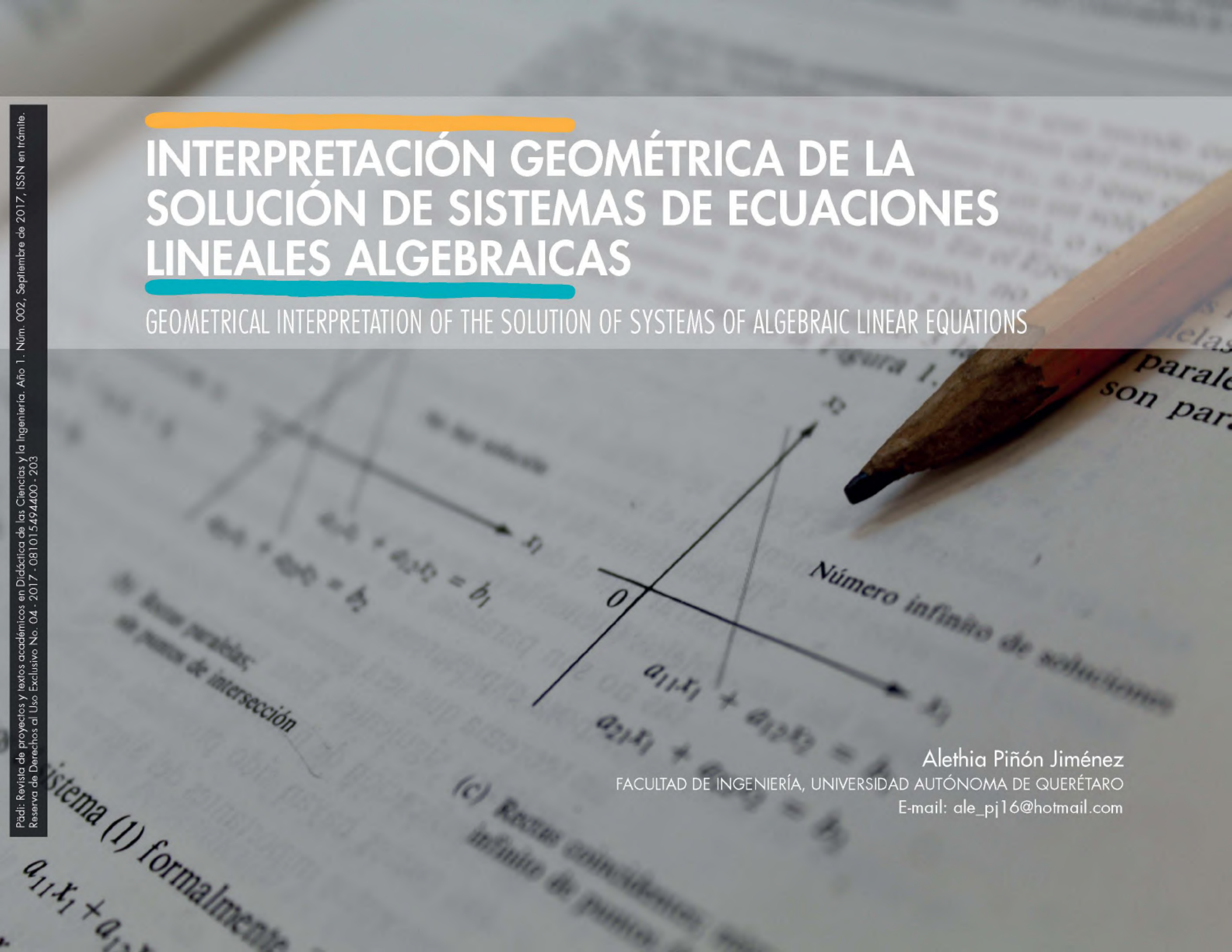

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ALGEBRAICAS

GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE SOLUTION OF SYSTEMS OF ALGEBRAIC LINEAR EQUATIONS

Alethia Piñón Jiménez
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: ale_pj16@hotmail.com

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

RESUMEN:
El presente trabajo es una propuesta didáctica para la enseñanza del tema de ecuaciones lineales y la interpretación geométrica de la solución, el cual, forma parte del plan reticular en el área de ingeniería. En este artículo se proponen dos prácticas relacionadas con el tema, con el objeto de mejorar la comprensión del mismo a través de la construcción de un poliedro cuyas caras se asocian a ecuaciones de planos, que el estudiante determina, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia y luego forma, con las ecuaciones de las caras un sistema, cuya solución se interpreta y verifica tanto en forma física, como con la ayuda de un programa de cómputo para graficar las ecuaciones de los planos. La primera de las prácticas corresponde al caso de sistemas de ecuaciones que tienen solución única, y la segunda, al caso de sistemas que tienen muchas soluciones.

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones, interpretación geométrica.

ABSTRACT:
This work is a didactic proposal for teaching the subject of linear equations and geometrical interpretation of the solution, which is part of the reticular plan in the area of engineering. This article describes two practices related to the subject in order to improve understanding of the same, through the construction of a polyhedron whose faces are associated with equations of planes, the student determines with respect to a coordinate system reference and then form a system of equations whose solution is interpreted and verified both in physical form and with the help of a computer program that plots equations planes. The first of these practices corresponds to the case of systems of equations that have unique solution and the second to the case of systems that have many solutions.

Key words: Systems of equations, geometrical interpretation

INTRODUCCION

Investigaciones realizadas desde la década de 1980 revelan que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo (García R. 2013).

En la sociedad contemporánea se considera a las matemáticas como una de las disciplinas de conocimiento más importantes, esto por cuánto la disciplina puede contribuir a que los estudiantes logren desarrollar sus capacidades de exploración, justificación, representación, discusión, descripción, investigación y predicción.

Por lo anterior, no siempre logra constituirse en un medio de comunicación efectiva entre las personas, salvo aquellas que lo conozcan y manejen con propiedad; lo que puede implicar que mientras el docente utiliza un lenguaje técnico los educandos pueden interpretarlo coloquialmente o viceversa, lo que dificulta y, en ocasiones, imposibilita una sola interpretación (García, 2012). Para Camarena (2010a), no hay duda de lo anterior e incluso afirma que el alto índice de reprobación en los cursos universitarios es una muestra del poco interés que muchos estudiantes manifiestan por las matemáticas debido a su "desconexión" con "su" realidad y "su" entorno, así como por la desarticulación que existe con los otros cursos de las carreras que cursan. Esto lleva a un conflicto permanente que contribuye a propiciar la sensación de que el aprendizaje de las matemáticas es un fin en sí mismo, contradiciendo el planteamiento de verlas como un lenguaje dentro de la sociedad del conocimiento y como un instrumento para muchas áreas científicas y profesionales ligadas al desarrollo de competencias.

Con el objeto de contribuir a la conexión del tema de sistemas de ecuaciones lineales y la interpretación geométrica de sus soluciones con el entorno del estudiante, y ayudar a una mejor comprensión de conceptos abstractos como el plano y la recta de intersección de los mismos, se propone en este trabajo el desarrollo de dos prácticas como actividades de aprendizaje.

DESARROLLO

Se proponen dos prácticas que se identifican con el título de actividad en el presente trabajo. La primera actividad está diseñada para el caso de los sistemas de ecuaciones que tienen solución única y la segunda actividad corresponde al caso de sistemas de ecuaciones que tienen muchas soluciones. Se desarrolla totalmente, a manera de ejemplo, la actividad 1 y la actividad 2 solo se propone.

En ciertas partes del desarrollo de ambas prácticas, se ha incluido la utilización de programas de computadora para graficar las ecuaciones de los sistemas, porque en este caso es un recurso necesario para los procesos de enseñanza y aprendizaje y mejora la comprensión cognoscitiva de los conceptos matemáticos correspondientes al tema.

Actividad 1. Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas que tienen solución única.

a) Construya un poliedro en forma de pirámide regular.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

b) Seleccione un sistema de referencia de coordenadas rectangulares y determine, usando este sistema y efectuando las mediciones de longitud necesarias, las coordenadas correspondientes a cada uno de los vértices.

c) Obtenga una ecuación para cada una de las caras considerando que corresponden a una parte triangular de un plano en el espacio.

d) Forme un sistema de ecuaciones lineales con todas las ecuaciones de las caras, resuelva y verifique que la solución es única y esta corresponde con las coordenadas del vértice ubicado en la parte más alta de la pirámide.

e) Utilice un programa de cómputo para graficar cada una de las ecuaciones de las caras y verifique que las gráficas tienen un único punto en común y que este corresponde con la solución del sistema de ecuaciones.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 1

a) El número de caras y la forma de la base la indica el maestro. Suponiendo que el poliedro que se construye es la pirámide regular cuya base es un cuadrado de 6 unidades de lado y la altura es de 5 unidades, como se muestra en la figura1.

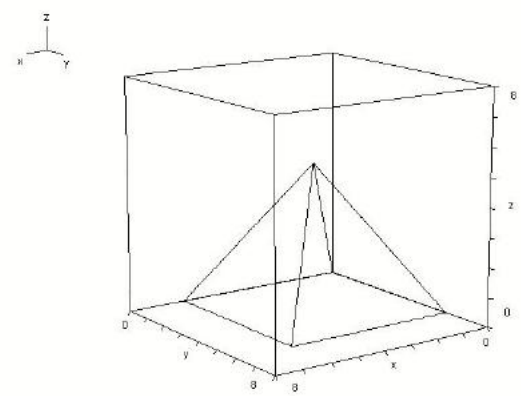

Figura 1. Pirámide de base cuadrada de lado igual a 6 y altura igual a 5

b) La ubicación del origen del sistema de referencia la elige el estudiante que desarrolla la actividad, seleccionando un sistema de coordenadas cuyo origen es uno de los vértices ubicados en la base de la pirámide. Efectuando las mediciones necesarias y observando la figura 1, las coordenadas de los vértices son A(0,0,0), B(6,0,0), C(6,6,0), D(0,6,0), E(3,3,5).

c) Para obtener la ecuación del plano de cada una de las caras se utiliza la forma general de la ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, donde $d = 0$ si el plano pasa por el origen (Stanley L. Grossman, Álgebra lineal, 7a edición). Así, para la cara correspondiente al triángulo BCE, los puntos B, C, E pertenecen al plano, y estas coordenadas deben verificar la ecuación general, sustituyendo las coordenadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a(6)+b(0)+c(0)=d$$
$$a(6)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(3)+b(3)+c(5)=d$$

Al resolver el sistema usando Gauss-Jordan mientras consideramos que las variables son a,b,c, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & d \\ 6 & 6 & 0 & d \\ 3 & 3 & 5 & d \end{bmatrix}$$

Y cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d/10 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente que se obtiene es

$$a=d/6$$
$$b\quad=0$$
$$c=d/10$$

Sustituyendo en la ecuación general

$$\frac{d}{6}x+0y+\frac{d}{10}z=d$$

Multiplicando por 30 y dividiendo entre d la ecuación anterior, se obtiene la ecuación del plano correspondiente a la cara BCE.

$$5x+0y+3z=30$$

Procediendo de manera semejante para la ecuación correspondiente al plano que pasa por los puntos C, D, E se obtiene el sistema de ecuaciones

$$a(6)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(0)+b(6)+c(0)=d$$
$$a(3)+b(3)+c(5)=d$$

Cuya solución para a,b,c es

$$a=0$$
$$b\ =d/6$$
$$c=d/10$$

Sustituyendo en la ecuación general se obtiene

$$0x+\frac{d}{6}y+\frac{d}{10}z=d$$

Multiplicando por 30 y dividiendo entre d la ecuación anterior se obtiene la ecuación de la cara CDE.

$$0x+5y+3z=30$$

En el caso del plano que pasa por los puntos D, A, E, se trata de un plano que pasa por el origen del sistema de coordenadas y la ecuación general es $ax+by+cz=0$.

$$a(0)+b(6)+c(0)=0$$
$$a(0)+b(0)+c(0)=0$$

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

$$a(3) + b(3) + c(5) = 0$$

La matriz de coeficientes aumentada del sistema anterior es

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Y su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{aligned} a + \frac{5}{3}c &= 0 \\ b \quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema equivalente tiene muchas soluciones, haciendo c igual a un valor arbitrario, $c = \alpha$ se obtiene la solución general del sistema.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{5}{3}\alpha \\ b &= 0 \\ c &= \alpha \end{aligned}$$

Si se hace $\alpha = 3$, se obtiene una solución particular

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 0 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores de los coeficientes en la ecuación del plano que pasa por el origen, la ecuación de la cara DAE es

$$-5x + 0y + 3z = 0$$

Si procedemos de manera semejante para la cara que pasa por los puntos A, B, E, se obtiene la ecuación del plano correspondiente a la cara ABE.

$$0x - 5y + 3z = 0$$

d) Formando un sistema con las ecuaciones de las caras, BCE, CDE, DAE, ABE.

$$\begin{aligned} 5x + 0y + 3z &= 30 \\ 0x + 5y + 3z &= 30 \\ -5x + 0y + 3z &= 0 \\ 0x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Si se aplica el método de Gauss - Jordan, la matriz de coeficientes aumentada es

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 5 & 3 & 30 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la reducción a su forma escalonada queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que verifica que tiene solución única y esta corresponde con las coordenadas del punto más alto de la pirámide

$$x = 3$$
$$y = 5$$
$$z = 5$$

e) El programa de cómputo que se usa en esta parte, queda a elección del estudiante, dependiendo de los programas a los cuales tenga acceso.

Utilizando el programa de cómputo Derive 6 para graficar cada uno de los planos y haciendo los ajustes necesarios a la gráfica, se obtiene la figura 2, donde se observa que los planos correspondientes a las ecuaciones de las caras BCE, CDE, DAE, ABE tienen gráficamente un solo punto en común y corresponde con la solución del sistema de ecuaciones.

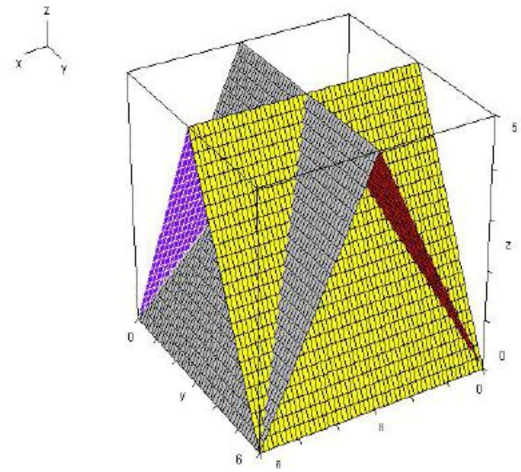

Figura 2. Gráfica de las ecuaciones de los planos correspondientes a las caras de la pirámide, hechas con el programa Derive 6.

Actividad 2. Interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas que tienen muchas soluciones.

Usando el mismo poliedro de la actividad 1.

a) Forme un sistema de ecuaciones lineales con las ecuaciones de dos caras adyacentes, resuelva y verifique que el sistema tiene muchas soluciones.

b) Escriba la solución general del sistema como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio donde el parámetro es la variable que se supone arbitraria en la solución general.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

c) Utilice un programa de cómputo para graficar las ecuaciones paramétricas y verifique que la gráfica es una recta en el espacio y que esta línea recta corresponda con la arista que se encuentra entre las dos caras adyacentes graficando los planos correspondientes.

CONCLUSIONES.

La actividad 1 de aprendizaje, propuesta y desarrollada a manera de ejemplo en este trabajo, integra aspectos de modelación matemática en un contexto del alumno. El uso del poliedro en forma de pirámide regular vuelve tangible el concepto abstracto de un plano en el espacio geométrico y le permite al estudiante asociar ecuaciones a diferentes superficies planas con respecto a un sistema de referencia seleccionado por él mismo.

La interpretación geométrica que se da a la solución de un sistema de ecuaciones, formado por las ecuaciones correspondientes a las caras de la pirámide, se comprueba en forma física ya que la solución del sistema es única y corresponde con el vértice que se encuentra en el punto más alto.

Es importante notar que, el desarrollo de la actividad requiere aplicar procedimientos de solución de sistemas de ecuaciones, tanto para obtener la ecuación de cada una de las caras, como para obtener la solución del sistema de ecuaciones formado por las mismas, por lo que se espera que el estudiante identifique los diferentes propósitos en el contexto de la aplicación.

Así mismo, la realización de la actividad 1 y 2, al incorporar el uso de programas de cómputo para graficar los planos correspondientes, hace uso de la tecnología para llevar la didáctica de un tema a mejores situaciones didácticas, justificando con ello ampliamente su utilización.

La actividad 2 es propuesta para la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que tengan muchas soluciones, usando el mismo poliedro de la actividad 1. El estudiante puede usar la misma pirámide para ambas actividades pero se espera que cada alumno utilice una pirámide regular diferente.

En lo relativo al uso de la tecnología para graficar ecuaciones que tienen tres variables, se puede afirmar que, el uso de programas de cómputo también mejoraría la didáctica de la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales, pero tal propuesta se deja como un posible trabajo futuro.

REFERENCIAS Y CITAS

Camarena, P. (2010a). Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería.

García, J. (2012). El lenguaje y las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. *Diálogos Pedagógicos*. 10(19).

García R.(2013) La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería Revista Educación 37(1), 29-42, ISSN: 2215-2644, enero-junio, 2013

Stanley L. Grossman. Álgebra lineal, 7_a edición.