaron en total 100 huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero ambas recibieron la misma cantidad de dinero por sus productos. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: *si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 pesos. La segunda contestó: Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú, habría sacado de ellos $6\frac{2}{3}$ de pesos.* ¿Cuántos huevos llevó cada una?

Solución. La primera campesina llevó 40 huevos y la segunda 60.

Ejercicio 2.2. Dos ciclistas corren en el velódromo a velocidades constantes. Al llevar direcciones opuestas se encuentran cada 10 segundos; cuando van en la misma dirección, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos. ¿Cuál es la velocidad que desarrolla cada ciclista si la longitud de la pista es de 170 metros?

Solución. El primer ciclista recorre 9 metros por segundo y el segundo ciclista recorre 8 metros por segundo.

3. Soluciones en números enteros

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Los lados de un rectángulo son números enteros. ¿Cuál será la longitud de dichos lados para que el área y el perímetro se expresen con el mismo número?

Ejercicio 3.2. Pedro le comenta a Juan: “He observado que si al cuadrado de mi edad le resto el producto de tu edad con la edad que yo tendré dentro de un año, el resultado es 18”. ¿Qué edad tiene Pedro?

Ejercicio 3.3. Encuentra todos los números enteros positivos b y k que satisfacen la ecuación:

$$b2 + 1 = k(b - 1)$$

Ejercicio 3.4. Determina todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1999}$$

Ejercicio 3.5. Encuentra todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:

a) $x^2 - y^2 = 31$

b) $x^2 - y^2 = 303$

Ejercicio 3.6. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ es un múltiplo entero de $n + 1$.

4. Problemas de optimización

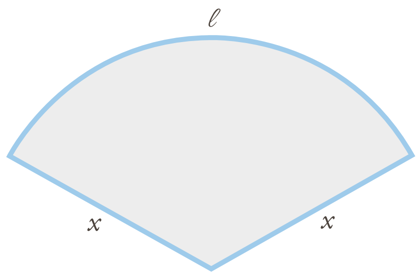
Ejemplo 4.1. Se sabe que un rectángulo tiene un perímetro de 20 cm. ¿Cuánto deben medir sus lados para que su área sea máxima?

Solución. Sus lados miden 5 cm cada uno.

Ejemplo 4.2 De un tronco cilíndrico debe tallarse una viga rectangular del máximo volumen. ¿Qué forma debe tener su sección transversal?

Solución. La forma de un cuadrado.

Ejemplo 4.3. Búsquese la forma de una cometa con un sector circular que tenga la mayor superficie, partiendo de un perímetro previamente dado.

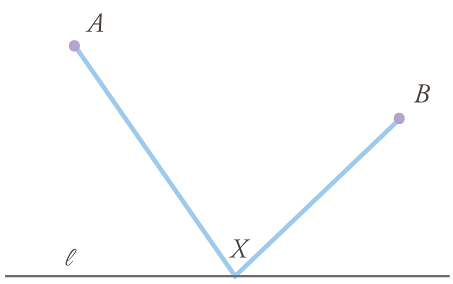


SOLUCIÓN. El ángulo del sector es de 2 radianes, lo cual es aproximadamente 115°.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Dos líneas férreas se cruzan formando un ángulo recto. Los trenes se acercan a gran velocidad hacia el cruce. Uno parte de cierta estación situada a 40 km del cruce; el otro, de una estación que dista 50 km del cruce. El primero marcha a una velocidad de 800 m por minuto, el segundo a 600 m por minuto. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida hasta que las locomotoras se hallen a la distancia mínima entre sí, y cuál será esa distancia, si emprendieron su viaje al mismo tiempo?

Ejercicio 4.2. Dada una recta ℓ en el plano y dos puntos A y B en el mismo lado de la recta, encuentra qué condiciones cumple el punto $X \in \ell$ tal que la suma de distancias $AX + BX$ sea mínima.



SOLUCIÓN. El ángulo que forma el segmento AX con la recta ℓ debe ser igual al ángulo que forma el segmento BX con la recta ℓ.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

5. Relaciones entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes

Consideremos un polinomio cuadrático:

$$ax^2 + bx^2 + c$$

Cuyas raíces son los números r_1 y r_2 . Como sabemos que:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

Tenemos la equivalencia:

$$ax^2 - a(r_1 - r_2)x + a\, r_1 r_2 = ax^2 + bx + c$$

De aquí se obtiene la siguiente relación entre las raíces y los coeficientes:

$$-ax^2(r_1 - r_2) = b, \qquad a\, r_1 r_2 = c$$

Para el caso en que $a = 1$, obtenemos que:

$$-(r_1 + r_2) = b, \qquad r_1 r_2 = c$$

Esto es conocido como las Fórmulas de Vieta.

Ejemplo 5.1 Si r y s son las raíces de $x^2 + bx + 1 = 0$, encuentra el valor de:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} =$$

Solución. Dado que r y s son las raíces de la ecuación, tenemos que $(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$ debe ser igual a $x^2 + bx + 1$. De aquí obtenemos $-(r - s) = b$ y $rs = 1$. Reescribimos:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2} = \frac{(r + s)^2 - 2rs}{(rs)^2}$$

Sustituyendo los valores de $r + s$ y rs obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = b^2 - 2$$

Por otro lado, dado un polinomio de grado n con coeficientes enteros:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Sabemos que si posee una raíz racional p/q, con p/q sin divisores en común, entonces debe cumplirse que p es un divisor de $a0$ y q es un divisor de a_n.

Ejemplo 5.2. Encuentra las raíces enteras de la ecuación:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0$$

Ejemplo 5.3. Demuestra que la ecuación $b^2 + b + 1 = a^2$ no tiene solución en números enteros positivos.

Ejercicios

Ejercicio 5.1. Dados tres enteros impares a, b, c, probar que la siguiente ecuación no puede tener una raíz racional:

$$a^2 + bx + c = 0$$

Ejercicio 5.2 Encuentra todas las tripletas ordenadas (x, y, x) tales que:

$$x + y + z = 17$$
$$xy + yz + xz = 94$$
$$xyz = 168$$

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO