



**CONFIGURACIÓN
DE UNA METODOLOGÍA DE ESTUDIO
HISTÓRICO-DIDÁCTICO
DE LIBROS DE TEXTO**

**CONFIGURATION OF A METHODOLOGY OF
HISTORICAL-DIDACTIC STUDY OF TEXTBOOK**

**CONFIGURATION D'UNE MÉTHODOLOGIE
D'ÉTUDE HISTORICO-DIDACTIQUE DES MANUELS
SCOLAIRES**

*Maidy Alejandra Minú Vargas¹, Universidad
Autónoma de Querétaro (México)*

*Diana del Carmen Torres Corrales², Instituto
Tecnológico de Sonora (México)*

¹alejandraminu@hotmail.com,

<https://orcid.org/0009-0004-3704-4135>

²dtorresc89@gmail.com,

<http://orcid.org/0000-0002-0057-5336>

RESUMEN

En este artículo se expone la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico, de libros de texto, relativo a la razón y función trigonométrica inversa. Parte de un proyecto más amplio que, fundamentado en la Teoría Socioepistemológica, plantea la pregunta de investigación: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? En los resultados se muestran el diseño y la ejecución de la metodología en cuatro fases: selección de libros, selección de tareas, análisis individual y análisis transversal. En la fase tres se desglosa la forma en que se estructuró el instrumento de análisis individual de tareas en libros de texto basado en tres categorías: caracterización del texto, caracterización de la matemática y producto de enseñanza; también se demuestra la ejecución del instrumento en dos tareas de distintos libros, logrando, a su vez, refinar el instrumento. En comentarios finales se distinguen dos aspectos:

El artículo a continuación presenta la metodología utilizada en un estudio histórico y didáctico sobre la razón y función trigonométrica inversa en el contexto de la ingeniería.

uno relacionado con las perspectivas del proyecto de investigación y otro con términos metodológicos. Se espera identificar significados distintos a los procesos memorísticos del uso de la razón y función trigonométrica inversa. Se

plantea, además, que el ejercicio de explicitar la presente metodología puede ser una guía para que otros investigadores configuren la herramienta teórica-metodológica necesaria para su proyecto de investigación matemática.

Palabras clave: análisis de libros, formación de ingenieros, ma-

temática educativa, teoría socioepistemológica, trigonometría.

ABSTRACT

In this paper, we expose the methodology for data collection, organization, and analysis of a historical-didactical study in textbooks around the topic of inverse trigonometric ratios and functions. The study is part of a broader project that poses a research question grounded on the Socioepistemological Theory: what is the didactical transformation of the inverse trigonometric ratio and function in historical and contemporary textbooks related to engineering? The results of this paper show the design and execution of the methodology in four phases: book selection, task selection, individual analysis, and traversal analysis. The third phase of this methodology specifies how the three categories in the instrument for individual analysis of textbook tasks were designed. Those categories are text characterization, mathematics characterization, and teaching product. This instrument's usage is shown in the analysis of two tasks from different books, from this analysis the instrument was later revised. In the final comments, two aspects identified are addressed: one about the perspectives of the research project and one about the methodology. With the results of the project, we expect to identify other significances, different from memoristic processes related to the use of inverse trigonometric ratios and functions. We propose that in the exercise of making explicit this methodology, it can be used as a guide for other researchers that seek to configure theoretical-methodological tools for their research projects following their study

subjects, theoretical foundations, and mathematics of interest.

Keyword: book analysis, engineering education, mathematics education, socioepistemological theory, trigonometry.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous exposons la méthodologie de collecte, d'organisation et d'analyse des données d'une étude historico-didactique dans les manuels scolaires autour du thème des rapports et des fonctions trigonométriques inverses. L'étude fait partie d'un projet plus large qui pose une question de recherche fondée sur la théorie socio-épistémologique : quelle est la transformation didactique du rapport et de la fonction trigonométrique inverse dans les manuels historiques et contemporains liés à l'ingénierie ? Les résultats de cet article montrent la conception et l'exécution de la méthodologie en quatre phases : la sélection des coins, la sélection des tâches, l'analyse individuelle et l'analyse transversale. La troisième phase de cette méthodologie précise comment ont été conçues les trois catégories de l'instrument d'analyse individuelle des tâches du manuel. Ces catégories sont la caractérisation du texte, la caractérisation des mathématiques et le produit pédagogique. L'utilisation de cet instrument est illustrée dans l'analyse de deux tâches de différents livres, à partir de cette analyse, l'instrument a ensuite été révisé. Dans les commentaires finaux, deux aspects identifiés sont abordés : l'un sur les perspectives du projet de recherche et l'autre sur la méthodologie. Avec les résultats du projet, nous espérons identifier d'autres significations, différentes des processus de mémoi-

re liés à l'utilisation de rapports et de fonctions trigonométriques inverses. Nous proposons que dans l'exercice d'explicitation de cette méthodologie, elle puisse être utilisée comme guide pour d'autres chercheurs qui cherchent à configurer des outils théoriques et méthodologiques pour leurs projets de recherche en fonction de leurs sujets d'étude, de leurs fondements théoriques et des mathématiques d'intérêt.

Mots-clés: analyse de livres, formation en ingénierie, enseignement des mathématiques, théorie socioépistémologique, trigonometrie.

INTRODUCCIÓN

Una revisión bibliográfica inicial de la razón y función trigonométrica inversa permitió identificar que el enfoque se basa en promover una comprensión superior de esta matemática dentro del ámbito didáctico del nivel superior. Por ejemplo, estudios que configuran un diseño y toman datos con estudiantes de ingeniería (Martínez Planell y Cruz Delgado, 2016), sobre propuestas de enseñanza basadas en la revisión de literatura (Talkokul, 2017) y sustentadas en el análisis de libros de texto (Mesa y Goldstein, 2017). Estas investigaciones coinciden en la necesidad de comprender, en primer lugar, la noción de razón y función trigonométrica antes de estudiar sus inversas; así como incorporar el estudio del círculo y triángulo rectángulo para formar relaciones entre sus elementos. Adicionalmente, se identifica que algunos estudios y libros de texto utilizan como sinónimo los términos razón y función trigonométrica inversa a pesar de que matemáticamente son diferentes, lo cual se asocia como un síntoma de la

carencia de significados que permiten distinguir una noción de otra.

Como decisión metodológica, el presente estudio se sitúa en el ámbito de la ingeniería por la familiaridad y acceso que se tiene a sus programas en una universidad y la comunicación con colegas de otras instituciones. En particular, se identifica una problemática resultado de una revisión inicial de programas de asignaturas de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON, universidad pública autónoma): la razón y función trigonométrica inversa están implícitas porque los programas no las declaran, sin embargo, los libros de texto de la bibliografía y sus profesores ejemplifican tareas donde se utiliza esta rama; en dichas tareas se reconoce un significado matemático relacionado a procesos memorísticos atribuido al uso de fórmulas.

Se opta por un estudio documental que apoye al avance de la literatura en el ámbito didáctico del nivel superior. Fundamentado en la Teoría Socioepistemológica (TS), este trabajo forma parte de una investigación más amplia cuya pregunta base es: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? El objetivo general de la investigación es dar cuenta de las prácticas que acompañan al trabajo en torno a la razón y función trigonométrica inversa para identificar los significados que promueven las tareas que se resuelven en libros de texto de ingeniería. Para el presente escrito, el objetivo es: exponer la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa.

ANTECEDENTES

El volumen 45 de "Textbook Research in Mathematics Education" de la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) expone, desde un panorama internacional, el análisis de libros de texto como objeto de estudio en Matemática Educativa. Los tópicos que se abordan incluyen discusiones metodológicas de cómo realizar el análisis del material, la comparación entre países respecto a los textos que utilizan y su relación con el rendimiento académico de los estudiantes, el análisis de una muestra de las obras respecto a un concepto matemático de interés y la evolución de los libros de matemáticas en un contexto específico. Al respecto, Fan (2013) presenta un marco conceptual sobre los libros de texto de matemáticas y analiza los problemas y métodos contemporáneos para la investigación de dichos ejemplares. El autor identifica la necesidad de ir más allá del análisis y comparación de obras hacia un paradigma de investigación que utilice métodos empíricos y experimentales, de manera que esto permita dar rigor a los estudios sobre literatura académica como investigación científica.

El libro de texto es un instrumento de aprendizaje para el estudiante, se puede usar como recurso material para transmitir conceptos y métodos de las diferentes ciencias, mientras que, como recurso didáctico en la enseñanza universitaria es la principal herramienta de profesores y estudiantes para el desarrollo de significados (Maturano et al., 2021). En Matemática Educativa son objeto de estudio: el papel del profesorado en el desarrollo e innovación del currículum y la interpretación oficial del mismo que dan las editoriales (Braga Blanco y Belver Domínguez,

2016); los significados de conceptos respecto a las estrategias didácticas de enseñanza (Betancur et al., 2021); y la transposición didáctica a la que es sometido el conocimiento matemático cuando es llevado a la enseñanza escolarizada (Bravo y Cantoral, 2012).

Generalmente el análisis de libros académicos implica delimitar a una muestra sobre contenido matemático, a uno o varios niveles educativos y programas de estudios. Debido a esto, se considera que el análisis didáctico busca comprender el significado en la enseñanza desde diferentes aristas, y el análisis histórico-didáctico la evolución de dicho significado en la enseñanza.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO PARA CONTENIDO MATEMÁTICO EN GENERAL

Se identificaron estudios enfocados al significado que promueven los libros y su estructura. Así, González y Sierra (2004) diseñaron y emplearon un instrumento de análisis histórico-didáctico de libros de texto para el tema de puntos críticos del currículo español de educación secundaria de los planes de estudio del siglo XX. En sus decisiones metodológicas especifican que la muestra fue de 32 obras y cómo establecieron las unidades de información que les permitieron hacer una clasificación en categorías, dimensiones y modalidades asociadas. Exponen ejemplos del análisis realizado para cada periodo, lo que deriva en el perfil de un libro, marcando en cada unidad de análisis la frecuencia de aparición misma que les permite deducir el nombre del perfil.

Por su parte, Pino Fan et al. (2019) realizaron un análisis didáctico de diez libros de texto del currí-

culo chileno sobre el concepto de función. Por otra parte, del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se utilizó la noción de configuración epistémica y dos categorías de análisis: cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares de la representatividad y seis de la noción de función. En sus conclusiones los autores mencionan que los resultados pretendidos por el currículo sobre la función no son representativos del significado holístico de referencia porque estos se limitan al significado como relación entre variables, conforme la representación gráfica y la teoría de conjuntos.

Asimismo, Betancur et al. (2021) describieron los resultados del análisis didáctico de tres libros de texto del currículo colombiano de pregrado sobre los conceptos acerca de eigenvalores y eigenvectores en operadores lineales. La finalidad de su estudio fue especificar el desarrollo del análisis teórico (primer componente) del ciclo de investigación de la teoría APOE (acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema). Para el análisis de los libros los autores retomaron cuatro criterios de un estudio previo: estructura general del texto, presentación y definición de conceptos, ejemplos y ejercicios, y lector modelo; desarrollaron seis momentos para su ejecución y mostraron en tablas un comparativo de los tres libros.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido matemático en general, Larios y Jiménez (2022) presentaron un análisis de los significados que promueven sobre el concepto de derivada algunos libros de Cálculo para ingeniería. Desde la noción de configuración epistémica del EOS identificaron que se privilegia un significado parcial de la derivada. Por ejemplo, el caso de la pen-

diente de la recta tangente, que a veces se confunde con la recta en sí, se presentó un desarrollo parcial del significado holístico: lo que puede implicar la construcción de una representación inadecuada para ese perfil profesional por parte del estudiante.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO PARA CONTENIDO TRIGONOMÉTRICO

El estudio de Montiel (2011) es uno de los referentes principales para la investigación en Teoría Socioepistemológica. Fundamentado en en dicha área la autora realiza un estudio histórico-epistemológico y un estudio didáctico de conocimiento trigonométrico, a partir del cual reconoce que la enseñanza de la Trigonometría no es un asunto intrascendente, ya que es un conocimiento con múltiples aplicaciones en las Matemáticas y otras disciplinas como la Astronomía, Arquitectura, Ingeniería, etc.

Montiel (2011) identifica que un escenario de la génesis de la relación trigonométrica fue el astronómico, donde el problema macrono manipulable de cálculo de distancias inaccesibles fue el contexto de origen para identificar la relación no proporcional entre ángulo biseado/media cuerda en el círculo, lo que actualmente en la escuela equivale a la razón seno del ángulo como cateto opuesto/hipotenusa en el triángulo rectángulo. Así, para fomentar usos y significados trigonométricos, propone que la enseñanza sea acompañada por prácticas específicas; para la razón trigonométrica señala el estudio de la modelación y construcción de diagramas con los que se reflexione sobre el manejo de la proporcionalidad y la escala en un contexto estático y covariacional. Mientras que para la función trigonométrica propone el estudio y la

modelación del movimiento, a fin de reflexionar sobre la variación, lo periódico y acotado de la función.

En una sección del estudio didáctico de Montiel (2011) se analizaron tres libros de texto de nivel superior con una importante influencia escolar para la enseñanza de la función trigonométrica: *A Course of Pure Mathematics* de Hardy, *Calculus* de Apostol y *Calculus* de Spivack. El autor del estudio señala que los tres libros dan un tratamiento analítico a la función trigonométrica mediante la demostración de sus propiedades con técnicas matemáticas avanzadas como la derivación, integración, series y ecuaciones diferenciales, asimismo, los tres autores fundamentan su razonamiento en la proporción de la longitud del arco y el área de un sector circular:

Hardy (1908) hace explícito que para tratar analíticamente a la función trigonométrica es necesario demostrar que un arco puede medirse y en consecuencia asociarle un número llamado longitud, es decir, plantea un fundamento de partida para trabajar con la función (Montiel, 2011, p. 55).

“En Apostol (1984) [...] las funciones trigonométricas son modeladores de fenómenos periódicos [...] y su descripción geométrica no se restringe a estudiar el triángulo rectángulo [...]” (Montiel, 2011, p. 58).

En Spivac (1991) [...] construye el concepto de función partiendo de definir el seno y el coseno perteneciente a un ángulo dirigido y culminar al definir $\sin x$ y $\cos x$ para cada número x . [...] realiza la equivalencia grados a radianes y comienza su construcción analítica [...] (Montiel, 2011, p. 61).

También, Cantoral et al. (2015) realizaron un análisis didáctico de un libro de texto del currículo mexicano sobre el concepto de razón trigonométrica. De la Teoría Socioepistemológica (TS) utilizaron el nivel pragmático (acciones y actividades) del modelo de anidación de prácticas para realizar un análisis documental respecto a la actividad matemática. En primer lugar, describieron la organización didáctica del libro de texto (exploración, institucionalización, ejercitación y aplicación) y los temas previos y posteriores a la razón trigonométrica. En segundo lugar, mostraron ejemplos de tareas del tema matemático de interés y las analizaron con el nivel pragmático del modelo de anidación utilizando las preguntas: qué, cómo y para qué hace. Los autores señalaron que la razón trigonométrica se convierte en una aplicación de la proporcionalidad para calcular un valor faltante debido a que no se requiere estudiar o elaborar diagramas, sino que, de ilustraciones de triángulos rectángulos se logran identificar datos para elegir la razón adecuada a la situación física y así realizar operaciones con apoyo de la calculadora. Concluyeron que se transmite un uso aritmético y algebraico con significado memorístico.

Finalmente, en el análisis de libros de texto para contenido trigonométrico, Torres Corrales y Montiel (2020) realizaron un análisis didáctico de ocho libros de texto referentes a las nociones trigonométricas asociadas al problema cinemático directo de la Robótica de un programa de Ingeniería Mecatrónica. De la Teoría Socioepistemológica y los resultados de la investigación en Trigonometría configuraron un cuadro de análisis cualitativo para identificar los usos y significados

de las nociones trigonométricas en tareas de asignaturas de Matemáticas, Física e Ingeniería. Las autoras identificaron que en gran parte de las asignaturas de Matemáticas se reproduce el uso aritmético y el algebraico asociado al cálculo de valores faltantes para resolver la tarea, mientras que, en las asignaturas de Física e Ingeniería, además de dichos usos, se dan el geométrico y el cuantitativo, con los que se confronta que las nociones trigonométricas no son una aplicación de la proporcionalidad.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica tiene por objeto de estudio: “la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, y el método es el análisis de la práctica, que permitirán estudiar el problema del significado del objeto matemático mediante el uso” (Cantoral, R., comunicación personal, 14 de diciembre de 2017). Lo social se identifica en dos aspectos: la influencia del contexto en tanto su validez relativa donde se usa la matemática y, el significado en constante construcción que los grupos humanos dan al conocimiento matemático a medida que lo emplean en distintas situaciones (Cantoral, 2016).

Las prácticas se estudian y organizan a través de un modelo de anidación. En el caso de la presente investigación se utiliza el nivel pragmático, es decir, la práctica a nivel de acción. Asimismo, se analiza la acción directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en su relación con la matemática en juego; desde este momento se pueden identificar los *usos del conocimiento*, caracterizados como “las formas en que es empleada o adopta-

da determinada noción en un contexto específico” (Cabañas, 2011, p. 75), “ya sea que el sujeto sea consciente de ello o no, que manipule de manera explícita o implícita, o que utilice representaciones típicamente escolares o propias del contexto” (Rotaache, 2012, p. 27); “los usos son funcionales porque dan respuesta a la tarea matemática [...]” (Torres Corrales y Montiel, 2020, p. 34).

Para analizar la dependencia del contexto, este debe estudiarse en tres niveles: cultural, situacional y de significación.

[...] El contexto cultural da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; mientras que el contexto situacional reconoce la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, dichas condiciones las determina el problema que se estudia o pueden ser establecidas mediante un diseño didáctico. El contexto que da forma y sentido a la matemática en juego, lo denominamos contexto de significación (Torres Corrales y Montiel, 2020, p. 32-33).

Para la TS el libro de texto propone un discurso Matemático Escolar (dME), particular porque es un medio de difusión institucional de la construcción social del conocimiento matemático. Por lo que a través de las tareas que se resuelven en el libro de texto se busca identificar las prácticas (explícitas e implícitas) puestas en uso, que permiten el desarrollo del significado independientemente del contexto (época, paradigma educativo, región geográfica,

etc.) donde se emplea la matemática (Cantoral et al., 2015).

El dME refiere a:

“...las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos relativos a la matemática” (Cantoral et al., 2006, p. 86), y que por su estructuración se convierten en “... sistemas de razón que producen violencia simbólica, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos” (Soto y Cantoral, 2014, p. 1534).

METODOLOGÍA

De los métodos y metodologías de análisis de libros de texto presentes en la revisión bibliográfica del apartado Antecedentes y de estudios de Historia de la Educación Matemática –en particular del Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM) y de la Revista de História da Educação Matemática (Histemat)–, se configura una metodología de análisis histórico-didáctico que consta de cuatro fases. De acuerdo con los intereses de la investigación, primero, en la Fase 1 se establecen los criterios de inclusión de los libros, después, en la Fase 2 se seleccionan las tareas representativas a analizar, llegados a la Fase 3 se realiza un análisis individual de las tareas mediante un instrumento que puede ser retomado de otras investigaciones o diseñado por el investigador –siempre y cuando haya compatibilidad teórica entre los referentes y la investigación–, por último, en la Fase 4 se realiza un análisis transversal con el cual se triangula el análisis individual de los libros para dar respuesta al objeto de estudio (Figura 1).

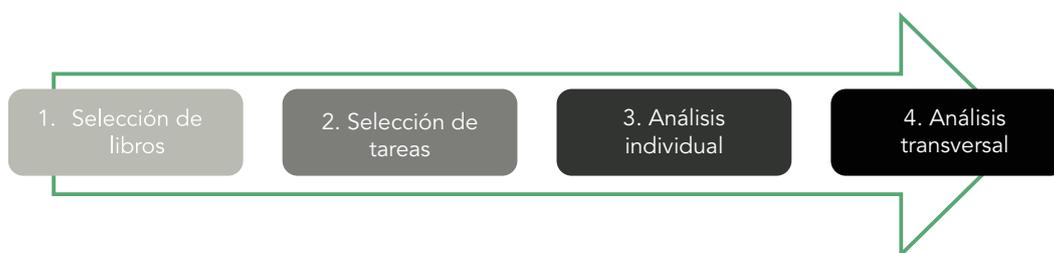


Figura 1. Metodología de análisis histórico-didáctico de libros de texto.

Con la finalidad de mantener coherencia a lo largo del desarrollo de la investigación, esta metodología recibe retroalimentación a medida que se ejecuta, por lo que la realización de una fase permite llevar a cabo ajustes en fases previas o posteriores, según sea necesario.

RESULTADOS

A continuación, se describe la ejecución de la metodología de estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa desde la TS. Para efectos del presente artículo se incluyen las primeras tres fases de la metodología y se muestra el diseño y utilización del instrumento de análisis individual de dos libros de texto; la Fase 4 se omite debido a que el proyecto de investigación se encuentra en la Fase 3.

FASE 1.

SELECCIÓN DE LIBROS

En la revisión de literatura, teoría y metodología, la muestra de libros fue intencional. Se aprovechó, además, el acceso a estos y mediante la triangulación de tres criterios de inclusión.

1. Los libros de texto con contenido trigonométrico que indica la revisión bibliográfica del apartado de Antecedentes (Análisis de libros de texto para

contenido trigonométrico) de asignaturas de Matemáticas del nivel superior.

2. Los libros de la bibliografía de las asignaturas de Matemáticas que declaran los programas de estudio de ingeniería del ITSON, universidad donde una de las autoras es profesora.
3. Los libros que recomiendan profesores-investigadores que imparten asignaturas de Matemáticas en Ingeniería, en particular los miembros fundadores del grupo latinoamericano Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (www.grupofirme.org.mx). Quienes coinciden en tener presente en sus universidades (tres instituciones mexicanas, dos públicas y una privada; y dos universidades públicas de Latinoamérica, en Guatemala y Colombia) la problemática de la revisión inicial de las asignaturas de Matemáticas de ITSON: las tareas donde se emplean la razón y función trigonométrica inversa tienen un significado matemático relacionado a procesos memorísticos que se atribuye al uso de fórmulas.

Se recopilaron, en formato digital, libros señalados dentro de los criterios de inclusión para elegir aquellos que incluyeran tareas basadas en la razón y función trigonométrica inversa. Los libros se clasificaron en dos categorías según su contexto: históricos

(ocho) y contemporáneos (siete libros), los cuales se ubican entre los siglos XIX, XX y XXI (Tabla 1).



	Nombre del libro	Año	Autor	Conceptos	Páginas
Históricos	Plane and Spherical Trigonometry	1875	Chauvenet	Inversas de las funciones trigonométricas	41
	Se promueve el acceso al conocimiento y el logro de todos los estudiantes	1906	S. R. Knigh	Funciones circulares inversas	232, 238, 239
	A Course of Pure Mathematics	1908	Godfrey Harold (Hardy)	Relación entre el logaritmo y el inverso de las funciones trigonométricas	518
	Trigonometría superior	1944	B. N Mukherjee	Funciones circulares inversas	21-31
	Algebra y funciones elementales	1978	Kalnin	Funciones trigonométricas inversas	243-257
	Cálculo I	1984	Tom Apostol	Inversas de las funciones trigonométricas	309-313
	Trigonometric functions (Problem Solving Approach)	1988	Panchishkin y Shavgulidze	Funciones trigonométricas inversas	31-36
	Cálculo infinitesimal	1992	Michael Spivac	Límites y derivadas de las funciones trigonométricas inversas	134, 135, 216, 217
Contemporáneos	Geometría Plana y del Espacio	2004	Baldor	Razón trigonométrica inversa	376
	Cálculo I	2010	Ron Larson	Funciones trigonométricas inversas	377-383
	Cálculo de una variable	2010	James Stewart	Funciones trigonométricas inversas y límites	216-221, apéndice c A17
	Cálculo con Trascendentes Tempranas	2011	Denis G. Zill	Funciones trigonométricas inversas y sus propiedades	41-43
	Matemáticas ¹ Cálculo Diferencial	2011	Denis G. Zill	Funciones trigonométricas inversas	61, 63, 66
	Cálculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 1	2012	Norma Patricia Salinas y colaboradores	Funciones trigonométricas inversas	428-431
	Calculo aplicado. Competencias Matemáticas a través de Contextos tomo 2	2012	Norma Patricia Salinas y colaboradores	Antiderivadas de las funciones trigonométricas inversas	217

Tabla 1. Libros de Ingeniería seleccionados para el análisis. Fuente: elaboración propia.

FASE 2.
SELECCIÓN DE TAREAS

En la Tabla 1 se muestra la selección final de tareas de los libros de texto mediante la identificación de conceptos y páginas donde se usa

la razón y función trigonométrica inversa. La selección tuvo como criterio de inclusión una clasificación del tipo de tareas, según el tipo de actividad realizada en los libros: expositivas y de ejemplos, de acuerdo con Love y Pimm

(1996). Las *tareas expositivas* señalan definiciones y demostraciones que se entienden como formas de evidenciar el significado de la matemática, en ellas los autores expresan la influencia de las teorías de aprendizaje para exponer

conceptos. Mientras que las *tareas a modo de ejemplo* desarrollan problemas intra y extramatemáticos que se entienden como formas de evidenciar el uso de la matemática. En ellas los autores expresan formas de poner en práctica la matemática, de manera que brindan un modelo para ser imitado en los ejercicios e incógnitas que más adelante se plantean.

FASE 3. ANÁLISIS INDIVIDUAL

El instrumento de análisis de tareas en libros de texto fue construido con base en investigaciones

nidos propios del libro e influencia en la forma de usar la razón o función trigonométrica inversa. Mientras que la estructura didáctica señala el tipo de discurso del texto de acuerdo con la época en que fue escrito, de ahí que se identifique que algunos libros emplean, por ejemplo, gráficas y tablas de valores de senos y cosenos en sus anexos (Figura 2).

En la categoría 2 se establece el contexto de significación de cada tarea que propone el libro. Para ello se señalan cinco elementos que permiten analizar las prácticas mediante el uso de la razón

o función trigonométrica inversa. La presencia o ausencia de estos elementos no son lo importante como tal, sino comprender en qué condiciones de la tarea se da el uso de función: ¿es una situación matemática o de aplicación de problemas?, ¿se utilizan diagramas, de ser así, incluyen círculos y triángulos?, ¿se especifica el dominio y rango de la función?, ¿hay un proceso de verificación de lo que se define o de la solución a la que se llega? (Figura 3).

Se retoman los usos de las nociones trigonométricas que identificaron Torres Corrales (2020) y Torres Corrales y Montiel (2020) en un programa de Ingeniería Mecatrónica cuando el profesor y los estudiantes resolvieron problemas de Robótica Industrial. Debido a que son los más cercanos al estudio, tanto que son parte del análisis de la práctica de Ingeniería al encontrarse en el último año de formación escolar; se agrega la subcategoría *otros usos* para incluir los particulares que se identifiquen mediante el presente análisis histórico-didáctico de libros:

- *Uso aritmético*, cuando se hacen operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, sobre todo al dividir

Caracterización del texto	Título:	Contexto situacional			
	Autor:				
	Datos numéricos	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
	Temas previos				
	Temas posteriores				
	Contexto Cultural				
	Idioma del libro				
	Nacionalidad del autor				
	Influencias del autor				
	Destinatarios	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
Estructura didáctica					

Figura 2. Categoría 1 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Maz Machado, 2005; León Mantero et al, 2019; Maturano et al., 2021).

de la Teoría Socioepistemológica y de la Historia de la Educación Matemática. Consta de tres categorías secuenciales que recopilan elementos teóricos y de contenido trigonométrico: caracterización del texto, caracterización de la matemática y producto de enseñanza.

En la categoría 1 se identifican cinco elementos del contexto situacional y cinco del cultural. Los temas previos y posteriores reflejan la organización de conte-

Caracterización de la matemática	Contexto de significación			
	<i>Situación</i>		<i>Diagramas</i>	
	<input type="checkbox"/> Intramatemática	<input type="checkbox"/> Extramatemática	<input type="checkbox"/> Círculo	<input type="checkbox"/> Triángulo
	<i>Definición</i>		<i>Verificación</i>	
	<input type="checkbox"/> Dominio	<input type="checkbox"/> Rango	<input type="checkbox"/> Sí	<input type="checkbox"/> No
	<i>Usos de las nociones trigonométricas</i>			
	<input type="checkbox"/> Uso aritmético	<input type="checkbox"/> Uso métrico	<input type="checkbox"/> Uso cuantitativo	
<input type="checkbox"/> Uso algebraico	<input type="checkbox"/> Uso geométrico	<input type="checkbox"/> Otro uso		

Figura 3. Categoría 2 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Mesa y Goldstein, 2017; Torres Corrales, 2020; Torres Corrales y Montiel, 2020).

longitudes que permiten resolver la tarea.

- *Uso algebraico*, cuando se hacen operaciones con símbolos que no pueden entenderse con operaciones básicas, sobre todo al operar con cantidades simbólicas para resolver la tarea.
- *Uso métrico*, cuando se emplea una convención particular para definir y resolver la tarea.
- *Uso geométrico*, identifica propiedades, se hacen relaciones o se construyen modelos que permiten resolver la tarea.

Producto de enseñanza	Análisis de la caracterización del texto
	Análisis de la caracterización de la matemática
	Significados que promueve el libro de texto

Figura 4. Categoría 3 del instrumento de análisis histórico-didáctico de tareas en libros de texto para la razón y función trigonométrica inversa (construido con base en Torres Corrales, 2020; Torres Corrales y Montiel, 2020; Cantoral et al., 2014).

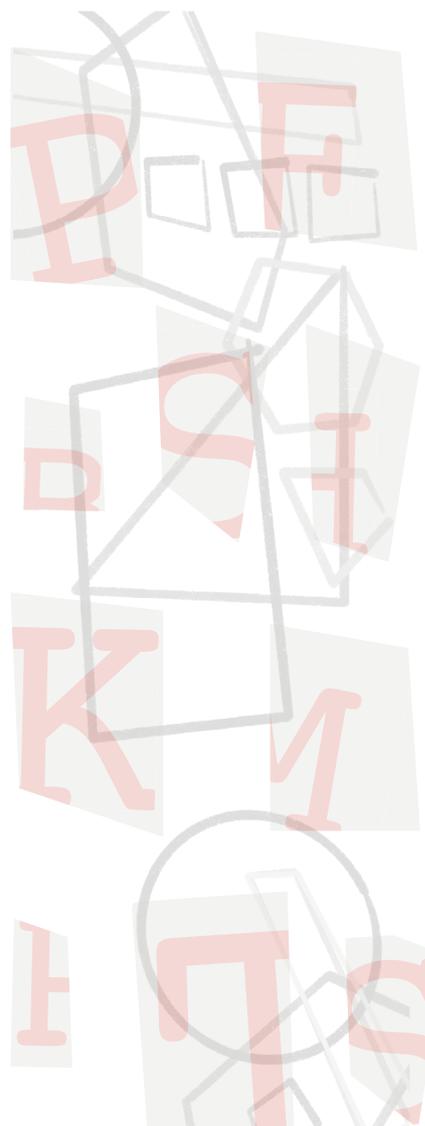
- *Uso cuantitativo*, se determinan que las cantidades las cantidades que se operan provienen de la Trigonometría (triángulo rectángulo, círculo, gráficas de funciones trigonométricas) y estas permiten resolver la tarea.

Finalmente, en la categoría 3 se retoman los resultados de las categorías 1 y 2 para especificar el producto de enseñanza que promueve el libro. Para ello, se hace una síntesis de lo que se identifica en el análisis de la caracterización del texto y de la caracterización de la matemática para interpretar los significados que promueve el libro de texto de la razón o la función trigonométrica inversa (Figura 4).

EJEMPLOS DEL ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LOS LIBROS DE TEXTO

En la Figura 5 se presenta una tarea expositiva del libro histórico *Cálculo I* de Tom Apostol y su respectivo análisis en el Cuadro 1.

En la Figura 6 se presenta una tarea expositiva del libro contemporáneo *Cálculo de una variable* de James Stewart y su respectivo análisis en el Cuadro 2.



6.21 Inversas de las funciones trigonométricas

El proceso de inversión se puede aplicar a las funciones trigonométricas. Se empezará por la función seno. Para determinar una inversa única se ha de

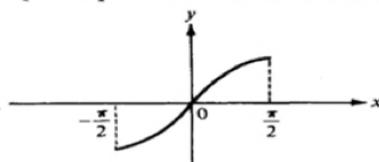


FIGURA 6.9 $y = \text{sen } x$.

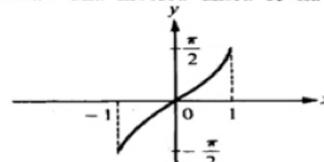


FIGURA 6.10 $y = \text{arcsen } x$.

considerar un intervalo en el que el seno sea monótono. Hay, evidentemente, muchos de estos intervalos, por ejemplo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, etc., y se puede escoger uno cualquiera de ellos. Se acostumbra tomar $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y definir una nueva función f como sigue:

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La función f así definida es creciente en sentido estricto y toma todos los valores entre -1 y $+1$ exactamente una vez en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (véase figura 6.9). Por tanto, hay una única función g definida en $[-1, 1]$ que asigna a cada número y de $[-1, 1]$ el número x de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ para el cual $y = \text{sen } x$. Esta función se denomina *inversa del seno* o *arco seno* y su valor en y se designa por $\text{arc sen } y$. Así

$$u = \text{arcsen } v \quad \text{implica} \quad v = \text{sen } u \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

La gráfica de arco seno se ha dibujado en la figura 6.10. Obsérvese que el arco seno no está definido fuera del intervalo $[-1, 1]$.

Figura 5. Definición de la función arcoseno (Apostol, 1984, p. 310).

Caracterización del texto	Contexto situacional	
	Título:	Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal
Autor:	Tom Apostol	
Datos numéricos	Año Siglo Páginas seleccionadas	
	1984 XIX 310	
Temas previos	Derivadas de funciones inversas	
Temas posteriores	Integrales por fracciones simples	

Contexto Cultural		
Idioma del libro	Traducido al español	
Nacionalidad del autor	Estadounidense	
Influencias del autor	H. Bohnenblust, A. Erdélyi, F. Fuller, K. Hoffman, G. Springer, H. Zuckerman, B. Gordon, G. Springer, W. Ziemer	
Destinatarios	Nivel Superior	
Estructura didáctica	Verbal Simbólica Ilustrativa Anexos	
	x x x	
Caracterización	Contexto de significación	
	<i>Situación</i>	<i>Diagramas</i>
	x Intramatemática Extramatemática Círculo Triángulo	
	<i>Restricciones</i>	<i>Verificación</i>
	x Dominio x Rango x Sí No	
	<i>Usos de las nociones trigonométricas</i>	
	Uso aritmético Uso métrico Uso cuantitativo	
	Uso algebraico Uso geométrico x Otro uso	
Producto de enseñanza	<i>Análisis de la caracterización del texto</i>	
	El autor define la función arcoseno de forma verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar el dominio y rango) e ilustrativa (presenta gráficas en el plano cartesiano).	

<i>Análisis de la caracterización de la matemática</i>		
En la explicación del concepto el autor emplea representaciones algebraicas para definir las funciones $f = \text{sen } x$ y $y = \text{arcsen } x$, utiliza el plano cartesiano para verificar gráficamente la función trigonométrica $\text{sen } x$ y la función trigonométrica inversa $\text{arcsen } x$, señala su dominio y rango respectivos.		
De aquí se reconoce que la función trigonométrica inversa de $\text{sen } x$ <u>tiene uso como operador de composición de funciones</u> del tipo $f(g(x))$, donde f es la función trigonométrica o la función trigonométrica inversa, mientras que g es cualquier otra función; y en este caso $g(x) = x$.		

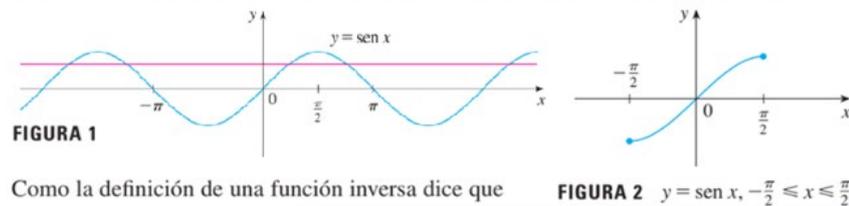
<i>Significados que promueve el libro de texto</i>		
La función $u = \text{arcsen } v$ es el operador inverso para la función $v = \text{sen } u$, entendiendo a $u = g(x)$ y $v = f(g(x))$.		

Cuadro 1. Ejemplo de análisis cualitativo de una tarea expositiva de un libro de texto histórico.

3.6 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Recuerde de la Sección 1.6 que las únicas funciones que tienen funciones inversas son funciones biunívocas. Las funciones trigonométricas, sin embargo, no son biunívocas y no tienen funciones inversas, pero podemos hacerlas biunívocas al restringir sus dominios y veremos que las inversas de estas funciones trigonométricas restringidas desempeñan un importante papel en cálculo integral.

Se puede ver de la Figura 1 que la función seno $y = \sin x$ no es biunívoca (use la Prueba de la Recta Horizontal). Pero la función $f(x) = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, es biunívoca (véase Figura 2). La función inversa de esta función seno restringida f existe y está denotada por \sin^{-1} o arcosen. Se denomina **función seno inversa** o **función arcoseno**.



Como la definición de una función inversa dice que $f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$ tenemos $\sin^{-1} x = y \iff \sin y = x$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

Entonces, si $-1 \leq x \leq 1$, $\sin^{-1} x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x .

Figura 6. Definición de la función seno inversa (Adaptada de Stewart, 2010, p. 216).

COMENTARIOS FINALES

Este estudio forma parte más amplia cuya pregunta de investigación es: ¿cuál es la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa en libros de texto históricos y contemporáneos relacionados con la ingeniería? Para el presente escrito el objetivo fue exponer la metodología de recolección, organización y análisis de datos para un estudio histórico-didáctico de libros de texto relativo a la razón y función trigonométrica inversa.

El diseño de la metodología contribuye a la literatura en dos aspectos. En primer lugar, aporta una herramienta teórica-metodológica para realizar un análisis histórico-didáctico de libros de texto de contenidos matemáticos concretos que puede ser retomada para estudiar otros contenidos matemáticos en la Teoría Socioepistemológica, al ajustar los elementos particulares de la Categoría 2 "Caracterización de la matemática". En segundo lugar, este escrito ejemplifica el proceso para la configuración de una meto-

dología de análisis de libros de texto que puede fungir como guía para diseñar otras metodologías, independientemente de la teoría y de los conceptos matemáticos involucrados, esto debido a que se hicieron explícitas la elección de elementos teóricos, la definición de las categorías de análisis de acuerdo con los contenidos matemáticos encontrados en la teoría y en la revisión de la literatura, además del diseño y ejecución de un instrumento de análisis.

En conclusión, como prospectiva se espera que el resultado del proyecto de investigación explique, en el contexto cultural

Caracterización del texto	Contexto situacional				
	Título:	Cálculo de una variable. Conceptos y contextos James Stewart			
Caracterización	Autor:	Año	Siglo	Páginas seleccionadas	
	Datos numéricos	2010	XX	216	
	Temas previos	Derivación implícita			
	Temas posteriores	Derivación de funciones logarítmicas			
Caracterización	Contexto Cultural				
	Idioma del libro	Traducido al español			
	Nacionalidad del autor	Canadiense			
	Influencias del autor	George Polya, colegas y estudiantes de la universidad de Toronto, artículos científicos, usuarios y revisores			
	Destinatarios	Nivel medio superior y nivel superior			
	Estructura didáctica	Verbal	Simbólica	Ilustrativa	Anexos
		x	x	x	x
	Contexto de significación				
	Situación	Diagramas			
	<input checked="" type="checkbox"/> Intramatemática	<input type="checkbox"/> Extramatemática	<input type="checkbox"/> Círculo	<input type="checkbox"/> Triángulo	
Restricciones	Verificación				
<input checked="" type="checkbox"/> Dominio	<input checked="" type="checkbox"/> Rango	<input checked="" type="checkbox"/> Sí	<input type="checkbox"/> No		
Usos de las nociones trigonométricas					
<input type="checkbox"/> Uso aritmético	<input type="checkbox"/> Uso métrico	<input type="checkbox"/> Uso cuantitativo			
<input type="checkbox"/> Uso algebraico	<input type="checkbox"/> Uso geométrico	<input checked="" type="checkbox"/> Otro uso			
Producto de enseñanza	Análisis de la caracterización del texto				
	A diferencia de ediciones previas, la cuarta edición presenta las funciones trigonométricas inversas en una sola sección (tema 3.6). El autor estructura la forma de presentar los temas a partir de la resolución de problemas que propone George Polya, la cual se explica al final del Capítulo 1. La tarea analizada es de tipo expositiva, se identifica una estructura didáctica de tipo verbal (emplea el lenguaje natural), simbólica (hace uso de símbolos para representar expresiones y operaciones), ilustrativa (incluye gráficas de las funciones seno y arcoseno) y anexos (el autor los llama apéndices y en ellos presenta fórmulas de Trigonometría que ubica en las últimas páginas del libro).				
Producto de enseñanza	Análisis de la caracterización de la matemática				
	La declaración del autor define la función trigonométrica inversa arcoseno, para ello retoma el tema previo de funciones inversas y sus características con la finalidad de hacer más comprensible la explicación y de ampliar la información mostrada en la sección 1.6. El autor da la explicación de una función biunívoca (biyectiva) mediante la gráfica de la función $y = \sin x$ (Figura 1), para ello utiliza el método de la línea horizontal donde se puede visualizar esta característica de la función inversa y comprobar que la función seno no es biunívoca en todo su dominio. Por lo tanto, se da una verificación de la tarea y un uso gráfico al presentar y definir la gráfica de las funciones seno y arcoseno en el plano cartesiano.				

Cuadro 2. Ejemplo de análisis cualitativo de una tarea expositiva de un libro de texto contemporáneo.

y situacional de libros de texto relacionados con la Ingeniería, la transformación didáctica de la razón y función trigonométrica inversa mediante la interpretación del discurso Matemático Escolar (dME). Si bien el libro de texto es un medio de transmisión del dME, su análisis nos permite interpretar los usos y significados de un conocimiento matemático según un grupo humano y con los cuales se fundamentan propuestas de diseño en aula, con el supuesto que pueden darse otros usos y significados, además de los relacionados con procesos memorísticos que suele fomentar la escuela.

REFERENCIAS

- Apostol, T. (1984). *Cálculo I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Segunda edición. Reverté.
- Betancur, S., Roa, S. y Ballesteros, S. (2021). *Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245-276. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2431>
- Braga Blanco, G. y Belver Domínguez, J. (2016). *El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación*. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Bravo, A. y Cantoral, R. (2012). *Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica*. *Educación Matemática*, 24(2), 91-122. <http://funes.uniandes.edu.co/13244/1/Bravo-2012Los.pdf>
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.
- Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez Sierra, G. (2006). *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (número especial), 83-102. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33509905.pdf>
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015). *Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica*. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123>
- Cantoral, R., Reyes Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, Matemáticas y Realidad*. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. <https://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149>
- Fan, L. (2013). *Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks*. *ZDM*, 45(5), 765-777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- González, M. y Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 22(3), 389-408. <https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v22n3/02124521v22n3p389.pdf>
- Larios, V. y Jiménez, A. (2022). *Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros*. *Praxis y Saber*, 13(33), e12274. <https://doi.org/10.19053/22160159.v13.n33.2022.1227>
- León Mantero, C., Maz Machado, A. y López Esteban, C. (2019). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral en España: un análisis de los libros de texto del siglo XVII*. En G. Schubring, J. Bello y H. Vacca (edits.), *V Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 345-357). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <http://funes.uniandes.edu.co/22503/>
- Love, E., y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. In *International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Springer.
- Martínez Planell, R. y Cruz Delgado, A. (2016). *The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 11-133. <https://daneshyari.com/article/preview/360616.pdf>
- Maturano, C., Mazzitelli, C. y Guirado, A. (2021). *El libro de texto universitario de ciencias en la formación docente. Enseñanza de las Ciencias revista de investigación y experiencias didácticas*, 39(2), 83-101. <https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3070>
- Mesa, V. y Goldstein, B. (2017). *Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks*. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338-354. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0042-1>

- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.
- Pino Fan, L., Parra Urrea, Y. y Castro Gordillo, W. (2019). *Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno*. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220. <https://doi.org/doi:10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc>
- Soto, D. y Cantoral, R. (2014). *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Boletim de Educação Matemática 28(50), 1525-1544. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25>
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos*. Cuarta edición. Cengage Learning.
- Talkokul, E. (2017). *Research on the Trigonometry as a Main Function of Sine, Secant, Tangent and Formula of Tan and Cot are Inverse*. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 50, 147-152. <https://ijm-ttjournal.org/2017/Volume-50/number-3/IJMTT-V50P523.pdf>
- Torres Corrales, D. y Montiel, G. (2020). *La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa*. *Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, 29(58-1), 24-55. <https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2>
- Torres Corrales, D. (2020). *Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica* [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados]. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34180.27524>