Artículo por invitación

UNA MIRADA A LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

A LOOK INTO THE SOCIO-EPISTEMOLOGY FROM THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

Juan Díaz Godino
Universidad de Granada, España
jdgodino@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

1

RESUMEN

La articulación de marcos teóricos es un tema de creciente interés en educación matemática, puesto que, aunque la diversidad de teorías permita enriquecer los fundamentos de la investigación, al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico y tecnológico. En este trabajo se analiza el marco teórico de la socioepistemología en matemática educativa desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. La comparación y posible articulación de ambas teorías se aborda mediante el análisis de dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco de la socioepistemología: “Tratamiento de la contradicción en matemáticas por estudiantes universitarios, cuando son enfrentados a la existencia del logaritmo de los números negativos” y “El estudio de aspectos culturales, históricos, institucionales y cognitivos relacionados con la periodicidad”. Como resultado del análisis se identifican semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos, así como sus relaciones con la teoría de situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico. Asimismo, se muestra en qué sentido las ontologías matemática y didáctica que se proponen dentro del enfoque ontosemiótico pueden contribuir al progreso y articulación coherente de dichas teorías.

Se analizará el marco teórico de la socioepistemología en matemática educativa desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y el saber matemáticos. Como resultado se identifican semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos, así como sus paralelismos con la didáctica y antropológica de lo didáctico.

Palabras clave: articulación de teorías, enfoque ontosemiótico, socioepistemología.

ABSTRACT

The articulation of theoretical frameworks is a topic of growing interest in mathematics education; however, although the diversity of theories allows enriching the foundations of research, at the same time it can constitute a hindrance to its consolidation as a scientific and technological field. This paper analyzes the theoretical framework of socioepistemology in educational mathematics from the point of view of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The comparison and possible articulation of both theories is approached through the analysis of two examples of research carried out within the socioepistemology framework: "Treatment of contradiction in mathematics by university students, when they are confronted with the existence of the logarithm of negative numbers" and "The study of cultural, historical, institutional and cognitive aspects related to periodicity". As a result of the analysis, similarities, differences and complementarities of these theoretical models are identified, as well as their relationships with the theory of didactic situations and the anthropological theory of didactics. Likewise, it is shown in what sense the mathematical and didactic ontologies proposed within the ontosemiotic approach can contribute to the progress and coherent articulation of these theories.

Keywords: networking theories; onto-semiotic approach; socio-epistemology.

INTRODUCCIÓN

El carácter relativamente reciente de la didáctica de la matemática como área de conocimiento explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Font, 2002; Gascón, 1998; Sierpinska y Lerman, 1996; Sriraman y English, 2010), cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización de los diferentes programas de investigación, han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando para fundamentar la investigación en educación matemática. Asimismo, la articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Prediger *et al.*, 2008), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática es hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico.

En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) se abordó la comparación de distintos modelos teóricos desarrollados en Francia en el ámbito de la didáctica de la matemática, clarificando el uso de nociones cognitivas y epistémicas en la teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 2002), campos conceptuales (Vergnaud, 1990) y la antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999). También se hizo referencia a la dialéctica instrumento-objeto (Douady, 1986), a los registros de representación semiótica (Duval, 1995) y a la noción de concepción presentada en Artigue (1990). Esta contrastación de modelos teóricos se realizó desde el punto de vista que proporciona el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino *et al.*, 2007; Godino, 2022). Otras publicaciones sobre articulación de teorías en educación matemática con el EOS están disponibles en el repositorio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es.

En este trabajo abordamos desde ese mismo enfoque un análisis similar de la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME), desarrollada por Cantoral y Farfán (1998; 2003; 2004), Cantoral *et al.* (2014), Cordero (2001) y otros investigadores, que ha sido ampliamente usada, principalmente en el ámbito de la comunidad de investigadores de Latinoamérica. Profundizamos, para el caso de la socioepistemología, en el análisis comparativo de teorías socioculturales realizado en Godino (2019), donde también se relaciona el EOS con la etnomatemática y la TAD.

Comenzamos sintetizando las principales nociones introducidas en el EOS, que usaremos como referencia para interpretar y comparar el marco de la socioepistemología en matemática educativa. Seguidamente, incluimos una síntesis de las características de la TSME y de los principios que la definen, así como una descripción resumida de dos investigaciones realizadas en dicho marco. Incluimos también una interpretación de los estudios descritos y de los principios teóricos de la TSME desde el punto de vista del EOS. Subsecuentemente analizamos algunas concordancias y complementariedades entre estos enfoques teóricos y sus conexiones con la TSD y la TAD. Concluimos el trabajo con algunas ideas sobre la necesidad y posibilidad de consolidar un enfoque unificado sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de las matemáticas que tenga en cuenta las dimensiones epistemológica (incluidos los aspectos socioculturales), cognitiva e instruccional.

MARCO TEÓRICO

Síntesis del enfoque ontosemiótico

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar los cimientos de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas (Wittgenstein, 1953), pragmatistas y semióticas (Peirce, 1958) para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la educación matemática, tales como qué es un objeto matemático; cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, etc.) en un contexto o marco institucional determinado; y qué significa el objeto 0 para un sujeto en un momento y circunstancias dadas. En trabajos posteriores[1] (Godino, 2002; Godino *et al.*, 2007; Font *et al.*, 2013) se abordó el problema de la significación y representación mediante el desarrollo de una ontología matemática explícita sobre supuestos iniciales de tipo antropológico, que da cuenta del origen humano de la actividad matemática y de la relatividad socioepistémica de los significados. Este giro antropológico y pragmatista sobre el conocimiento matemático se dio sin perder las ventajas de la *metáfora objetual*, esto es, asumiendo también planteamientos referenciales sobre el significado (Ullmann, 1962; Godino *et al.*, 2021).

1 Remitimos al lector al trabajo de Godino *et al.* (2020) para una síntesis más completa del EOS. Las publicaciones donde se desarrolla y aplica el EOS están disponibles en el repositorio web, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

PädiUAQ | vol. 6 núm. 11 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Desde sus comienzos, la motivación del EOS ha sido la necesidad de clarificar y articular nociones de otros marcos teóricos, inicialmente las usadas en el seno de la didáctica francesa, con el objetivo de compatibilizar las concepciones epistemológicas y cognitivas. Para tal fin se introdujo la idea de *práctica matemática* en los siguientes términos: "...es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). En esta definición se asume que las prácticas (operativas y discursivas) pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. A su vez, una institución está constituida por los individuos involucrados en una misma clase de situaciones problemáticas. Ello conlleva la realización de unas *prácticas sociales* que suelen tener rasgos particulares y son generalmente condicionadas por las reglas, modos de funcionamiento e instrumentos disponibles en la institución. La noción de práctica matemática está en la base, tanto del modelo epistemológico como del cognitivo; en su versión epistémica, es una acción intencional: tiene una finalidad compartida en el seno de una comunidad y, por tanto, está normada mediante convenciones, hábitos o reglas. Pero el objeto matemático (conceptos y proposiciones, procedimientos, argumentos) permanece en la escena, ya que en la praxis intervienen objetos y estos, a su vez, emergen de una reciprocidad dialéctica constituyente (Font *et al.*, 2013).

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes dependen de los contextos de uso, de las instituciones en que tienen lugar las actividades y de los sujetos implicados en las mismas (es decir, se aplica la metáfora de los juegos de lenguaje y formas de vida de Wittgenstein, 1953). El aprendizaje de un objeto por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales del primero por parte del segundo; y se produce mediante la negociación, el diálogo y el acoplamiento progresivo de significados. En el EOS, el significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica (relaciones entre una expresión y un contenido) y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo o intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, notación, concepto, etc.). El sentido se interpreta como un significado parcial, es decir, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

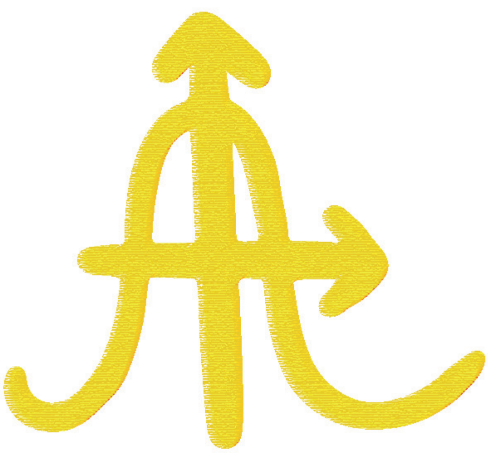
En trabajos más recientes, el modelo ontosemiótico del conocimiento matemático se ha ampliado con otros supuestos y herramientas teóricas; en particular, la noción de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006), la cual permite abordar cuestiones de tipo instruccional; por ejemplo, qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos formativos que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos.

La dimensión normativa (Godino *et al.*, 2009) e idoneidad didáctica (Godino, 2013) permiten abordar nuevas preguntas y posibilitan la reflexión metadidáctica:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?
- ¿En qué medida se puede valorar como idóneo un proceso educativo-instruccional en unas circunstancias dadas y qué cambios se podrían introducir para mejorar dicha idoneidad?

Desde el punto de vista metodológico, el EOS tiene en cuenta las cuatro fases propias de las investigaciones orientadas al diseño educativo: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. Cada una de ellas tiene en cuenta las siguientes dimensiones:

- *Epistémica y ecológica*. Se determinan los significados académicos puestos en juego en cada una de las fases del proceso; son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso instruccional.
- *Cognitiva y afectiva*. Se describen los significados personales en los distintos momentos del proceso en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos de los estudiantes. Además, se analiza la sensibilidad del desarrollo a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al paso de estudio seguido.
- *Interaccional y mediacional*. Se analizan los patrones de interacción y su secuencia orientada a la fijación y negociación de significados entre el profesor y los estudiantes. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.



En el sistema teórico del EOS también se ha desarrollado la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013) para el análisis y valoración de los procesos educativos-instruccionales desde el punto de vista de la optimización de los mismos, dado que el fin último de la investigación didáctica debe ser, además de comprender dichos procesos, la mejora de los aprendizajes.

Teoría socioepistemológica de la matemática educativa

La TSME "se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional" (Cantoral *et al.*, p. 93). El origen de este marco teórico está en los trabajos de Cantoral, Farfán y otros expertos del grupo de investigación de la sección de educación superior del departamento de matemática educativa del CINVESTAV (IPN, México), quienes de manera especial han centrado sus trabajos en el área del análisis matemático.

Se considera como una necesidad básica para la investigación en matemática educativa el adoptar una "aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 1998, p. 355). La TSME plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo social, histórica y culturalmente situado, y lo problematiza a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. Además, se interesa por la discusión y planteamiento de propuestas de enseñanza, colocando la prioridad sobre el qué enseñar (la naturaleza de las propias matemáticas) "y no sólo, como ha sido habitual en las investigaciones educativas, sobre el cómo enseñar" (Cantoral *et al.*, 1998, p. 367). Se asume que, para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas, es preciso acudir a un examen minucioso del saber (sea popular, técnico o culto), a su problematización, concordando, por tanto, con las aproximaciones epistemológicas a la didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998):

> De este modo, la Socioepistemología se caracteriza por ser una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional que toma en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que

> nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. (Cantoral *et al.*, 2014, p. 98)

En la TSME, se propone no sólo una visión nueva y ampliada de la epistemología que resalta la relatividad socioepistémica de los significados de los objetos matemáticos, sino además una manera sistémica de afrontar el estudio de las interacciones entre esta visión de las matemáticas con sus dimensiones cognitiva e instruccional.

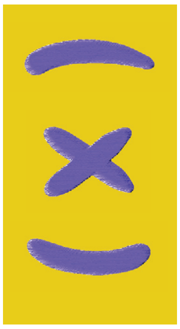
Principios de la TSME

La noción central de este marco teórico es la de *práctica social*; además, se asumen cuatro principios:

1. *Principio normativo de la práctica social*. Son las generadoras, la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento; "La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la práctica ejecutada), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la orientación de la práctica)" (Cantoral *et al.*, 2014, p. 100). Como ejemplo de tales prácticas sociales se cita la de predicción: la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad.

2. *Principio de la racionalidad contextualizada*. La racionalidad con la que se actúa depende del contexto del individuo. El escenario sociocultural en el que se conduce el sujeto influye en las conductas, pero también en la manera de obrar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita.

3. *Principio del relativismo epistemológico*. Como contraposición al absolutismo epistemológico, que opta por la asunción de universales o verdades únicas, la TSEM concibe que el saber es, de hecho, una multitud de verdades relativas:



> Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo (contextual), y particularmente la Socioepistemología, acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean "erradas" existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado, para de allí, desarrollar el pensamiento matemático y construir conocimiento. (o. c., p. 102)

4. *Principio de resignificación progresiva (o apropiación situada)*. Se asume que el conocimiento matemático adopta diversos significados según la historia, los contextos y las intenciones con las que se usa. Con la resignificación se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.

Con relación a la noción de significado de los objetos matemáticos se acoge una posición pragmatista, como se puede ver en la siguiente cita:

> Por tanto, podemos asegurar que la Socioepistemología estudia la vida de los objetos matemáticos al seno de la vida social y, en consecuencia, el significado dejará de ser visto como un atributo del objeto, y empezará a considerarse como un derivado de su valor de uso. El significado deviene de este modo del uso situado que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales. (Cantoral *et al.*, 2015, p. 16)

En síntesis, una vez que se usa un conocimiento —es decir, se consolida como un saber— su validez será relativa a un entorno, ya que de él emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva).

En la TSME se ha introducido la noción de *discurso Matemático Escolar* (dME) para designar una manera tradicional de entender la matemática escolar como un sistema de razón estructurado lógicamente o como un lenguaje formal y estructuralista. El dME supone que los estudiantes entienden ideas complejas sólo con mostrarles su definición formal en términos de conceptos precedentes, y que comprenden un resultado al presentarles su demostración y, que el conocimiento resultante les permitirá aplicar las matemáticas a muy diversas situaciones de sus vidas en un futuro. Un objetivo central de las investigaciones basadas en la TSME es proponer cambios en esta visión tradicional del dME hacia la perspectiva de *construcción social del conocimiento*:

> En nuestra opinión, el Rediseño del discurso Matemático Escolar es el reto mayor del cambio educativo, ¿cómo organizar el conocimiento escolar con base en la realidad de quien aprende sin abandonar al contenido de las Matemáticas?, ¿cómo esta organización puede ser parte de la profesionalización docente?, y ¿qué papel juega la vida cotidiana en estos procesos? Estas preguntas fueron configurando al programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa. (Cantoral *et al.*, 2015, p. 7)

> Se concede una importancia esencial a las *situaciones-problemas*, las cuales son consideradas como la "razón de ser" de los objetos matemáticos. Por ejemplo, en el caso del *pensamiento variacional* (o funcional), la situación-problema es la de predicción de una cantidad de magnitud en función de otra. La solución de esta clase de problemas moviliza un sistema de prácticas en distintos tipos de lenguajes (gráfico, algebraico, numérico, etc.). Por otra parte, "El objeto matemático binomio de Newton se presenta como entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una situación que precisa de la predicción" (Cantoral *et al.*, 1998, p. 362)

EJEMPLOS DE DOS INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL MARCO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

En esta sección describimos brevemente dos ejemplos de aplicación para mostrar el sentido y uso que se hace en la Socioepistemología de los supuestos y nociones teóricas mencionadas. Se trata del trabajo de Cantoral y Farfán (2004) sobre la sensibilidad a la contradicción de estudiantes universitarios ante la definición del logaritmo de los números negativos y el estudio de Buendía y Cordero (2005) acerca de la noción de periodicidad de funciones.

Estudio sobre los logaritmos de los números negativos

El problema didáctico

En este artículo, Cantoral y Farfán (2004) describen una investigación relativa al tratamiento de la contradicción en matemáticas por parte de estudiantes universitarios cuando son enfrentados a las cuestiones: ¿Qué responderías a un alumno que pregunta a qué será igual el logaritmo de un número negativo? ¿El logaritmo sólo se define para números positivos?

El trabajo experimental está basado en un estudio teórico previo de tipo histórico en que examina los debates entre Leibniz y Bernoulli a propósito de la definición del logaritmo de los números negativos. A comienzos del siglo XVIII los logaritmos de los números positivos estaban definidos de manera satisfactoria y las reglas de las operaciones con logaritmos habían sido bien formuladas. Sin embargo, sobre los números negativos había aún una concepción incompleta. Leibniz refuta la existencia del logaritmo de los números negativos con el argumento: "Si log(–1) existiera sería igual a la mitad de log (√-1), conclusión que para mí se presenta como absurda". Para dar una respuesta a la tesis de Leibniz, Bernoulli propuso una ampliación de los números negativos basada en razones de simetría: "como $dx/x = -dx/(-x)$, mediante integración se obtiene que $log\ (x) = log\ (-x)$", argumento que implica que la definición de los logaritmos de los números negativos prescinde de los números complejos.

El debate entre Euler y Bernoulli puso en evidencia una serie de contradicciones que condujeron a replantear y extender la idea de función, aceptando las funciones multiformes. Mientras que Euler se orienta a la creación de nuevas herramientas teóricas, Bernoulli defiende la necesidad de conservar el cuerpo teórico clásico, según el cual los números reales son el soporte de cualquier extensión teórica. "Comienza de este modo la construcción social de la variable compleja. Fueron necesarios casi trescientos años para que los complejos fueran finalmente aceptados (primero como números, después como variables)" (Cantoral *et al.*, 2004, p. 141).

Bernoulli sostuvo correspondencia tanto con Leibniz como Euler sobre el tema de los logaritmos de los números negativos. La exploración de sus intercambios permite mostrar que los conceptos y procedimientos relativos a las definiciones matemáticas son el resultado de un largo proceso de interacción social en el cual una reflexión y una crítica profundas facultan la consolidación de un saber social culturalmente establecido (o. c., p. 143). Este tipo de análisis histórico del desarrollo de los objetos matemáticos, que busca los problemas originarios de donde provienen, así como los debates entre los miembros de la comunidad que construye los objetos es un rasgo característico del *enfoque socioepistemológico*. Se aporta, por tanto, una visión ampliada de la propia epistemología matemática, mostrando la génesis sociocultural de las matemáticas.

Pero el estudio histórico-epistemológico-sociocultural tiene una finalidad educativa. En el caso de la definición del logaritmo de los números negativos se han podido constatar las dificultades, obstáculos y el largo proceso en la construcción del conocimiento en la comunidad de profesionales matemáticos. "No debería, por tanto, asombrar que la aceptación de este universo de los nuevos números sea un verdadero problema para los estudiantes desde el punto de vista de su comprensión" (o. c., p. 141).

Cantoral y Farfán parten del estudio histórico como base para el diseño y desarrollo de una investigación en el marco de la ingeniería didáctica (Artigue, 1992). Conciben una secuencia didáctica en la que los estudiantes y los profesores enfrentan situaciones que requieren de la ampliación de la función logarítmica a los números negativos y, por lo tanto, se encuentran por tanto obligados a aceptar los números y las variables complejas. El problema abordado en la investigación se refiere a la descripción de la sensibilidad de los estudiantes universitarios ante resultados matemáticos contradictorios y de sus diferentes maneras de argumentar ante este tipo de circunstancias. La situación que se plantea a los estudiantes es más bien de naturaleza metamatemática: el edificio matemático tiene que ser consistente, libre de contradicciones. ¿Son conscientes los estudiantes de este rasgo esencial de las matemáticas? Ante una afirmación contradictoria, ¿cómo la abordan? ¿Qué papel desempeñan la cultura matemática escolar y las intervenciones del profesor en la superación de las contradicciones?

Síntesis del diseño y desarrollo de la experiencia

El proceso de estudio organizado se apoya en la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; 2002): "Con este fin, hemos elaborado una serie de secuencias de aprendizaje conteniendo varias situaciones de acción, de formulación y de validación cuya activación depende en principio de las respuestas aportadas por los participantes" (o. c., p.141). Con esta ingeniería didáctica se trata de "observar y analizar la manera en la que los estudiantes piensan, argumentan, negocian, discuten y construyen sus conocimientos" (o. c., p. 142). Pero principalmente el estudio se orienta a identificar los aspectos relacionados con la sensibilidad a la contradicción y la búsqueda de la coherencia en el interior del aparato matemático.

Los participantes fueron doce estudiantes de edades entre 18 y 26 años de una institución pública mexicana, su profesor y dos especialistas en didáctica de la matemática. Ninguno de los pupilos tenía conocimientos previos sobre variables complejas. Se les propuso una secuencia de actividades a partir de la siguiente cuestión inicial:

> *¿Qué responderías a un alumno que pregunta a qué será igual el logaritmo de un número negativo? ¿El logaritmo sólo se define para números positivos?*

A esta siguen otras interrogantes en las que se sugieren posibles soluciones extraídas del debate histórico descrito previamente. En particular se les propone la solución $ln\,(-x) = ln\,(x)$,

> *¿Nuestro alumno estaría satisfecho con esta respuesta? ¿Y tú? Razona tu respuesta.*

Esta primera serie de preguntas fue respondida por escrito en una sesión de una hora. Una semana más tarde se propuso una segunda secuencia de actividades. Se confronta a los estudiantes ante los siguientes resultados obtenidos con deducciones correctas; por una parte $ln\,(-1) = 0$, y por otra $ln\,(-1) = \pi i$.

> *¿Esta igualdad constituye una contradicción? Explica y argumenta.*

Para tener una visión más clara de las respuestas de los sujetos se organizó además un diálogo de cada estudiante con su profesor en aquellos casos en que las respuestas aparecían confusas o requerían una discusión más profunda. Estas entrevistas se realizaron dos semanas después de la realización de las secuencias de actividades y fueron grabadas y transcritas. La interacción se apoyaba sobre la estructura de las actividades realizadas y sobre las respuestas dadas por el estudiante, dejándole un tiempo considerable para reflexionar. Algunos estudiantes reiteraron sus respuestas iniciales, mientras que otros modificaron su posición.

Resultados

El análisis de las respuestas de los estudiantes a la secuencia de situaciones planteadas y a las interacciones del profesor en las entrevistas individuales lleva a clasificarlos en dos grupos:

Un cierto número de sujetos acepta la idea de que si los logaritmos de números negativos existen es razonable pensar que sean en cierta manera "simétricos" respecto de los correspondientes a los números positivos. Al mismo tiempo sostienen que si se acepta una definición de ese tipo, entonces una parte de la teoría correspondiente deberá ser reconstruida con el fin de dar cuenta de igualdades del tipo $ax = y$, con $a > 0$ y $y < 0$. Esto supone que x no sea un número real. Ninguno de los estudiantes menciona, sin embargo, los números complejos.

La segunda categoría, más numerosa, rechaza sistemáticamente admitir la posibilidad de tratar los logaritmos de números negativos. Sus argumentos se basan en el hecho de que los logaritmos de números negativos son indefinidos, o que son inexistentes. Los discursos argumentan explicaciones similares a las que se dan en una clase: "No puede existir un número positivo que, al elevarlo a una potencia, dé un número negativo". O bien, parten de la definición que se encuentra frecuentemente en los libros, en las que se consideran a y b positivos para mostrar la imposibilidad de trabajar con negativos.

Conclusiones

La interpretación de los resultados de la investigación muestra de nuevo la contribución del enfoque socioepistemológico al ámbito de estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una conclusión del trabajo es que la sensibilidad a la contradicción de los estudiantes universitarios no emana completamente de la precisión con la cual se realizan los procedimientos y los razonamientos matemáticos. Se pone de manifiesto que también intervienen elementos propios del entorno escolar y del discurso matemático escolar.

El proceso mediante el cual se construye la aceptación de un nuevo resultado en la clase de matemáticas se basa parcialmente en la lógica interna de la deducción matemática; además:

> ...la aceptación o resistencia vienen más bien de la interacción de las relaciones de poder entre los participantes en este juego del saber. En ciertos casos, la resistencia a aceptar la extensión de Bernoulli obedece a otra forma de relación de poder que podría explicarse por el papel que juega el libro en la clase de matemáticas. (o. c., p.159)

Debido a que carecían de elementos teóricos más completos, la mayor parte de los estudiantes rechazó casi totalmente los argumentos matemáticos que defendían la validez de la extensión de la definición de los logaritmos a los números negativos. La insistencia del profesor fue insuficiente, al igual que la serie de deducciones matemáticas que podrían comprender. La inexistencia de este resultado en el corpus visible de los estudiantes nos hace comprender que el saber matemático escolar no se forma solamente mediante la deducción, ni constituye un sistema ordenado de proposiciones derivadas de principios, sino que también, y sobre todo, es la consecuencia de numerosos y complejos mecanismos de aceptación social.

El problema de cómo se aborda y aprecia la contradicción en el estudio de las matemáticas por parte del alumnado universitario es de naturaleza más bien metamatemática y metacognitiva; pero sin duda, de interés didáctico. Y ha puesto de manifiesto un fenómeno de tipo socioepistemológico: la influencia de la cultura escolar, conformada por los libros de texto y la capacidad retórica del profesor en las interacciones didácticas, puede ser un factor determinante en el aprendizaje matemático.

Interpretación desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico

El enfoque socioepistemológico en matemática educativa reclama una atención específica a la construcción social del conocimiento matemático, tanto en su dimensión institucional (desarrollo histórico-cultural), como personal (desarrollo del conocimiento individual en el seno de las instituciones educativas). En este segundo caso la descripción y explicación del desarrollo del conocimiento del sujeto tiene lugar en dos ámbitos complementarios: 1) Las interacciones sociales en la clase, que concuerdan con las investigaciones realizadas en el marco del interaccionismo simbólico en educación matemática (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000; Sierpinska y Lerman, 1996); 2) las interacciones entre los significados personales y los institucionales. Cada persona es miembro de una red de instituciones (vida cotidiana, clase de matemáticas, clase de ciencias experimentales, etc.), en cada una de las cuales existen formas específicas de razonar y validar el conocimiento. El sujeto tiene que aprender a discriminar los diversos significados según cada circunstancia, pero esto requiere un proceso formativo explícito.

El fenómeno metacognitivo descrito en esta investigación —las dificultades de estudiantes universitarios para reconocer y valorar las implicaciones epistémicas de obtener resultados contradictorios en matemáticas y de intuir posibles vías de solución— se debe explicar, al menos en parte, por la variedad de maneras de afrontar las contradicciones en los diversos contextos institucionales de los sujetos. Las conclusiones obtenidas por esta investigación concuerdan con las encontradas en el trabajo de Recio y Godino (2002) en el campo de la demostración matemática. En este trabajo se analizan los diversos significados de la demostración en distintos contextos institucionales (lógica y epistemología, vida cotidiana, clase de matemáticas y ciencias experimentales). La diversidad e interacción de estos significados en las personas, sujetos de dichas instituciones, se disponen como explicación de los conflictos y limitaciones en los esquemas de demostración manifestados por los estudiantes ante problemas sencillos que requieren una demostración deductiva.

En una primera fase, el EOS propone fijar la atención de la investigación en didáctica de las matemáticas en caracterizar los significados institucionales de referencia correspondientes al tipo de problemas matemáticos cuyo estudio se pretende abordar. Tales significados son entendidos como sistemas de prácticas y se concretan en una red de objetos emergentes. En la investigación de Cantoral y Farfán (2005) se plantea el problema matemático inicial: *¿Cómo definir los logaritmos de los números negativos teniendo en cuenta su definición para los positivos?* (Designemos este problema como PMLN, problema matemático del logaritmo negativo). El estudio histórico realizado permite describir la "construcción de los significados" para esta cuestión por los matemáticos que se ocuparon inicialmente de la misma (Leibniz, Bernoulli y Euler). En este proceso se deben respetar dos principios: la permanencia de las leyes formales previamente aceptadas y la ausencia de contradicciones. Aparece entonces una diatriba asociada: la ausencia de contradicción en el edificio matemático, que es de naturaleza metamatemática (PMM, problema metamatemático).

Cantoral y Farfán se centran en el estudio de los significados personales de los estudiantes acerca del PMM, en el caso particular de la extensión de la definición de logaritmo a los números negativos. Es irrelevante que los estudiantes "aprendan" cómo se hace la ampliación; la secuencia de actividades diseñadas y las interacciones entre profesor y estudiante no pretenden que los alumnos descubran la solución al PMLN, ni tampoco que el profesor se la explique (de hecho, se indica que los estudiantes en ningún momento recibieron esa información). La cuestión abordada es básicamente de naturaleza metacognitiva. ¿En qué medida los estudiantes son conscientes del principio de no contradicción en la construcción de las matemáticas? ¿Qué factores condicionan el grado de sensibilidad a la contradicción en matemáticas?

Desde el punto de vista del EOS los participantes son incapaces de resolver las contradicciones que se les plantean en la secuencia de tareas porque la solución está fuera de su zona de desarrollo cognitivo en un ambiente heurístico-constructivista. El paso a los números complejos pone en juego objetos y técnicas matemáticas complejas que requieren procesos de aprendizaje específicos. El marco implícito en que se ha diseñado la investigación es el de la Teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 2002) y la metodología asociada de la Ingeniería didáctica (Artigue, 1992). La atención a la complejidad ontosemiótica de los conocimientos matemáticos, metamatemáticos y metacognitivos que propone el EOS lleva a sugerir las limitaciones de las configuraciones adidácticas propuestas por la TSD para lograr el aprendizaje. El estudio del problema matemático de ampliación de los logaritmos a los números negativos, y del problema metamatemático de consistencia y ausencia de contradicción en matemáticas, requiere organizar procesos de escrutinio en los cuales las configuraciones dialógicas y magistrales (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Burgos y Wilhelmi, 2020) podrían desempeñar un papel protagónico en la mejora de la idoneidad didáctica de dichos procesos.

Estudio de la periodicidad de las funciones

Problema didáctico

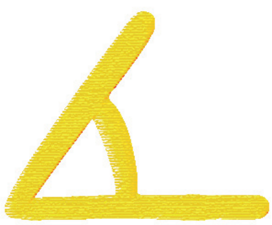
El foco de atención de este trabajo de Buendía y Cordero (2005) es el estudio de los fenómenos periódicos, incluyendo los aspectos culturales, históricos, institucionales y cognitivos que están relacionados con la periodicidad:

> El objetivo de la investigación es proponer una epistemología de lo que es periódico, cuyos elementos se extraen de las prácticas realizadas por los individuos cuando tratan aspectos de las conductas repetitivas de las gráficas de las funciones que representan movimientos. (o. c., p. 301)

Para ello se diseña una situación en la que la práctica social de la predicción se transforma en una línea de argumentación situacional que resignifica lo que es periódico. “El fin es mostrar los elementos que constituyen la socioepistemología de la periodicidad que estamos proponiendo” (o. c., p. 301).

Entre las cuestiones abordadas en esta investigación se indica que con frecuencia los estudiantes (y algunos profesores) carecen de marcos de referencia que les permitan resignificar su conocimiento matemático (con el término *resignificar* Buendía y Cordero se refieren a la discusión sobre el uso y forma de conocimiento en ciertas situaciones específicas, discusión que depende de la organización de los grupos humanos y de los tipos de situaciones y prácticas planteadas). Este dilema ocurre en particular con la periodicidad de funciones; hay una oposición entre la definición analítica de periodicidad y los comportamientos de naturaleza periódica asociada con los fenómenos: lo que es periódico se concibe como algo repetitivo, cualquiera que sea el tipo de repetición presente.

Se plantea la cuestión del significado de lo que es periódico como algo que viene condicionado por los contextos socioculturales y los campos de aplicación de dicha concepción. La noción formal de función periódica $f(x+p) = f(x)$ no refleja el significado de lo que es periódico. Además, los usos escolares de la periodicidad, limitados al estudio de algunas funciones como $y = sen(x)$, llevan a atribuir significados parciales restringidos. Aunque el concepto de periodicidad se trata generalmente en el currículo como una propiedad de ciertas clases de funciones periódicas, la definición suele dejarse aparte para prestar atención a los comportamientos de las gráficas de las funciones. Pero este constituye una característica en cierto modo ajena a la estructura matemática; sólo es un recurso para discutir ciertas propiedades matemáticas de las funciones y de sus gráficas. Sin embargo, los sujetos hacen referencia al comportamiento de las gráficas ante ciertas actividades matemáticas que no lo ameritan. Esto indica la importancia de tener en cuenta, además de las respuestas de los estudiantes como una fuente de información con relación a la construcción del conocimiento matemático, las actividades que realizan para tal fin. Esto justifica el énfasis que damos a las prácticas sociales con relación al conocimiento matemático.



Las prácticas sociales como una fuente de reconstrucción de significados

Se describe el papel esencial que la socioepistemología atribuye a la práctica social como fuente para la reconstrucción de significados. “La epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social en la que el conocimiento se construye” (o. c., p. 305). En la investigación realizada se tienen en cuenta prácticas relacionadas con la construcción de los aspectos periódicos de las funciones, lo que quiere decir que dan importancia al desarrollo y uso de herramientas implicadas en la construcción del conocimiento, así como al papel de las personas y el contexto social en el que se desempeñan. De este modo, la epistemología ofrece explicaciones basadas en las características particulares de las personas que hacen matemáticas en contextos socialmente organizados.

Este punto de vista resalta una oposición entre las naturalezas y funciones del trabajo matemático y la matemática escolar; sin embargo, esta última necesita interpretar y reorganizar a la primera mediante la reconstrucción de los significados de los procesos y conceptos en los diferentes niveles escolares. El resultado de esta reconstrucción de significados es que las categorías del conocimiento matemático son extraídas directamente de las prácticas sociales compartidas. Asumimos, por tanto, que estos precedimientos son la base de la reorganización del trabajo matemático y el rediseño del discurso matemático escolar.

Estudio experimental

La TSME se interesa por la dimensión cognitiva implicada en los estudios didácticos. De hecho, la parte experimental de esta investigación se centra en la descripción de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario que parte de una colección de ocho gráficas de funciones; estas describen relaciones espacio–tiempo con algún aspecto repetitivo en movimientos de objetos. Y tres de estos casos corresponden a funciones periódicas. Se dan sucesivamente las siguientes consignas a los estudiantes:

1. *Describe el tipo de movimiento que se representa en cada gráfico y después clasifica las gráficas según cualquier criterio de semejanza o diferencia*. El fin de esta consigna es mostrar que los estudiantes consideran la periodicidad (en el sentido general de repetición) como menos relevante en la clasificación de las funciones que otros criterios tales como continuidad/discontinuidad del gráfico.

2. *Predice la posición del objeto móvil en cada gráfico después de 231 segundos y clasifica las gráficas*. El fin es que los estudiantes se den cuenta de que puede haber diferentes maneras de repetición en un gráfico.

3. *¿Cuál de los gráficos es periódico?* El propósito es que los estudiantes revisen su concepción de periodicidad como una propiedad que caracteriza un cierto tipo de repetición.

Se pide a los alumnos que comparen sus clasificaciones de las gráficas antes y después de la actividad de predicción. Se trata de ver el efecto que tiene en la identificación de la periodicidad el hecho de haberles instado de antemano a predecir el comportamiento de la gráfica.

Interpretación desde el punto de vista del enfoque ontosemiótico

El hilo argumental del trabajo de Buendía y Cordero es que los estudiantes no movilizan la aplicación de la definición formal (o analítica) de la periodicidad de una función de manera inmediata en situaciones pertinentes. Y con frecuencia malinterpretan que una función es periódica cuando aparece algún tipo de repetición en la gráfica. A pesar de la simplicidad de la definición $f(x + p) = f(x)$, la interpretación y aplicación de esta regla en casos concretos puede ser tardía.

La descripción del problema esbozado en la investigación reconoce la dualidad personal–institucional para los significados de los objetos matemáticos que propone el EOS. Los estudiantes construyen conceptos personales sobre la periodicidad de funciones como consecuencia de los sistemas de prácticas compartidas en las clases de matemáticas, los cuales configuran e implementan significados académcios específicos, que pueden diferir de los alcances de referencia en una institución matemática profesional. El estudio socioepistemológico realizado sobre el origen de la periodicidad de funciones en matemáticas ha permitido a los autores diseñar una ingeniería didáctica que puede ayudar a resolver esta contrariedad. La directriz es asociar la periodicidad con la *práctica de la predicción* en una secuencia de gráficas de funciones que relacionan el espacio y el tiempo en un movimiento. La actividad de predicción obliga a movilizar la regla de la periodicidad, lo que facilita discriminar los movimientos periódicos de los que no lo son.

La TSME incluye como una primera etapa en el proceso de investigación didáctica el análisis *a priori* del objeto de enseñanza, centrado en la búsqueda de los fenómenos extra o intramatemáticos que constituyen la razón de ser de tales objetos. Para ello, la historia resulta un recurso importante como fuente de inspiración en la selección de tales fenómenos y el diseño de actividades instruccionales. Por otra parte, el EOS asume el discurso relativo a las prácticas sociales, aunque lo expresa en términos diferentes. El significado de los objetos matemáticos se interpreta en términos pragmáticos: como sistemas de prácticas asociadas a campos de problemas, relativos a los distintos contextos socioculturales, de uso y los juegos de lenguaje en que se abordan. En ambos modelos teóricos se asume la relatividad socioepistémica de los significados. La institución se concibe como una colectividad de personas que comparten problemas, prácticas y herramientas. La comunidad de profesionales de la matemática es una más de tales instituciones implicadas en la creación, uso y difusión de las matemáticas, y en su seno se configuran representaciones específicas.

En el trabajo de Buendía y Cordero encontramos un uso del término *Socioepistemología*, no para referirse a un enfoque teórico ni una manera de concebir la naturaleza de la actividad matemática, sino como un sustantivo que designa un objeto teórico nuevo, asociado a un concepto matemático específico (periodicidad de una función), y que se compone de diversos elementos. Vemos aquí una gran similitud con el concepto introducido en el EOS como sistema de prácticas operativas, regulativas y argumentativas, que designamos *significado del objeto*. Dichas prácticas están asociadas a un cierto tipo de

PädiUAQ | vol. 6 núm. 11 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

situaciones-problemas y son relativas a un contexto institucional.

Los autores utilizan con frecuencia el término *resignificar* con un sentido que parece concordar con los postulados pragmáticos asumidos en el EOS para los significados de los objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista institucional como el personal. Como se dijo con anterioridad, un mismo objeto matemático puede tener diversos significados dependiendo de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje donde participa.

CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES

Consideramos que la TSME se puede incluir dentro del programa de investigación en didáctica de las matemáticas que Gascón (1998) describe como el *programa epistemológico*: el punto de partida está en la construcción de modelos epistemológicos del propio saber matemático que se pretende enseñar, y no en el cómo enseñar o en cómo aprenden los estudiantes. Pero al igual que el EOS, procura huir de posiciones extremas, como el epistemologismo (reducir la problemática didáctica a la epistemología) y el psicologismo (centrarse de manera exclusiva en el estudio de la mente del sujeto que aprende). Tanto TSME como EOS comparten el fin de incidir en el sistema educativo con propuestas de intervención didáctica fundamentadas:

> Se perfila de este modo, una nueva línea de investigación que toma como objeto de estudio a la base socioepistemológica de los saberes matemáticos que incluyen también las intuiciones primarias del alumno y que tiene por objetivo último el rediseño del discurso matemático escolar. (Cantoral *et al*., 1998, p. 367)

Tanto la TSME como el EOS asumen supuestos similares acerca del origen humano de los objetos matemáticos, y por tanto, el rechazo de posiciones platónicas. Los objetos matemáticos emergen de sistemas de prácticas sociales ligadas a campos de situaciones-problemas. De este modo, la indagación de los distintos momentos históricos y contextos institucionales en que ocurre esta emergencia es una estrategia metodológica compartida y la base para la elaboración de propuestas de intervención en los currículos y en las clases de matemáticas. Los dos modelos teóricos estudiados adoptan también un punto de vista sistémico para las cuestiones de investigación en matemática educativa. No obstante, partir de la elaboración de modelos socioepistemológicos de los objetos matemáticos (sistemas de prácticas relativos a marcos institucionales, sociales o culturales dados) no implica el olvido de las restantes dimensiones del estudio matemático: la cognitiva y la instruccional.

En el caso del EOS se ha optado por consolidar las dimensiones epistemológica y sociocultural en una visión ampliada de la epistemología. Para el EOS, como ocurre con la teoría antropológica de Chevallard (1992; 1999), la epistemología tiene que ser entendida en términos socioepistemológicos, aunque es conveniente, en términos antropológicos:

> La 'antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de

> estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 846)

Para una adecuada y fructífera articulación entre el EOS y la TSME es necesario analizar el significado atribuido en ambos marcos a la noción de práctica y de práctica social, así como el papel atribuido a las situaciones-problemas. El enfoque socioepistemológico considera la *predicción* como una práctica social:

> Hemos elegido la idea de comportamiento de las funciones como el eje alrededor del cual construir la relación entre práctica social y periodicidad, y la predicción como la práctica social asociada. De manera más específica, estudiaremos la relación entre predicción y periodicidad en el contexto de las gráficas de las funciones, esto es, entre el reconocimiento de la periodicidad en el gráfico de un movimiento y la acción de hacer enunciados sobre lo que este movimiento será en un futuro estado, dada cierta información actual. (Buendía *et al.*, 2005, p. 306)

Deducimos de esta cita que una práctica social, según la TSME, viene a ser una *acción-situada* socialmente compartida, y por tanto normada por convenciones o hábitos. Es cierto que las comunidades humanas usualmente *hacen* predicciones del valor de cantidades desconocidas en un momento dado en función de otras cantidades de magnitudes relacionadas (¿cuál es el espacio que recorrerá un móvil que se desplaza a 60 km/h después de transcurridas 2 horas?). En la medida en que la *acción* es compartida en el seno de las sociedades o comunidades de prácticas, podemos decir que se trata de una práctica social. El EOS propone analizar la acción de predecir distinguiendo entre la situación-problema de predicción y las técnicas realizadas para resolver esa tarea. De esta manera, distintos grupos sociales o marcos institucionales pueden compartir un tipo de problemas, pero las prácticas (operativas y discursivas), y por tanto los objetos emergentes de tales prácticas (procedimientos, recursos lingüísticos, reglas y justificaciones), pueden diferir. Las sociedades comparten ciertas necesidades y maneras de afrontarlas, pero estas prácticas (acciones situadas e intencionales) a menudo son divergentes.

En el EOS, para hablar de *prácticas sociales* es necesario especificar el tipo de situación-problema que se aborda y el marco institucional específico donde se realiza, ya que tales prácticas son dependientes de dichos factores (consideramos preferible hablar en términos de *sistemas de prácticas sociales o personales* y no en singular). Además, hemos ampliado la relatividad socioepistémica del significado de los objetos matemáticos en la dirección de los contextos de uso internos a la propia matemática y a los juegos de lenguaje (Wilhelmi *et al.*, 2007). Para el estudio de las *socioepistemologías* relativas a un objeto matemático aportamos una tipología de objetos emergentes de los sistemas de prácticas articulados en configuraciones epistémicas.

Consideramos que el EOS puede aportar a la TSME algunas valiosas herramientas teóricas para el estudio de la dimensión cognitiva, o sea, los significados personales de los alumnos: objetos y sistemas de prácticas personales, dualidades cognitivas y conflictos semióticos. Esto permite un nivel de análisis microscópico con posibilidades descriptivas y explicativas nuevas. A su vez, para la dimensión instruccional, la TSME parece asumir en gran medida la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; 2002) como modelo teórico de referencia y la ingeniería didáctica (Artigue, 1992) como metodología de investigación de propuestas de intervención en el aula. Nuestra teoría de las configuraciones didácticas y los criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemático (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino *et al.* 2014) pueden constituir herramientas complementarias.

El EOS y la TSME están estrechamente relacionados con el constructivismo social (Ernest, 1998), el interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000; Sierpinska y Lerman, 1996), la antropología del conocimiento de Chevallard (1992; 1999) y con la fenomenología didáctica de Freudenthal (1982). Llegamos a esta conclusión estudiando el trabajo de Buendía y Cordero (2005), donde el análisis socioepistemológico de la periodicidad se centra en mostrar los problemas prácticos (fenomenologías externas) que históricamente dieron origen a esa noción[2]. El tratamiento formal en el campo del análisis matemático de la periodicidad estuvo fuertemente influenciado por el interés de los matemáticos del siglo XVIII en la descripción analítica del movimiento. Esto motivó el desarrollo de prácticas de predicción con relación a movimientos para los cuales la periodicidad es una característica esencial (movimientos repetitivos). De igual modo, Cantoral (2001) detectó una relación dialéctica de la predicción en fenómenos físicos de cambio y variación con lo que es analítico en la matemática del movimiento.

REFLEXIONES FINALES

Desde nuestro punto de vista, los dos marcos teóricos descritos en este trabajo tienen un origen común: la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Guy Brousseau. En ambos casos se considera necesario adoptar una visión nueva sobre la epistemología de las matemáticas, concediendo esencial importancia a la actividad de las personas comprometidas en la solución de problemas matemáticos. Esta posición es compartida también por la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999), pero, a pesar del giro radical que supuso en la manera de ver las matemáticas, el modelo epistemológico de la TSD —centrado en la modelación del saber y el conocimiento matemático en términos de situaciones— resulta insuficiente al dejar implícitos aspectos esenciales, principalmente la naturaleza y origen del saber sabio y los componentes del discurso matemático. La TAD propone un modelo epistemológico, sobre bases antropológicas, en el que las matemáticas se conciben en términos de organizaciones praxeológicas formadas por la cuaterna tareas, técnicas, tecnologías y teorías. De esta manera, el modelo epistemológico de las situaciones didácticas se enriquece al hacer explícitos componentes para los saberes y conocimientos matemáticos.

La TSME atribuye el origen de las matemáticas a la capacidad resolutiva del hombre, pero además considera fundamental explicitar tanto el componente sociocultural en la construcción del conocimiento matemático como el papel que desempeñan las herramientas utilizadas y los vastos significados atribuibles a los objetos matemáticos. El modelo epistemológico propuesto por el EOS concuerda, en líneas generales, con los correspondientes a la TAD y la TSME. Comparte los supuestos antropológicos sobre la actividad matemática y sobre los procesos y productos socioculturales emergentes. Incorpora, no obstante, en su concepción de las matemáticas, de manera explícita, los elementos básicos del giro lingüístico introducido por Wittgenstein en la filosofía de las matemáticas y los aportes de la semiótica para describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación matemática.

El giro antropológico y sociocultural en la manera de concebir las matemáticas no debería suponer, un olvido de la dimensión cognitiva, esto es, del papel del sujeto que construye y aprende matemáticas. Por esta razón, el EOS introduce, junto con el institucional, un modelo de cognición individual construido sobre las mismas bases pragmáticas y antropológicas. En este sentido, consideramos que el EOS puede ser un desarrollo coherente de los modelos teóricos mencionados, en los que la dimensión cognitiva queda en un segundo plano, o modelada sobre bases teóricas dispares. Asimismo, la herramienta de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos del EOS, al permitir un análisis microscópico de los procedimientos de resolución de problemas, ayuda a reconocer la complejidad ontosemiótica de los mismos, lo cual lleva a matizar el papel de las situaciones adidácticas en los mecanismos de aprendizaje matemático (Godino *et al.*, 2020).

El análisis de la TSME realizado en este artículo deberá ser ampliado en otros trabajos en los cuales se aborde con más profundidad las concordancias y complementariedades con otras teorías socioculturales, como la etnomatemática, iniciada en Godino (2019). Se pueden indagar las relaciones con los principios de la educación matemática realista (Gravemeijer, 2020; Van Den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014;), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991), que pone también un énfasis especial en las conexiones de las matemáticas con sus aplicaciones en los diversos contextos sociales y tecnológicos. Del mismo modo, se requiere estudiar los lazos, tanto de la TSME como del EOS con la teoría histórico-cultural de la actividad (Engeström, 2015; Roth y Radford, 2011) y la teoría de la objetivación de Radford (2013; 2014).

2 Un análisis similar se puede hacer del artículo Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez (2018) sobre modelización matemática.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2,3), 241-286. https://revue-rdm.com/2005/epistemologie-et-didactique/

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 299-333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon*, 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2–3), 137–168. https://revue-rdm.com/2004/la-sensibilite-a-la-contradiction/

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810.

Cantoral, R., Reyes Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cantoral, R., Moreno Durazo, A. y Caballero Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. ZDM, 50, 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73-112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Lawrence Erlbaum.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103-128.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Peter Lang.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. SUNY.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista* EMA, *7*(2), 127-170.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Kluwer.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-33. https://revue-rdm.com/1998/evolucion-de-la-didactica-de-las/

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3), 237-284. https://revue-rdm.com/2002/un-enfoque-ontologico-y-semiotico/

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D. (2019). Concordancias y complementariedades de las teorías socioculturales en educación matemática. *La matematica e la sua didattica, 27*(2), 113–139.

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática* (REVIEM), *2*(2), 1-24 - e202201.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y/

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(1), 147-164. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font. V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88. https://revue-rdm.com/2006/analisis-de-procesos-de/

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200. https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70-92.

Gravemeijer, K. (2020). A Socio-constructivist elaboration of realistic mathematics education. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National reflections on the Netherlands didactics of mathematics,* ICME-13 Monographs, (pp. 217-233). Springer.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* 1931-1935. Harvard University Press.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 165-178. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44. https://doi.org/10. 4471/redim at.2013.19

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop *et al.* (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Kluwer.

Sriraman, B. y English, L. (Eds) (2010). *Theories of mathematics* *education. Seeking new frontiers.* Springer.

Ullmann, S. (1962/1978). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Aguilar.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2,3), 133-170. https://revue-rdm.com/2005/la-theorie-des-champs-conceptuels/

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *27*(1), 77 – 120. https://revue-rdm.com/2007/configuraciones-epistemicas/

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Crítica.