

INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE LOS CONTENIDOS DE PROBABILIDAD DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA COSTARRICENSE

EPISTEMIC SUITABILITY INDICATORS OF THE
PROBABILITY CONTENTS IN THE COSTA RICAN
MATHEMATICS CURRICULUM

INDICATEURS D'ADÉQUATION ÉPISTÉMIQUE DU
CONTENU DE PROBABILITÉS DU PROGRAMME DE
MATHÉMATIQUES DU COSTA RICA

Luis A. Hernández Solís
Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica
lhernandez@uned.ac.cr
<https://orcid.org/0000-0003-2956-8102>

Carmen Batanero
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es
<https://orcid.org/0000-0002-4189-7139>



RESUMEN

Se analiza la idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad en las orientaciones curriculares de matemáticas para la educación general básica costarricense. Nos apoyamos en la *Teoría de idoneidad didáctica* del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, creada para apoyar el diseño y evaluación de programas de estudio y acciones formativas para profesores. Gracias al análisis de contenido, las normas de las que se infieren indicadores de idoneidad epistémica terminan por igualarse; estos a su vez se confrontan con los propuestos por dicha teoría y otros generados en trabajos previos, a fin de determinar sus concordancias y complementariedades. En general, se evidencia una alta idoneidad epistémica de las directrices sobre la enseñanza de la probabilidad para estos niveles educativos; es decir, un adecuado acoplamiento del significado institucional de la probabilidad acomedido con el referencial. Asimismo, se resalta el valor de las situaciones-problema como ente integrador y catalizador del lenguaje, las reglas y la

Este proyecto presenta una síntesis que puede guiar al docente en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la probabilidad, en el marco de las orientaciones curriculares costarricenses; y constituye un puente entre estas y su práctica docente.

argumentación. Los indicadores pueden orientar y apoyar la acción docente en el diseño e implementación de procesos de instrucción de la probabilidad y constituir un recurso útil para la formación inicial y actualización continua de educadores.

Palabras clave: Costa Rica, currículo, educación general básica, idoneidad epistémica, probabilidad.

ABSTRACT

In this paper we analyse the epistemic suitability of the probability contents in the mathematics curricular guidelines for Costa Rican General Basic Education. We rely on the theory of didactic suitability from the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, developed to support the design and evaluation of curricula and teacher training. Through content analysis, norms are identified from which indicators of epistemic suitability are inferred, which are compared with those proposed by this theory and others generated in previous works, in order to identify their concordances and complementarities. In general, the inferred indicators show a high epistemic suitability of the probability teaching guidelines for these educational levels; that is, a good match between the intended institutional meaning and the institutional reference meaning of probability. Furthermore, the value of problem situations as an integrator and catalyst of language, rules and argumentation is highlighted. The indicators identified can guide and support teaching action in the design and implementation of probability instruction processes and constitute a useful resource for the initial and continuous training of educators.

Keywords: Costa Rica, curriculum, general basic education, epistemic suitability, probability.

RÉSUMÉ

Cet article analyse l'adéquation épistémique du contenu des probabilités dans les directives du programme de mathématiques de l'enseignement général de

base del Costa Rica. Nos apoyamos en la teoría de la adecuación didáctica de la aproximación semiótica de la conocimiento y de la enseñanza de las matemáticas, creada para apoyar la concepción y la evaluación de los programas de estudio y de las actividades de formación de los docentes. Al medio de un análisis de contenido, se identifican las normas a partir de las cuales se deducen los indicadores de adecuación epistémica, que se comparan con los propuestos por esta teoría y con otros generados en trabajos anteriores, para identificar sus coincidencias y sus complementariedades. En general, los indicadores deducidos muestran una gran adecuación epistémica de las directrices sobre la enseñanza de las probabilidades para estos niveles de enseñanza, es decir un buen acoplamiento del sentido institucional previsto con el sentido institucional de referencia de las probabilidades. Además, la validez de las situaciones problemáticas en tanto que entidad integradora y catalizadora del lenguaje, las reglas y el argumento se pone en evidencia. Los indicadores identificados pueden guiar y apoyar la acción pedagógica en la concepción y la puesta en marcha de los procesos de enseñanza de las probabilidades y constituir una herramienta útil para la formación inicial y la actualización de los docentes.

Mots-clés: Costa Rica, programa de estudio; enseñanza general de base; adecuación epistémica; probabilidad.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la probabilidad cobra relevancia en todos los niveles educativos, debido a la necesidad de proporcionar a los

ciudadanos una cultura probabilística (Gal, 2005) en distintas áreas profesionales y científicas. Además de ser una parte importante de la matemática que se puede relacionar con otras, como la aritmética, álgebra y funciones, cálculo, geometría y medida, la probabilidad es una herramienta imprescindible para la toma de decisiones en condiciones aleatorias (Batanero, 2005; Borovcnik, 2016). En consecuencia, son muchos los autores que abogan por la incorporación de esta disciplina desde la escuela elemental (Alsina, 2017; Vásquez et al., 2019).

Abundan los países que introducen contenidos de probabilidad desde edades tempranas (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2013; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, 2014 y National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Costa Rica no ha sido una excepción, por lo que los recientes programas de estudio de matemática para la educación preuniversitaria (MEP, 2012) han prestado especial atención al área de estadística y probabilidad, cuyos contenidos y expectativas de aprendizaje se organizan de manera integrada, desde el primer año de educación primaria hasta el último de educación secundaria.

La finalidad de este trabajo es analizar la idoneidad epistémica de la propuesta curricular costarricense para la educación general básica (EGB). En concreto, se sigue la metodología sugerida por Godino et al. (2012) para inferir indicadores de idoneidad epistémica del tema de probabilidad, a partir del análisis de las directrices curriculares en los planes de estudio de matemática del Ministerio de educación pública costarricense (MEP, 2012). En lo

que sigue, se describe el currículo de matemática costarricense, se expone el marco teórico, la metodología empleada, los resultados y se discuten las conclusiones.

CURRÍCULO DE MATEMÁTICA COSTARRICENSE

El currículo costarricense de matemáticas para la educación general básica (MEP, 2012) está organizado en tres de los cuatro ciclos del sistema educativo de este país. Los dos primeros corresponden a la educación primaria y los otros dos a la secundaria. Los planes de estudio de matemáticas en cada ciclo se organizan de forma integrada del primero al último curso en torno a los conocimientos y habilidades relacionadas cuyo desarrollo se espera. Se plantean cinco áreas:

- Números
- Medidas
- Geometría
- Relaciones y álgebra
- Estadística y probabilidad

El presente trabajo se centrará en la materia de la probabilidad. Dicha área prevalece a lo largo de todos los ciclos; en educación primaria, abarca la misma proporción que geometría, medidas y relaciones y álgebra; en educación secundaria constituye una cuarta parte del currículo.

CONOCIMIENTOS DE PROBABILIDAD QUE SE DESARROLLAN EN LA EGB

Como se muestra en las Tablas 1 y 2, los conocimientos de probabilidad se desarrollan de manera paulatina y su complejidad es creciente, desde el primer año (educación primaria) hasta el noveno (educación secundaria), que

Tabla 1. Conocimientos probabilísticos que se desarrollan en la educación general básica del currículo de matemática costarricense MEP (2012).

CONOCIMIENTOS	I CICLO			II CICLO			III CICLO		
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
SITUACIONES: ALEATORIAS Y SEGURAS.	x	x	x	x				x	
EVENTOS: SEGURO, PROBABLE, IMPOSIBLE, MÁS Y MENOS PROBABLES.		x	x	x	x			x	
RESULTADOS SIMPLES DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.			x	x	x			x	
REPRESENTACIÓN DE EVENTOS.				x				x	
DEFINICIÓN CLÁSICA O LAPLACIANA DE PROBABILIDAD.						x		x	
PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES						x		x	
EVENTOS SIMPLES Y COMPUESTOS								x	
MUESTRAS ALEATORIAS									x
PROBABILIDAD FRECUENCIAL									x
INTRODUCCIÓN A LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS									x

Nota. El séptimo año carece de contenidos de probabilidad, para dar mayor espacio al refuerzo de contenidos estadísticos estudiados en educación primaria.

constituyen la EGB en Costa Rica. En el primer ciclo se trata que los niños identifiquen las situaciones donde interviene el azar, como aquellas cuyo resultado es impredecible, y las diferencien de las deterministas. Se propone no solo realizar juegos con monedas, dados, ruletas y otros dispositivos, sino incluir situaciones cotidianas vinculadas a la incertidumbre, que acerquen al niño a estas experiencias. Para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas sin llegar a la cuantificación de las probabilidades, solo se habla de eventos más o menos probables.

En segundo ciclo se sugiere analizar probabilidades de juegos de azar y problemas del contexto estudiantil. Se aprovecha la intuición desarrollada en el primer ciclo para profundi-

zar en conceptos relacionados con eventos y sus representaciones. En el último año se introduce el cálculo de probabilidades según la ley de Laplace. En consecuencia, se da un salto cualitativo en la enseñanza; partiendo de ideas intuitivas, se llega a calcular probabilidades como una proporción de resultados favorables respecto a los posibles.

En el tercer ciclo se lleva a cabo una transición de la educación primaria a la secundaria, por lo que en octavo año hay una nivelación y precisión de conceptos probabilísticos estudiados en el ciclo anterior y se incrementa la dificultad de los problemas planteados. En el último año se introducen la definición frecuencial de probabilidad y la ley de los grandes números.

Aunque hay conocimientos que se repiten en diferentes años, en la Tabla 2 se puede apreciar que el nivel de profundidad de cada contenido es creciente por ciclo. Además, en tercer ciclo se formalizan los conceptos y propiedades mediante mayor precisión matemática y uso de lenguaje simbólico y, junto con las habilidades generales presentadas en la Tabla 2, aparecen otras asociadas a ejes disciplinares transversales del currículo que los estudiantes deben lograr a lo largo de toda la EGB: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal; la contextualización activa como un componente pedagógico especial y el uso de la historia de las matemáticas.

Tabla 2. Habilidades generales asociadas a conocimientos probabilísticos en el currículo de matemática costarricense para EGB.

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES GENERALES		
	I CICLO	II CICLO	III CICLO
SITUACIONES: ALEATORIAS Y SEGURAS.	Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas.		
EVENTOS ALEATORIOS.	Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. - Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos.	Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento.	Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
PROBABILIDAD CLÁSICA O LAPLACIANA.		Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.	Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades vinculadas con el evento: seguro, probable e imposible.
PROBABILIDAD FRECUENCIAL			Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

MARCO TEÓRICO

Utilizaremos el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994, Godino et al., 2007; 2019), que concuerda epistemológicamente con MEP (2012), debido al papel central que el EOS confiere a las situaciones problema y las prácticas deducidas de ellas y a la importancia dada en MEP (2012) a la resolución de problemas como vehículo de aprendizaje. De este marco teórico se utilizará el constructo *significado institucional* y la clasificación de tipos de objetos que permitirán analizar el contenido de las orientaciones curriculares.

Además, se empleará la idoneidad didáctica y, en particular, la de tipo epistémico y sus indicadores.

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

El EOS parte de una formulación ontológica de los objetos matemáticos, que, a partir de la *situación-problema* define los conceptos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado del objeto* (Godino et al., 2007; 2019). El significado de los objetos matemáticos se origina de las prácticas llevadas a cabo por una persona o institución al resolver problemas relacionados con dichos objetos.

Una práctica es “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334) y puede ser personal o institucional.

Las *prácticas institucionales* están normadas por los sujetos de una institución (grupo que realiza prácticas sociales tomando en cuenta sus instrumentos, reglas y modos de funcionamiento) mientras las *personales* corresponden a un sujeto. Se define el *objeto institucional* como un emergente del sistema de prácticas institucionales

asociadas a un campo de problemas y dicho sistema de prácticas se concibe como el significado institucional del objeto. En Godino et al. (2007) se clasifican los significados institucionales en *referencial*, *pretendido*, *implementado* y *evaluado*, y los significados personales en *global*, *declarado* y *logrado*. En este trabajo, nos centraremos en dos tipos de significados institucionales que es necesario comparar, según Godino (2013), para evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de estudio:

- Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido y
- Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Para analizar el significado *pretendido* de la probabilidad en el currículo es necesario explicitar el *referencial* del tema. Batanero (2005) y Batanero y Díaz (2007) indican que el significado de probabilidad ha sido polifacético a lo largo de la historia (Batanero et al., 2005) e introducen diferentes significados parciales: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, axiomático, lógico y propensión. La comprensión global de la probabilidad requiere la de sus varios significados que deben ser relacionados entre sí, por lo que puede ser “la razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad”, según el contexto donde se aplique (p. 260).

Por otro lado, Godino (2013) advierte que “el significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio” (p. 119), por lo

que tomaremos como significado de referencia de la probabilidad en la EGB costarricense (estudiantes de 7 a 15 años, aproximadamente) el conjunto de tres enfoques: intuitivo, clásico (o laplaciano) y frecuencial, que son los presentados en el currículo (MEP, 2012).

OBJETOS INTERVINIENTES Y EMERGENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS

Godino et al. (2007) describen diferentes tipos de objetos matemáticos o entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático y que emergen de los sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas:

- Situaciones-problema*: aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas que conlleven actividad matemática. Por ejemplo, la cuantificación de la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio específico.
- Elementos lingüísticos*: Expresiones, notaciones y gráficos empleados para enunciar o resolver problemas y permitir la operacionalización del mismo. En el caso de la probabilidad, pueden aparecer representaciones tabulares y gráficas, lenguaje cotidiano (*suerte*, *posibilidad*) o matemático (*esperanza matemática*, *distribución de probabilidad*) y símbolos algebraicos.
- Conceptos-definición*: Asociados a cada objeto matemático e introducidos mediante definiciones o descripciones. Algunos casos serían los conceptos de *equiprobabilidad*, *espacio muestral* y *evento seguro*.
- Proposiciones*: Enunciados que involucran relaciones o propiedades de los conceptos. Por

ejemplo, que la probabilidad de un suceso es un valor entre 0 y 1.

- Procedimientos*: Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que se pueden aplicar en la resolución de situaciones-problema, como enumerar o contar los casos favorables de un suceso y casos posibles del experimento aleatorio.
- Argumentos*: Usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos. Un tipo sería realizar una simulación de un experimento aleatorio para analizar la convergencia de la probabilidad frecuencial a la clásica.

IDONEIDAD DIDÁCTICA

Como se ha indicado, en este trabajo nos centraremos en la *idoneidad didáctica* (Godino, 2013), herramienta creada para apoyar el diseño y evaluación de programas de estudio y acciones formativas de profesores. Se define como el grado en que un proceso de instrucción es adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino et al., 2006; Godino et al., 2016). Se trata de la articulación coherente y sistémica de las seis componentes de idoneidad: *epistémica* (representatividad del significado institucional), *ecológica* (ajuste a la sociedad y el entorno), *cognitiva* (adecuación a los estudiantes), *afectiva* (aspectos emocionales), *interaccional* (permite identificar y resolver conflictos de significado) y *mediacional* (adecuación de los recursos didácticos) (Godino et al., 2007). Para cada una de estas facetas Godino (2013) propone componentes y criterios de idonei-

dad que se deben entender como reglas de corrección emanadas de la comunidad científica, orientadas a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor" (Godino et al., 2009, p. 60).

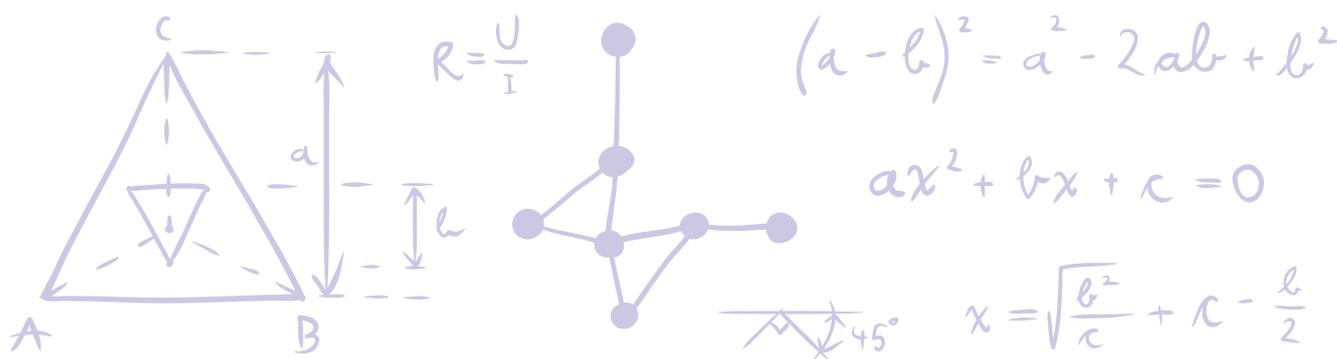
En este trabajo analizamos la idoneidad epistémica, que "refiere al

grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia" (Godino et al., 2007). Es decir, se pretende medir en qué grado el significado de la probabilidad pretendido en MEP (2012) es pertinente desde el punto de vista de la teoría proba-

bilística aceptada en la comunidad matemática (significado de referencia). Para Godino (2013), los componentes de la idoneidad epistémica son los objetos primarios considerados en el EOS y sus relaciones (Tabla 3), para cada uno de los cuales propone una serie de indicadores que incluiremos en nuestro trabajo.

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica según Godino (2013, p. 119).

COMPONENTES	INDICADORES
SITUACIONES-PROBLEMA	<ul style="list-style-type: none"> Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
LENGUAJES	<ul style="list-style-type: none"> Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, etc.) traducciones y conversiones entre las mismas. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
REGLAS (DEFINICIONES, PROPOSICIONES, PROCEDIMIENTOS)	<ul style="list-style-type: none"> Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
ARGUMENTOS	<ul style="list-style-type: none"> Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
RELACIONES	<ul style="list-style-type: none"> Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.



ANTECEDENTES

Nos basamos también en algunos trabajos que han analizado la idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos curriculares. Así, Godino et al. (2012) proponen

una metodología para la evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares. La ejemplifica estudiando los contenidos matemáticos generales de los

Principios y estándares del NCTM (2000), centrándose específicamente en los que refieren al análisis de datos y probabilidad. En la Tabla 4 presentamos los específicamente ligados a la probabilidad:

Tabla 4. Indicadores de idoneidad epistémica en los estándares de NCTM (2000) (contenido de probabilidad).

<i>PROBLEMAS</i>	<ul style="list-style-type: none"> Se plantean problemas – investigaciones (proyectos) con diversas fuentes y tipos de datos teniendo en cuenta los elementos básicos de la probabilidad.
<i>LENGUAJES</i>	<ul style="list-style-type: none"> Se utilizan diferentes representaciones de uso convencional en probabilidad, tales como números, símbolos, coordenadas cartesianas, palabras, frecuencias absolutas, frecuencias relativas, Tablas, histogramas y diagramas (de barra, lineal, de sectores, de caja y de puntos). Los gráficos incluyen los títulos y etiquetas que permiten identificar claramente los datos representados. Se incluyen situaciones en las que se requiere discriminar entre el uso más adecuado de una u otra representación.
<i>REGLAS (CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS, PROPOSICIONES)</i>	<ul style="list-style-type: none"> Se describen y evalúan las posibilidades de ocurrencia de un suceso como posible, imposible, probable o seguro, a partir de experiencias cercanas y de la observación de regularidades en experimentos aleatorios simples. Se introduce la regla de Laplace como un modelo que permite predecir el valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento simple, sin realizar el experimento aleatorio.

Nota. Adaptación de la Tabla mostrada en Godino et al. (2012, p. 349).

Beltrán Pellicer et al. (2018) presentan una guía de valoración de la idoneidad didáctica de la probabilidad en la educación secundaria obligatoria (estudian-

tes de 12-16 años) para dotar al docente de un instrumento que promueva la reflexión en torno a experiencias de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad.

Específicamente, para nuestro estudio utilizaremos la Tabla 5, donde se sintetizan los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por dichos autores.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica específicos para los procesos de estudio de la probabilidad.

COMPONENTES	INDICADORES
SITUACIONES-PROBLEMA	<ul style="list-style-type: none"> Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Se propone una muestra representativa de contextos para ejercitar y aplicar los contenidos. Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios.

COMPONENTES	INDICADORES
LENGUAJES	<ul style="list-style-type: none"> • Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias. • Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado. • Se emplean términos precisos. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
REGLAS	<ul style="list-style-type: none"> • Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. • Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario, así como las propiedades de las frecuencias relativas. • Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. • Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de Tablas y diagramas de árbol. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
ARGUMENTOS	<ul style="list-style-type: none"> • Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo. • Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
RELACIONES	<ul style="list-style-type: none"> • Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad.
Nota. Resumen de Beltrán Pellicer et al. (2018, p. 536).	

Los indicadores que aparecen en las Tablas 4 y 5 asocian cada uno de los componentes de la idoneidad epistémica a los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica), considerando el significado clásico como un punto de inicio para cuantificar las experiencias aleatorias que se presentan de manera informal o subjetiva. Posterior a este significado se introduce el frecuencial para articular otros componentes que surgen de los contenidos estadísticos.

METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo con un alcance

descriptivo (Hernández et al., 2014), basado en el análisis de contenido (Andréu, 2011). Dicha técnica se empleará para extraer y sistematizar las normas relacionadas con la faceta epistémica contenidas en MEP (2012), que se resumirán para deducir de ellas indicadores de idoneidad epistémica, siguiendo el método expuesto en Godino et al. (2012).

En una primera fase, el texto es dividido en unidades de análisis, las cuales se clasifican según las facetas y componentes que propone la *Teoría de la idoneidad didáctica*, seleccionando las que se refieren al tipo epistémico. En una segunda etapa, dichas unidades son comparadas entre sí y reducidas

con el fin de evitar reiteraciones. Posteriormente, se infieren indicadores de idoneidad epistémica, específicos de la probabilidad.

Finalmente, se redactan las normas reducidas identificadas en el currículo de matemática de Costa Rica (MEP, 2012), redactándolas en forma de indicadores y presentando una Tabla resumen, que es comparada con los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por Godino (2013), Godino et al. (2012) y Beltrán Pellicer et al. (2018). La finalidad de la metodología descrita es la elaboración de una síntesis de indicadores de idoneidad de los contenidos de probabilidad del currículo costarricense que sirva de guía para el diseño y

evaluación de la instrucción en el tema y en la formación de profesores. Al mismo tiempo se identifican limitaciones y complementariedades entre los instrumentos.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección se resumen las normas generales y específicas asociadas a contenidos probabilísticos establecidas en MEP (2012). El marco del EOS las considera como epistémicas, esto es, referidas a características de los objetos matemáticos desde el punto de vista institucional. Igualmente, se describen las explicaciones y justificaciones de las mismas. Dichas normas se clasifican según las componentes de la idoneidad epistémica propuesta por Godino (2013), es decir, según se refieren a los diferentes tipos de objetos matemáticos descritos en el marco teórico o sus relaciones (para no ser reiterativos, se entiende que todas las normas se leen comenzando con "se deben").

NORMAS EPISTÉMICAS SOBRE LAS SITUACIONES-PROBLEMA

Puesto que la estrategia metodológica subyacente en MEP (2012) es la resolución de problemas, existen normas generales al respecto, que orientan la enseñanza de los diferentes tópicos matemáticos, incluida la probabilidad. Se han identificado en MEP (2012) las siguientes:

- "Identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las matemáticas" (p. 24).
- "Determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema,

para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente" (p. 24).

Asociadas a las anteriores normas, se han podido encontrar las siguientes explicaciones y justificaciones:

Se asume que usar este tipo de problemas es una generosa fuente para la construcción de aprendizajes en las matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteamiento y resolución de problemas conlleva la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (p. 13).

La resolución de problemas, sean del entorno o abstractos, está asociada sustancialmente a la naturaleza de las matemáticas. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas define la actividad de los profesionales matemáticos en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación (p. 28).

NORMAS ESPECÍFICAS DE PROBABILIDAD

También se han identificado en MEP (2012) las siguientes directrices sobre el papel de las situaciones-problema en el estudio de la probabilidad; algunas muestran una posición normativa, otras aportan razones por las cuales se requieren estas actividades:

- "Dirigir la acción estudiantil hacia el planteo de problemas vinculados con el cálculo de probabilidades" (p. 361).
- "Formular situaciones u orga-

nizar juegos en los cuales se puedan establecer diferencias claras entre situaciones aleatorias o inciertas y situaciones seguras" (p. 146).

- "Motivar el planteamiento de situaciones genéricas como la lotería nacional, los juegos de dados, el Tico-Bingo, entre otros" (p. 361).
- "Formular situaciones de aprendizaje (juegos o situaciones de la cotidianidad) que permitan identificar el número de resultados a favor de un evento determinado y tomar decisiones con base en ese conocimiento" (p. 257).
- "No es recomendable limitarse únicamente a los juegos de azar, se requiere adecuar situaciones al contexto estudiantil para favorecer una mayor comprensión de la incertidumbre en la vida cotidiana" (p. 369).
- "Aprovechar las situaciones para precisar el concepto de probabilidad de un evento como la proporción de casos a favor del evento; o sea, la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales" (p. 360).
- "Proponer problemas del contexto donde el análisis de probabilidades permita la toma de decisiones" (p. 361).
- "Generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito" (p. 365).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre el papel de la resolución de problemas en el estudio de la probabilidad:

- Construir los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al contexto estudiantil.

til, en diversas circunstancias que involucren los diferentes significados de la probabilidad.

- Resolver problemas que susciten la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre.
- Generar problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios.
- Evaluar y controlar las estrategias de resolución de problemas probabilísticos.

De estas normas se infieren los indicadores de idoneidad asociados a la resolución de problemas que se incluyen en la Tabla 6.

Asociadas a ellas, en MEP (2012) se han podido encontrar explicaciones o justificaciones como “En todo momento, lo que es apenas natural en esta área, las temáticas se presentan a través de problemas reales” (p. 55) o también:

Se desea subrayar en esta visión la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes. (p. 28)

NORMAS EPISTÉMICAS SOBRE LOS ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS/REPRESENTACIONES

A partir de los procesos matemáticos “representar” y “comunicar” se plantean en MEP (2012) normas generales que orientan el uso del lenguaje matemático en las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo:

- “Fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares)” (p. 26).
- “Identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas” (p. 25).
- “Elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas” (p. 26).
- “Expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa” (p. 25).
- “Traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada” (p. 26).

Asociadas a estas normas generales, se establecen en la malla curricular indicaciones puntuales por contenido probabilístico como las que se presentan en la Figura 1:

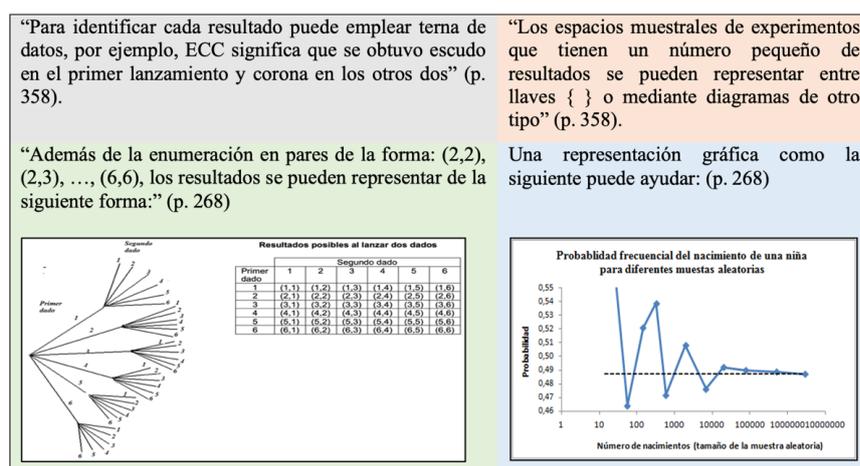


Figura 1. Indicaciones puntuales asociadas al componente Lingüístico/Representaciones.

Fuente: MEP (2012).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a conocimientos probabilísticos en los MEP (2012).

NORMAS ESPECÍFICAS DE PROBABILIDAD

- “Iniciar el análisis de los términos *probable*, *imposible* y *seguro*” (p. 154).
- “Incluir diagramas, esquemas, cuadros y gráficos con información que puede ser interpretada dentro del contexto” (p. 161).
- “Enfatizar el papel que juegan las representaciones tabulares y gráficas dentro de los análisis estadísticos y probabilísticos” (p. 370).
- “Considerar la presentación de información por medio de cuadros, diagramas y gráficos como una estrategia de gran importancia para comunicar resultados de los análisis efectuados” (p. 370).

- “Estas representaciones contengan suficientes elementos: título general, títulos secundarios, entre otros; de modo que un lector pueda comprender el mensaje que comunican sin necesidad de recurrir a más información” (p. 370).
- “Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas)” (p. 370).
- “Emplear programas de computadora, por ejemplo, hojas de cálculo, editores de texto, programas graficadores u otras herramientas que pueden ayudar a mejorar la calidad de la representación y reducir el tiempo en su construcción” (p. 370).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre el uso del lenguaje en probabilidad, a partir de las cuales se infieren los correspondientes indicadores de idoneidad presentados en la Tabla 6.

- Emplear distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, Tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis.
- Precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico (*experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, puntos muestrales, evento seguro, evento imposible*, etc.) partiendo del vocabulario que emplea el estudiantado en situaciones cotidianas.
- Traducir de una representación a otra, reconociendo ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar.

- Utilizar diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones (MEP, 2012):

Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida (...) La representación y manipulación de objetos matemáticos no deben verse como un fin en sí mismo, debe entenderse que estas representaciones y sus leyes expresan a la vez acciones mentales y características de los objetos matemáticos (...) Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. (pp. 37, 55, 58)

NORMAS EPISTÉMICAS SOBRE LAS REGLAS (CONCEPTOS, PROPIEDADES, PROCEDIMIENTOS)

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a conceptos, propiedades y procedimientos probabilísticos en MEP (2012):

- “Diferenciar entre una situación aleatoria y una determinista o segura” (p. 146).
- “Identificar eventos seguros o aleatorios, y dentro de las situaciones aleatorias aquellas que son más o menos probables de acuerdo con nociones intuitivas” (p. 169).
- “Identificar situaciones más probables o menos probables dentro del contexto estudiantil” (p. 155).
- “Inducir que es igualmente probable obtener un escudo (E) o una corona (C) al lanzar una moneda y por ende que los eventos obtener un escudo y una corona (EC) y obtener una corona y un escudo (CE) al lanzar dos monedas son igualmente probables” (p. 167).
- “Generalizar la idea de que una situación es más probable que otra si tiene más posibilidad de ocurrir, o sea ocurre con mayor regularidad” (p. 154).
- “Intuir hechos que tienen una mayor probabilidad de ocurrencia y de este modo favorecer sus decisiones” (p. 146).
- “Definir el concepto de probabilidad como la proporción de casos favorables de un evento entre el total de casos. Aquí debe quedar claro que esta definición es válida siempre que todos los resultados sean igualmente probables” (p. 261).
- “A partir de la definición laplaciana o clásica de probabilidad, y de los conceptos de evento probable, imposible y seguro, es conveniente que la acción estudiantil esté dirigida hacia la deducción de algunas de las propiedades básicas que cumplen las probabilidades” (p. 361).
- “Generar la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo, en el sentido que entre más grande sea la

muestra con la que se trabaja, más se aproxima la probabilidad frecuencial de un evento a su valor real" (p. 368).

Las normas anteriores, como también otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes normas asociadas a elementos regulativos, de las que se infieren los indicadores de idoneidad correspondientes presentados en la Tabla 6:

- Diferenciar entre fenómenos deterministas, aleatorios y entre sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones.
- Estimar y calcular probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuencial) propuesto según nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado.
- Deducir las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico.
- Emplear la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.

Igualmente se encuentran justificaciones para dichas normas:

El concepto clásico de probabilidad se ha venido construyendo paulatinamente en función de la identificación de los puntos muestrales que están a favor de un evento dentro del espacio muestral. No obstante, ante lo limitado de la definición clásica o laplaciana se requiere introducir el análisis probabilístico con base en la

definición frecuentista, por la cual se aproximan las probabilidades mediante una frecuencia relativa determinada a través de una muestra aleatoria. Este enfoque genera una aproximación a las probabilidades, aprovechando la noción intuitiva de la ley de los grandes números para identificar la evolución que esas probabilidades van experimentando a medida que se incrementa el tamaño de la muestra. (p. 379)

NORMAS EPISTÉMICAS SOBRE LOS ARGUMENTOS

A partir de los procesos matemáticos "razonar y argumentar" y "comunicar", se plantean en MEP (2012) normas generales que orientan la importancia de la argumentación en las diferentes áreas matemáticas:

- "Plantear una conjetura y buscar los medios para justificarla (en adecuación a cada nivel educativo), ya sea por medio de materiales concretos, diagramas, calculadoras u otros instrumentos" (p. 56).
- "Cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas" (p. 56).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas sobre la argumentación asociadas a conocimientos probabilísticos.

NORMAS ESPECÍFICAS DE PROBABILIDAD

- "Comunicar mediante una adecuada argumentación las respuestas a dichas interrogantes" (p. 148).

- "Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas" (p. 360).
- "Simular otras situaciones que permitan apreciar la ley de los grandes números. Por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo es posible generar números aleatorios que permiten simular fenómenos de distinta naturaleza" (p. 369).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre la argumentación en probabilidad.

- Emplear de manera gradual diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado.
- Plantear conjeturas y justificarlas empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen y debatan los argumentos expuestos.
- Utilizar simulaciones como apoyo en la argumentación relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como:

Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos (...) La justificación y prueba son parte

esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar. Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje. (pp. 24, 37, 56)

NORMAS EPISTÉMICAS SOBRE LAS RELACIONES ENTRE COMPONENTES

A partir del proceso matemático “conectar”, se plantean normas generales que orientan la forma en que deben relacionarse los conceptos o las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo:

- “El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces” (p. 57).
- “Entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad” (p. 25).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a relaciones sobre conocimientos probabilísticos en MEP (2012). Las dos primeras conectan elementos regulativos de otras áreas matemáticas con elementos regulativos probabilísticos, siguen dos que conectan elementos regulativos estadísticos y probabilísticos. Las dos siguientes conectan

situaciones-problema con estos mismos elementos; sigue otra que conecta la argumentación y resolución de problemas.

NORMAS ESPECÍFICAS DE PROBABILIDAD:

- “La probabilidad conecta mucho con *Números* y *Geometría*, y se debe tratar de manera informal en los primeros años para ir avanzando en su abstracción en la Secundaria” (p. 55).
- “Este problema permite conectar los conceptos de Probabilidad con el cálculo de áreas en *Geometría*. Se puede identificar que es más probable la figura que tiene mayor área” (p. 360).
- “Establecer vínculos entre los conceptos estadísticos y los probabilísticos” (p. 163).
- “Aunque los problemas con el análisis de las probabilidades pueden diferir de los problemas eminentemente estadísticos, los principios básicos que los regulen deben ser los mismos” (p. 380).
- “Favorecer los procesos de resolución de problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil” (p. 360).
- “Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas)” (p. 370).
- “Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas” (p. 360).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre relaciones, que se traducen en indicadores (Tabla 6).

- Conectar la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular números y geometría, usando en lo posible la resolución de problemas.
- Plantear problemas que relacionen la estadística y la probabilidad y ayuden a desarrollar elementos regulativos de probabilidad.
- Emplear diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad.
- Utilizar la argumentación para respaldar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

En relación con las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como las siguientes:

Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas (...) Observar la aplicabilidad e interconectividad de las Matemáticas refuerza su aprecio y disfrute (...) Las Matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar los procesos transdisciplinarios que desde los primeros años escolares se deben cultivar. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces (...) Las conexiones con el entorno y otras materias son fáciles de realizar en Estadística y Probabilidad en todo momento. (pp. 24, 57, 59)

SÍNTESIS DE INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA

En la Tabla 6 aparecen los indicadores de idoneidad epistémica específicos del tema de probabilidad inferidos de la sistematización de las normas extraídas de MEP (2012). Su comparación con las Tablas 3, 4 y 5 nos lleva a obtener las siguientes conclusiones:

Los indicadores obtenidos sobre la componente de situaciones-problema abarcan los propuestos en Godino (2013) y los específicos de probabilidad planteados en el NCTM (2000) (Godino et al., 2012), puesto que los problemas tienen en cuenta los elementos básicos de la probabilidad y además son planteados empleando diversos contextos. Respecto a los deri-

vados por Beltrán Pellicer et al. (2018), no se cita en el currículo el significado subjetivo de la probabilidad, pero implícitamente se contempla un primer acercamiento al insistirse en la toma de decisiones. Se añade, en nuestro caso, el control y evaluación de las estrategias de resolución de problemas probabilísticos, relegado por los autores anteriores.

Tabla 6. Indicadores de idoneidad epistémica específicos de Probabilidad inferidos de los Programas de estudio de Matemática MEP (2012).

COMPONENTES	INDICADORES
SITUACIONES-PROBLEMA	<ul style="list-style-type: none"> • Se construyen los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al estudiantado, en diversos contextos que involucren los diferentes significados de la probabilidad. • Se resuelven problemas que suscitan la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre. • Se busca que el estudiantado genere problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios. • Se busca que el estudiantado evalúe y controle las estrategias de resolución empleadas en problemas probabilísticos.
LENGUAJES	<ul style="list-style-type: none"> • Se emplean distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, Tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis. • Se precisa, de manera paulatina, el lenguaje probabilístico (experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, puntos muestrales, evento seguro, evento imposible, etc.) partiendo del vocabulario que emplea el estudiantado en situaciones cotidianas. • Se busca que el estudiantado pase de una representación a otra, reconociendo las ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar. • Se utilizan diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.
REGLAS (DEFINICIONES, PROPOSICIONES, PROCEDIMIENTOS)	<ul style="list-style-type: none"> • Se diferencian los fenómenos deterministas de los fenómenos aleatorios y los sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones. • Se estiman y calculan probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuentista) propuesto según el nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado. • Se deducen las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico. • Se emplea la ley de los grandes números desde el punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.

COMPONENTES	INDICADORES
<p>ARGUMENTOS</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se emplean, de manera gradual, diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado. • Se plantean conjeturas y se justifican empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen los argumentos expuestos. • Se utilizan simulaciones como apoyo en la argumentación, relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.
<p>RELACIONES</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se conecta la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular números y geometría, usando en lo posible la resolución de problemas. • Se plantean problemas que relacionan la estadística y la probabilidad y ayudan a desarrollar elementos regulativos de probabilidad. • Se emplean diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad. • Se utiliza la argumentación para justificar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

Respecto al lenguaje probabilístico, los indicadores inferidos en nuestro trabajo incluyen los contemplados por Godino (2013), excepto el nivel adecuado del lenguaje para los niños a los que va dirigida la enseñanza; sin embargo, este indicador está implícito cuando se señala que se debe precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico, partiendo de vocabulario cotidiano o cercano al estudiante para posteriormente crear conexiones con los términos formales. La traducción entre diferentes representaciones supone las situaciones de expresión e interpretación matemática. Además, en nuestro caso, se añade el uso de medios digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas. Los comentarios anteriores implican que se incluyen los indicadores deducidos del NCTM (2000) por Godino et al. (2012) y los sugeridos por Beltrán Pellicer et al. (2018).

Respecto a las reglas, los indicadores de Godino (2013) están contemplados, en cuanto que los alumnos han de emplear, deducir y aplicar definiciones y propiedades de la

probabilidad. Todas las reglas citadas por Godino et al. (2012) y por Beltrán Pellicer et al. (2018) se incluyen en los indicadores del currículo costarricense, aunque expresados de forma diferente. El uso de Tablas y diagramas de árbol se sitúa dentro de los indicadores referidos al lenguaje, ya que en los MEP (2012) se consideran herramientas de representación de objetos matemáticos para la comunicación y resolución de problemas, más que contenidos en sí mismos.

Igualmente, nuestro conjunto de indicadores compila los relacionados con la argumentación obtenidos por Beltrán Pellicer et al. (2018) y, al igual que en ese caso, se añade la simulación como un tipo particular de argumentación apropiado para el trabajo con la probabilidad. Además, en nuestro caso, se agrega el uso de diversos recursos y representaciones que apoyen los argumentos presentados. En Godino et al. (2012) no se incluye este componente y en Godino (2013) no se cita la argumentación.

Finalmente, los indicadores asociados con las relaciones contemplan

los de Godino (2013) y Beltrán Pellicer et al. (2018); no obstante, en Godino et al. (2012) son ausentes. En nuestro caso, el conjunto de indicadores en este componente es más rico, puesto que se divide en cuatro diferenciados, que tienen en cuenta la resolución de problemas conectada con elementos regulativos (en áreas probabilísticas y otras), con la argumentación y con el uso de representaciones.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se analizó el documento curricular MEP (2012) que regula la enseñanza de la matemática en educación general básica en Costa Rica, para inferir indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad, siguiendo el método sugerido en Godino et al. (2012). Consideramos que este análisis es un primer acercamiento a la valoración de la calidad de dichas orientaciones curriculares.

El conjunto de indicadores obtenidos y la comparación con

diferentes modelos propuestos previamente sugiere que estos documentos incluyen normas de las cuales se deducen todos los indicadores propuestos por Beltrán Pellicer et al. (2018), Godino (2003) y Godino et al. (2012), generalmente con algo más de especificación y centrando las situaciones-problema como el componente modular que integra y cataliza a los demás (lenguaje, reglas y argumentos), lo cual concuerda con lo que plantea el enfoque curricular de MEP(2012). Asimismo, se evidencia a nivel general que se promueven las ventajas de la probabilidad en diversas áreas, no solo matemáticas. En consecuencia, se deduce una alta idoneidad epistémica de los MEP (2012) para la enseñanza de la probabilidad en la EGB; es decir, existe un adecuado acoplamiento de los significados institucionales pretendido y referencial de la probabilidad, respaldado por la investigación didáctica previa.

Finalmente, resaltamos la relevancia que la *Teoría de idoneidad didáctica* ha tenido como instrumento de valoración de las orientaciones curriculares de Costa Rica, explicitando de modo objetivo indicadores de la forma en que se contemplan en dicho currículo los diversos tipos de objetos matemáticos propuestos en el EOS y sus relaciones.

Por supuesto, reconocemos que puede haber una diferencia entre lo propuesto en el programa y lo implementado en el salón de clase, de modo que la idoneidad epistémica final de la enseñanza en cada curso y situación dependerá de cómo se traduzca el currículo a la acción de aula. No hay que olvidar, además, el resto de componentes de la idoneidad didáctica, cuyo análisis quedaría pendiente para nuevos traba-

jos y dependería del contexto que rodea la acción didáctica.

No obstante, consideramos que este proyecto presenta una síntesis que puede guiar al docente en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la probabilidad, en el marco de las orientaciones curriculares costarricenses; y constituye un puente entre estas y su práctica docente (Godino et al., 2012). También, valoramos que puede servir de insumo para la formación inicial docente y como material para procesos de capacitación en conocimiento didáctico-matemático.

RECONOCIMIENTOS

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil. *Épsilon*, 95, 25-48.
- Andréu, J. (2011). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Fundación Centro de Estudios Andaluces.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2013). *The Australian curriculum: Mathematics*. ACARA
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. In K. Franbois (Ed.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127).

- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). *The nature of chance and probability*. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32(61), 526-548. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11>.
- Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491-1516.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63)..
- Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of

- didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2016). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663>.
- Godino, J., Rivas, H., y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, 7(2), 331-354. <https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0002>.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la Investigación. 6ta Edición. Mc Graw Hill.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. MECD.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The Council.
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae*, 21(3), 131-154. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215>