Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

MATEMATIZACIÓN DE POLIEDROS: UNA APLICACIÓN DE LOS VECTORES

MATHEMATIZING POLYHEDRA: AN APPLICATION OF THE VECTORS

Juan Ramón Abreu Rivera
FACULTAD DE INGENIERÍA, MAESTRÍA EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: jrabreur@hotmail.com

RESUMEN:
La disociación muy común del binomio teoría-práctica en algunos conceptos de la matemática, ha dado a esta ciencia una falsa reputación de exclusividad para mentes especiales. El acercamiento de conceptos matemáticos a partir de situaciones reales, matematizando la realidad, es una manera de acercar estos a un público más amplio, que se siente atraído por las aplicaciones que pueden tener en distintos contextos. En el presente trabajo se presentan los resultados observados al aplicar el enfoque realista de las matemáticas al tema de vectores con alumnos de 5° semestre de preparatoria, matematizando (modelizando) un par de poliedros regulares. Se rescata además el papel del docente como facilitador y orientador del aprendizaje de los alumnos.
Palabras clave: matematización, poliedro, vector, razón áurea.

ABSTRACT:
The binomial common dissociation between theory and practice in some concepts of mathematics, have given to this science a false reputation of exclusivity for special minds. The approach of mathematical concepts from real situations, mathematizing reality is a way to bring these to a wider audience, which is attracted to the applications they can have in different contexts. In this paper, the results observed in applying mathematics realistic approach to the issue of vectors with students from 5th semester of high school are presented, mathematizing (modeling) a pair of regular polyhedra. Also is rescued the teacher's role as facilitator and guide to the student's learning.

Key words: mathematizing, polyhedra, vector, golden ratio.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

INTRODUCCIÓN

La matemática es, sin lugar a duda, el resultado más asombroso del intelecto humano. La mathema, como llamaban los griegos a esta área del conocimiento, nace, como su nombre lo indica, de un deseo profundamente humano de comprender, representar y predecir la realidad, de comunicarla en una cultura que se ha apropiado de ella y la ha desarrollado a niveles insospechados (Osta, 2013).

Muchas han sido las aportaciones de diversos individuos, muchos de ellos perdidos en el anonimato de una cultura, han hecho en favor del desarrollo de esta ciencia: chinos, egipcios, griegos, mayas, por mencionar solo algunos, son referencias obligadas para comprender la concepción y evolución histórica del vasto conocimiento matemático. De todos ellos nos sorprende esa increíble capacidad de observación y abstracción, dos habilidades tan frecuentes en las mentes de grandes matemáticos de todos los tiempos.

El concepto de matematización no es, ciertamente, un concepto nuevo en el ambiente matemático. Podemos afirmar que así surgió la matemática en sus orígenes perdidos en la historia del mismo hombre. Sin embargo, sí es un enfoque que se ha venido rescatando desde hace algunas décadas. El vertiginoso adelanto, producción y formalización de la matemática, observado desde mediados del siglo XIX y hasta principios del siglo XX, le dio una mala reputación de inaccesibilidad, bien sea por la complejidad o por la abstracción lograda en sus conceptos y métodos, fuera del alcance del "mundo común". La matemática se percibió en este tiempo como un conocimiento exclusivo de las "mentes brillantes": los matemáticos.

Para Husserl, es Galileo quien anticipa el concepto de matematización al comenzar a ver a la naturaleza desde la óptica de la geometría, relacionando la experiencia sensible del mundo que nos rodea con el campo objetivo, coherente y potencialmente infinito, de la matemática. La geometría pura del ideal griego pasa a un segundo término. Se busca representar la realidad, modelizarla, en términos matemáticos (Osta, 2013).

Ya para finales del siglo XX, el trabajo de Freudenthal sobre la Educación Matemática Realista (1977) supuso una vuelta a las bases, a eso que dio origen a las matemáticas y que Galileo había ya anticipado 400 años atrás: la estrecha relación con la realidad. Se aprende matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria, llenas de sentido para el estudiante y relevantes para la sociedad (van den HeuvelPanhuizen, 2009).

El concepto de la Trasposición Didáctica, desarrollado por Chevallard en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas, supuso también en esta misma perspectiva un nuevo impulso a esta manera de entender la matemática, al explicar el proceso de transformación que sigue un "saber sabio" para hacerse un "saber del alumno". En este escenario se ha de considerar con especial atención el papel del docente, quien re contextualiza y personaliza el saber, para lograr que los alumnos lo hagan propio: adapta los objetos a enseñar y los organiza en el tiempo, formando un "saber enseñado" (Chevallard, 1998).

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El curso de Matemáticas NS (Nivel Superior) del Programa del Diploma del IBO (Organización del Bachillerato

Internacional) para alumnos de quinto semestre de preparatoria, pretende –entre otros objetivos- que los alumnos apliquen sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas extraídos de una diversidad de contextos, logrando con ello desarrollar su comprensión de las formas y las estructuras matemáticas y apreciar las relaciones entre conceptos pertenecientes a distintos temas (IBO, 2016). *En particular, la* unidad 4: Vectores, busca proporcionar una introducción al uso de los vectores en dos y tres dimensiones, y facilitar la resolución de problemas relacionados con puntos, rectas y planos.

Tradicionalmente, el curso se ha enfocado en la exposición de conceptos y procedimientos descontextualizados, con resolución de problemas que implican la aplicación y mecanización de técnicas y algoritmos, muchas veces carentes de significación para los alumnos, lo que ha supuesto un ambiente árido y poco motivante para el aprendizaje, con periodos de poca concentración y poca retención en la memoria a largo plazo.

Se ha observado que al final del tema, los alumnos pueden operar vectores y resolver cierto tipo de problemas relativos al tema, pero no logran visualizar aplicaciones más allá de los mismos.

PROPUESTA

La propuesta que se hizo para lograr acercar aplicaciones de la unidad 4 del programa del curso, consistió en matematizar poliedros utilizando vectores. En particular, se trabajó con el icosaedro y el dodecaedro (poliedros regulares de 20 y 12 caras, respectivamente).

El objetivo de la propuesta hecha es: Diseñar una actividad que muestre una aplicación del tema de vectores a los alumnos de tercero de preparatoria del Colegio Álamos, donde los alumnos refuercen y pongan en práctica los temas de la unidad 4: Vectores, del curso Matemáticas NS.

La hipótesis que se sostiene es que: El acercamiento de conceptos teóricos en contextos realistas, utilizando modelos físicos tangibles construidos por los mismos alumnos, favorecerá que los estudiantes participen activamente en la construcción y apropiación de nuevos conocimientos, logrando también que relacionen a estos con conocimientos previos de diversas áreas.

Previo a la actividad se trabajó durante dos sesiones de 90 min con el grupo algunos conceptos básicos relativos al tema, como qué es un vector, su notación y representación gráfica, vector de posición, suma y resta de vectores y el producto escalar (producto punto) y vectorial (producto cruz) de vectores. Posteriormente se trabajó en una sesión con todo el grupo donde se presentaron los objetivos de la actividad y se acordaron las reglas que se seguirían en las sesiones de trabajo.

Los objetivos propuestos fueron:

1. Matematizar un icosaedro y un dodecaedro.
2. Aplicar los conceptos y operatividad de vectores en una situación real.
3. Profundizar en propiedades de los poliedros.

Las reglas acordadas fueron:

1. La actividad se realizará en equipos de 3 personas.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

2. La duración de la actividad será de 5 sesiones de 90 min.

3. Cada equipo debe tener acceso a internet, por ejemplo a través de un teléfono celular, para realizar las investigaciones previstas.

4. Al final de cada sesión se entregará una bitácora donde se relatará el trabajo realizado durante la sesión: ¿qué se hizo? ¿qué se investigó? ¿qué problemas se encontraron? ¿cómo se resolvieron las dificultades? ¿qué aprendí? ¿cómo me sentí?

5. La comunicación entre los equipos no está permitida: solo se puede hablar con los integrantes del equipo.

Cada una de las cinco sesiones tuvo sus propios objetivos particulares:

Sesión 1:

- Investigar qué es un poliedro, cómo se clasifican, qué es un sólido platónico y qué significado le daban los griegos a estos.
- Investigar qué es la proporción áurea, qué es un rectángulo áureo y qué impacto tuvo esta proporción en la cultura griega.
- Construir un icosaedro a partir de la intersección de tres rectángulos áureos (el material se les proporciona en clase) a la manera de la Figura 1.

Sesión 2 y 3:

- Verificar que el sólido construido a partir del modelo se trata de un icosaedro.
- Calcular el área superficial y el volumen del icosaedro construido.

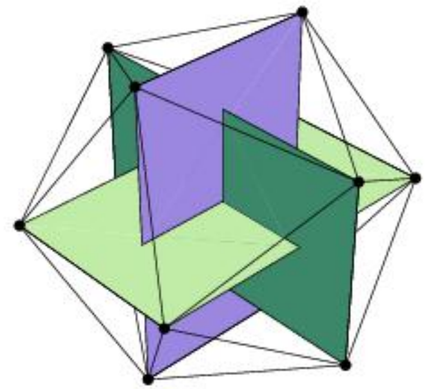

Figura 1. Construcción de un icosaedro a partir de la intersección de 3 rectángulos áureos.

Sesión 4 y 5:

- Verificar que el icosaedro puede inscribirse en un dodecaedro.
- Calcular el área superficial y el volumen de dodecaedro circunscrito al icosaedro.

Acerca de las relaciones de las propiedades de inscripción de estos poliedros, se buscó que los alumnos intuyeran la naturaleza de esta propiedad, al percatarse que el icosaedro posee 12 vértices en igual cantidad que el número de caras del dodecaedro, por lo que podrían intuir que los vértices del primero se ubicaban en el centro de las caras del segundo. Al respecto, puede consultarse el trabajo de Guillén y Puig (2001).

RESULTADOS

Los resultados observados en la actividad fueron muy alentadores, tanto desde el punto de vista de la producción matemática lograda, como del ánimo y ambiente de la clase. Los siguientes comentarios muestran, de manera resumida, la información conseguida de las bitácoras entregadas por los alumnos al final de cada sesión y de la percepción del docente responsable del curso

Sesión 1:

Los alumnos mostraron en principio poco interés en la primera parte de la investigación, pero al adentrarse un poco más en el tema y empezaron a comprender el significado que en el contexto cultural tuvo para los griegos la razón aurea (sobre todo en el ámbito arquitectónico) y los sól idos platónicos, se observó un cambio en su actitud y en sus discusiones dentro del grupo. La construcción del icosaedro supuso un buen reto para la mayoría de los equipos, ya que hubo varios intentos fallidos. Es de destacar la persistencia de un equipo por lograr un icosaedro "cuasi" perfecto, que les llevó a realizar el modelo en 3 ocasiones.

Sesión 2 y 3:

La sesión inició un poco con no saber cómo verificar que el sólido era un icosaedro. Había argumentos simples como "sí es, porque se parece a un icosaedro", o "porque tiene 20 caras". El profesor tuvo que guiar un poco el razonamiento del grupo, cuestionándoles sobre si era suficiente que pareciera icosaedro o que contara con 20 caras. Al cuestionarles sobre qué característica deberían tener las caras, los alumnos cayeron en la cuenta que deberían de ser iguales y con forma de triángulo equilátero. A algunos se les ocurrió entonces medir los triángulos con una regla, pero se dieron cuenta que no todas las aristas del modelo medían lo mismo. El profesor sugirió entonces la matematización del poliedro a partir de vectores: referenciar los vértices del icosaedro respecto de un sistema xyz por medio de puntos, y asociar estos puntos a sus respectivos vectores de posición. A partir de esta sugerencia, los alumnos lograron modelar las aristas del poliedro a partir de diferencias de vectores y calcularon el ángulo entre dos vectores o la longitud de estos para mostrar que los triángulos eran equiláteros. Calcularon las áreas de las caras y determinaron el área del icosaedro. El objetivo del cálculo del volumen del icosaedro no se concluyó por falta de tiempo.

Sesión 4 y 5:

A los alumnos se les dificultó darse cuenta que las aristas del icosaedro se ubicaban en el centro de las caras del dodecaedro. Sin embargo, la situación se resolvió al pedirles que investigaran en internet cómo podría ser esto. A partir de esto, lograron definir la ecuación del plano que contenía a cada una de las caras del dodecaedro, determinaron las ecuaciones de las rectas que contenían a las aristas intersectando los planos de las caras y calcularon las coordenadas de los vértices intersectando las ecuaciones de las aristas. De esta manera lograron calcular el área de las caras del dodecaedro y posteriormente el área superficial del mismo. El objetivo del cálculo del volumen del dodecaedro no se concluyó por falta de tiempo.

En general, se notó un buen trabajo de los equipos, con mucha participación al interior de los mismos. Los alumnos mostraron mucho interés por la actividad y lograron aplicar los conceptos de vectores revisados en el par de sesiones anteriores a la actividad. La participación del docente fue muy importante para ayudar a que los alumnos conectaran dichos conceptos con la matematización de los poliedros, de manera que sugiriera herramientas o algoritmos para que los alumnos intentaran y se acercaran al modelo real a través del lenguaje de vectores.

Los alumnos además manifestaron en sus bitácoras que la dinámica de la actividad les había resultado atractiva porque aprendieron muchas cosas por ellos mismos y vieron una aplicación de vectores conectada con algo real.

CONCLUSIONES

Los resultados observados en la actividad fueron muy satisfactorios en general, tanto para los alumnos como para el maestro. El profesor reportó que notó a los alumnos muy metidos en la actividad y con un trabajo constante durante todas las sesiones. Una dificultad especial que se observó es la falta de habilidad de los alumnos para trabajar expresiones algebraicas que aparecieron en los cálculos a fin de evitar la representación decimal de ciertas cantidades, razón por la cual se vio conveniente trabajar con la representación decimal de las mismas aproximadas a tres decimales.

El objetivo planteado al inicio se cumplió satisfactoriamente, ya que la actividad permitió a los alumnos reforzar y poner en práctica los temas de la unidad 4: Vectores en el curso mencionado, de una forma atractiva para los alumnos. De igual forma, el desenvolvimiento de los alumnos en la actividad evidencia la veracidad de la hipótesis sugerida, y nos lleva a resaltar la importancia de buscar acercar conceptos matemáticos a partir de la experiencia y realidades tangibles cercanas a los alumnos, tal y como lo plantea el concepto de matematización. Finalmente, resaltar el papel que desempeña el docente en este proceso, facilitando y acompañando en la aplicación de los conceptos matemáticos en situaciones reales.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1998). *La trasposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE Grupo Editor.

Guillén, G., & Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudios de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pág. 8). Almería: Universitat de Valencia.

IBO. (2016). *Guía de Matemáticas NS.* Cardiff, Reino Unido: Organización del Bachillerato Internacional.

Osta, M. (2 de enero de 2013). Recuperado el octubre de 2016, de La matematización de la naturaleza: http://galileo.fcien.edu.uy/la_matematizacion_de_la_naturaleza.htm

Van den HeuvelPanhuizen, M. (septiembre de 2009). *Correo del Maestro Núm. 160.* Recuperado el 5 de octubre de 2016, de http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203