13

PädiUAQ

Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

ISSN: 2954-4025

VOLUMEN 7, NÚMERO 13

ENERO - JUNIO 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIRECTORIO

*Pädi*UAQ, vol. 7, No. 13, enero-junio 2024, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la División de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., C.P. 76010, Tel. (442) 192-12-00 ext. 6023, https://revistas.uaq.mx/index.php/padi, padiuaq@uaq.mx Editor responsable: Víctor Larios Osorio. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-040413274400-102, ISSN: 2954-4025, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Victor Larios Osorio, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, Querétaro, Qro., C.P. 76010, fecha de última modificación, 18 de enero de 2024.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

latindex

PädiUAQ
Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería

COMITÉ CIENTÍFICO

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Víctor Larios Osorio

Universidad Autónoma de Querétaro (México)
vil@uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-4454-8516

Resumen

En este número se presentan dos artículos. En uno se expone un cuestionario orientado a la valoración del conocimiento matemático de los profesores en cuanto al concepto de función, el cual puede servir como referencia para proponer actividades de enseñanza para la mejora de la práctica educativa. En el segundo artículo se presentan los resultados de un proceso de indagación sobre el pensamiento algebraico de estudiantes cuando generalizan patrones lineales, el cual puede ser tomado como base para futuras investigaciones o para el diseño de actividades de enseñanza relacionadas.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas.

¿Por qué se habla del “lenguaje matemático” y no de la “lengua matemática”? Aunque podría parecer trivial la pregunta, no lo es. Y para responderla hay que revisar la diferencia entre las palabras “lenguaje” y “lengua”. Según el diccionario de la Real Academia Española (https://www.rae.es) el *lenguaje* es la “facultad del ser humano de expresarse y comunicarse con los demás a través del sonido articulado o de otros sistemas de signos”, mientras una *lengua* es un “sistema lingüístico considerado en su estructura”. A primera vista parecería que, entonces, lo correcto sería utilizar la expresión “lengua matemática”, pero se considera que las Matemáticas son más amplias, son (como es considerado por muchos) *universales*. Así que la expresión “lenguaje matemático” parecería ser más apropiada.

Hay que decir que esta interpretación puede resultar un poco “a modo”, pero sirve de pretexto para introducir un debate que ha permeado la educación, tanto en lo práctico como en lo teórico, desde hace siglos y que tiene que ver sobre lo innato y lo adquirido. Dentro de este contexto, en el aspecto del conocimiento del individuo, se plantea un antiguo debate acerca de si nacemos sin conocimientos (como si nuestra mente fuese una *tabula rasa*) o si ya poseemos algunos conocimientos innatos. Con la llegada de la edad moderna, la primera postura se asumió desde el empirismo, mientras que desde la antigüedad hubo quienes se alinearon a la segunda.

Al parecer, los resultados de la neurociencia en años recientes revelan poco a poco que la *tabula rasa* es una noción equivocada. Gracias a las herramientas que permiten identificar los circuitos neuronales que un infante activa bajo ciertas condiciones, se ha observado que los humanos nacemos con la capacidad de desarrollar el lenguaje, con intuiciones numéricas y con la posibilidad de ejecutar el razonamiento probabilístico, entre otras habilidades. En buena medida, lo anterior no implica que las personas posean el conocimiento en sí, sino que tienen la capacidad de aprender, el "andamiaje" que permite construirlo. Así, al nacer, el individuo goza del potencial para desarrollar el lenguaje hablado y entonces aprende el idioma específico del medio social que le rodea. Algo similar ocurre con el razonamiento probabilístico y la intuición de conceptos numéricos básicos, que permiten aprender conceptos relacionados.

Surgen varias inquietudes: ¿hasta qué grado llega lo innato y comienza lo adquirido?, y estrechamente relacionado con la docencia, ¿cómo aprovechar estas capacidades innatas para que los individuos avancen en sus procesos educativos? Quizás la neurociencia y la investigación educativa nos ofrezcan algunas pistas al respecto.

Para la contribución en el área, en este último sentido, este número de la revista *PädiUAQ* expone dos artículos producto de la indagación sobre el conocimiento de la enseñanza y del aprendizaje en Matemáticas. En uno de ellos se exhibe un cuestionario orientado a la valoración del conocimiento matemático de los profesores en cuanto al concepto de función. Al abordar el tema desde un punto de vista cualitativo, se consideran aspectos interrelacionados, como son el conocimiento del profesorado, los registros de representación semiótica y los significados del concepto de función. De esa manera, este trabajo se plantea como referencia para proponer actividades de enseñanza en pos de mejorar la práctica educativa.

El otro artículo presenta los resultados de una indagación minuciosa del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes. Los participantes abordaron tareas de generalización de patrones lineales; y tras analizar los métodos que implementaron y los niveles de demanda cognitiva también a través una aproximación metodológica de tipo cualitativo, se concluyó que los participantes recurrieron principalmente a estrategias recursivas y explícitas. La relevancia de este trabajo yace en que puede fungir como base para futuras investigaciones o para el diseño de actividades de enseñanza relacionadas.

INICIO

01

CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN

QUESTIONNAIRE ON THE MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING OF MATHEMATICS TEACHER. A PROPOSAL FOR TEACHING OF FUNCTION

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de agosto de 2023.

Luis Jesús Alcalá-Tejada[1]
Lilia Patricia Aké Tec[2]

[1] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
luis_alcala002@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5250-5890
[2] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
lake86@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4303-4895

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo presentar un cuestionario para valorar el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de matemáticas enfocado al concepto de función polinomial. Se utiliza una metodología cualitativa basada en el diseño que tiene como fundamento tres elementos: el conocimiento del profesor de matemáticas, los registros de representación y los significados de la función. El estudio se enmarca en el contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato, ya que según las investigaciones existe una falta de formación profesional homogénea, así como un corpus de conocimiento específico definido. Como resultado, se presenta el diseño de un cuestionario integrado por **6** tareas que entrelazan el conocimiento docente, los registros de representación y los significados de la función. Se concluye que este tipo de propuestas resultan una herramienta que permite caracterizar y delimitar los conocimientos necesarios y suficientes para la enseñanza del concepto de función. Además, sirven como referente para proponer y fortalecer actividades formativas que orienten a los docentes a la mejora de sus prácticas educativas.

Palabras clave: bachillerato, conocimiento del profesor, función.

Abstract

The present study is about a questionnaire to assess mathematical knowledge for teaching of mathematics teachers about the concept of polynomial function. A qualitative methodology based on design is used, based on three elements: the mathematical knowledge for teaching, the semiotic representation registers and function meanings. This study is situated in the context of high school mathematics teachers because, according to research, there isn't a homogeneous professional training, as well as insufficient specific knowledge for the teaching profession at this educational level. In this way, the design of a questionnaire is presented, which is composed of six task that unify teaching knowledge, representation registers and function meanings. Finally, this type of proposal becomes a tool that characterizes the necessary knowledge for the function concept teaching. In addition, this proposal serves as a reference to strengthen teacher training activities to improve their educational practices.

keywords: teacher's knowledge, function, high school.

El estudio apuntala el contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato y tiene por objetivo presentar un cuestionario que valore su cátedra para la enseñanza. El trabajo se enfocará al concepto de función polinomial.

Introducción

Una de las interrogantes que continúan estudiándose desde la Matemática Educativa es sobre cuál es la naturaleza y características del conocimiento del profesor de matemáticas (Scheiner *et al.*, 2019). Durante décadas se pensó que para ejercer la enseñanza de las matemáticas era suficiente y necesario tener un conocimiento matemático. Después de diversas investigaciones realizadas sobre el profesor (Shulman, 1986; Sánchez, 2011; Shceiner *et al.*, 2019), se coincide en que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente.

La importancia del estudio del conocimiento docente radica en la práctica del profesor dentro del aula. Misma que se ve influenciada por su conocimiento profesional y le permite actuar frente a las respuestas de los estudiantes, incorporar recursos en el aula, proponer tareas, etc. (Scheiner *et al.*, 2019). De esta manera, estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas manifestado en la acción de enseñar, apoya en la determinación de los elementos que caracteriza su condición.

En el marco de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor, se advierten estudios desde diferentes marcos teóricos hasta diferentes contenidos matemáticos. Por ejemplo, en el trabajo de Sánchez Santiesteban *et al.* (2022) se aplicó un cuestionario a 15 profesores de matemáticas con experiencia en educación superior y diversas nacionalidades, para indagar en los significados del concepto de pendiente, evidenciando la prominencia del significado geométrico sobre los demás. La investigación mediante la aplicación de un cuestionario a profesores en formación para el nivel bachillerato de Graciano Barragán y Aké (2021) indaga sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los productos notables, observando dificultades en los conocimientos de futuros docentes. En Gavilán (2006) se presentan los hallazgos de una investigación que pretende explicar, mediante un estudio de casos, la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza del concepto de derivada, destacando la estrecha relación entre la práctica del profesor y sus concepciones acerca del proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos en el ámbito escolar. En los estudios anteriores, la delimitación y especificación del estudio del contenido matemático se justifica debido a la complejidad no sólo de la práctica docente sino también del conocimiento matemático en sí mismo.

Particularmente, este estudio se interesa por el aprendizaje del concepto de función, el cual requiere conocimientos sólidos y específicos por parte de los profesores; primordial para aquellos que ejercen en el nivel educativo medio superior, ya que se aborda formalmente dicho concepto y su estudio se extiende a lo largo de los niveles escolares siguientes. La comprensión del concepto de función es considerada base para el entendimiento de conceptos más avanzados en matemáticas, principalmente en el ámbito del cálculo. Respecto a este concepto, surge el interés de investigar los procesos de aprendizaje desde la parte en la que emana el conocimiento en el aula, es decir, del profesor. De acuerdo con lo anterior, los estudios que tratan sobre los docentes, sus concepciones y representaciones, así como de sus conocimientos y competencias, se han multiplicado en las últimas décadas (Artigue, 2004).

> La importancia del estudio del conocimiento docente radica en la práctica del profesor dentro del aula.

Sobre la noción de función, abundan investigaciones que abordan sus aspectos históricos y epistemológicos. Roque (2012) presenta un enfoque que busca desmitificar ideas erróneas sobre la historia de las matemáticas y su concepción, en cuanto a diversos constructos matemáticos, entre ellos el concepto de función. Existen investigaciones que abordan las problemáticas en el aprendizaje de las funciones, como Jones (2006), quien aborda las dificultades históricas y pedagógicas que los estudiantes y profesores enfrentan al aprender y enseñar el concepto de función; estas dificultades pueden incluir conceptos erróneos comunes, problemas de representación gráfica, comprensión de la relación entre variables y la función, y aplicación de funciones en diferentes contextos. También, existen otras investigaciones que

PädiUAQ | vol. 7 núm. 13 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

estudian las diversas formas de comprender el concepto de función (Sfard, 1991) y sus significados (Ribeiro y Curly, 2018); dichas investigaciones aportan significativamente a la Matemática Educativa al describir las concepciones y significados que emergen durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Otras investigaciones estudian las formas de comprensión del concepto de función que tiene el profesor. Evoquemos a De la Rosa (2003), quien presenta los resultados de una investigación con cinco profesores en servicio, respecto a la enseñanza de la función. El estudio empleó como marco teórico el Modelo del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza de Shulman (1986) y recogió los datos mediante un cuestionario. Plantea, entre sus conclusiones, que los profesores arraigan la concepción de función como una expresión algebraica. Por otro lado, en el trabajo de Rodríguez Flores *et al*. (2018) se aborda el conocimiento del profesor con relación a algunos conceptos de la función; asimismo, se consiguió identificar diferentes conocimientos desde la perspectiva teórica del Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Este trabajo es una investigación del tipo cualitativa, basada en el estudio de casos, seleccionando a un profesor experto. Los resultados muestran una riqueza en la estructura conceptual presente en el proceso de la enseñanza, además de utilizar un sólido lenguaje numérico por parte del profesor.

Amaya de Armas *et al*. (2021) analizaron las competencias de futuros profesores al ejecutar transformaciones de las representaciones de una función. Los autores sugieren implementar procesos formativos que lleven a los futuros docentes a realizar análisis más integrales del concepto de función y faciliten hacer uso operativo de sus conocimientos. Por otro lado, Tasdan y Koyunkaya (2017) realizaron una investigación de los conocimientos del concepto de función en profesores de matemáticas en formación; tomaron como referente teórico el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Los autores señalan dificultades que los futuros docentes afrontarán para explicar matemáticamente el concepto de función, así como el uso inadecuado del lenguaje formal y una desarticulación entre las propiedades de las funciones.

En México los estudios sobre el conocimiento del profesor no son tan numerosos en comparación con las investigaciones internacionales. De acuerdo con Ávila (2016), la investigación en Matemática Educativa en

México ha ido evolucionando y diversificándose en cuanto a los enfoques teóricos y metodológicos utilizados; sin embargo, esto no implica que existan investigaciones mexicanas que coloquen al profesor de matemáticas en el centro del estudio con el objetivo de conocer, interpretar y caracterizar las competencias que ostenta y manifiesta a la hora de enseñar un contenido. De este modo, realizar este tipo de estudios sobre el profesor respecto a un contenido matemático es relevante debido a que no hay un programa de formación homogéneo para los docentes. Los profesores de secundaria y primaria no cuentan con una formación matemática fortalecida (Santibañez, 2007). En el caso de los profesores de bachillerato o media superior, por tradición, sus puestos han sido ocupados por profesionistas de diversas áreas disciplinares. En el caso de matemáticas, por ejemplo, en su mayoría son ingenieros (Martínez Sierra *et al.*, 2019). Esto implica que los docentes de bachillerato, durante su formación profesional, no cursaron asignaturas que les aportaran recursos sobre pedagogía o didáctica (Ibarrola y Martínez, 2018).

Las connotaciones previas hacen apremiante atender las necesidades de formación de los profesores de matemáticas. En este sentido, el informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012) pone de manifiesto que "el profesorado es la pieza elemental para un desarrollo positivo de los sistemas de educación, conformando el principal desafío para una educación matemática de calidad" (p. 25). En este marco el profesor de matemáticas es una pieza clave en la actividad generada en el aula, es un gestor del conocimiento. Esto ha motivado a los investigadores a enfocarse en la compresión que tienen los profesores del contenido que enseñan, indagando sobre los conocimientos con los que cuentan.

Debido a la problemática evidenciada, el presente estudio pretende aportar un entendimiento sobre las formas de conocimiento que requiere desarrollar un docente de matemáticas para ejercer su labor. Esto debido a que sus estudios referentes al conocimiento generan información sobre aspectos parciales iniciales respecto a dicho conocimiento. En este sentido, el presente trabajo se suma a esta línea de investigaciones que tienen el interés de caracterizar los conocimientos necesarios que requiere el docente para ejercer su labor educativa, lo cual no se alcanza con estudios generales, sino con investigaciones sobre tópicos matemáticos específicos (Vásquez y Alsina, 2017; Burgos *et al.*, 2018).

De esta manera, el objetivo es exponer un cuestionario que permita valorar el conocimiento de los profesores de matemáticas en ejercicio sobre la noción de función, en específico la función polinomial lineal y cuadrática. El estudio también se enmarca en el contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato para atender la falta de una formación profesional homogénea, así como la falta de un corpus de conocimiento específico definido para la profesión docente en este nivel educativo.

Marco teórico

Aunque existen varios modelos de conocimiento, como el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en el inglés) (Aguilar *et al.*, 2014), o el Conocimiento Didáctico–Matemático (CDM) (Pino Fan y Godino, 2015), este estudio toma como referente el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball *et al.*, 2008). El modelo MKT está conformado por 6 subdominios (Figura 1) presentes en la siguiente clasificación:

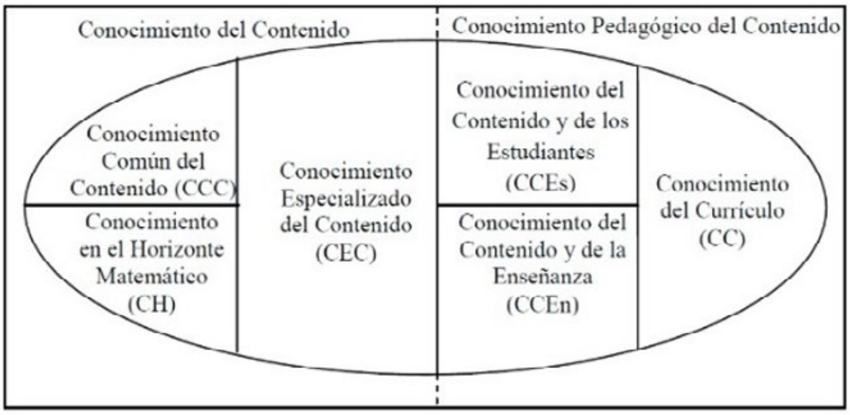


FIGURA 1.
Modelo MKT.
Ball *et al.* (2008).

— Conocimiento Común del Contenido (CCC): es descrito como el conocimiento matemático utilizado en cualquier ámbito profesional y no solo en situaciones de enseñanza.

— Conocimiento en el Horizonte Matemático (CH): es definido como el conocimiento de las relaciones entre los diversos temas incluidos en el currículo. Estas relaciones pueden ser tanto verticales, aludiendo a los temas de diferentes niveles educativos, como horizontales al contemplar los temas en un mismo nivel educativo entre diferentes asignaturas.

— Conocimiento Especializado del Contenido (CEC): descrito como el conocimiento que transforma un contenido matemático en un contenido enseñable. Este conocimiento es exclusivo para la enseñanza.

— Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CCEs): definido como el conocimiento de los estudiantes al pensar, saber y aprender un contenido matemático, incluyendo sus errores y dificultades.

— Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CCEn): descrito como el conocimiento que entrelaza la enseñanza y el contenido disciplinar al contemplar los razonamientos de los estudiantes y las estrategias didácticas pertinentes para el aprendizaje.

— Conocimiento del Currículo (CC): definido como el conocimiento de los objetivos, contenidos y fines educativos contemplados en el plan curricular institucional.

Asimismo, como segundo elemento considerado en el diseño del cuestionario están *los registros de representación*. La teoría de registros de representación semiótica fue propuesta por Duval (1993) y establece que el uso de representaciones para el pensamiento matemático es esencial para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Duval (2004) distingue cuatro tipos de representaciones semióticas fundamentales y generales en los objetos matemáticos: lenguaje natural o verbal, algebraico, gráfico y numérico, los cuales se describen a continuación:

— Registro en lenguaje natural (RLN): descripción del fenómeno a analizar de manera oral o escrita.

— Registro algebraico (RA): representación del objeto al usar expresiones algebraicas.

— Registro gráfico (RG): representación del objeto al usar coordenadas cartesianas.

— Registro tabular o numérico (RN): representación del análisis de los aspectos numéricos.

Adicionalmente, de Amaya *et al.*, (2021) se anexa el siguiente registro:

— Registro cartesiano (RC): es el conjunto de pares ordenados, siendo el primer componente los valores de la variable independiente, y el segundo los de la variable dependiente.

Al considerar la postura de Duval y Amaya se contempla que la enseñanza y aprendizaje de las funciones no se debe limitar al trabajo en uno solo de estos registros, sino que se debe incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra (Duval, 2006).

El tercer elemento contemplado para el diseño del cuestionario fueron los diferentes significados del concepto de función, los cuales fueron retomados del estudio realizado por Pino Fan *et al.*, (2019) y se expresan a continuación:

— La función como correspondencia (FCO): refiere a la asociación de elementos entre dos conjuntos.

— La función como relación entre magnitudes variables (FMV): refiere al estudio de fenómenos que incluyen un cambio, por ejemplo: el calor, la distancia, la velocidad, etc.

— La función como representación gráfica (FRG): refiere a un conjunto de puntos que representan visualmente una relación entre los ejes coordenados.

— La función como expresión analítica (FEA): se refiere a la expresión algebraica de una función que se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, potencias, raíces, etc.

— La función como correspondencia arbitraria (FCA): se refiere a la relación abstracta entre dos conjuntos, sin conocer la forma explícita en la que se lleva a cabo la asignación entre sus elementos.

— La función a partir de la teoría de conjuntos (FTC): se refiere a la relación de una variable que cumple las propiedades de los conjuntos.

PädiUAQ | vol. 7 núm. 13 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Metodología

Se utiliza una metodología cualitativa basada en el diseño de un cuestionario que tiene como fundamento tres elementos: el conocimiento del profesor de matemáticas, los registros de representación, y los significados de la función. En el diseño se consideró la triangulación de investigadores expertos en la temática (Aguilar y Barroso, 2015), quienes realizaron un análisis del cuestionario propuesto.

En la Tabla 1, de creación propia, se muestran algunas consignas que fueron un referente para diseñar cada una de las seis tareas que conformaron el cuestionario de esta investigación y también, se incluyen indicadores para detectar la movilización de los registros de representación de las funciones, así como la comprensión de sus significados:

Tabla 1.

Ejemplos de consignas en el MKT e indicadores para los registros de representación y significados de la función.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza	
Subdominio	
CCC	Resuelve la tarea
	Identifica si el procedimiento empleado es correcto
	Determina si el resultado es correcto
CEC	Indica qué contenidos matemáticos necesitan poner en práctica los estudiantes para dar solución a la tarea
	Indica qué propiedades del contenido matemático se pueden abordar mediante el estudio de la tarea
	Resuelve la tarea de diferentes formas usando distintos contenidos matemáticos
CH	Indica con cuáles contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar tiene relación esta tarea
	Determina cuál es la importancia a futuro de abordar el contenido en este momento
	Indica cuál es la aplicación cotidiana que tiene el contenido matemático
CCEn	Sugiere una manera en que podría enseñar el contenido
	Indica algunas estrategias o recursos didácticos que utilizaría para enseñar el contenido
	Propone algunos argumentos que utilizaría para convencer a los estudiantes
CCEs	Determina cuáles son los principales errores que podrían cometer los estudiantes a la hora de aprender el contenido
	Explica el razonamiento que siguieron los estudiantes
	Indica las principales deficiencias que tienen los estudiantes, previo a abordar un contenido matemático
CC	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea
	Especifica con cuáles asignaturas tiene relación el contenido matemático propuesto
	Determina cuál es el objetivo de la tarea de acuerdo con el currículo escolar

Registros de representación de las funciones	
Registro	Indicador
RLN	Comprende la relación funcional descrita en el texto
	Describe la función en palabras orales o escritas
RA	Utiliza $f(x)$ para refererirse a la variable dependiente de la variable x
	Incorpora diferentes operaciones aritméticas para expresar la relación funcional entre las variables
RG	Especifica o interpreta qué variable se posiciona en el eje de las abscisas y cuál en el de las ordenadas
	El gráfico está formado por una serie de pares ordenados donde cada valor x tiene un único valor y
RN	Expresa la relación funcional en una tabla de valores
	Sustituye los valores de la variable independiente y opera aritméticamente para obtener los de la dependiente
RC	Comprende la relación funcional descrita en los pares ordenados (x, y)
	En las estructuras (x, y) no duplica ningún valor para y
Significados de la función	
Significado	Indicador
FCO	Concibe a la función como una correspondencia entre dos conjuntos
FMV	Concibe a la función como una correspondencia entre dos magnitudes variables
FEA	Concibe a la función $f(x)$ como una serie de operaciones algebraicas
FRG	Concibe a la función como un gráfico conformado por pares ordenados en donde ningún valor en y se repite para cada valor de x
FTC	Concibe a la función como una serie de pares ordenados que involucran propiedades de conjuntos
FCA	Concibe a la función como una correspondencia entre dos conjuntos, en donde no necesariamente debe de saberse la naturaleza de dicha relación

El cuestionario tomó como referente un primer elemento para su diseño que se sustentó en *el conocimiento matemático para la enseñanza*. Se pensaron distintas preguntas que podrían profundizar en los subdominios de conocimientos que propone el modelo y de esta manera se crearon tareas con distintos contextos procurando que cada una abordara un significado particular del concepto de función. En las tareas poco a poco se fueron involucrando cada uno de los registros de representación de las funciones.

La estructura global del cuestionario se muestra, en la Tabla 2, que es creación propia de la presente investigación:

Resultados

Como resultado de este estudio se tiene un cuestionario que integra 6 tareas y enlaza el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor, los registros de representación y los significados de la función.

A continuación, evidenciamos en la Figura 2, la tarea 1, cuyo objetivo es establecer una relación entre el número de saludos dado el número de personas que hay en una reunión. En esta tarea se pone de manifiesto el conocimiento común del contenido (CCC) y el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs), en los ítems 1a y 1b, respectivamente. En el caso del ítem 1a, solicita encontrar una fórmula matemática para representar la situación dada y el ítem 1b solicita describir las posibles dificultades a las que los estudiantes podrían verse enfrentados al resolver la tarea. Los registros de representación que se pretende movilizar son los siguientes: lenguaje natural, algebraico y numérico. El significado de la función de esta tarea es la función como correspondencia.

Tabla 2.

Estructura del cuestionario.

Tarea	Significado de la función	Registro de representación	Dominio del conocimiento
1	FCO	RLN, RN y RA	CCC y CCEs
2	FMV	RA, RN y RG	CCC y CC
3	FRG	RG y RC	CCEn y CEC
4	FTC	RA y RC	CH y CEC
5	FEA	RLN, RA y RN	CCEs y CC
6	FCA	RG	CCEn y CH

Tarea 1. Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas, todos se despiden con un apretón de mano. En la siguiente tabla se puede interpretar que si hay dos personas solo se puede tener un apretón de manos; si hay tres personas se tendría 3 apretones de manos; si hay cuatro personas habría 6 apretones de manos. Asimismo, en la tabla no se específica cuántos apretones de manos habría si se tuvieran 5 personas, y tampoco cuántas personas hubo en la reunión si se dieron 105 apretones de manos.

Personas	2	3	4	5	
Apretones de mano	1	3	6		105

a) Llamando n al número de personas, escriba una expresión que permite calcular el número de apretones de manos dado cualquier número de personas. Enseguida, complete la tabla.

b) Describa la o las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.

FIGURA 2.

Tarea 1 del cuestionario. Adaptado de Azcarate y Deulofeu (1996).

La tarea 2, que se muestra en la Figura 3 es referente a la variación de la temperatura de un cuerpo respecto al tiempo. Los ítems a y b indagan por el conocimiento común del contenido (CCC) y por el conocimiento del currículo (CC), respectivamente. En ese sentido, el ítem 2a solicita encontrar la representación gráfica de la relación funcional descrita en la tarea, así como el punto máximo de dicha relación, mientras que el ítem 2b consiste en reflexionar si la situación planteada tiene una relación transversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas. Los registros de representación que se pretende movilizar son el algebraico, numérico y gráfico. El significado de la función de esta tarea es la función como relación entre magnitudes variables.

En la Figura 4 se muestra la tarea 3, referente a la interpretación de los pares ordenados de una gráfica. Indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y en el especializado del contenido (CEC). La tarea plantea la situación en que un estudiante pregunta a su profesor si los pares ordenados visibles en la gráfica mostrada son los únicos con los que cuenta la función. Entonces, el ítem 3a solicita reflexionar en una explicación o estrategia para poder responder la inquietud del estudiante, mientras que el ítem 3b pregunta por las propiedades de la función que pueden abordarse

Tarea 2. La temperatura T (en °C) de un cuerpo varía con respecto al tiempo t (en horas) transcurrido desde que ha sido sometida a calor y se rige bajo la expresión $T(t) = 16t - 3.2t^2$ con $0 \leq t < 5$. Se solicita representar gráficamente la relación Temperatura-tiempo y encontrar la temperatura máxima que alcanza la pieza.

a) Encuentre la representación gráfica de la función y determine la temperatura máxima en el intervalo dado.

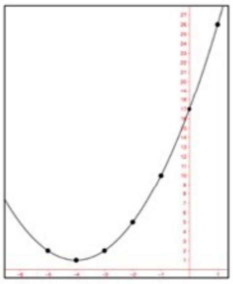
b) De acuerdo con el currículo escolar del bachillerato tecnológico, ¿considera que esta tarea tiene una relación trasversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas?, de ser así, ¿cuál es esa relación de contenidos y a qué asignatura o asignaturas pertenecen?

FIGURA 3.

Tarea 2 el cuestionario.

mediante el estudio de dicha situación. A través del significado de la función manifestado en esta tarea, que es el de la función como representación gráfica, se pretende que los profesores puedan considerar los registros gráfico y cartesiano en el abordaje de la tarea.

Tarea 3. Un profesor solicita a los estudiantes determinar pares ordenados de la función representada en la gráfica, de acuerdo con la tabla dada. Al terminar, un estudiante pregunta si estos son los únicos pares ordenados con los que cuenta la función.



abscisa	ordenada	(x,y)
-5		(,)
-4		(,)
-3		(,)
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)

a) ¿Qué explicación o estrategia utilizaría para resolver la inquietud del estudiante?

b) ¿Qué propiedad o propiedades de la función pueden abordarse mediante el estudio de esta situación?

Figura 4.

Tarea 3 del cuestionario.

La siguiente tarea se muestra en la Figura 5 y es referente a una situación específica en la que un profesor solicita a sus estudiantes que identifiquen los pares ordenados que forman parte de una función dada, expresada en el registro algebraico, mediante un lenguaje formal. A través de sus ítems a y b, se indaga por el conocimiento en el horizonte matemático (CH) y por el especializado del contenido (CEC), respectivamente. En lo referente al primer ítem, se solicita reflexionar si dicha tarea es pertinente para abordarla en el nivel medio superior, mientras que en el ítem 4b se pregunta por los contenidos matemáticos que deberían conocer y utilizar los estudiantes para dar una respuesta correcta a la tarea. El significado de la función es a partir de la teoría de conjuntos y se pretende movilizar entre los registros algebraico y cartesiano.

En la tarea 5, que se muestra en la Figura 6, el significado de la función es como expresión analítica. Esta tarea es referente a una situación que describe el procedimiento que realizó un estudiante, en el que cometió un error a la hora de encontrar la imagen de ciertos valores para *x*.

Tarea 4. Un profesor solicita a sus estudiantes determinar la siguiente función como conjunto de pares ordenados: $F = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, si $A = \{x : 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x - 2 : 5 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

a) ¿Considera que esta tarea es pertinente para el nivel medio superior? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué contenido o contenidos matemáticos deberían utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

Figura 5.

Tarea 4 del cuestionario.

Con esto, se indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs) y en el conocimiento del currículo (CC). En el ítem 5a se pregunta por el posible razonamiento que siguió el estudiante y que lo llevó a cometer un error, mientras que en el ítem 5b se cuestiona por las estrategias que los profesores propondrían en el currículo para evitar el error mostrado en dicha tarea. Para esta tarea se consideran los registros en lenguaje natural, algebraico y numérico.

Tarea 5. Para cada valor x de la función f, hay un único valor y. Ambos valores se corresponden elevando al cuadrado los valores x, y agregando 5 al resultado de dicha potencia. Al representar numéricamente esta función, un alumno obtuvo los siguientes datos, en donde se muestra un error común en los estudiantes:

x	Operaciones	f(x)
-3	$-3^2+5 = -9+5 = -4$	-4
-2	$-2^2+5 = -4+5 = 1$	1
-1	$-1^2+5 = -1+5 = 4$	4
0	$0^2+5 = 0+5 = 5$	5
1	$1^2+5 = 1+5 = 6$	6
2	$2^2+5 = 4+5 = 9$	9
3	$3^2+5 = 9+5 = 14$	14

a) **Describa el posible razonamiento del alumno que lo condujo a ello.**

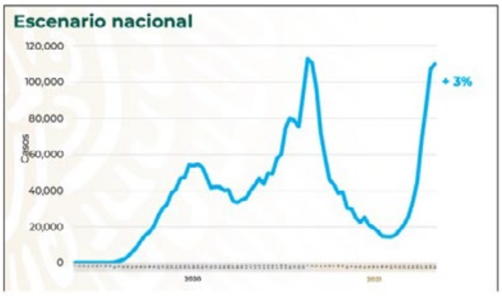
b) **¿Qué estrategia o estrategias propondría en el currículo para evitar la ocurrencia de errores como este?**

Figura 6.

Tarea 5 del cuestionario.

Finalmente, en la Figura 7 se muestra la última tarea del cuestionario, la cual es referente al análisis de un gráfico que cuantifica a los casos de contagio que han ocurrido a lo largo del tiempo, del virus SARS-CoV-2, desde que se declaró como pandemia. Con el gráfico se pretende indagar por el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y por el conocimiento en el horizonte matemático (CH), en los ítems a y b, respectivamente, de esta tarea. El ítem 6a pregunta por los argumentos que los profesores podrían utilizar para explicar que un gráfico representa una función, mientras que el ítem 6b pregunta por contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar que se podrían relacionar con la situación mostrada en dicha tarea. Esta tarea se diseñó bajo el significado de función como correspondencia arbitraria, utilizando el registro gráfico.

Tarea 6. En agosto 11 del 2021, el diario mexicano El Financiero, presentó el número de casos confirmados de COVID-19 en cada una de las semanas desde que inició la pandemia, esto con la finalidad de concientizar ante la llegada de la tercera ola de contagios.



Aunque es imposible obtener una expresión algebraica para calcular el número de casos confirmados según el tiempo, un profesor comenta a sus estudiantes que este gráfico representa una función.

a) ¿Qué argumento o argumentos daría usted a los alumnos para explicar/mostrar/convencerlos de que el gráfico de la tarea representa una función?

b) ¿Con cuál o cuáles contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en esta situación?

FIGURA 7.

Tarea 6 del cuestionario.

Conclusiones

Conocer y comprender los conocimientos con los que cuenta el profesor de matemáticas fortalece, sin duda, a las investigaciones realizadas en Matemática Educativa, pues muestran una referencia para profundizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este caso, el concepto de función representa una noción importante en el currículo de matemáticas a nivel bachillerato, debido a que de él se derivan contenidos más complejos que deben abordarse para la formación común de los estudiantes. Por ello, es necesario distinguir qué conocimientos caracterizan a los profesores de matemáticas respecto a este concepto. El cuestionario aquí propuesto permite recoger información para identificar el conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función, sus significados y representaciones.

El estudio del conocimiento del profesor en tópicos específicos es una tendencia actual en las investigaciones (e. g. Castro y Pino Fan, 2021; Burgos *et al.*, 2018; Vásquez y Alsina, 2017). Los instrumentos requeridos para el estudio de dicho conocimiento están articulados en las tareas, actividades, situaciones problema, etc., cuyo diseño, generalmente, pasa por alto en las investigaciones (García, 2019). De esta manera, lo expuesto en el presente artículo orienta el diseño de las tareas considerando elementos teóricos que sirven de pauta para investigaciones similares sobre diseño de cuestionarios o instrumentos (e. g. Espinoza y Pochulu, 2020) y que, además, contribuye a la caracterización de los conocimientos del profesor en tópicos específicos.

Al presentar el diseño de un cuestionario, se tiene la limitación de no contar con resultados empíricos, por lo que, como línea de investigación abierta se puede sugerir la aplicación en muestras amplias de profesores en formación y en servicio. Cobra relevancia realizar investigaciones con profesores en servicio en México, dado que existe una tendencia por estudiar al profesorado en formación en comparación con las investigaciones hechas con profesores en ejercicio (Camarena, 2015). Adicionalmente, las tareas presentadas se han diseñado con conocimientos propios de bachillerato, ya que contempla tareas sobre el conocimiento común, por lo que el cuestionario podría ser un instrumento que permita medir el conocimiento matemático, respecto al concepto de función, con el que los estudiantes ingresan a la universidad.

PädiUAQ | vol. 7 núm. 13 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2014). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. En CIBEM (Eds.). *Actas de las VII CIBEM* (pp. 5063-5069).

Aguilar, S. y Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Revista de Medios y Educación*, (47),73-88. https://doi.org/ 10.12795/pixelbit.2015.i47.05

Amaya, T., Castellanos, G. y Pino Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, *35* (2), 1-15. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de las matemáticas para afrontarlo? *Educación Matemática*, *16* (3), 5-28. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302

Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, *28* (3), 31-59. https://doi.org/10.24844/EM2803.02

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Burgos, M., Beltrán Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22.

Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En X. Martínez, y P. Camarena (Eds.), *Educación Matemática en el Siglo XXI* (pp. 191-216). Instituto Politécnico Nacional.

Castro, W.F. y Pino Fan, L. (2021). Comparing the didactic-mathematical knowledge on the derivative of in-service and preservice teachers. *Acta Scientiae*, *23* (3), 34-99.

De la Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos Matemáticos*, *11*, 121-133.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9* (1). http://eudml.org/doc/44160

Espinoza, R. F. y Pochulu, M. D. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, *34* (66), 294-313.

García, F. (2019). Introducción al diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15, 1-4. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.264

Gavilán, J. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*,*18*(2),167-170. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40558507008

Graciano Barragán, J. y Aké, L. (2021). Conocimiento de profesores de matemáticas en formación sobre los productos notables. *Uniciencia*, *35* (1), 90-107. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.6

Ibarrola, M. y Martínez, M. (2018). Conformación de una identidad docente entre profesionistas universitarios contratados por asignatura en el nivel medio superior. *Sinéctica*, *51* (00008). https://doi.org/10.31391/s2007-7033(2018)0051-008

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, *7* (2), 1-20.

Martínez Sierra, G., Valle Zequeida, M., García García, J. y Dolores Flores, C. (2019). "Las matemáticas son para ser aplicadas": Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática*, *31*

(1). https://doi.org/10.24844/em3101.04

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2012). *Challenges in basic mathematics education.* http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

Pino Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma*, *36* (1), 87-109

Pino Fan, L., Parra Urrea, Y. y Castro, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11* (23), 201-220. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Ribeiro, A. y Cury, H. (2018). Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função. Autêntica.

Rodríguez Flores A., Picardo Alfaro, M., Espinoza González, J., Rojas González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA*, *32* (1), 89-107. https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6

Roque, T. (2012). História da matemática – Uma visão crítica, desfrezando mitos e lendas. Zahar.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5* (4), 129-145. https://doi.org/10.30827/pna.v5i4.6151

Sánchez Santiesteban, J., Cruz, M., Cabrera, A. y Sigarreta, J. (2022). El significado del concepto de pendiente desde la perspectiva universitaria. *Universidad y Sociedad*, *14* (4), 156-171. https://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus/article/view/3032

Santibañez, L. (2007). Formación y actualización de maestros de secundaria en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *12*, 305-335.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D., Carrillo, J. y Pino Fan, L.R. (2019) What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Tasdan, B. y Koyunkaya, M. (2017). Examination of pre-service mathematics teacher's knowledge of teaching function concept. *Acta Didactica Napocensia*, *10* (3), 1-18. https://doi.org/10.24193/adn.10.3.1

Vásquez, C. y Alsina, A. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación Matemática*, *29* (3), 79-108.

INICIO

Recibido el 17 de junio de 2022, aceptado el 10 de agosto de 2023.

02

PENSAMIENTO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES. UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

ALGEBRAIC THINKING THROUGH PATTERN GENERALIZATION. A CASE STUDY WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Miriam Ramos Franco[1]
Lilia Patricia Aké Tec[2]

[1] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
lmramos43@alumnos.uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-0615-4196
[2] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
lake86@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4303-4895

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo presentar las características del pensamiento algebraico de estudiantes de bachillerato ante la resolución de una tarea sobre generalización de patrones lineales. Como fundamento se utiliza las nociones de estrategias de generalización de patrones y los niveles de demanda cognitiva para este tipo de tareas. Estas nociones fueron utilizadas para la propuesta de la tarea y para el análisis de los datos. Se utiliza una metodología cualitativa basada en el estudio de casos que fue desarrollada con dos estudiantes de bachillerato. Como resultado se aprecia que los estudiantes utilizaron principalmente las estrategias recursivas y explícitas. En el caso del estudiante A, se identifica la dificultad en la declaración y denotación de las variables y el tratamiento algebraico. En cuanto al estudiante B, presenta menos dificultades para resolver algebraicamente la tarea. Se espera que la información generada sea útil para futuras investigaciones y para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases.

Palabras clave: álgebra, bachillerato, generalización, DID, pensamiento, patrones.

Abstract

The present study aims to expose the characteristics of high school students' algebraic thinking when solving a task on generalization of linear patterns. The notions of pattern generalization strategies and the levels of cognitive demand for this type of tasks are used, as theoretical framework. These notions were used for task proposal and data analysis. A qualitative methodology based on case studies and developed with two high school students, is used. Results show, that the students mainly used the recursive. In the case of student A, the difficulty in the declaration and denotation of the variables and the algebraic treatment is identified. As for student B, there are fewer difficulties to algebraically solve the task. The information generated is expected to be useful for future research and for active teachers who decide to implement this type of task in the classroom

keywords: algebra, high school, DID, generalization, thinking, patterns.

El álgebra constituye un desafío para los estudiantes de bachillerato. Sin embargo, pueden plantearse estrategias para fomentar la resolución de problemas que implican pensamiento algebraico. En este artículo, la Dras. Franco y Aké proponen un método dedicado a esta labor.

Introducción

El álgebra escolar representa un reto para los aprendices debido a los errores persistentes y frecuentes que los estudiantes de secundaria y bachillerato manifiestan (Booth *et al.*, 2017). Entre los errores más comunes que los estudiantes cometen en álgebra se encuentran los relacionados al uso del lenguaje algebraico, la generalización de ciertas propiedades y el uso de los símbolos y signos (García *et al.*, 2014).

Particularmente en México, de acuerdo con los resultados de la prueba PISA 2018, alrededor del 44 % de los estudiantes de 15 años de edad alcanzaron el nivel 2 o superior en matemáticas, este porcentaje se encuentra 32 puntos por debajo del promedio de los países que integran la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Además, solamente el 1 % de los estudiantes mexicanos lograron alcanzar el nivel de competencia 5 o superior (siendo 6 el nivel más alto); mientras que en algunos países asiáticos como China y Corea del Sur el porcentaje es de 44 % y 21 % respectivamente (OCDE, 2019).

Esta realidad sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra ha llevado a proponer rutas didácticas para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Una de estas rutas es la generalización de patrones que diversos autores proponen para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el preescolar hasta el bachillerato (Bautista Pérez *et al.*, 2021; Gaita y Wilhelmi, 2019).

En este sentido, un patrón es una sucesión de elementos que se construyen siguiendo una regularidad, la cual proporciona la base necesaria para generar una determinada regla que dicte su comportamiento (Zapatera, 2018). Entonces, la generalización de patrones resulta de la observación de una propiedad común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia. La propiedad común hallada sirve para determinar una regla que permita calcular cualquier término de la secuencia (Radford, 2008).

Una de las características principales de las tareas sobre generalización de patrones es que no solo promueven la identificación de la generalidad; sino que, además, incitan a utilizar el lenguaje algebraico adecuado para expresarla y de esta forma poder operar con ella (Rojas y Vergel, 2014). Este hecho ha llevado a que, algunos países, incluyan en sus currículos educativos la generalización de patrones para introducir el álgebra, ya que este tipo de tareas también permiten que la aritmética coadyuve a la comprensión de los símbolos y las transformaciones de expresiones (Banerjee, 2008).

Actualmente, a nivel internacional y nacional, existen varios estudios acerca de la implementación de diseños didácticos sobre generalización de patrones en niveles preescolar, primaria y secundaria (Bautista Pérez *et al.*, 2021; Gaita y Wilhelmi, 2019; Vergel, 2015; Zapatera, 2018). Sin embargo, a pesar de que en México el tema de generalización de patrones se encuentra en el plan de estudios que propone la Dirección General del Bachillerato (2017), se han realizado escasos estudios en dicho nivel, por lo que este trabajo contribuirá a generar nuevo conocimiento en el área.

Por tal motivo, el objetivo de este artículo es presentar las características del pensamiento algebraico manifestado por dos estudiantes de bachillerato a través de una tarea sobre generalización de patrones lineales. En este artículo se entenderá por pensamiento algebraico a aquel tipo de razonamiento que involucra esencialmente generalizar, representar, justificar, razonar con relaciones matemáticas, percibir la estructura algebraica, estudiar los cambios entre las cantidades involucradas y operar cantidades indeterminadas de forma analítica (Blanton *et al.*, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Radford, 2014).

Marco teórico

El presente estudio tiene como fundamento las estrategias de generalización de patrones y la demanda cognitiva sobre este tipo de tareas. En el marco de los estudios sobre generalización de patrones se distinguen los patrones lineales y los patrones cuadráticos. Como ejemplo se presentan los casos de la Figura 1.

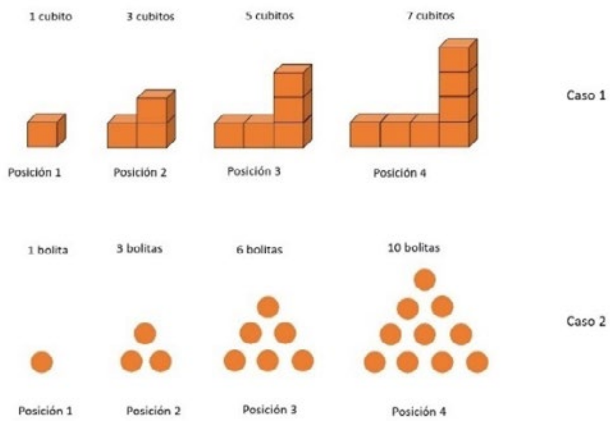


Figura 1.
Patrones lineal y cuadrático.

En el caso 1 de la Figura 1, si se prosigue con la secuencia se tiene 9 cubitos para la posición 5 y para la posición 6 se tendría 11 cubitos. La generalización de este patrón, en el término n-ésimo es la expresión (1):

$$a_n = 2n - 1 \qquad (1)$$

Dicha expresión determina una regla que permite encontrar cualquier término específico de la secuencia. En la misma Figura 1, para el caso 2, la posición 5 tiene 15 bolitas y para la posición 6 se tendría 21 bolitas. El término n-ésimo de la secuencia está dada por la expresión (2):

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} \qquad (2)$$

Este tipo de tareas, según la literatura especializada (Akkan, 2013; Benedicto *et al.*, 2015; Butto y Rivera, 2011; Cetina Vázquez y Cabañas Sánchez, 2022; Lannin *et al.*, 2006; Ramos y Casas, 2018), involucran, entre otros aspectos, cierta demanda cognitiva y facilitan el uso de ciertas estrategias para resolver tareas de generalización de patrones. Benedicto *et al.* (2015), al igual que Stein *et al.* (2009), refiere a demanda cognitiva como al tipo y nivel de pensamiento que son exigidos para abordar y resolver con éxito una determinada tarea. Mientras que Rico (1997) define el concepto de estrategia como "cualquier procedimiento o regla

PädiUAQ | vol. 7 núm. 13 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (p.33).

Es así que para valorar la idoneidad y pertinencia de las tareas que se plantean a los estudiantes, resulta útil contar con un modelo teórico que permita evaluar la complejidad de resolución. Por ejemplo, si la finalidad es desarrollar la capacidad de pensar y razonar de los estudiantes, sería importante plantear una tarea que tenga el potencial de involucrarlos en un alto nivel de demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015).

En el caso de la generalización de patrones, Benedicto *et al.* (2015) proponen un nuevo modelo para valorar la demanda cognitiva de las consignas, específicamente en tareas sobre patrones figurales. En este modelo se propone clasificar la demanda cognitiva en nivel bajo, bajo-medio, medio-alto y alto. En cada nivel se analiza el procedimiento, la finalidad, el esfuerzo cognitivo, los contenidos matemáticos implícitos, las explicaciones y las formas de representación de la solución. A continuación, se describen estos indicadores.

Para la *demanda cognitiva baja*, los autores proponen los siguientes indicadores:

- Procedimiento: No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
- Finalidad: Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
- Esfuerzo: Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
- Contenidos: No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
- Explicaciones: No requieren explicaciones.
- Representaciones: El enunciado recurrirá a la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, implementará la aritmética.

En el caso de las consignas para la *demanda cognitiva media-baja* se especifica lo siguiente:

— Procedimiento: Son algorítmicas e indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.

— Finalidad: Enfocadas a obtener respuestas correctas, pero no a desarrollar la comprensión matemática.

— Esfuerzo: Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.

— Contenido: Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.

— Explicaciones: Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

— Representaciones: En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.

Por otro lado, la *demanda cognitiva media-alta* queda caracterizada de la siguiente manera:

— Procedimiento: Existe una sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, pero con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.

— Finalidad: Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.

— Esfuerzo: Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay que prestar atención a la estructura del patrón.

— Contenido: Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.

PädiUAQ I vol. 7 núm. 13 I enero-junio I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

— Explicaciones: Hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).

— Representaciones: La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que los llevan a un razonamiento más abstracto

Por último, la *demanda cognitiva alta* tiene las siguientes características:

— Procedimiento: Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.

— Finalidad: Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.

— Esfuerzo: Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. Requieren de los estudiantes autocontrol y autorregulación de los propios procesos cognitivos.

— Contenido: Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.

— Explicaciones: demandan alguna explicación o demostración sobre el término general de la secuencia.

— Representaciones: En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Como se ha mencionado con anterioridad, una estrategia hace referencia a la combinación de procedimientos o acciones utilizadas en el proceso de solución de tareas matemáticas (Rico, 1997). En el caso de la generalización de patrones, Akkan (2013) propone 7 tipos de estrategias que utilizan comúnmente los estudiantes al momento de trabajar con generalización de patrones: conteo, recursiva o aditiva, diferencia, objeto-completo, adivinar y comprobar contextual y explícita. A continuación, se describe cada una:

- Conteo: Consiste en contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.
- Recursiva: Consiste en el uso del término anterior en un patrón para encontrar el siguiente término o términos. Los estudiantes generalmente tratan de encontrar la diferencia entre los dos términos y añadir esta diferencia para encontrar el siguiente término.
- Diferencia: Consiste en multiplicar la diferencia entre los dos términos consecutivos de la secuencia por n. Esto ocurre especialmente en la generalización de relaciones lineales en las que se asume de forma implícita que $f(n) = an$.
- Objeto-completo: Consiste en el uso del razonamiento proporcional. O bien, aplicando la regla de 3 a los datos conocidos (una posición y elementos de la secuencia) para determinar los elementos de la posición que se desconoce.
- Adivinar y comprobar: Incluye una especie de regla de predicción independientemente de la regla que funcione. Se propone una regla algebraica que representa el estado del problema. Los estudiantes nunca piensan en la validez de la regla durante el proceso.
- Contextual: Consiste en usar la configuración de una regla centrada en la información que proporciona la secuencia. Esta regla se asocia con la técnica de cálculo.
- Explícita: Consiste en la generalización de una relación entre las dos variables para determinar cualquier valor. Este es el primer paso de un progreso gradual para determinar la regla general.

Metodología

A partir de la fundamentación previa, se siguió una metodología de tipo cualitativa por estudio de casos (Durán, 2012) en la que dos estudiantes de 15 y 16 años de edad resolvieron, bajo consentimiento in-formado de sus tutores, una tarea sobre generalización de patrones lineales. Los estudiantes pertenecían a la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro Plantel Sur, ubicada en la zona urbana del municipio de Querétaro. La tarea que fue desarrollada por ambos estudiantes fue adaptada del trabajo de López Acosta (2016) y, se presenta en la Figura 2.

El caso de las perlas

1. ¿Cuántas perlas conforman la figura de la posición 5?
2. ¿Cuántas perlas conforman la figura de la posición 13?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número de perlas que conforman la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido dicha expresión.
4. Si en una figura hay 127 perlas, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Figura 2.

Patrón lineal "El caso de las perlas". Adaptado de López Acosta (2016).

Para proponer las consignas se utilizó la propuesta de Benedicto y colaboradores (2015) que permite establecer que la consigna orientada a determinar las posiciones cercanas es de una demanda cognitiva media-baja; la consigna para el cálculo de las posiciones lejanas tiene una demanda cognitiva media-alta. Por otro lado, las consignas orientadas a determinar el término general y el proceso inverso representan una demanda cognitiva alta.

De esta manera, una posible respuesta para la tarea planteada es la siguiente: en la consigna 1 se solicita hallar el número de perlas para una posición cercana, por lo que se podría recurrir a una organización tabular para facilitar el análisis, tal como se muestra en la Tabla 1.

De la Tabla 1 se aprecia que existe una regla recursiva que aumenta de dos en dos, lo que permite dar respuesta a la consigna 1 e incluso a la

Tabla 1.

Organización tabular para la tarea.

Posición	1	2	3	4	5	6
Número de perlas	5	7	9	11	13	15

consigna 2 si la tabla se extiende hasta la posición 13. En el caso de la consigna 3, para poder encontrar la regla general, se puede realizar un análisis figural a partir de las formas distintas de realizar la descomposición de figuras como se aprecia en la Figura 3, la cual influye en la forma final de expresar algebraicamente el patrón.

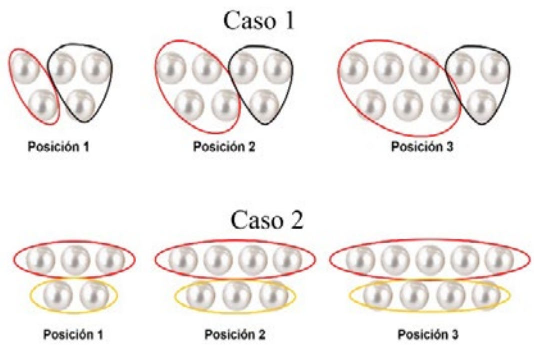


FIGURA 3.
Descomposición figural del patrón.

En el primer caso que se muestra en la Figura 3 se aprecia que hay dos agrupaciones, una variable y la otra constante (el grupo de 3 perlas). En la agrupación que varía se nota que el número de perlas es dos veces el número de la posición puesto que en la posición 1 hay 2 perlas, en la 2 hay 4, y en la 3 hay 6; mientras que en todos los casos siempre permanecen 3 perlas más. Es así como se obtiene la expresión (3) que representa la regla general del patrón:

$$a_n = 2n + 3 \qquad (3)$$

En el caso 2 de la Figura 3, se puede observar que las perlas de la parte superior se comportan acorde con el número de la posición más dos, ya que en la primera hay 1 más dos perlas, en la segunda posición hay 2 más dos perlas y así sucesivamente. Por otro lado, las perlas de la parte inferior aumentan de acuerdo con el número de la posición más 1. De esta manera, el término n-ésimo está dado por la expresión (4):

$$a_n = (n + 2) + (n + 1) \qquad (4)$$

Por último, la consigna 4 invita a realizar un proceso inverso ya que, en vez de que la consigna proporcione el número de la posición para hallar la cantidad de perlas, ahora se proporciona la información del número de perlas (127 perlas) para preguntar por el número de la posición que le corresponde. Entonces, con esta información, es posible realizar las operaciones descritas en la expresión (5) que indica que la posición solicitada es la 62.

$$f(n) = 127$$

$$127 = 2n + 3 \qquad (5)$$

$$124 = 2n$$

$$62 = n$$

A continuación, se realiza el análisis de las producciones escritas de los dos estudiantes que resolvieron la tarea, clasificando las estrategias que utilizaron.

Resultados y discusión

La aplicación de la tarea a los dos estudiantes de bachillerato llevó a los siguientes resultados. Los estudiantes, que denotaremos como A y B, no presentan dificultades para encontrar la posición cercana solicitada en la consigna 1. Tal como se puede apreciar en la Figura 4, ambos estudiantes utilizaron una estrategia recursiva.

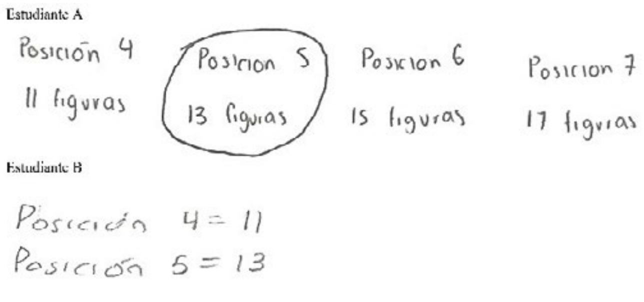


Figura 4. Respuestas a la consigna 1.

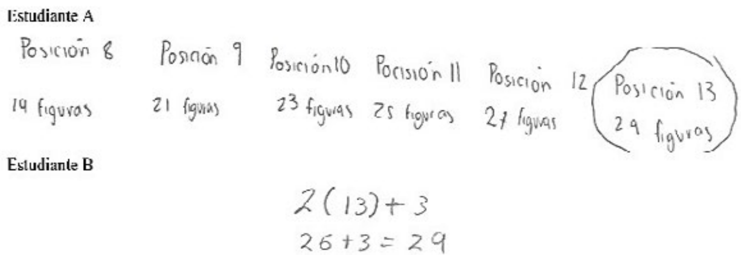


Figura 5. Respuestas a la consigna 2.

En el caso de la consigna 2, los estudiantes siguieron razonamientos diferentes, en el caso del estudiante A siguió una estrategia recursiva, pero el estudiante B determinó primero la regla general (dando respuesta a la consigna 3) y a partir de ahí dio respuesta a esta cuestión. Esto se puede apreciar en la Figura 5.

Para el caso de la consigna 3, a diferencia de las otras consignas, representa una consigna de alta demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015). Para esta cuestión, el estudiante A utilizó una estrategia explícita, ya que establece una relación directa entre el número de la posición y el número de perlas. El estudiante B utilizó otra estrategia que Stacey (1989) clasifica como lineal y otros autores como Barbosa y Vale (2015), Firdaus *et al.* (2019) y Valenzuela y Gutiérrez (2018) denominan como multiplicativo con ajuste. Esta estrategia es similar a la estrategia de diferencia explicada por Akkan (2013), pero al final el estudiante hace un ajuste para que corresponda al comportamiento del patrón, es decir, que la expresión queda de la forma $an + b$, en donde a es la diferencia encontrada en la recursividad, n la posición y b el término independiente que "ajusta" la regla general. Las producciones de ambos estudiantes se advierten en la Figura 6.

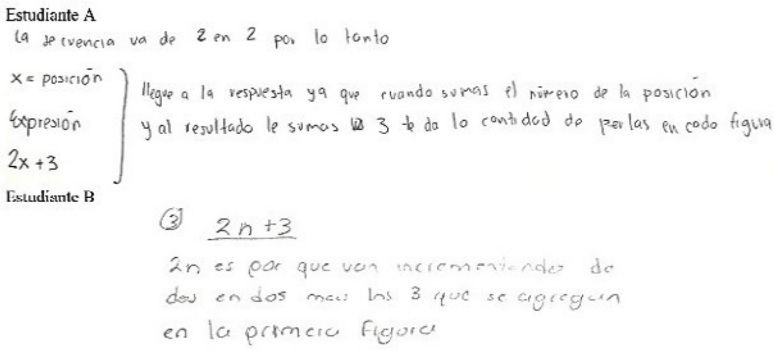


FIGURA 6. Respuestas a la consigna 3.

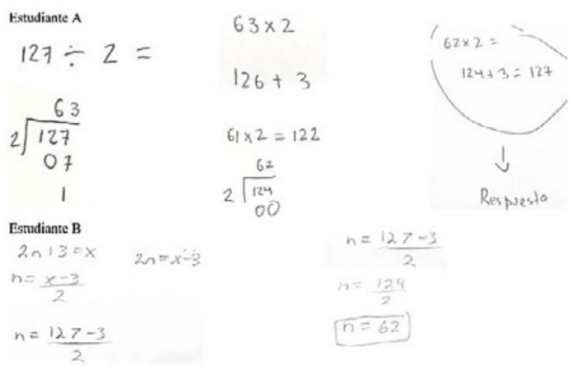


FIGURA 7. Respuestas a la consigna 4.

La consigna 4, también es una consigna de alta demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015). Aunque los estudiantes obtuvieron una respuesta adecuada a la cuestión planteada, sus procedimientos reflejan razonamientos diferentes como se aprecia en la Figura 7.

Para esta última consigna, el estudiante A no logra escribir una expresión algebraica que relacione la cantidad de perlas con el número de la posición. En este sentido al no referir a una expresión algebraica, la estrategia que sigue es por aproximación puesto que realiza operaciones aritméticas y divide el número de perlas 127 entre 2 para acercarse a la posición a la que pertenece. Lo previo guiado por la expresión que encontró en la consigna 3. Posteriormente, sigue una estrategia de comprobación y obtiene el número de perlas que resultan para la posición 63 y 61. Concluye que la respuesta a la consigna es 62 y la verifica. Por otro lado, el estudiante B, utiliza una estrategia explícita ya que establece una relación entre las variables, x y n , donde n es el número de la posición y x la cantidad de perlas que se encuentran en dicha posición, luego transforma de manera correcta la expresión para dejarla en función del número de perlas. Finalmente sustituye el valor de x para encontrar el valor de la posición.

Analizando el trabajo integral del estudiante B, llama la atención como en la consigna 3 escribe la regla general del patrón utilizando una sola literal ($2n + 3$), pero en la consigna 4, dada la naturaleza de la cuestión, se ve con la necesidad de establecer una relación entre dos cantidades y por lo tanto escribe $2n + 3 = x$ introduciendo así otra literal que da mayor sentido para el estudiante, a la situación que se le presenta. No plantea una relación funcional $f(n)$, pero sí expresa la relación para determinar un dato desconocido n, a partir de un dato conocido $x = 127$.

En la Tabla 2 se integran las estrategias que utilizaron los estudiantes en la tarea "El caso de las perlas". De acuerdo con los autores Aké y Godino (2018), una diferencia significativa está dada por cómo logran dar respuesta a la consigna 4, ya que ahí se puede identificar si pueden formular de formar alfanumérica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones.

Tabla 2.

Estrategias utilizadas en cada consiga por los estudiantes.

Estrategias		
Número de Consigna y Nivel de Demanda Cognitiva	Estudiante A	Estudiante B
1. media-baja	Recursiva	Recursiva
2. media-alta	Recursiva	Explícita
3. alta	Explícita	Otra (multiplicativo con ajuste)
4. alta	Otra (por aproximación)	Explícita

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos se aprecia que los estudiantes utilizaron principalmente las estrategias recursivas y explícitas. A pesar de que ambos estudiantes contestaron correctamente cada una de las consignas, las estrategias que utilizaron permiten identificar que tienen diferentes tipos de pensamiento algebraico. En el caso del estudiante A, se identifica la dificultad en la declaración y denotación de las variables y el tratamiento algebraico. En cuanto al estudiante B, presenta mayor familiaridad con el uso de las letras por lo que presenta menos dificultades para resolver algebraicamente la tarea de patrones lineales planteada.

Dada la evolución de las respuestas del estudiante a las consignas de alta demanda cognitiva, se concluye que la tarea favoreció la necesidad de utilizar literales para expresar las condiciones de la situación, por lo que puede propiciar un sentido a la articulación de la aritmética y el álgebra. Por otro lado, las producciones escritas de ambos estudiantes no permiten definir si los dibujos de las perlas fueron de ayuda para encontrar la generalidad, ya que no se observaron marcas sobre las ilustraciones que indicaran agrupamientos para una descomposición figural. Por lo que una de las limitaciones en este estudio fue la falta de entrevistas a los participantes. Se recomienda continuar con investigaciones que apliquen una secuencia de tareas que involucren la generalización de patrones lineales y cuadráticos, ya que a nivel medio superior los estudiantes constantemente trabajan con este tipo de funciones.

Desde el punto de vista de la docencia, la demanda cognitiva y las estrategias de generalización son elementos que pueden ser considerados por el profesor durante su práctica para proponer tareas sobre generalización de patrones en el aula, ya que permitirá que se integren las consignas necesarias de acuerdo a los objetivos que se planteen y se tendrá un modelo para clasificar las estrategias de los estudiantes. Desde la investigación, se destaca que a nivel media superior existen pocos estudios sobre el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones, sobre todo en México, por lo que este trabajo contribuye a esa línea de investigación, exponiendo resultados interesantes sobre las estrategias que utilizan dos estudiantes para resolver ese tipo de tareas. Finalmente, espera que la información generada sea útil para futuras investigaciones y para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases.

Agradecimientos

La primera autora agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por los recursos otorgados a través de la beca de Maestría que es otorgada a los estudiantes que cursan Programas de Posgrados de Calidad.

Referencias

Aké, L. P., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educacion Matematica*, *30*(2), 171–201. https://doi.org/10.24844/EM3002.07

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *27*(47), 703–732. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400002

Banerjee, R. (2008). Developing a Learning Sequence for Transiting from Arithmetic to Elementary Algebra [Tesis doctoral, Tata Institute of Fundamental Research]. *Homi Bhabha Centre for Science Education*. https://www.hbcse.tifr.res.in/academic/graduate-school/phd-projects/phd-thesis-banerjee-final-10-10-08.pdf

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*(1), 57–70.

Bautista Pérez, J. L., Bustamante Rosario, M. H., & Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. Educación Matemática, 33(1), 125–152. https://doi.org/10.24844/EM3301.05

Benedicto, C., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométrico. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 153–162). SEIEM.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. In *Essential Understandings series of the National Council of Teachers of Mathematics*.

Booth, J., McGinn, K., Barbieri, C. A., & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (Issue October, pp. 73–68). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7

Butto, C., & Rivera, T. (2011). La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, 1–12. https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1330.pdf

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *40*(1), 65–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Dirección General del Bachillerato. (2017). *Matemáticas I. Programa de Estudios*.

Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, *3*(1), 121–134. https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

Firdaus, A. M., Juniati, D., & Wijayanti, P. (2019). Generalization Pattern's Strategy of Junior High School students based on Gender. *Journal of Physics: Conference Series*, *1417*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012045

Gaita, R., & Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema, Rio Claro*, *33*(63), 269–289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

García, S. J., Segovia, A. I., & Lupiáñez, G. J. L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *Bolema, Rio Claro*, *28*(50), 1545–1566. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the Early Grades* (pp. 5–17). Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

López-Acosta, L. (2016). Generalización de patrones . Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el

Pensamiento y Lenguaje Variacional. [Tesis de Maestría, CINVESTAV]. *Repositorio CINVESTAV*.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019). Programa Para La Evaluación Internacional De Alumnos (Pisa) Pisa 2018 - Resultados - Nota País México. *OCDE, I–III,* 1–12. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Ramos, L., & Casas, L. (2018). Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1134–1151. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. *EMA*, *1*(1), 4–24.

Rojas, G. P. J., & Vergel, C. R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, *2*, 688. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. S. (2009). Implementing standards-based mathematics instruction (book review). In *Nueva York: Teachers College Press*. http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=aph&an=3958353

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, *30*(2), 49–72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193–215.

https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Zapatera, L. A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. Números Revista Didáctica de Matemáticas, 97, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO