Recibido el 17 de junio de 2022, aceptado el 10 de agosto de 2023.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES. UN ESTUDIO DE CASO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

ALGEBRAIC THINKING THROUGH PATTERN GENERALIZATION. A CASE STUDY WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Miriam Ramos Franco[1]
Lilia Patricia Aké Tec[2]

[1] *Universidad Autónoma de Querétaro (México)*
lmramos43@alumnos.uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-0615-4196
[2] *Universidad Autónoma de Querétaro (México)*
lake86@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4303-4895

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo presentar las características del pensamiento algebraico de estudiantes de bachillerato ante la resolución de una tarea sobre generalización de patrones lineales. Como fundamento se utiliza las nociones de estrategias de generalización de patrones y los niveles de demanda cognitiva para este tipo de tareas. Estas nociones fueron utilizadas para la propuesta de la tarea y para el análisis de los datos. Se utiliza una metodología cualitativa basada en el estudio de casos que fue desarrollada con dos estudiantes de bachillerato. Como resultado se aprecia que los estudiantes utilizaron principalmente las estrategias recursivas y explícitas. En el caso del estudiante A, se identifica la dificultad en la declaración y denotación de las variables y el tratamiento algebraico. En cuanto al estudiante B, presenta menos dificultades para resolver algebraicamente la tarea. Se espera que la información generada sea útil para futuras investigaciones y para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases.

Palabras clave: álgebra, bachillerato, generalización, DID, pensamiento, patrones.

Abstract

The present study aims to expose the characteristics of high school students' algebraic thinking when solving a task on generalization of linear patterns. The notions of pattern generalization strategies and the levels of cognitive demand for this type of tasks are used, as theoretical framework. These notions were used for task proposal and data analysis. A qualitative methodology based on case studies and developed with two high school students, is used. Results show, that the students mainly used the recursive. In the case of student A, the difficulty in the declaration and denotation of the variables and the algebraic treatment is identified. As for student B, there are fewer difficulties to algebraically solve the task. The information generated is expected to be useful for future research and for active teachers who decide to implement this type of task in the classroom

keywords: algebra, high school, DID, generalization, thinking, patterns.

El álgebra constituye un desafío para los estudiantes de bachillerato. Sin embargo, pueden plantearse estrategias para fomentar la resolución de problemas que implican pensamiento algebraico. En este artículo, la Dras. Franco y Aké proponen un método dedicado a esta labor.

Introducción

El álgebra escolar representa un reto para los aprendices debido a los errores persistentes y frecuentes que los estudiantes de secundaria y bachillerato manifiestan (Booth *et al.*, 2017). Entre los errores más comunes que los estudiantes cometen en álgebra se encuentran los relacionados al uso del lenguaje algebraico, la generalización de ciertas propiedades y el uso de los símbolos y signos (García *et al.*, 2014).

Particularmente en México, de acuerdo con los resultados de la prueba PISA 2018, alrededor del 44 % de los estudiantes de 15 años de edad alcanzaron el nivel 2 o superior en matemáticas, este porcentaje se encuentra 32 puntos por debajo del promedio de los países que integran la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Además, solamente el 1 % de los estudiantes mexicanos lograron alcanzar el nivel de competencia 5 o superior (siendo 6 el nivel más alto); mientras que en algunos países asiáticos como China y Corea del Sur el porcentaje es de 44 % y 21 % respectivamente (OCDE, 2019).

Esta realidad sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra ha llevado a proponer rutas didácticas para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Una de estas rutas es la generalización de patrones que diversos autores proponen para el desarrollo del pensamiento algebraico desde el preescolar hasta el bachillerato (Bautista Pérez *et al.*, 2021; Gaita y Wilhelmi, 2019).

En este sentido, un patrón es una sucesión de elementos que se construyen siguiendo una regularidad, la cual proporciona la base necesaria para generar una determinada regla que dicte su comportamiento (Zapatera, 2018). Entonces, la generalización de patrones resulta de la observación de una propiedad común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia. La propiedad común hallada sirve para determinar una regla que permita calcular cualquier término de la secuencia (Radford, 2008).

Una de las características principales de las tareas sobre generalización de patrones es que no solo promueven la identificación de la generalidad; sino que, además, incitan a utilizar el lenguaje algebraico adecuado para expresarla y de esta forma poder operar con ella (Rojas y Vergel, 2014). Este hecho ha llevado a que, algunos países, incluyan en sus currículos educativos la generalización de patrones para introducir el álgebra, ya que este tipo de tareas también permiten que la aritmética coadyuve a la comprensión de los símbolos y las transformaciones de expresiones (Banerjee, 2008).

Actualmente, a nivel internacional y nacional, existen varios estudios acerca de la implementación de diseños didácticos sobre generalización de patrones en niveles preescolar, primaria y secundaria (Bautista Pérez *et al.*, 2021; Gaita y Wilhelmi, 2019; Vergel, 2015; Zapatera, 2018). Sin embargo, a pesar de que en México el tema de generalización de patrones se encuentra en el plan de estudios que propone la Dirección General del Bachillerato (2017), se han realizado escasos estudios en dicho nivel, por lo que este trabajo contribuirá a generar nuevo conocimiento en el área.

Por tal motivo, el objetivo de este artículo es presentar las características del pensamiento algebraico manifestado por dos estudiantes de bachillerato a través de una tarea sobre generalización de patrones lineales. En este artículo se entenderá por pensamiento algebraico a aquel tipo de razonamiento que involucra esencialmente generalizar, representar, justificar, razonar con relaciones matemáticas, percibir la estructura algebraica, estudiar los cambios entre las cantidades involucradas y operar cantidades indeterminadas de forma analítica (Blanton *et al.*, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Radford, 2014).

PädiUAQ | vol. 7 núm. 13 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Marco teórico

El presente estudio tiene como fundamento las estrategias de generalización de patrones y la demanda cognitiva sobre este tipo de tareas. En el marco de los estudios sobre generalización de patrones se distinguen los patrones lineales y los patrones cuadráticos. Como ejemplo se presentan los casos de la Figura 1.

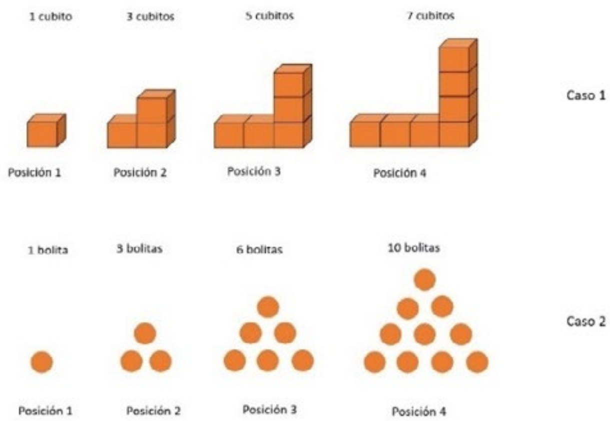

Figura 1.
Patrones lineal y cuadrático.

En el caso 1 de la Figura 1, si se prosigue con la secuencia se tiene 9 cubitos para la posición 5 y para la posición 6 se tendría 11 cubitos. La generalización de este patrón, en el término n-ésimo es la expresión (1):

$$a_n = 2n - 1 \qquad (1)$$

Dicha expresión determina una regla que permite encontrar cualquier término específico de la secuencia. En la misma Figura 1, para el caso 2, la posición 5 tiene 15 bolitas y para la posición 6 se tendría 21 bolitas. El término n-ésimo de la secuencia está dada por la expresión (2):

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} \qquad (2)$$

Este tipo de tareas, según la literatura especializada (Akkan, 2013; Benedicto *et al.*, 2015; Butto y Rivera, 2011; Cetina Vázquez y Cabañas Sánchez, 2022; Lannin *et al.*, 2006; Ramos y Casas, 2018), involucran, entre otros aspectos, cierta demanda cognitiva y facilitan el uso de ciertas estrategias para resolver tareas de generalización de patrones. Benedicto *et al.* (2015), al igual que Stein *et al.* (2009), refiere a demanda cognitiva como al tipo y nivel de pensamiento que son exigidos para abordar y resolver con éxito una determinada tarea. Mientras que Rico (1997) define el concepto de estrategia como "cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (p.33).

Es así que para valorar la idoneidad y pertinencia de las tareas que se plantean a los estudiantes, resulta útil contar con un modelo teórico que permita evaluar la complejidad de resolución. Por ejemplo, si la finalidad es desarrollar la capacidad de pensar y razonar de los estudiantes, sería importante plantear una tarea que tenga el potencial de involucrarlos en un alto nivel de demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015).

En el caso de la generalización de patrones, Benedicto *et al.* (2015) proponen un nuevo modelo para valorar la demanda cognitiva de las consignas, específicamente en tareas sobre patrones figurales. En este modelo se propone clasificar la demanda cognitiva en nivel bajo, bajo-medio, medio-alto y alto. En cada nivel se analiza el procedimiento, la finalidad, el esfuerzo cognitivo, los contenidos matemáticos implícitos, las explicaciones y las formas de representación de la solución. A continuación, se describen estos indicadores.

Para la *demanda cognitiva baja*, los autores proponen los siguientes indicadores:

— Procedimiento: No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.

— Finalidad: Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.

— Esfuerzo: Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.

— Contenidos: No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.

— Explicaciones: No requieren explicaciones.

— Representaciones: El enunciado recurrirá a la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, implementará la aritmética.

En el caso de las consignas para la *demanda cognitiva media-baja* se especifica lo siguiente:

— Procedimiento: Son algorítmicas e indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.

— Finalidad: Enfocadas a obtener respuestas correctas, pero no a desarrollar la comprensión matemática.

— Esfuerzo: Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.

— Contenido: Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.

— Explicaciones: Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

— Representaciones: En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.

Por otro lado, la *demanda cognitiva media-alta* queda caracterizada de la siguiente manera:

— Procedimiento: Existe una sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, pero con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.

— Finalidad: Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.

— Esfuerzo: Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay que prestar atención a la estructura del patrón.

— Contenido: Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.

— Explicaciones: Hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).

— Representaciones: La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que los llevan a un razonamiento más abstracto

Por último, la *demanda cognitiva alta* tiene las siguientes características:

— Procedimiento: Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.

— Finalidad: Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.

— Esfuerzo: Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. Requieren de los estudiantes autocontrol y autorregulación de los propios procesos cognitivos.

— Contenido: Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.

— Explicaciones: demandan alguna explicación o demostración sobre el término general de la secuencia.

— Representaciones: En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Como se ha mencionado con anterioridad, una estrategia hace referencia a la combinación de procedimientos o acciones utilizadas en el proceso de solución de tareas matemáticas (Rico, 1997). En el caso de la generalización de patrones, Akkan (2013) propone 7 tipos de estrategias que utilizan comúnmente los estudiantes al momento de trabajar con generalización de patrones: conteo, recursiva o aditiva, diferencia, objeto-completo, adivinar y comprobar contextual y explícita. A continuación, se describe cada una:

— Conteo: Consiste en contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.

— Recursiva: Consiste en el uso del término anterior en un patrón para encontrar el siguiente término o términos. Los estudiantes generalmente tratan de encontrar la diferencia entre los dos términos y añadir esta diferencia para encontrar el siguiente término.

— Diferencia: Consiste en multiplicar la diferencia entre los dos términos consecutivos de la secuencia por n. Esto ocurre especialmente en la generalización de relaciones lineales en las que se asume de forma implícita que $f(n) = an$.

— Objeto-completo: Consiste en el uso del razonamiento proporcional. O bien, aplicando la regla de 3 a los datos conocidos (una posición y elementos de la secuencia) para determinar los elementos de la posición que se desconoce.

— Adivinar y comprobar: Incluye una especie de regla de predicción independientemente de la regla que funcione. Se propone una regla algebraica que representa el estado del problema. Los estudiantes nunca piensan en la validez de la regla durante el proceso.

— Contextual: Consiste en usar la configuración de una regla centrada en la información que proporciona la secuencia. Esta regla se asocia con la técnica de cálculo.

— Explícita: Consiste en la generalización de una relación entre las dos variables para determinar cualquier valor. Este es el primer paso de un progreso gradual para determinar la regla general.

Metodología

A partir de la fundamentación previa, se siguió una metodología de tipo cualitativa por estudio de casos (Durán, 2012) en la que dos estudiantes de 15 y 16 años de edad resolvieron, bajo consentimiento informado de sus tutores, una tarea sobre generalización de patrones lineales. Los estudiantes pertenecían a la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro Plantel Sur, ubicada en la zona urbana del municipio de Querétaro. La tarea que fue desarrollada por ambos estudiantes fue adaptada del trabajo de López Acosta (2016) y, se presenta en la Figura 2.

El caso de las perlas

1. ¿Cuántas perlas conforman la figura de la posición 5?
2. ¿Cuántas perlas conforman la figura de la posición 13?
3. ¿Cuál sería la expresión que permita calcular el número de perlas que conforman la figura en la posición n-ésima? Explica cómo has obtenido dicha expresión.
4. Si en una figura hay 127 perlas, ¿en qué posición se encuentra la figura?

Figura 2.

Patrón lineal "El caso de las perlas". Adaptado de López Acosta (2016).

Para proponer las consignas se utilizó la propuesta de Benedicto y colaboradores (2015) que permite establecer que la consigna orientada a determinar las posiciones cercanas es de una demanda cognitiva media-baja; la consigna para el cálculo de las posiciones lejanas tiene una demanda cognitiva media-alta. Por otro lado, las consignas orientadas a determinar el término general y el proceso inverso representan una demanda cognitiva alta.

De esta manera, una posible respuesta para la tarea planteada es la siguiente: en la consigna 1 se solicita hallar el número de perlas para una posición cercana, por lo que se podría recurrir a una organización tabular para facilitar el análisis, tal como se muestra en la Tabla 1.

De la Tabla 1 se aprecia que existe una regla recursiva que aumenta de dos en dos, lo que permite dar respuesta a la consigna 1 e incluso a la

Tabla 1.

Organización tabular para la tarea.

Posición	1	2	3	4	5	6
Número de perlas	5	7	9	11	13	15

consigna 2 si la tabla se extiende hasta la posición 13. En el caso de la consigna 3, para poder encontrar la regla general, se puede realizar un análisis figural a partir de las formas distintas de realizar la descomposición de figuras como se aprecia en la Figura 3, la cual influye en la forma final de expresar algebraicamente el patrón.

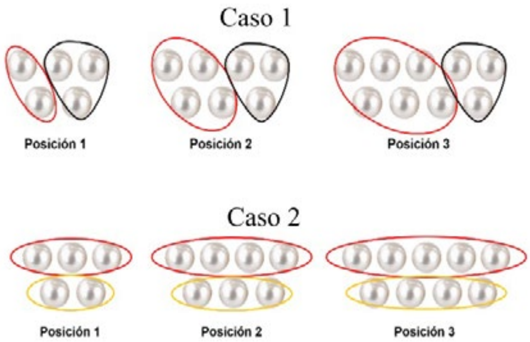

FIGURA 3.
Descomposición figural del patrón.

En el primer caso que se muestra en la Figura 3 se aprecia que hay dos agrupaciones, una variable y la otra constante (el grupo de 3 perlas). En la agrupación que varía se nota que el número de perlas es dos veces el número de la posición puesto que en la posición 1 hay 2 perlas, en la 2 hay 4, y en la 3 hay 6; mientras que en todos los casos siempre permanecen 3 perlas más. Es así como se obtiene la expresión (3) que representa la regla general del patrón:

$$a_n = 2n + 3 \qquad (3)$$

En el caso 2 de la Figura 3, se puede observar que las perlas de la parte superior se comportan acorde con el número de la posición más dos, ya que en la primera hay 1 más dos perlas, en la segunda posición hay 2 más dos perlas y así sucesivamente. Por otro lado, las perlas de la parte inferior aumentan de acuerdo con el número de la posición más 1. De esta manera, el término n-ésimo está dado por la expresión (4):

$$a_n = (n + 2) + (n + 1) \qquad (4)$$

Por último, la consigna 4 invita a realizar un proceso inverso ya que, en vez de que la consigna proporcione el número de la posición para hallar la cantidad de perlas, ahora se proporciona la información del número de perlas (127 perlas) para preguntar por el número de la posición que le corresponde. Entonces, con esta información, es posible realizar las operaciones descritas en la expresión (5) que indica que la posición solicitada es la 62.

$$f(n) = 127$$

$$127 = 2n + 3 \qquad (5)$$

$$124 = 2n$$

$$62 = n$$

A continuación, se realiza el análisis de las producciones escritas de los dos estudiantes que resolvieron la tarea, clasificando las estrategias que utilizaron.

Resultados y discusión

La aplicación de la tarea a los dos estudiantes de bachillerato llevó a los siguientes resultados. Los estudiantes, que denotaremos como A y B, no presentan dificultades para encontrar la posición cercana solicitada en la consigna 1. Tal como se puede apreciar en la Figura 4, ambos estudiantes utilizaron una estrategia recursiva.

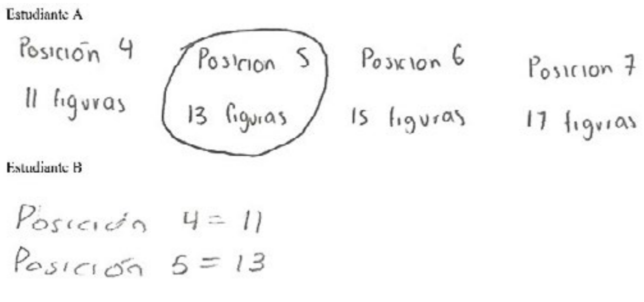

Figura 4. Respuestas a la consigna 1.

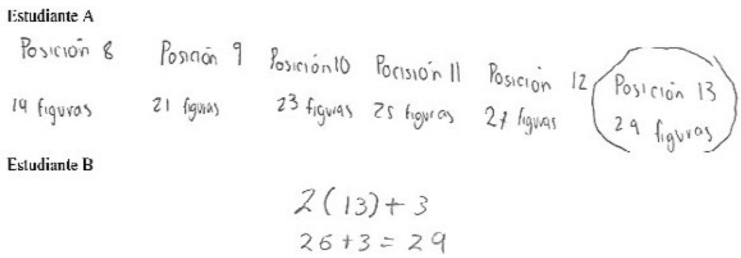

Figura 5. Respuestas a la consigna 2.

En el caso de la consigna 2, los estudiantes siguieron razonamientos diferentes, en el caso del estudiante A siguió una estrategia recursiva, pero el estudiante B determinó primero la regla general (dando respuesta a la consigna 3) y a partir de ahí dio respuesta a esta cuestión. Esto se puede apreciar en la Figura 5.

Para el caso de la consigna 3, a diferencia de las otras consignas, representa una consigna de alta demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015). Para esta cuestión, el estudiante A utilizó una estrategia explícita, ya que establece una relación directa entre el número de la posición y el número de perlas. El estudiante B utilizó otra estrategia que Stacey (1989) clasifica como lineal y otros autores como Barbosa y Vale (2015), Firdaus *et al.* (2019) y Valenzuela y Gutiérrez (2018) denominan como multiplicativo con ajuste. Esta estrategia es similar a la estrategia de diferencia explicada por Akkan (2013), pero al final el estudiante hace un ajuste para que corresponda al comportamiento del patrón, es decir, que la expresión queda de la forma $an + b$, en donde a es la diferencia encontrada en la recursividad, n la posición y b el término independiente que "ajusta" la regla general. Las producciones de ambos estudiantes se advierten en la Figura 6.

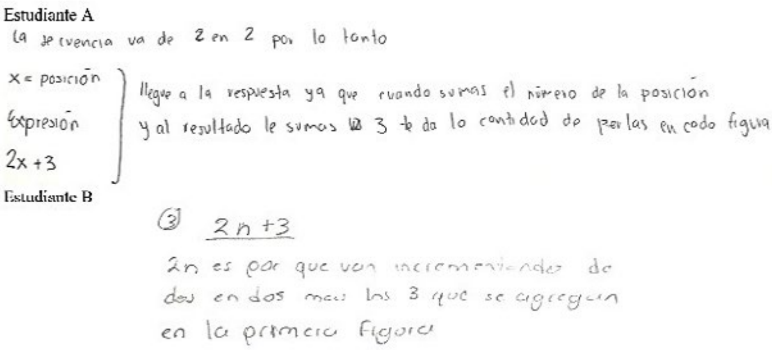

Figura 6.

Respuestas a la consigna 3.

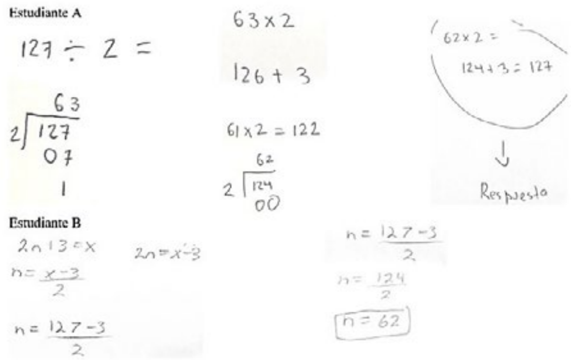

Figura 7.

Respuestas a la consigna 4.

La consigna 4, también es una consigna de alta demanda cognitiva (Benedicto *et al.*, 2015). Aunque los estudiantes obtuvieron una respuesta adecuada a la cuestión planteada, sus procedimientos reflejan razonamientos diferentes como se aprecia en la Figura 7.

Para esta última consigna, el estudiante A no logra escribir una expresión algebraica que relacione la cantidad de perlas con el número de la posición. En este sentido al no referir a una expresión algebraica, la estrategia que sigue es por aproximación puesto que realiza operaciones aritméticas y divide el número de perlas 127 entre 2 para acercarse a la posición a la que pertenece. Lo previo guiado por la expresión que encontró en la consigna 3. Posteriormente, sigue una estrategia de comprobación y obtiene el número de perlas que resultan para la posición 63 y 61. Concluye que la respuesta a la consigna es 62 y la verifica. Por otro lado, el estudiante B, utiliza una estrategia explícita ya que establece una relación entre las variables, x y n , donde n es el número de la posición y x la cantidad de perlas que se encuentran en dicha posición, luego transforma de manera correcta la expresión para dejarla en función del número de perlas. Finalmente sustituye el valor de x para encontrar el valor de la posición.

Analizando el trabajo integral del estudiante B, llama la atención como en la consigna 3 escribe la regla general del patrón utilizando una sola literal ($2n + 3$), pero en la consigna 4, dada la naturaleza de la cuestión, se ve con la necesidad de establecer una relación entre dos cantidades y por lo tanto escribe $2n + 3 = x$ introduciendo así otra literal que da mayor sentido para el estudiante, a la situación que se le presenta. No plantea una relación funcional $f(n)$, pero sí expresa la relación para determinar un dato desconocido n, a partir de un dato conocido $x = 127$.

En la Tabla 2 se integran las estrategias que utilizaron los estudiantes en la tarea "El caso de las perlas". De acuerdo con los autores Aké y Godino (2018), una diferencia significativa está dada por cómo logran dar respuesta a la consigna 4, ya que ahí se puede identificar si pueden formular de formar alfanumérica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones.

Tabla 2.

Estrategias utilizadas en cada consiga por los estudiantes.

Estrategias		
Número de Consigna y Nivel de Demanda Cognitiva	Estudiante A	Estudiante B
1. media-baja	Recursiva	Recursiva
2. media-alta	Recursiva	Explícita
3. alta	Explícita	Otra (multiplicativo con ajuste)
4. alta	Otra (por aproximación)	Explícita

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos se aprecia que los estudiantes utilizaron principalmente las estrategias recursivas y explícitas. A pesar de que ambos estudiantes contestaron correctamente cada una de las consignas, las estrategias que utilizaron permiten identificar que tienen diferentes tipos de pensamiento algebraico. En el caso del estudiante A, se identifica la dificultad en la declaración y denotación de las variables y el tratamiento algebraico. En cuanto al estudiante B, presenta mayor familiaridad con el uso de las letras por lo que presenta menos dificultades para resolver algebraicamente la tarea de patrones lineales planteada.

Dada la evolución de las respuestas del estudiante a las consignas de alta demanda cognitiva, se concluye que la tarea favoreció la necesidad de utilizar literales para expresar las condiciones de la situación, por lo que puede propiciar un sentido a la articulación de la aritmética y el álgebra. Por otro lado, las producciones escritas de ambos estudiantes no permiten definir si los dibujos de las perlas fueron de ayuda para encontrar la generalidad, ya que no se observaron marcas sobre las ilustraciones que indicaran agrupamientos para una descomposición figural. Por lo que una de las limitaciones en este estudio fue la falta de entrevistas a los participantes. Se recomienda continuar con investigaciones que apliquen una secuencia de tareas que involucren la generalización de patrones lineales y cuadráticos, ya que a nivel medio superior los estudiantes constantemente trabajan con este tipo de funciones.

Desde el punto de vista de la docencia, la demanda cognitiva y las estrategias de generalización son elementos que pueden ser considerados por el profesor durante su práctica para proponer tareas sobre generalización de patrones en el aula, ya que permitirá que se integren las consignas necesarias de acuerdo a los objetivos que se planteen y se tendrá un modelo para clasificar las estrategias de los estudiantes. Desde la investigación, se destaca que a nivel media superior existen pocos estudios sobre el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones, sobre todo en México, por lo que este trabajo contribuye a esa línea de investigación, exponiendo resultados interesantes sobre las estrategias que utilizan dos estudiantes para resolver ese tipo de tareas. Finalmente, espera que la información generada sea útil para futuras investigaciones y para los profesores en activo que decidan implementar este tipo de tareas en el aula de clases.

Agradecimientos

La primera autora agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por los recursos otorgados a través de la beca de Maestría que es otorgada a los estudiantes que cursan Programas de Posgrados de Calidad.

Referencias

Aké, L. P., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educacion Matematica*, *30*(2), 171–201. https://doi.org/10.24844/EM3002.07

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *27*(47), 703–732. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400002

Banerjee, R. (2008). Developing a Learning Sequence for Transiting from Arithmetic to Elementary Algebra [Tesis doctoral, Tata Institute of Fundamental Research]. *Homi Bhabha Centre for Science Education*. https://www.hbcse.tifr.res.in/academic/graduate-school/phd-projects/phd-thesis-banerjee-final-10-10-08.pdf

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*(1), 57–70.

Bautista Pérez, J. L., Bustamante Rosario, M. H., & Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. Educación Matemática, 33(1), 125–152. https://doi.org/10.24844/EM3301.05

Benedicto, C., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométrico. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 153–162). SEIEM.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. In *Essential Understandings series of the National Council of Teachers of Mathematics*.

Booth, J., McGinn, K., Barbieri, C. A., & Young, L. K. (2017). Misconceptions and Learning Algebra. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (Issue October, pp. 73–68). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7

Butto, C., & Rivera, T. (2011). La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, 1–12. https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1330.pdf

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de Las Ciencias*, *40*(1), 65–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Dirección General del Bachillerato. (2017). *Matemáticas I. Programa de Estudios*.

Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, *3*(1), 121–134. https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

Firdaus, A. M., Juniati, D., & Wijayanti, P. (2019). Generalization Pattern's Strategy of Junior High School students based on Gender. *Journal of Physics: Conference Series*, *1417*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012045

Gaita, R., & Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema, Rio Claro*, *33*(63), 269–289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

García, S. J., Segovia, A. I., & Lupiáñez, G. J. L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *Bolema, Rio Claro*, *28*(50), 1545–1566. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the Early Grades* (pp. 5–17). Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

López-Acosta, L. (2016). Generalización de patrones . Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el

Pensamiento y Lenguaje Variacional. [Tesis de Maestría, CINVESTAV]. *Repositorio CINVESTAV*.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019). Programa Para La Evaluación Internacional De Alumnos (Pisa) Pisa 2018 - Resultados - Nota País México. *OCDE, I–III,* 1–12. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Ramos, L., & Casas, L. (2018). Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1134–1151. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a19

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. *EMA*, *1*(1), 4–24.

Rojas, G. P. J., & Vergel, C. R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, *2*, 688. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. S. (2009). Implementing standards-based mathematics instruction (book review). In *Nueva York: Teachers College Press.* http://search.epnet.com/login.aspx?direct=true&db=aph&an=3958353

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, *30*(2), 49–72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193–215.

https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Zapatera, L. A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. Números Revista Didáctica de Matemáticas, 97, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros

INICIO