

MATEMÁTICAS CREATIVAS: ACTIVIDAD INTRODUCTORIA AL CONCEPTO DE ELIPSE

CREATIVE MATHEMATICS: INTRODUCTORY ACTIVITY TO THE CONCEPT OF ELLIPSE



Mariana Lujambio Chávez¹, Víctor Larios Osorio², Ángel Homero Flores Samaniego³

¹FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: mariana_lujambio@hotmail.com

²FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
E-mail: vilaos@hotmail.com

³COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES – PLANTEL SUR, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
E-mail: ahfs@unam.mx

RESUMEN

El currículo actual de matemáticas demanda planear actividades que desarrollen competencias clave en los alumnos, útiles en su formación como individuos y requeridas para alcanzar metas colectivas. En este trabajo se reporta una actividad artística y matemática para introducir el concepto de elipse en la materia de Geometría Analítica de la Escuela de Bachilleres UAQ. La actividad se fundamenta en el enfoque por competencias y bajo la filosofía de matemáticas realistas propuesta por Freudenthal.

Palabras clave: educación, Geometría Analítica, competencias, matemáticas realistas.

ABSTRACT

The current mathematics curriculum demands to plan activities that develop student's key competencies, useful in their training as individuals and required in helping to accomplish collective goals. In this work an artistic and mathematical activity is reported to introduce the concept of ellipse in Analytical Geometry class from the Bachilleres school at UAQ.

The activity is based on the competence approach and the philosophy of realistic mathematics proposal by Freudenthal.

Key words: education, analytical geometry, competencies, realistic mathematics.

INTRODUCCIÓN

La educación busca la integración de las personas frente a una sociedad en plena evolución, tiene como objetivo formar individuos que tengan los medios personales y materiales para continuar con un desarrollo intelectual, moral, laboral y disciplinario.

El aprendizaje de las matemáticas es un reto para los docentes que las enseñan, se requiere el desarrollo de competencias que han sido valoradas y estudiadas en investigaciones nacionales e internacionales. El enfoque demanda en el nivel medio superior que los alumnos desarrollen tanto competencias disciplinares como genéricas que forman parte del perfil de egreso de la escuela de bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, s.f.).

Al enseñar matemáticas se espera que los alumnos sean hábiles para realizar actividades usando su razonamiento lógico -pero también en el uso del lenguaje y de las TIC- y además adquieran habilidades como el trabajo colaborativo, la comunicación, la autonomía, entre otras.

El profesor, además de permitir que los alumnos escalen niveles cognitivos, debe permitirles desarrollarse en un medio donde puedan adquirir estas habilidades. Uno de los principales objetivos de la Geometría Analítica es que los alumnos puedan establecer una conexión entre la Geometría y el Álgebra, es decir, reconozcan que un

dibujo en el plano cartesiano puede ser representado también como una ecuación algebraica.

La Geometría Analítica permite desarrollar habilidades matemáticas claves para el futuro del estudiante de bachillerato: la capacidad de abstracción y generalización, así como la valoración del lenguaje algebraico como una potente herramienta para representar de manera matemática relaciones y propiedades de lugares geométricos (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, s.f.).

En este artículo se reporta una actividad artística elaborada en el curso de Matemáticas V (Geometría Analítica) de la Escuela de Bachilleres de la UAQ, como parte introductoria al tema de la elipse. Además de dar una breve descripción de la actividad, se reportan resultados del desempeño de los alumnos al realizarla y las competencias que se involucran.

FUNDAMENTACIÓN

Se puede reconocer a la educación como un proceso social, por extensión la educación matemática también es un proceso social (Bishop, 1980). Bajo esa premisa no se puede ver la enseñanza de las matemáticas como un conjunto de conocimientos, sino como la interacción de esos conocimientos con el individuo; de esta interacción depende el buen aprendizaje.

Al aprender matemáticas los alumnos deben desarrollar competencias que lo lleven al saber hacer,

saber ser y saber conocer, para permitir una formación integral de los individuos de la sociedad.

En la actualidad, la globalización y la modernización exigen comprender y funcionar dominando las tecnologías y las grandes cantidades de información disponibles; así como desafíos colectivos para el beneficio de la sociedad para tener un balance económico y sustentabilidad ambiental con equidad social. Las competencias que los miembros de la sociedad necesitan para alcanzar metas se han ido haciendo cada vez más complejas (Rychen & Salganik, 2001). Entonces para definir competencia se deben tomar en cuenta varios factores:

Una competencia es más que conocimientos y destrezas. Involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizándolo recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto en particular. Por ejemplo, la habilidad de comunicarse efectivamente es una competencia que se puede apoyar en el conocimiento de un individuo del lenguaje, destrezas prácticas en tecnología e información y actitudes con las personas que se comunica (Rychen & Salganik, 2001, p 3).

Las competencias clave son descritas por Rychen & Salganik, (2001) quienes las integran en tres amplias categorías que los docentes deben considerar al planear sus actividades: usar herramientas de manera interactiva (ej. lenguaje, tecnología), actuar de forma autónoma e interactuar en grupos heterogéneos.

Los alumnos deben realizar actividades que les permitan relacionarse con diferentes tipos de herramientas tecnológicas o físicas, poder comunicarse con los demás, así como tomar la responsabilidad y el manejo de su vida. "La necesidad de que los individuos piensen y actúen reflexivamente es fundamental en este marco de competencias" (Rychen & Salganik, 2001, p.4).

La reflexión se desarrolla cuando los alumnos dejan de seguir métodos o técnicas, aplicando fórmulas de forma rutinaria, y permiten la interacción con otros medios que les llevan a aprender de las experiencias y a actuar críticamente.

Los docentes deben considerar que si bien las verdades matemáticas son las mismas en todas partes y para cualquier persona, esto no significa que la educación matemática deba ser igual en todas partes. La enseñanza de las matemáticas debe tomar en cuenta la individualidad del alumno y los contextos sociales y culturales.

Los planes de estudios, los exámenes, los libros, la formación de enseñantes y la investigación están dominados por el énfasis en el conocimiento de la materia y en la ejecución de la técnica.(...)Lo que en verdad necesita un enseñante no es un texto, sino actividades y recursos que contribuyan al desarrollo de los alumnos (Bishop, 1980, pp. 26 y 29).

Es necesario fomentar, entonces, "la capacidad de los alumnos para resolver y responder adecuadamente en

situaciones que requieren de la utilización del conocimiento matemático y de las destrezas propias del pensamiento matemático” (Romero, González, & Quintanilla, 2014).

Bajo estos fundamentos han surgido corrientes dentro de la didáctica de las matemáticas que toman en cuenta al aprendiz y al medio, además del conocimiento matemático. La educación matemática realista es una filosofía propuesta por Hans Freudenthal, se resume en que esta debe ser cercana a la realidad de los alumnos, y ser relevante para la sociedad con el fin de constituir un valor humano (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004). Los alumnos deben tener la oportunidad de reinventar la matemática, es decir, no la crean ni la descubren sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas, con un proceso similar al que usan al inventarlas (Bressan et al., 2004).

La Educación Matemática Realista no pretende ser una teoría general del aprendizaje, como lo es, el constructivismo, sino que es una filosofía, que se concreta en un conjunto de teorías locales de enseñanza de temas de la matemática (Gallego & Bressan, 2011).

El énfasis en matematizar la realidad se instala en lo que se llama matemáticas para todos, Freudenthal destaca que no todos los estudiantes son futuros matemáticos, para la mayoría, toda la matemática que necesitan es la que les será útil para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria. Sin embargo, es necesario a veces para los docentes dejar atrás los

problemas de la vida cotidiana y referirse a la matemática para mostrar constelaciones de conceptos, estructuras y sistemas que hayan sido inventados y probados dentro de ella (Gravemeijer & Teruel, 2000).

La realidad es entendida como una mezcla de interpretación y experiencia sensible, lo que implica que la matemática también puede formar parte de la realidad de una persona. Realidad y lo que cuenta como sentido común para una persona no son cosas estáticas sino que crecen y son afectadas por los procesos individuales de aprendizaje (Gravemeijer & Teruel, 2000).

Los alumnos deben realizar actividades que les permitan relacionar la matemática con su entorno, despierte su interés y promueva su creatividad. Los alumnos deben manipular modelos, construir definiciones y matematizarlos para resolver problemas. Estas construcciones les permitirán desarrollar competencias y llegar a mejores niveles de comprensión de la matemática. Sin embargo, debemos reconocer que, para cumplir ambos objetivos se deben seguir varios procesos cognitivos de los estudiantes que permitan su desarrollo día a día, es decir, toda la comprensión no está en una sola actividad, sino en un proceso de enseñanza apoyado en estas actividades, como plantea Godino (2002, p 14):

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados

dicotómicos, esto es, se tiene o no, competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que, además, deberán ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes.

DESARROLLO METODOLÓGICO

El currículo de Geometría Analítica en la escuela de bachilleres se estructura con cuatro unidades, siendo la cuarta correspondiente al tema de las cónicas. La elipse es la tercera cónica que se estudia en el curso, los alumnos tienen una idea intuitiva del concepto de elipse; pues al inicio de la unidad se dio una introducción a las cónicas donde se explica su origen y la ecuación general.

Sin embargo, no se ha dado una definición formal de elipse, la actividad que se describe a continuación tiene por objetivo que los alumnos deduzcan la definición por medio de la construcción gráfica de ocho elipses en un plano que formen una mandala para decorar.

El trabajo de clase, llamado actividad artística, se elaboró en dos grupos de 55 y 56 alumnos, se trabajó en parejas con la finalidad de fomentar la colaboración entre ellos; se llevó a cabo en tres sesiones de una hora, algunos alumnos terminaron la decoración en casa por falta de tiempo.

Con la actividad se pretende ayudar al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que son parte

del objetivo de la materia y del perfil de egreso de los estudiantes de la Escuela de Bachilleres. En cuarto semestre los estudiantes continúan desarrollando capacidades y habilidades básicas como la del razonamiento matemático, el uso adecuado del lenguaje y su capacidad lectora; el docente debe proporcionar recursos, herramientas y actitudes adecuadas que permitan a los egresados participar en esta sociedad del conocimiento ya sea incorporándose al siguiente nivel educativo o en su caso al ámbito laboral (Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro, n.d.).

Se espera, entonces, que el estudiante sea cada vez más autónomo al enfrentar las dificultades que se le presenten durante la actividad; exprese sus ideas utilizando distintas representaciones y elija un lenguaje adecuado; piense crítica y reflexivamente; aprenda de forma autónoma cuando revise sus procesos de construcción del conocimiento matemático y los relacione con su vida u otras áreas del conocimiento; trabaje de forma colaborativa, aportando ideas y soluciones.

La actividad se realiza en dos partes: primero se les da instrucciones concretas de cómo dibujar una mandala; posteriormente se les pide que analicen su construcción y con base a ella definan el concepto de elipse; se finaliza con el cálculo analítico de la ecuación de una de las elipses que dibujaron.

La primera parte de la actividad comienza con una introducción para explicar una de las relaciones que hay entre el arte y la matemática: la simetría. La introducción

tiene como finalidad fomentar que los alumnos realicen una conexión de la matemática con otro tema fuera de ella. Es decir, matematicen su realidad, para que después aprendan definiciones de objetos matemáticos al interactuar con su representación gráfica. A continuación se presenta la actividad.

La siguiente actividad tiene como finalidad hacer un trabajo artístico que represente ecuaciones matemáticas. Elige una pareja con la que te sea cómodo trabajar, si lo prefieres también puede realizarse individualmente.

La actividad contiene instrucciones específicas de cómo realizar una plantilla:

1. Adhiere con lápiz adhesivo el papel milimétrico al papel cascarón de tal forma que cubra toda el área (...).

2. Dibuja con lápiz fino un plano cartesiano cuyo origen sea el centro de tu plano milimétrico (...).

3. Dibuja con lápiz fino dos rectas que pasen por el origen de tu plano de tal forma que cada una divida a la mitad cada cuadrante (...).

4. Dibuja con compás una circunferencia con centro en el origen y radio igual a una unidad (...).

5. Observa los puntos donde intersectan ambas circunferencias con las rectas (incluyendo los ejes) y remárcalos con lápiz. En los 16 puntos remarcados inserta cuidadosamente un alfiler...La figura obtenida hasta ahora debe ser la de la imagen, en donde cada cruz del dibujo representa un alfiler.

6. Recorta un pedazo de hilo de aproximadamente 18 cms. Amarra el hilo a uno de los alfileres dejando aproximadamente 3 cms de un lado del alfiler y 15 cms del otro lado. Ahora debes amarrar la parte larga del hilo al alfiler que se encuentre en la misma recta y el mismo cuadrante del primero al que amarraste el hilo, de tal forma que la longitud del hilo entre un alfiler y otro sea 12 cms (es decir 6 unidades de tu dibujo)(...).

7. Coloca la mina de lápiz gruesa entre tu hilo y los alfileres (...). Mueve la mina suavemente sin despegarla y sin dejar de estirar el hilo de tal forma que con este movimiento dibujes una cónica (...).

8. Realiza el procedimiento 6 y 7 usando cada pareja de alfileres de tu dibujo que se encuentran alineadas y en el mismo cuadrante.

9. Observa la figura formada y decórala con colores a tu gusto (...).

En la segunda parte de la actividad se espera que el alumno haya entendido que con el procedimiento se dibujó una elipse que puede definir.

Se pide a los alumnos contesten las preguntas:

¿Qué figura se formó al dibujar con la mina y el hilo? ¿Qué figura se formó al hacer el procedimiento 8 veces? Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla.

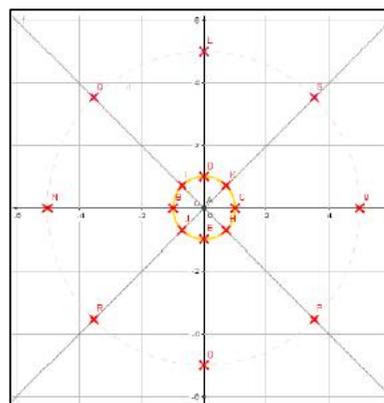


Imagen 1.

En esta parte se espera que los alumnos logren identificar el lugar geométrico que dibujaron y lo puedan definir dados dos puntos fijos y un punto que se mueve.

Finalmente se solicita que resuelvan una parte analítica, eligiendo una sola elipse de la cual pueden obtener su ecuación usando la definición. Se pide dibujen en un plano cartesiano un boceto de la elipse de la cual obtendrán su ecuación. Por último los alumnos escriben una conclusión y una reflexión de su trabajo.

RESULTADOS

Al realizar la actividad encontramos resultados interesantes que serán descritos a continuación.

Primeramente diremos que los alumnos trabajaron sin grandes dificultades la parte práctica, la gran mayoría se sintieron motivados al realizarla, usando todas sus habilidades; fue útil para los alumnos realizar el trabajo en parejas, lo cual permitió fomentar la colaboración y desarrollar competencias de comunicación con otros.

Al realizar la actividad, los alumnos se expresaron artísticamente, utilizaron diferentes técnicas como lápiz, colores, pintura acrílica, confeti, collage. Se muestran algunos de los cuadros finales decorados en la actividad:



Imagen 2. Fotografías de mandalas hechas por los alumnos

A continuación se muestra una tabla de los resultados obtenidos en las preguntas que se hicieron posteriores a la actividad práctica:

Observaciones	Sí	No	Medianamente
Contesta correctamente qué figura se formó al dibujar con la mina y el hilo.	92%	8%	-
Contesta correctamente qué figura se formó al hacer el procedimiento ocho veces.	96%	4%	-
Define correctamente la elipse. ¹	19%	46%	35%
Ubica correctamente la elipse que elige para calcular su ecuación en el plano cartesiano.	58%	42%	-
Calcula correctamente la ecuación del lugar geométrico	62%	38%	-
Escribe una opinión positiva de la actividad. ²	69%	19%	-

Tabla 1. Respuestas de 55 alumnos que realizaron la actividad.

¹Se considera correcto cuando el alumno escribe una definición que cuenta con todos los elementos del lugar geométrico llamado elipse y los relaciona correctamente. Se considera medianamente correcto cuando logra identificar los elementos pero no relacionarlos o relaciona correctamente algunos elementos pero no identifica todos.

² El 12% no escribió ninguna opinión de la actividad.

Analizando las respuestas de los alumnos, la mayoría identifica la gráfica de la elipse y la figura final que se formó; algunos la llaman flor, otros mandala.

Se encontraron dificultades para definir correctamente la elipse, solo el 19% (Tabla 1) logró definirla de forma coherente, entendible y usando su construcción (Imagen 3). Un 35% logró una definición carente de elementos, o con un uso inadecuado del lenguaje (Imagen 4), sin embargo entiende el concepto. El 46% de los alumnos asocian la definición de elipse con la figura geométrica y sus conocimientos previos, con un uso inadecuado del lenguaje (Imagen 5).

Luego, gracias a los oficiales pudimos notar que están contenidos en las elipses al graficar y son llamados focos. Entonces, la línea que trazamos para dibujar corresponde a los puntos que describen el lugar geométrico de la elipse y cada punto cumple con la condición de que su distancia a uno de los focos más su distancia al otro foco siempre es constante. Por ejemplo, en la actividad la suma de las distancias siempre fue 6 unidades, independientemente de dónde se encontrara la mina trazando.

Imagen 3. Definición de elipse de un alumno.

Es el lugar geométrico del punto que se mueve donde su distancia sumatoria respecto a los dos focos se mantiene constante. Encontramos este tipo de cónicas en el sistema solar. *Estamos aquí.*



Imagen 4. Definición de elipse de un alumno.

Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla:
una figura ovalada, alargada y delgada con distancias constantes, ocupa un espacio geométrico en el plano

Imagen 5. Definición de elipse de un alumno.

Otros alumnos, asociaron su procedimiento con el trazo de una circunferencia, por lo tanto asocian la definición de elipse a la de circunferencia (Imagen 6).

Define elipse, apoyándote del procedimiento que usaste para dibujarla:
Es como una circunferencia, tomando como referencias dos focos y un punto en movimiento

Imagen 6. Definición de elipse de un alumno.

Los alumnos deben dibujar en un plano cartesiano la gráfica de la elipse de la cual calcularán su ecuación. El 58% ubica correctamente la elipse, dados los focos, un 42% confunde los focos con los vértices, ubicando mal la elipse (Imagen 7).

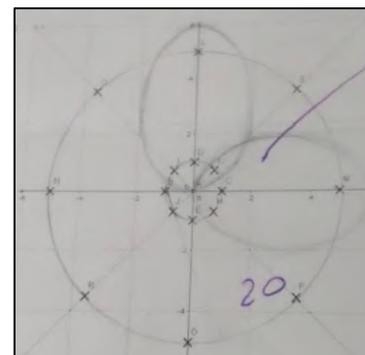


Imagen 7. Elipses ubicadas en el plano cartesiano por los alumnos.

Por último, el 62% de los alumnos logra calcular correctamente la ecuación de la elipse. Para calcularla se requiere de la condición que define a la elipse dibujando su lugar geométrico:

$$d_{\overline{F_1P}} + d_{\overline{F_2P}} = c \quad (1)$$

Donde P es el punto que se mueve (la mina que dibuja la elipse), F_1 y F_2 son los focos (puntos donde se colocan los alfileres) y c es una constante (la longitud del hilo que une ambos focos).

Este porcentaje es mayor al de los alumnos que logran definir correctamente la elipse, pues la condición fue deducida y comentada en grupo, antes de proceder a calcular la ecuación particular de una elipse.

De la creación de las mandalas con elipses surgieron cuadros artísticos creativos, que fomentaron al desarrollo de las competencias que se describen a continuación.

a. Competencias genéricas

Es autónomo y cuida de sí mismo: Se conoce y valora, aborda problemas y retos teniendo en cuenta objetivos. Los alumnos hicieron conciencia durante la actividad de sus valores, sus destrezas y dificultades (Imagen 8).

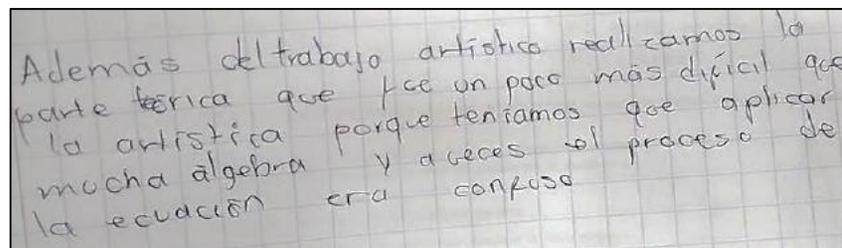


Imagen 8. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Se expresa y comunica: Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. Los alumnos expresaron sus ideas con su pareja, también desarrollan una expresión artística y realizaron conclusiones a partir de su trabajo, exponiendo dificultades y aspectos que les gustaron realizar (Imagen 9).

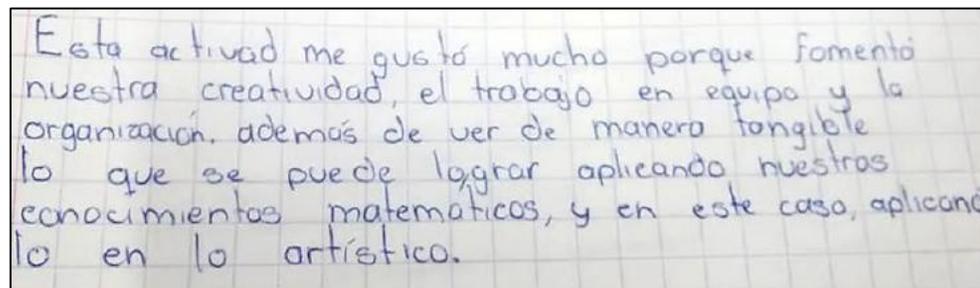
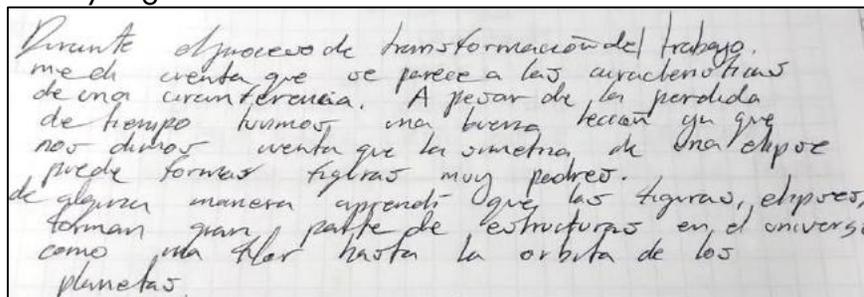


Imagen 9. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Piensa crítica y reflexivamente: Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. Los alumnos evaluaron argumentos y opiniones en parejas, haciendo una reflexión sobre los

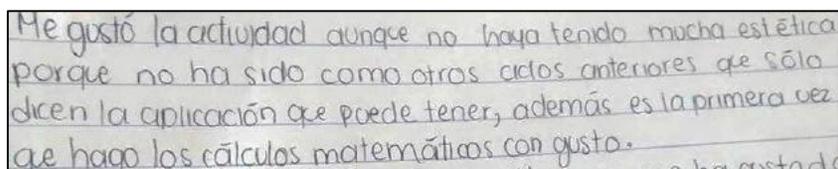
nuevos conocimientos adquiridos. Dieron a conocer sus ideas y argumentos de forma clara.



Durante el proceso de transformación del trabajo, me di cuenta que se parece a las curvas de una circunferencia. A pesar de la pérdida de tiempo tuvimos una buena lección ya que nos dimos cuenta que la simetría de una elipse puede formar figuras muy pecosas. De alguna manera aprendí que las figuras, elipses, forman gran parte de estructuras en el universo como una flor hasta la órbita de los planetas.

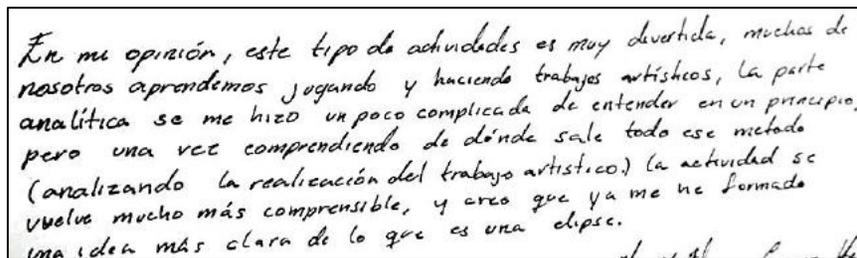
Imagen 10. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Aprende de forma autónoma: Aprende por interés propio a lo largo de la vida. Los alumnos reconocieron tener interés en la actividad, también sus dificultades. Establecieron relaciones de la actividad con su vida y otras áreas del conocimiento.



Me gustó la actividad aunque no haya tenido mucha estética porque no ha sido como otros años anteriores que sólo dicen la aplicación que puede tener, además es la primera vez que hago los cálculos matemáticos con gusto.

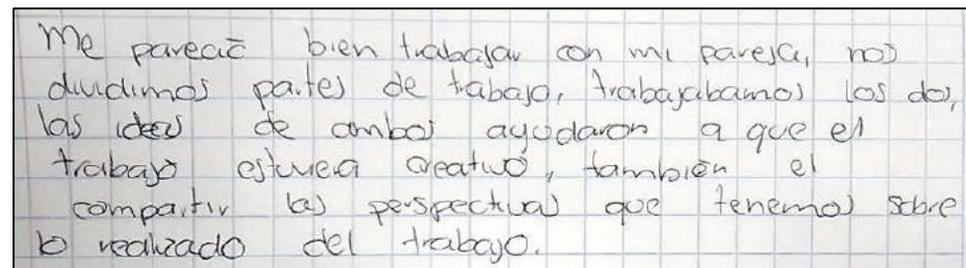
Imagen 11. Comentario sobre la actividad de un alumno.



En mi opinión, este tipo de actividades es muy divertida, muchas de nosotros aprendemos jugando y haciendo trabajos artísticos, la parte analítica se me hizo un poco complicada de entender en un principio, pero una vez comprendiendo de dónde sale todo ese método (analizando la realización del trabajo artístico) la actividad se vuelve mucho más comprensible, y creo que ya me he formado una idea más clara de lo que es una elipse.

Imagen 12. Comentario sobre la actividad de un alumno.

Trabaja en forma colaborativa: Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Los alumnos colaboraron entre sí, aportando sus ideas y llegando a acuerdos mutuos para realizar la creación artística, también sobre la compra de materiales y división del trabajo.



Me pareció bien trabajar con mi pareja, nos dividimos partes de trabajo, trabajábamos los dos, las ideas de ambos ayudaron a que el trabajo estuviera creativo, también el compartir la perspectiva que tenemos sobre lo realizado del trabajo.

Imagen 13. Comentario sobre la actividad de un alumno.

b. Competencias disciplinares

Las competencias disciplinares buscan formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar el entorno que los rodea matemáticamente. Los alumnos finalmente calcularon la ecuación matemática de su dibujo (Imagen 14), lo que les permite aplicar procedimientos y contrastarlos como modelos establecidos o situaciones reales. Algunos alumnos reconocieron que las elipses aparecen en otros campos de estudio. Los alumnos logran interpretar las ecuaciones como una representación analítica de la elipse.

Datos: $P_1(0, -1)$ $P_2(0, -5)$

Fórmula: $d_{P_1, P} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$
 $d_{P_2, P} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$

Sustitución:
 $d_{P_1, P} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-1))^2}$
 $d_{P_1, P} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$
 $d_{P_2, P} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-5))^2}$
 $d_{P_2, P} = \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25} = 6$
 $(\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}) = (6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25})$
 $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25} + x^2 + y^2 + 10y + 25$
 $x^2 + y^2 + 2y + 1 - x^2 - y^2 - 10y - 25 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$
 $-8y - 24 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$
 $-8y - 24 - 36 = -12\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$
 $-8y - 60 = -12\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$
 $(-2y - 15) = -3\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25}$
 $4y^2 + 60y + 225 = 9x^2 + 9y^2 + 90y + 225$
 $4y^2 + 60y + 225 = 9x^2 + 9y^2 + 90y + 225$
 $4y^2 + 60y + 225 - 9x^2 - 9y^2 - 90y - 225 = 0$
 $-5y^2 - 30y - 9x^2 = 0 \quad (-1)$
 $9x^2 + 5y^2 + 30y = 0 \quad 60$

Imagen 14. Cálculo algebraico de elipse realizado por un alumno.

CONCLUSIONES

Lograr que los alumnos desarrollen competencias es un proceso largo que debe tener un seguimiento durante su formación, sin embargo, se pueden diseñar actividades que vayan enfocadas a desarrollar dichas competencias. Matematizar objetos construidos en la realidad de los alumnos, permite despertar su interés en las matemáticas,

además de mostrarles que dicha materia tiene relación con otras ciencias menos abstractas.

Esta actividad permitió a los alumnos usar su creatividad y trabajo en equipo; aunque el objetivo final era relacionar una ecuación matemática con su representación gráfica para definir la elipse, los alumnos pusieron empeño en entregar un cuadro con diferentes materiales que les permitió expresarse artísticamente.

Notamos que los alumnos están poco acostumbrados a redactar conclusiones y opiniones en la clase de matemáticas, pues comúnmente se dedican a seguir algoritmos proporcionados por el maestro, que muchas veces no comprenden. Al pedir a los alumnos que interpreten resultados o definan un objeto matemático por medio de su representación gráfica (que pueden construir) les permite desarrollar habilidades del uso del lenguaje. Sin embargo como mostramos en este artículo, tienen dificultades al hacerlo, por lo que se debe insistir en permitir a los alumnos que interpreten por escrito u oralmente los resultados de problemas matemáticos.

El objetivo de la actividad no se cumplió puesto que un pequeño porcentaje logró definir la elipse correctamente; sin embargo, se puede observar que un mayor porcentaje logra realizar los cálculos algebraicos para encontrar la ecuación, a pesar de que gran parte de los alumnos argumenta tener dificultades para hacerlo, es claro que están más acostumbrados a resolver ejercicios que a usar su razonamiento y su lenguaje para describir objetos matemáticos.

Gracias a este trabajo podemos concluir que es necesario realizar actividades que le permitan a los alumnos desarrollar otras competencias diferentes a las lógico matemáticas, principalmente las relacionadas con uso del lenguaje.

Se esperaba que más alumnos pudieran definir la elipse con base en su construcción; sin embargo, mostramos que los alumnos están limitados por el uso del lenguaje y la reflexión de los conceptos matemáticos. Se deja abierta la investigación sobre el uso del lenguaje en la actividad, además dejamos la siguiente pregunta abierta para responder en trabajos futuros: ¿cuáles son las dificultades de los alumnos al definir un objeto matemático a partir de su construcción?

REFERENCIAS

- Bishop, A. (1980). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, F. (2004). *La Educación Matemática Realista. Principios en que se sustenta*. In *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática* (pp. 1–13).
- Escuela de Bachilleres Universidad Autónoma de Querétaro. (n.d.). *Programa Oficial Matemáticas IV*.
- Gallego, M. F., & Bressan, A. (2011). *La Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. In *III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea* (pp. 1–12).
- Godino, J. (2002). *Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática*. In *XVI Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica* (pp. 8–9). Castel San Pietro Terme (Bologna).
- Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). *Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory*. In *J. Currículo Studies* (Vol. 32, pp. 777–796).
- Romero, G., González, L., & Quintanilla, A. (2014). *Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo*. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32(3), 319–336.
- Rychen, D., & Salganik, L. (2001). *The Definition and selection of key competencies*. DeSeCo Publications, 1–20. Traducción con fondos de la USAID.