Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

EL PROCESO DUAL DE GENERALIZACIÓN-PARTICULARIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

THE DUAL PROCESS OF PARTICULARIZATION-GENERALIZATION OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS

María del Carmen Fajardo Araujo[1], Víctor Larios Osorio[2]
[1]FACULTAD DE INFORMÁTICA, Y [2]FACULTAD DE INGENIERÍA,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
[1]E-mail: carmulita@hotmail.com
[2]E-mail: vil@uaq.mx

RESUMEN:

El proceso de generalización aunque no aparece de manera explícita como una de las finalidades que el alumno debe alcanzar en los tres ejes en que se divide el estudio de las matemáticas durante la educación secundaria, se ha considerado importante conocer cómo son las generalizaciones que los alumnos plantean. Este trabajo tiene la intención de dar cuenta de los procesos de particularización y generalización, éstos últimos categorizados en reconstructivos, expansivos y disyuntivos. Los tipos de generalizaciones fueron evidenciados en una práctica argumentativa realizada con estudiantes de tercer grado de una telesecundaria del Estado de Querétaro, en actividades correspondientes al eje Forma, espacio y Medida. Los resultados indican que el tipo de generalizaciones que los alumnos dan depende de su dominio en el lenguaje matemático y de sus habilidades para validar conjeturas, hay alumnos que no abandonan el proceso de particularización para avanzar a la generalización.

Palabras clave: generalización, particularización, argumentación.

ABSTRACT:

Though the generalization processes does not appear in the explicit way as one of the purposes that the students must reach in the three axes in which the mathematics study is divided during the secondary education, it has been considered the generalization process important to know how they are the generalizations that the students raise. This work has the intention of realizing of the processes of particularization and generalization the above mentioned categorized in reconstructive, expansive and disjunctive. The types of generalization were demonstrated in an argumentative practice realized with students of the third degree in a telesecundaria school of Querétaro´s State in activities corresponding to the axis Forms, space and measure. The results indicate that the type of generalizations that the students give depends of his domain in the mathematical language and on his skills to validate conjectures there are students who do not leave the particularization process to advance to the generalization.

Key words: arguments, generalization, particularization.

INTRODUCCIÓN

Consideraciones generales

El estudio de las matemáticas en educación básica considera tres ejes, Forma, Espacio y Medida, Sentido numérico y pensamiento algebraico y Manejo de la información. Para cada uno de ellos se esperan finalidades que el alumno debe alcanzar durante su estancia en la secundaria. Uno de los fines más relevantes del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, es el de generalizar propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra (SEP, 2011).

Este trabajo tiene el objetivo de evidenciar el proceso dual de generalización-particularización realizado por alumnos de tercer grado de secundaria, en actividades de temas correspondientes al eje Forma, Espacio y Medida. Conviene aclarar que en los Planes y Programas de Estudio (2011) para educación secundaria, no se hace explícito el desarrollo en el estudiante del proceso de generalización, es sólo en el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico donde aparece. Sin embargo se ha considerado que dicho proceso (generalización) está de manera tácita en los otros dos ejes.

REFERENTE TEÓRICO

El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática

El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS] es un modelo teórico compuesto por cinco niveles que pretenden describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática (Font, Planas, 2010). El modelo tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?

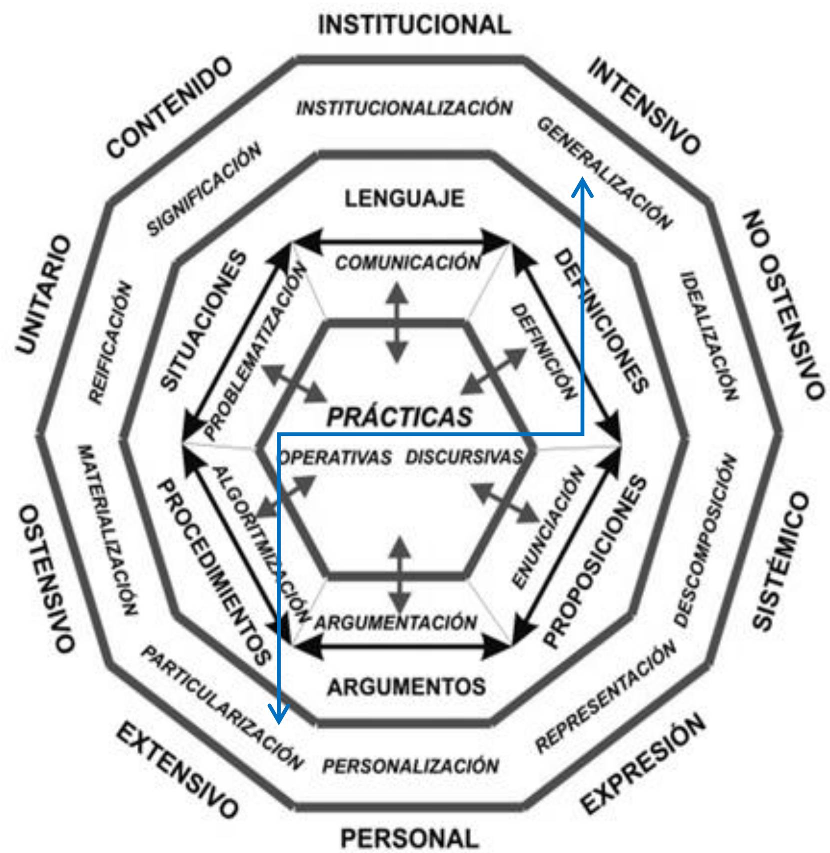


Figura1. Modelo del EOS y los procesos duales.

Los cinco niveles para el proceso de instrucción se describen a continuación:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4. Identificación del sistema de normas y metanormas.

Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático, tomando en cuenta tanto al agente que realiza la práctica, como el contexto en que se ejecuta dicha práctica. Dado que el agente realiza acciones para la resolución de situaciones problema, hay que considerar otros aspectos como valores, intenciones, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se enfoca en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel de análisis describe la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos.

El tercer nivel implica el análisis didáctico con orientación a describir de los patrones de interacción, los conflictos y su resolución, así como la relación con los aprendizajes de los estudiantes.

El cuarto nivel de análisis estudia la relación de normas y metanormas que condicionan los procesos de instrucción, en este nivel hay que tomar en cuenta los fenómenos de interacción social que suceden en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El quinto nivel se centra en la valoración de la idoneidad didáctica de los niveles previos, con la intencionalidad de identificar mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

El EOS según Rubio (2012) propone procesos matemáticos que fueron agrupados por familias, ya que poseen características en común si se comparan dos a dos. La figura muestra dichos procesos identificados en el decágono, la flecha doble color azul refiere al proceso dual que este trabajo priorizó.

El proceso de Generalización

La generalización según Krutestskii (1976) se puede distinguir desde dos niveles, la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). En términos escolares para un alumno una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares.

El tipo de generalización depende de las construcciones mentales del individuo (Harel & Tall, 1991). Se han distinguido tres tipos de generalización de los esquemas cognitivos según Harel & Tall (1991), hay expansiva, reconstructiva y disyuntiva. La expansiva cuando el sujeto amplía el rango de aplicabilidad del esquema sin reconstruirlo. La reconstructiva cuando el sujeto reconstruye un esquema existente en orden a ampliar su aplicabilidad. La generalización del esquema es disyuntiva cuando el sujeto construye un nuevo esquema no conectado con los existentes.

El proceso complementario a la generalización es la particularización, pues implica trabajar con objetos matemáticos individualizados, si se toma en cuenta la propuesta de Krutestskii, así como la de Harel y Tall, se habla en ambos casos que para llegar a la generalización, hay que recurrir al empleo de casos particulares.

METODOLOGÍA

Este trabajo sólo toma los dos primeros niveles de análisis propuestos por el EOS, de manera que la práctica matemática que se analizó fue la de argumentación que es evidenciada en las respuestas de los alumnos a las tareas planteadas. El proceso en el que se centró la atención fue el de generalización identificada en los argumentos proporcionados por los alumnos.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en una escuela secundaria del estado de Querétaro, de la modalidad de telesecundarias, con 28 alumnos del tercer grado, en un laboratorio de cómputo, en lap tops. El trabajo se realizó por parejas y las evidencias fueron recabadas en hojas de trabajo, archivos en Geogebra y grabaciones de audio.

Estructura de las hojas de trabajo

Las actividades planteadas corresponden a los temas vigentes para el tercer grado del eje Forma, espacio y medida del Plan de estudios para educación secundaria. La organización de las actividades se realizó tomando en cuenta la unidad cognitiva de los teoremas (referencia).

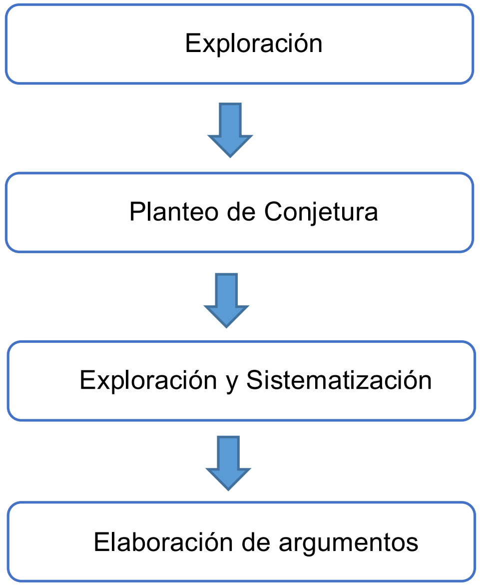


Figura 2. Etapas de la Unidad Cognitiva de los Teoremas.

Se describe de modo general cada una de las etapas, donde conviene aclarar que en una misma actividad se presentaron etapas repetidas, pues la hoja de trabajo requería del planteo de más de una conjetura, por lo que era necesario explorar, plantear la conjetura y argumentar en reiteradas ocasiones.

Etapa de Exploración: los alumnos en construcciones realizadas en Geogebra y guiados por preguntas observan regularidades, en triángulos, en paralelas cortadas por transversales, etc.

Etapa de Planteo de Conjetura: una vez que se observaron las regularidades, los alumnos guiados por preguntas se esperaba que plantearan una conjetura.

Etapa de Exploración y Sistematización: al plantear la conjetura los alumnos habrán de verificarla, por lo que se

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

les pide que observen sus construcciones, las propiedades geométricas o las características que anotaron en la conjetura.

Elaboración de Argumentos: verificada la conjetura en la etapa anterior, los alumnos habrán de escribir los argumentos producto de la observación de regularidades.

Descripción de las actividades

Las actividades se diseñaron con base en los temas propuestos para el tercer grado de secundaria del eje Forma, espacio y medida, de los planes de estudio vigentes (2011). Se relacionaron entre sí siete temas con la finalidad de que el alumno tuviera elementos sólidos para construir argumentos a sus conjeturas.

La primera actividad fue la circunferencia como lugar geométrico, donde la finalidad era que el alumno construyera el concepto de circunferencia a partir de la exploración en una construcción en Geogebra.

La segunda actividad consistió en establecer la rigidez triangular y la desigualdad triangular como condiciones para construir triángulos. Los alumnos debían enunciar las dos reglas a manera de generalización.

La tercera actividad fue la de identificar y definir los ángulos opuestos por el vértice, así como los correspondientes en rectas paralelas.

La cuarta actividad fue determinar mediante construcciones los criterios y los no criterios de congruencia en triángulos. Los alumnos debían usar conceptos matemáticos establecidos con anterioridad como los ángulos correspondientes y los opuestos por el vértice.

La quinta actividad consistió en enunciar el Teorema de Tales mediante construcciones en Geogebra, además debían apoyar sus conjeturas con los conceptos matemáticos anteriormente construidos.

La sexta actividad fue establecer los criterios y los no criterios de semejanza en triángulos. Las conjeturas debían validarse con los conceptos matemáticos anteriormente abordados como la proporcionalidad de segmentos, pero ahora aplicada a triángulos, la razón de proporcionalidad, en este caso como razón de semejanza.

La séptima actividad abordó la homotecia directa e inversa donde los alumnos debían formular las propiedades geométricas de figuras homotética cuando $k < 0$, $k > 1$, k entre 0 y 1 y $k = 1$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Dada la insuficiencia en la precisión del lenguaje matemático por parte de los alumnos para redactar argumentos que se orienten a la generalización, en el sentido estricto de la palabra, se optó por identificar dicho proceso con base en la clasificación propuesta por Harel y Tall (1991). Respecto a la particularización se consideró implícito en la categorización mencionada.

El total de preguntas analizadas fue de 945 de las siete actividades, aunque aparecieron otros procesos matemáticos en las respuestas de los alumnos este estudio sólo va a reportar los de generalización y particularización.

Tabla 1.Frecuencia de aparición de proceso de generalización y particularización

Proceso matemático	Frecuencia de aparición
Generalización Expansiva	18%
Generalización Disyuntiva	17%

Generalización Reconstructiva	7%
Particularización	9%
Otros procesos	41%

Las figuras representan ejemplos de los procesos de generalización y particularización, para cada una de ellas se hará una descripción breve con el fin de proporcionar una orientación de por qué se clasificaron de esa manera.

La particularización se observó en esta respuesta, la actividad consistió en elaborar la regla de la desigualdad triangular con base en la construcción de un triángulo en Geogebra con circunferencias intersectadas, donde al moverlas el triángulo podía desaparecer, por lo que los alumnos debían enunciar por qué pasaba tal hecho, después de plantear y validar esa conjetura para ese caso, debían generalizar para todos los triángulos. La respuesta se tomó como particularización porque anota de manera separada cómo son los segmentos para triángulos escalenos, isósceles y equiláteros, no logra generalizar a todos los triángulos.

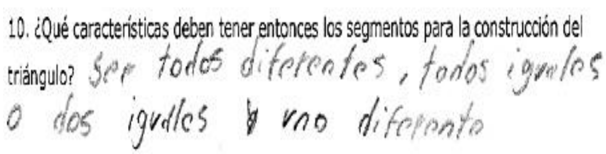

10. ¿Qué características deben tener entonces los segmentos para la construcción del triángulo? Ser todos diferentes, todos iguales o dos iguales y uno diferente

Figura 3. Ejemplo del proceso de Particularización.

La figura 4 es un ejemplo de generalización del tipo disyuntiva que se presentó en la actividad de homotecia directa, cuyo objetivo era que el alumno con ayuda del software observara y enunciara lo que sucedía con los vértices correspondiente de la figura homotética, se les pedía no cruzar el centro de homotecia porque esta primera actividad estaba enfocada a la homotecia directa. En este ejemplo el alumno está respondiendo como si se tratase de una figura, cuando la pregunta alude a los vértices. El sujeto construye un nuevo esquema puesto que puede identificar visualmente cuándo es proporcional y cuándo es congruente la figura de acuerdo a determinadas propiedades de la construcción y a los conceptos matemáticos construidos en actividades anteriores como las propiedades de los triángulos semejantes y congruentes. Sin embargo no puede decir qué sucede con los vértices correspondientes. Su nuevo esquema, que sería el de tomar como sinónimos vértices y figuras, parece inconexo con los otros esquemas como la congruencia y semejanza de figuras porque no responde para los vértices sino para las figuras.

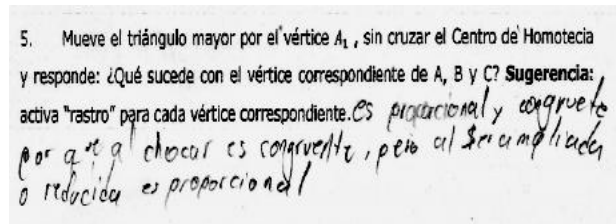

5. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1, sin cruzar el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente. Es proporcional y congruente por que al checar es congruente, pero al ser ampliada o reducida es proporcional

Figura 4. Ejemplo de Generalización del tipo disyuntiva.

La actividad de semejanza consistió en enunciar los criterios a partir de la construcción realizada en Geogebra del Teorema de Tales, la figura 5 refiere al criterio lado, lado, lado y se tomó como un ejemplo de generalización del tipo reconstructiva porque el alumno reconstruye el esquema que tenía sobre las figuras a escala para aplicarlo a la nueva situación que se le presentó concerniente a triángulos y así es decir se ampliar su aplicabilidad.

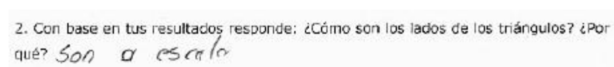
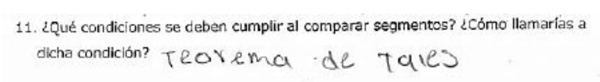

2. Con base en tus resultados responde: ¿Cómo son los lados de los triángulos? ¿Por qué? Son a escala

Figura 5. Ejemplo de Generalización del tipo reconstructiva.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 002, Septiembre de 2017, ISSN en trámite.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 081015494400 - 203

La generalización expansiva se ejemplifica en la figura 6 que corresponde a la actividad del teorema de Tales, donde los alumnos debían establecer la constante de proporcionalidad de segmentos. La definición se fue construyendo con la comparación de segmentos obteniendo el cociente. Se consideró como generalización expansiva la respuesta del alumno, ya que tiene el esquema referente al teorema de Tales y aplicó la definición para establecer la condición que debe cumplirse al comparar segmentos, no hay movilización del esquema, ni tampoco se fracciona, sólo se amplía el rango de aplicabilidad, esto es que el alumno concluyó que la constante de proporcionalidad es el Teorema de Tales.



11. ¿Qué condiciones se deben cumplir al comparar segmentos? ¿Cómo llamarías a dicha condición? Teorema de Tales

Figura 6. Ejemplo de Generalización del tipo expansiva.

Los resultados indican que aunque los alumnos llegan a establecer generalizaciones lo hacen con conceptos erróneos o inventados, confunden las propiedades de las figuras semejantes, con las de las congruentes, no hay orden en sus respuestas eso quiere decir aunque empleen casos particulares en algunas tareas que así lo requerían, no garantizó que eso los condujera a la generalización. Las generalizaciones expansivas predominan como proceso en los alumnos en donde no hay reconstrucción de esquemas o bien construyen nuevos, pero éstos no guardan relación con los previos.

COMENTARIOS FINALES

A pesar de que los alumnos llegan a generalizar esta primera exploración evidencia una carencia del lenguaje matemático, de ahí que se recomiende incitar al alumno a nombrar debidamente a los objetos matemáticos, ya que parecen no abandonar las expresiones cotidianas al construir sus respuestas. Convendría también ayudarle al alumno a distinguir los conceptos matemáticos en los múltiples campos, pues tratan en geometría como sinónimos los conceptos de igualdad y congruencia.

La generalización es un proceso matemático importante que debe desarrollarse en los alumnos, éste debe mejorar conforme el estudiante vaya avanzando en el aprendizaje de los objetos matemáticos, con la finalidad de perfeccionar las formas de expresión al momento de comunicar sus generalizaciones. Si los esquemas de los alumnos se reconstruyen y se ligan con los ya existentes en términos de Piaget (2010) el objeto matemático se transformaría y se dotaría de un nuevo significado.

REFERENCIAS

Font, Planas, & Godino. (2010). Modelo para el Análisis Didáctico en Educación Matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2),89-105.

Garuti, Boero, & ut, L. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Recuperado el 25 de julio de 2016, de Preuve, Proof, Prueba: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/garuti.html

Harell, G., & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in advanced mathematics. For the learning of mathematics, 11(1), 38-42.

Krutestskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (T. f. Wirszup, Trad.) The University of Chicago Press.

Piaget, J. (séptima reimpresión 2010). La equilibración de las estructuras cognitivas problema central del desarrollo. (E. Bustos, Trad.) México: Siglo XXI editores.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de práticas, objetos y procesos matemáticos. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2011). Planes de Estudios 2011. México D.F.: SEP.