01

DISEÑO DE TAREAS EN UN SISTEMA DE EVALUACIÓN EN LÍNEA, UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA DE ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

TASK DESIGN IN AN ONLINE ASSESSMENT SYSTEM, A VIEW FROM THE THEORY OF MATHEMATICAL WORKING SPACES

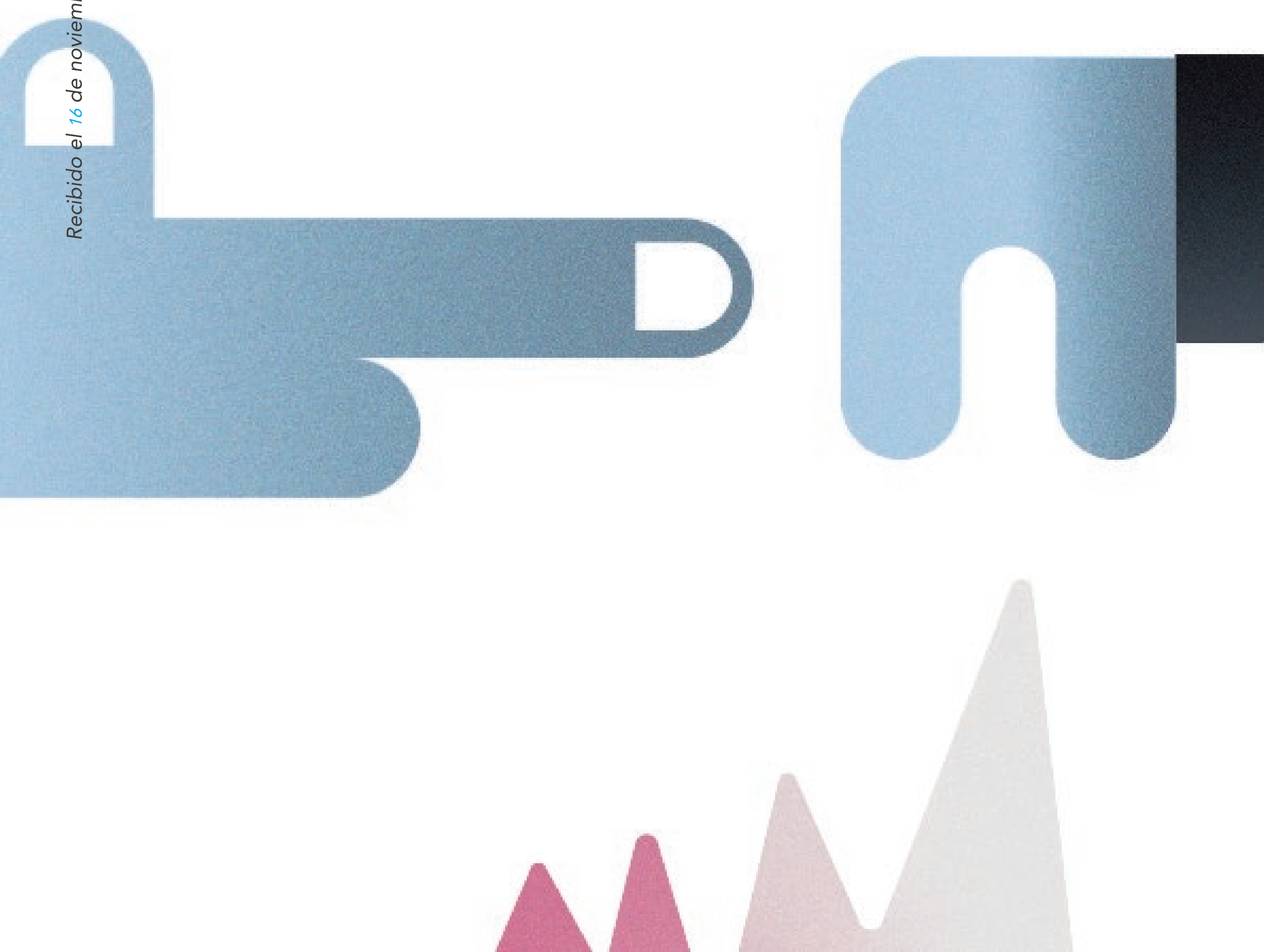
CONCEPTION DE TÂCHES DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE, UNE APPROCHE À PARTIR DE LA THÉORIE DES ESPACES DU TRAVAIL MATHÉMATIQUES

Jorge Gaona[1]

[1] Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile

[1]Correo: jorge.gaona@upla.cl

Recibido el 16 de noviembre de 2021, aceptado el 7 de marzo de 2022. Artículo por invitación.



RESUMEN

En esta contribución se presentan los resultados de tres casos de diseño de tareas en sistemas de evaluación en línea y el trabajo matemático que despliegan estudiantes de pedagogía en matemática y de ingeniería, todos en contextos virtuales debido a la pandemia. Se estudió el trabajo matemático a partir de algunas variables didácticas de las tareas que se proponen como pautas de diseño. Se muestra cómo los registros de representación semiótica y los números que los definen, los objetos matemáticos, la apertura de las tareas y el ciclo de retroalimentación afectan el trabajo matemático y provocan la activación de distintas génesis y planos.

Palabras clave: educación matemática, diseño de tareas, evaluación en línea, Espacio de Trabajo Matemático.

ABSTRACT

This contribution presents the results of three cases of task design in online assessment systems and the mathematical work deployed by mathematics and engineering pedagogy students, all in virtual contexts due to the pandemic. The mathematical work was studied from some didactic variables of the tasks, which are proposed as design guidelines. It is shown how the semiotic representation registers and the numbers that define them, the mathematical objects, the opening of the tasks and the feedback cycle affect the mathematical work and provoke the activation of different genesis and plans.

Las tareas de matemáticas que los estudiantes realizan en casa son un importante apoyo a las clases, ya sea en línea o presenciales. Aquí se muestra el proceso de diseño para 3 ejemplos que van desde los números complejos hasta la geometría analítica.

Keywords: mathematics education, task design, online assessment, Mathematical Working Space.

RÉSUMÉ

Dans cette contribution, nous présenterons quelques résultats de trois cas sur la conception de tâches dans une base d'exercices en ligne et le travail mathématique effectué par des étudiants en formation de professeur de mathématiques et des étudiants en formation d'ingénieur, tous dans des contextes virtuels en raison de la pandémie. Le travail mathématique a été étudié à partir de la variation de certaines variables didactiques des tâches et sont proposés comme guides leur conception. Nous montrons comment les registres de représentation sémiotique et les nombres qui définissent les objets mathématiques, l'ouverture des tâches et le retour d'information affectent le travail mathématique, en activant différentes genèses et niveaux.

Mots-clés: didactique des mathématiques, conception des tâches, évaluation en ligne, Espace de Travail Mathématique.

PROBLEMÁTICA

Las tareas son un elemento indispensable en los procesos de enseñanza que busca promover el aprendizaje en los estudiantes (Mason & Johnston-Wilder, 2006, p. 24). Esto no es solo aplicable para los procesos educativos, las tareas también son importantes para que nuevos aprendices entren en un paradigma científico (Kuhn, 1971) o en prácticas comunitarias (Radford, 2014).

Hay diferentes definiciones de lo que es una tarea matemática. Sierpinska (2014) la define como cualquier tipo de problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formulados, que se sabe que los alumnos pueden resolver en un tiempo predecible. Por otra parte, Chevallard (1999, p. 224) la precisa como una acción que se puede establecer mediante un verbo y está asociada a un objeto específico. En ambos casos, quien resuelve esa tarea está llamado a realizar una actividad matemática (Vandebrouck, 2013). En el marco de la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se han definido algunos tipos específicos de tareas como las tareas emblemáticas, que son aquellas que están disponibles en el ETM de referencia; deben estar activas en el ETM idóneo y ser potencialmente conducentes a un trabajo matemático completo (Kuzniak *et al.*, 2022).

En la literatura, el diseño de tareas ha sido ampliamente abordado. Ainley *et al.* (2006) habla de la paradoja de la planificación: si los profesores planifican muy centrados en los objetivos de aprendizaje, es probable que las tareas que establezcan sean poco gratificantes para los alumnos y se empobrezcan matemáticamente. Si la enseñanza se planifica en torno a tareas atractivas, la actividad de los alumnos puede ser mucho más rica, pero es probable que el foco esté menos claro y que el aprendizaje sea difícil de evaluar. De una forma u otra, se confrontan objetivos pedagógicos con objetivos didáctico-matemáticos. Los autores plantean el diseño de tareas con propósito y utilidad mediante la creación de un producto explícito: construir algo para otros y proponer oportunidades para que los estudiantes tomen decisiones.

Por otro lado, desde un punto de vista epistemológico, Zaslavsky (2005) plantea diseñar tareas que generen incertidumbre para así concebir discusión, mientras que Francisco y Maher (2005) concluyen que resulta más provechoso plantear una tarea compleja en vez de una secuencia de tareas simples. Al enfocarnos en el diseño de tareas con tecnología, podemos destacar el trabajo de Simon *et al.* (2016) quienes muestran cómo elementos específicos del diseño en una tarea sobre fracciones en un ambiente tecnológico influyen en las estrategias de los estudiantes. Sangwin *et al.* (2010, p. 234) discuten sobre el potencial de las tareas en ambientes de evaluación en línea con corrección y *feedback* automático, tomando en cuenta las características técnicas de estos sistemas. Por ejemplo, presentan una tarea abierta, es decir, donde piden la respuesta de un objeto matemático que cumpla ciertas condiciones, sin embargo, no muestran resultados con estudiantes donde se estudie la diferencia entre el potencial y el trabajo matemático efectivo. En Stacey y Wiliam (2013), se proponen algunos principios que deberían guiar el diseño de tareas de evaluación: valorar lo matemáticamente importante, evaluar para mejorar el aprendizaje y apoyar a cada estudiante a aprender y demostrar esta formación.

En 2015, se realizó un estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática sobre el diseño de tareas para las clases de matemáticas (Watson & Ohtani, 2015) donde se analizan distintos aspectos del proceso. En el capítulo de Kieran *et al.* (2015) se muestra cómo se establece de forma intencional una relación directa entre un marco teórico y el diseño de tareas. Se exponen múltiples ejemplos de cómo se han explicitado principios desde una teoría didáctica para diseñar tareas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Teoría de la Variación, Teoría de Cambios Conceptuales, Aprendizaje Conceptual a través de la Abstracción Reflexiva y Matemática Realista. En contrapartida, se muestra la tensión que existe entre este diseño como ciencia (a partir de un marco teórico) y el diseño como arte dando espacio a la creatividad. Mientras que, en el capítulo de Leung y Bolite-Frant (2015), se discute el rol de las herramientas en el diseño de las tareas, tanto digitales como de otra naturaleza y en la interacción de la tarea como medio para resolverlas (Leung & Bolite-Frant, 2015). En este capítulo también se muestra la estrecha relación que puede existir entre el diseño de tareas con herramientas y teorías didácticas, entre las cuales destacan, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998) en la cual el concepto de *medio* o *milieu*[1] es esencial, la Aproximación Instrumental (Rabardel, 1995) donde se pone un énfasis en la transformación de un artefacto a un instrumento mediante esquemas de uso y el Marco Semiótico Cultural (Bartolini Bussi & Mariotti, 2015) que considera el papel crucial de la mediación humana bajo perspectivas semióticas y educativas. Otros trabajos desarrollados en Latinoamérica también dan cuenta de la estrecha relación entre el diseño de tareas y otros marcos teóricos, tales como el enfoque enactivista (Lozano, 2017), el MTSK (Martínez *et al.*, 2020), el enfoque Onto-Semiótico (Bastias, 1980; Pochulu *et al.*,

1 Brousseau (1998) describe el *milieu* como un espacio físico donde actúa el estudiante y aprende por adaptación a él.

2016), la Modelación Matemática (Guerrero-Ortiz & Mena-Lorca, 2017) o APOE (Trigueros & Oktaç, 2019). En todas estas contribuciones se observa que se priorizan los criterios para diseñar que dependen de los principios en los que se fundamentan los marcos teóricos.

En la comunidad de investigadores que trabajan con ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.*, 2016, 2022; Kuzniak & Richard, 2014), el diseño de tareas se ha abordado desde el análisis del trabajo matemático efectivo a partir de tareas específicas (Coutat & Richard, 2011; J. V. Flores & Carrillo, 2019; Henríquez-Rivas *et al.*, 2021; Kuzniak *et al.*, 2018; Menares, 2018; Montoya-Delgadillo *et al.*, 2016). Con respecto al uso de herramientas, en el trabajo de Flores *et al.* (2022) se adopta una perspectiva instrumental, tomando en cuenta al mismo tiempo elementos semióticos y discursivos, pensándolos como un sistema y extendiendo la idea de *máquinas matemáticas* de Bartolini y Maschietto (2006).

Por otra parte, el diseño de tareas es un tema que se está comenzando a trabajar. En el Sexto Simposio del Espacio de Trabajo Matemático, Gómez-Chacón *et al.* (2019, p. 524) se plantearon algunas preguntas respecto al diseño y en este artículo queremos retomar algunas de ellas: ¿Cómo abordar los cambios de dominio (o de disciplina) desde la perspectiva del diseño de tareas en el ETM? ¿Cómo se adaptan los diferentes componentes y génesis del ETM en función de las tareas diseñadas? Sin embargo, intentar responder estas preguntas de manera general parece una tarea que excede las posibilidades de este artículo, por lo que se tratará de contestarlas enfocándose al diseño de tareas en sistemas de evaluación en línea, prestando particular atención al rol del *feedback* y a partir de los resultados de trabajos recientes sobre el tema (Gaona, 2021; Gaona, Hernández *et al.*, 2021; Gaona, López *et al.*, 2021; Gaona & Menares, 2021).

MARCO TEÓRICO

Espacios de Trabajo Matemático y artefactos digitales

El objetivo de la teoría ETM es describir, analizar, diseñar y comprender el trabajo matemático propuesto a un individuo en una institución y realizado por éste (Kuzniak *et al.*, 2016). Para caracterizar el trabajo matemático, la teoría considera aspectos epistemológicos y cognitivos.

En el plano epistemológico se encuentran los objetos y/o herramientas que permiten desarrollar el trabajo matemático y se definen tres polos: el *representamen*, los artefactos y el referencial teórico. De acuerdo con Kuzniak *et al.* (2016), en el modelo de los ETM, los objetos matemáticos pueden convertirse en herramientas y viceversa. Por otra parte, en el plano cognitivo, se encuentran tres procesos a través de los cuales se intenta dar cuenta de la actividad matemática: visualización, construcción y prueba.

Cabe observar que, para poder identificar las génesis que se activan en la resolución de una tarea, necesitamos identificar en cuál de los tres polos del plano epistemológico se encuentra un objeto matemático en particular. El estatus de un objeto o herramienta, en relación con el polo en el cual se encuentra, estará dado más bien por su utilización que por una característica intrínseca. A saber, diremos que un objeto o herramienta matemática está en el polo del *representamen* cuando se utiliza como una herramienta semiótica, en otros términos, cuando se trabaja a partir de su visualización y se toman en cuenta las relaciones entre sus unidades figurales en el sentido de Duval (2005) y no solo la percepción visual que el acceso directo al objeto provee.

Los objetos del polo de los artefactos materiales o simbólicos se identificarán cuando se trabaje con herramientas materiales (como regla y compás), herramientas informáticas (como una calculadora CAS) o artefactos simbólicos (como un algoritmo). Los dos primeros casos, dada su naturaleza, son fácilmente identificables; en cambio, el artefacto simbólico lo identificaremos cuando un objeto matemático o un algoritmo se utilice como una herramienta para obtener un resultado y no se tomen en cuenta sus propiedades, vale decir, cuando su uso no esté apoyado en el referencial teórico. Así, asociaremos el estatus de simbólico a un uso totalmente naturalizado y rutinario, en el que no se discutan ni cuestionen su validez ni justificación. Los artefactos digitales, que son uno de los focos de este trabajo, se definen a partir de la extensión de la idea de *máquinas matemáticas* como un conjunto de proposiciones que ejecuta una máquina electrónica que cuentan con una *inteligencia histórica* y una *validez epistemológica relativa* (J. Flores *et al.*, 2022).

La *inteligencia histórica* está relacionada con los significados que se plasman en los artefactos surgidos del desarrollo de la matemática a lo largo de la historia y que los informáticos buscan ejecutar a través de comandos en un programa de computadora.

Por el contrario, la validez epistemológica relativa tiene que ver con la dificultad o imposibilidad que tienen los artefactos digitales para plasmar con fidelidad algunas ideas abstractas. Lo interesante de esta noción de *máquina matemática* es que, al igual que el medio de Brousseau (1998), esta transmite un conocimiento que se revela cuando el usuario la utiliza y se cuestiona el saber matemático suscitado en la interacción con la máquina. Pero, a diferencia del entorno más general, la máquina matemática es distinta de los recursos digitales generales, y engloba a los dispositivos informáticos como entornos capaces de producir nuevos conocimientos con cierta autonomía respecto al usuario. Los artefactos digitales actuales son máquinas sofisticadas, por lo que es muy probable que del trabajo matemático se active inicialmente una génesis instrumental, pero prontamente se activen las otras génesis, por ejemplo, al generar un gráfico y trabajar sobre la génesis semiótica o intentar comprender algún resultado y justificarlo mediante propiedades, activando así la génesis discursiva.

Finalmente, en el polo del referencial teórico están las propiedades, teoremas y axiomas que dan sustento al discurso matemático. Este polo no debe pensarse solo como una colección de propiedades, porque al dar soporte a las justificaciones deductivas, debe estar organizado de forma coherente y bien adaptado a las tareas que se les pide a los estudiantes que resuelvan (Kuzniak *et al.*, 2016).

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva (**Figura** 1). La génesis semiótica conecta el proceso de visualización en el plano cognitivo con el *representamen* en el epistemológico. Esta génesis puede partir por el signo en el *representamen*, que es interpretado por el sujeto mediante la visualización. También puede partir por el sujeto que codifica y produce un signo.

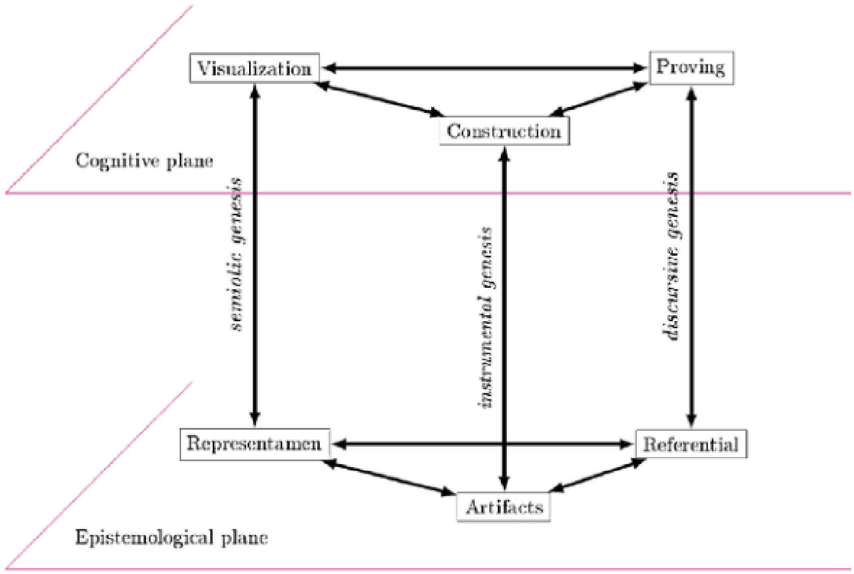


Figura 1. El modelo de los ETM (Kuzniak *et al.*, 2016, p. 725).

La génesis instrumental conecta el proceso de construcción en el plano cognitivo con el polo de los artefactos. Cuando se trabaja con herramientas materiales, informáticas o simbólicas, la génesis involucra dos procesos: el de instrumentalización y el de instrumentación (Coutat & Richard, 2011). El primero comprende la emergencia y evolución de los esquemas de uso del artefacto y la utilización de las posibilidades que ofrece el artefacto por parte del sujeto. El segundo parte desde el objeto y es relativo a la emergencia y evolución de los esquemas de uso y de las acciones instrumentadas, su constitución, funcionamiento, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. El trabajo matemático podría ser considerado rutinario si es que no se conecta con la validación y justificación de los artefactos.

Finalmente, la génesis discursiva conecta el proceso de prueba con el polo del referencial teórico en el plano epistemológico y está asociado al proceso de razonamiento deductivo mediante teoremas y propiedades. En este último caso, el foco está puesto en las propiedades y teoremas, por lo que se toman en cuenta razonamientos que van más allá de los visuales o instrumentales, pero que pueden ser desencadenadas por estos.

Diseño de tareas

La tarea no es parte del ETM, pero lo activa y su análisis permite estudiar las circulaciones que se pueden desplegar a partir de ellas. Habiendo definido el ETM, el diseño de tareas se esquematiza en la **Figura** 2. El ETM, por una parte, puede guiar el diseño de las tareas una vez definidos los objetivos, específicamente, quien diseña se puede preguntar si su tarea fomenta alguna o varias génesis o planos verticales, lo que permite hablar de ETM potencial de la tarea.

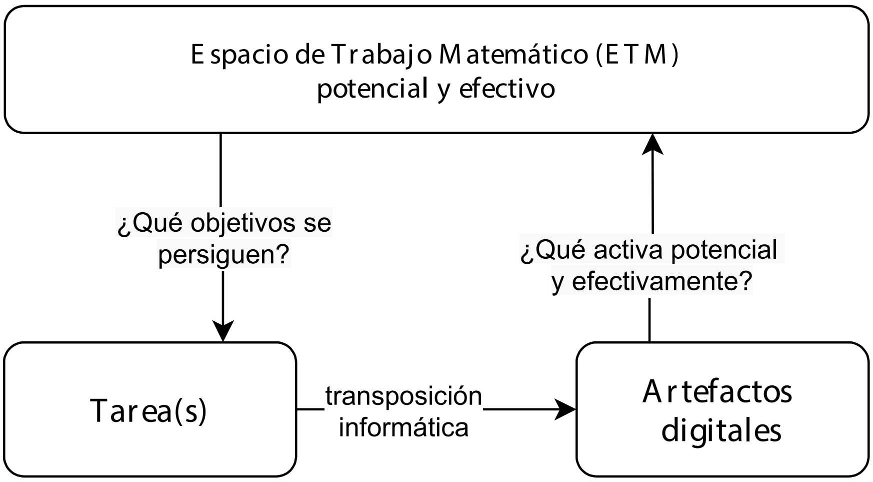


Figura 2. Diseño de tareas a partir del ETM

Una tarea puede ser diseñada en distintos soportes, y uno de estos es un artefacto digital. El diseño de una tarea en un artefacto digital produce una transposición informática (Balacheff, 1994) que potencia o limita el valor epistémico de la tarea según las características del artefacto. Al ser implementada, se puede contrastar el trabajo matemático potencial con el ETM efectivo.

En el diseño se da un proceso de idoneidad (J. Flores *et al.*, 2022): un ciclo de diseño-implementación-rediseño-implementación... que busca ajustar el potencial de la tarea con la actividad efectiva de quien la resuelve y que depende, entre otros elementos de la tarea, del contexto educativo y los sujetos que trabajan en la tarea. Estos objetivos, en este caso, se pueden ajustar teniendo en cuenta los elementos del ETM.

Tareas en un sistema de evaluación en línea

En Gaona (2018, p. 85), se consideran tres componentes didácticas de una tarea para conceptualizarla: tipo de tarea, objetos o herramientas matemáticas involucradas y contexto (**Figura** 3). El tipo de tarea se distingue por un verbo y una acción precisa (Chevallard, 1999), por ejemplo: encontrar las raíces de una ecuación o modelar el fenómeno mediante una función. Los objetos o herramientas matemáticas involucradas son las que permiten precisar la tarea. Del ejemplo anterior, la ecuación podría ser de distinta naturaleza: polinomial o trigonométrica, y contener una serie de variables que se pueden definir. Este objeto es observable gracias a su representación semiótica (Duval, 1995). Por ejemplo, si tenemos una ecuación polinomial de grado 2, los coeficientes podrían ser enteros, racionales o irracionales, entre otros. La ecuación podría ser representada de forma gráfica, en lenguaje natural, algebraicamente o incluso en una representación dinámica a partir de un *applet* de geometría dinámica. Cada una de esas elecciones puede influir en la naturaleza de las soluciones, en la dificultad de la tarea y, en general, en el trabajo matemático que se activará en los estudiantes.

Finalmente, el contexto aparece conectado con una línea punteada, ya que no siempre se utiliza en una tarea, pero en caso de que exista, este puede influir en el tipo de tarea o en el objeto/herramienta matemática puesto en juego. A modo de ejemplo, si una de las incógnitas de la ecuación representa una distancia, entonces solo serán válidas las soluciones positivas.

En relación a los sistemas de evaluación en línea, al mirar el artefacto-tarea desde un punto de vista técnico, en Gaona (2020) y Gaona, Hernández *et al.* (2021) se hace una descomposición en cuatro partes (**Figura** 4): enunciado, sistema de entrada, sistema de validación y sistema de *feedback*, que están ligados al artefacto digital involucrado.

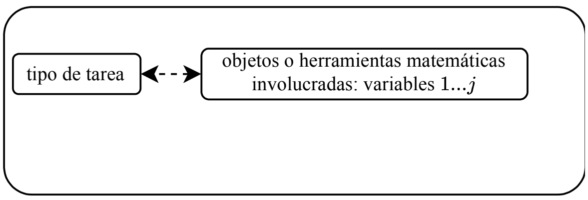


Figura 3. Componentes de la tarea. Extraído y adaptado de Gaona (2018, *p.* 85).

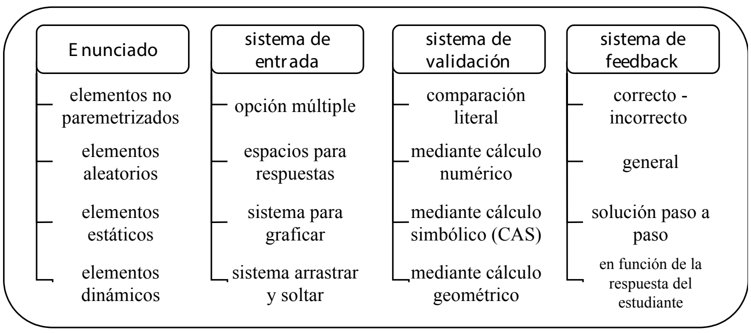


Figura 4. Componentes del artefacto tarea. Extraído y adaptado de Gaona, Hernández *et al.* (2021).

En el *enunciado* se muestra la tarea propuesta. Puede contener elementos que estén o no parametrizados. Este último caso implica que cada estudiante se enfrente a una pregunta con una estructura similar, pero con valores diferentes. El enunciado también puede contener elementos estáticos (como imágenes) o dinámicos (ej: *applets* como los de Geogebra).

El *sistema de entrada* es el que permite ingresar una respuesta. Hay varios formatos, puede ser mediante texto plano[2], editor de ecuaciones, sistema de reconocimiento de escritura a mano alzada, deslizadores u opción múltiple, entre otros. Para el *sistema de validación* consideramos las aplicaciones que cuentan con un procesador geométrico o un sistema de cálculo simbólico. Cierto grado de sofisticación para validar es fundamental cuando las preguntas permiten ingresar una respuesta y no son solo de opción múltiple. Por ejemplo, si la respuesta es una expresión algebraica o un número, el sistema debe reconocer si dos expresiones tales como: $2x + 2y$ o $2(x + y)$ son equivalentes o no. También, dada la tarea, podría ser necesario que el *sistema de validación* reconozca alguna característica de los objetos matemáticos involucrados, como que una expresión algebraica esté factorizada, que un valor se encuentre en un intervalo o que una matriz cumpla condiciones sobre sus coeficientes o que cumpla alguna propiedad. Finalmente, el *sistema de feedback* es el que entrega información una vez que el sistema valida la respuesta del estudiante. Dependiendo de las características del sistema, el *feedback* puede indicar si la respuesta es correcta o no, precisar la solución paso a paso en función del enunciado o de la respuesta del estudiante, entre otros.

La capacidad de los sistemas de evaluación en línea de corregir automáticamente es parte de su valor pragmático. No obstante, esta capacidad nada dice de su valor epistémico (Artigue, 2002). En cambio, este dependerá del tipo y contexto de la tarea y de cómo se representen los objetos matemáticos en el enunciado, en la respuesta y en el *feedback*, es decir, de las componentes didácticas. También dependerá del trabajo matemático efectivo desplegado por quienes resuelven.

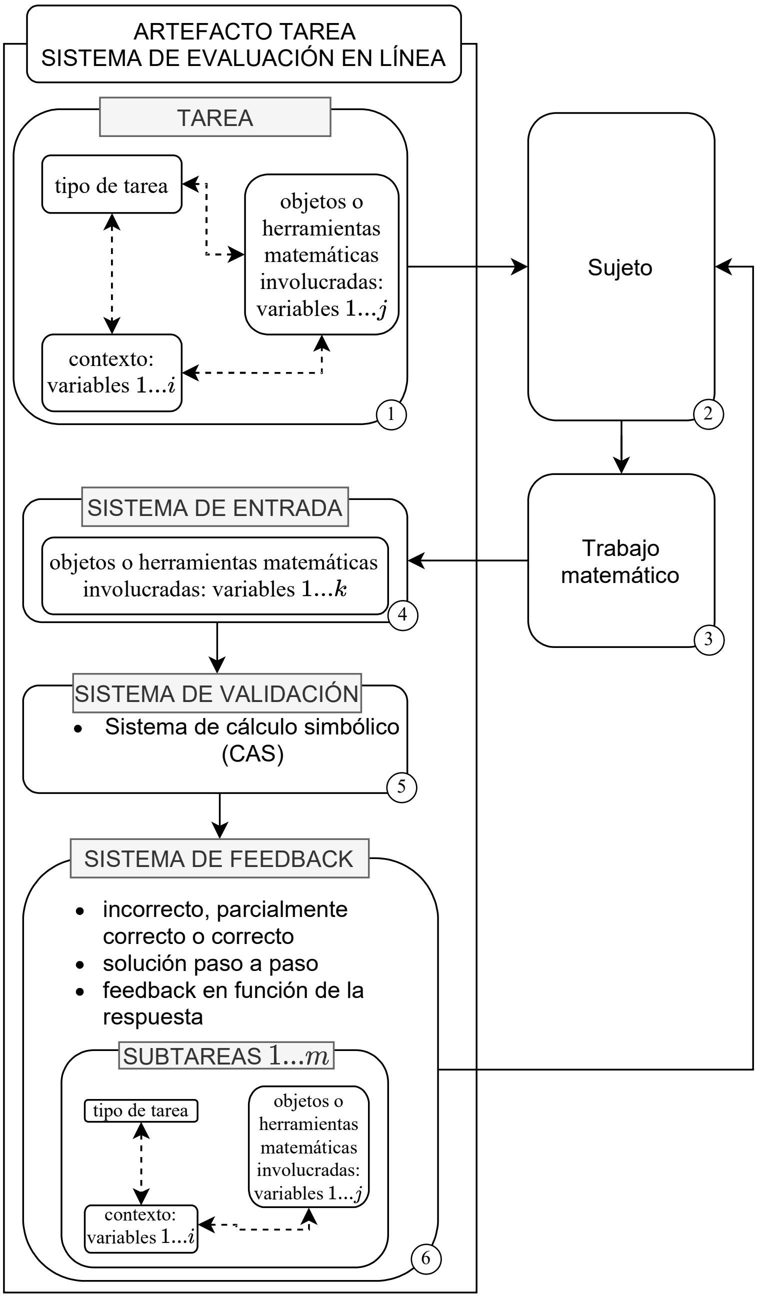


Figura 5. Relación entre los componentes didácticos de una tarea y los componentes técnicos de un artefacto en un sistema de evaluación en línea. Extraído de Gaona, López *et al.* (2021)

2 Una entrada de texto plano es un espacio o una caja en una pantalla donde solo se puede ingresar lo que está a disposición del teclado físico o virtual que viene por defecto en el dispositivo electrónico. Estos teclados generalmente no permiten, entre otros elementos, ingresar símbolos matemáticos.

PädiUAQ | Vol. 5 Núm. 10 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Estas dos descomposiciones se pueden articular con el sujeto que responde una tarea a partir de un trabajo matemático específico (sección anterior), para estudiar cómo interactúan los componentes (**Figura** 5). El trabajo matemático específico puede realizarse en interacción con la tarea (por ejemplo, si en el enunciado hay un deslizador, el trabajo matemático se podría obtener interactuando con él), como también fuera de ella. Aquí un ejemplo: el enunciado entrega una tarea, digamos, "factorice $x^2 - 2x$" y el estudiante lo resuelve por su cuenta o con algún software. Luego, el sujeto ingresa una respuesta mediante el sistema entrada de la tarea. Posteriormente, el sistema realiza el proceso de validación. Salvo el caso de selección múltiple, los sistemas de evaluación en línea usados en matemáticas deben contar con sistemas de cálculo simbólico o geométrico. Estos sistemas, junto a la configuración propia de la plataforma permiten determinar si las respuestas son correctas, parcialmente correctas o incorrectas. Una vez que el sistema valida, puede entregar un *feedback* a los estudiantes que, según Hattie (2008), es variado, pero que según la revisión de Gaona (2020) en los sistemas de evaluación en línea se limita solo a algunos tipos.

METODOLOGÍA

Se proponen tres casos de análisis. Los dos primeros se implementaron en una universidad pública chilena de la Región Metropolitana. El Caso 1 es una tarea sobre números complejos que se trabajó con 15 estudiantes en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas durante el primer semestre del 2021. Los detalles de implementación se pueden leer en Gaona *et al.* (2022). El segundo caso involucra una tarea que se trabajó con 12 estudiantes en primer año de formación inicial para profesores de matemáticas en el segundo semestre del 2020. Ambos grupos trabajaron de forma remota y sincrónica durante la pandemia. Los detalles de esta implementación se pueden leer en Gaona y Menares (2021). El tercer y último caso es una tarea de "estimar la imagen de un valor sobre una función afín". Se trabajó con 168 estudiantes de ingeniería, de los cuales 82 son de una universidad privada de la Región de Valparaíso y 86 de una universidad pública de la Región de Atacama. De los 168 participantes, solo se analizan 87 que, además de responder en la plataforma, indicaron cómo resolvieron la tarea. Los detalles de esta implementación se pueden leer en Gaona, Hernández *et al.* (2021).

Los datos se recolectaron mediante el registro de las clases virtuales para los casos 1 y 2, y de la información de la plataforma para el caso 3. El análisis fue cualitativo del contenido (Mayring, 2015), utilizando como categoría las génesis y planos del ETM. Se eligieron estos tres casos que muestran distintas características de las tareas en un sistema de evaluación en línea porque, además, se pueden apreciar diferencias en el trabajo matemático de los estudiantes y la influencia de los *feedback* diseñados en los datos recopilados.

Caso 1: Números complejos

Se presentaron 3 tareas con la misma estructura en el *enunciado*, pero parámetros distintos: escribir una de las raíces complejas de la ecuación $z^n = a$, donde a toma los valores -2 o 2 en la tarea 1 y los números enteros entre -9 y 9 en

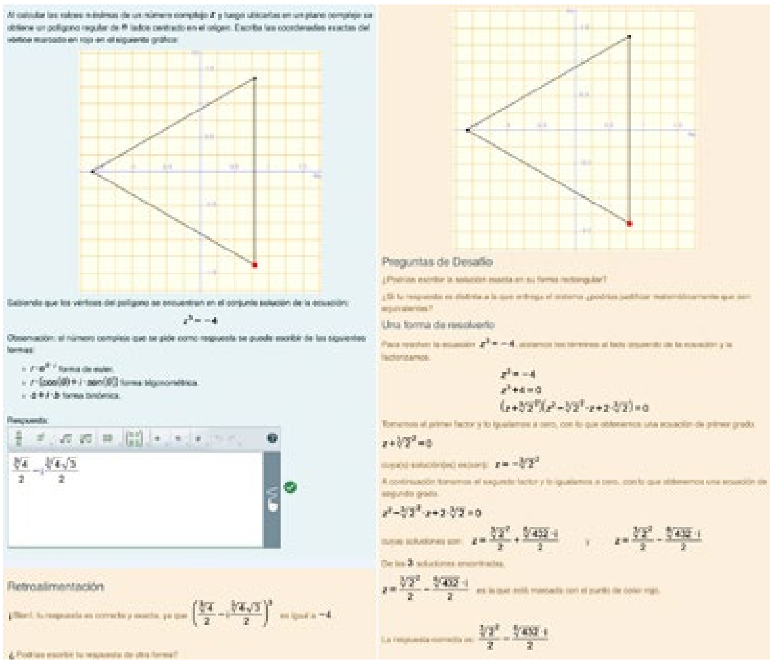


Figura 6. Capturas de pantalla de una de las tareas propuestas en plataforma de evaluación en línea sobre números complejos. En la parte de la izquierda, se pide la solución del cuarto cuadrante de la ecuación $z^3 = -4$. La estudiante ingresa una respuesta escrita en coordenadas rectangulares con las raíces factorizadas. El sistema le da varios tipos de *feedback*: 1) la evalúa como correcta, 2) indica por qué es correcta, 3) le pregunta si la podría escribir de otra forma[3] y da una solución paso a paso mediante factorización.

3 El feedback pide escribirla en forma rectangular, aunque la respuesta ya está en forma, este es un error de programación que se corrigió en las siguientes versiones de la pregunta.

las tareas 2 y 3. El exponente *n*, en cambio, en la pregunta 1 siempre vale 3 (ver **Figura** 6) y en las tarea 2 y 3 varía entre $n = 3$ o $n = 4$ (ver figura 7). Además de la ecuación, se presenta un plano complejo con las tres raíces marcadas en él. La unión entre las raíces forma un triángulo equilátero (**Figura** 6) o un cuadrado (**Figura** 7) dependiendo de la variante de la tarea a la que se enfrentan los estudiantes. La raíz que se pide está marcada en rojo y tiene un tamaño ligeramente mayor que el resto de las raíces de la ecuación marcadas en el plano cartesiano.

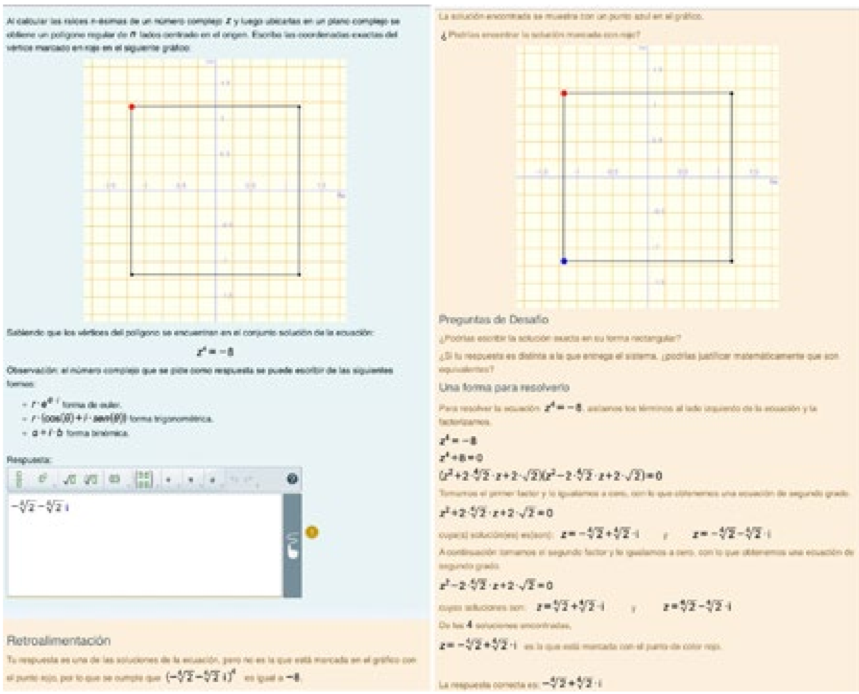


Figura 7. Pantallazos de una de las tareas propuestas en plataforma de evaluación en línea sobre números complejos. En el de la izquierda, se pide la solución del segundo cuadrante de la ecuación $z^4 = -8$. La estudiante ingresa una respuesta en coordenadas rectangulares. El sistema le da varios tipos de *feedback*: 1) la evalúa como parcialmente correcta, 2) indica por qué está parcialmente correcta, en particular, ubica lo que ingresó en el plano complejo y se lo marca en azul, mostrando que es solución de la ecuación, pero no es la que se pedía, 3) le pregunta si la podría escribir de otra forma y da una solución paso a paso mediante factorización.

El *sistema de entrada* es un editor de ecuaciones para escribir los números complejos de forma rectangular, polar o de Euler. El *sistema de validación* evalúa respuestas matemáticamente equivalentes, diferencia entre una respuesta aproximada y una exacta, y distingue entre las soluciones de la ecuación ingresadas. El *sistema de feedback* (**Figura** 6) entrega información en función de la respuesta y también un "paso a paso" en función de los parámetros.

Al consultarles si habían estudiado números complejos (en la escuela), la mayoría de los estudiantes lo negó; los que respondieron que sí solo tenían algunos recuerdos vagos y aislados, por ejemplo, indicaron que salían de la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. El propósito de la tarea es que los estudiantes utilicen diferentes artefactos digitales[4], tales como Photomath, Wolfram Alpha, Symbolab, Geogebra y Calcme, analicen y contrasten las distintas respuestas que estos entregan, es decir, los estudiantes tienen que elegir las soluciones más adecuadas para ingresar a la plataforma Moodle/Wiris. Luego se discutió en clases a partir de las exploraciones que realizaron en cada artefacto digital.

Caso 2: Fracciones

La tarea propuesta fue escribir una fracción que estuviera entre ¼ y ½. Además de las representaciones numéricas de tales fracciones, se presenta su representación en la recta numérica. Esta tarea se concibió para discutir sobre las estrategias que surgen, sus justificaciones y la posibilidad de generalizarlas y demostrarlas.

El *enunciado* de la tarea pide ingresar una fracción de la forma *a/b*, con *a* y *b* enteros, que esté entre ¼ y ½; se muestra parte de la recta real donde se ubican estos valores. El *sistema de entrada* es un editor de ecuaciones. El *sistema de validación* clasifica las respuestas entre incorrectas, parcialmente correctas o correctas. La respuesta ingresada en la **Figura** 8(a) califica como "parcialmente correcta" porque el estudiante ingresó un decimal en el numerador, y se pidió en las instrucciones que la fracción tuviera números enteros en el numerador y el denominador. La respuesta ingresada en la **Figura** 8(b) se considera correcta, pues cumple con todos los requisitos.

El *sistema de feedback* precisa si la respuesta ingresada es correcta, parcialmente correcta o incorrecta, y también muestra por qué. Esto lo hace ubicando en la recta numérica el valor ingresado e indicando si cumple con el

4 Los artefactos digitales propuestos fueron: photomath, que es una aplicación para dispositivos móviles; Calcme que es una aplicación disponible vía web: www.calcme.com y el resto, son aplicaciones disponibles, en aplicaciones móviles y vía web: https://www.wolframalpha.com/, https://es.symbolab.com/ y https://www.geogebra.org/graphing.

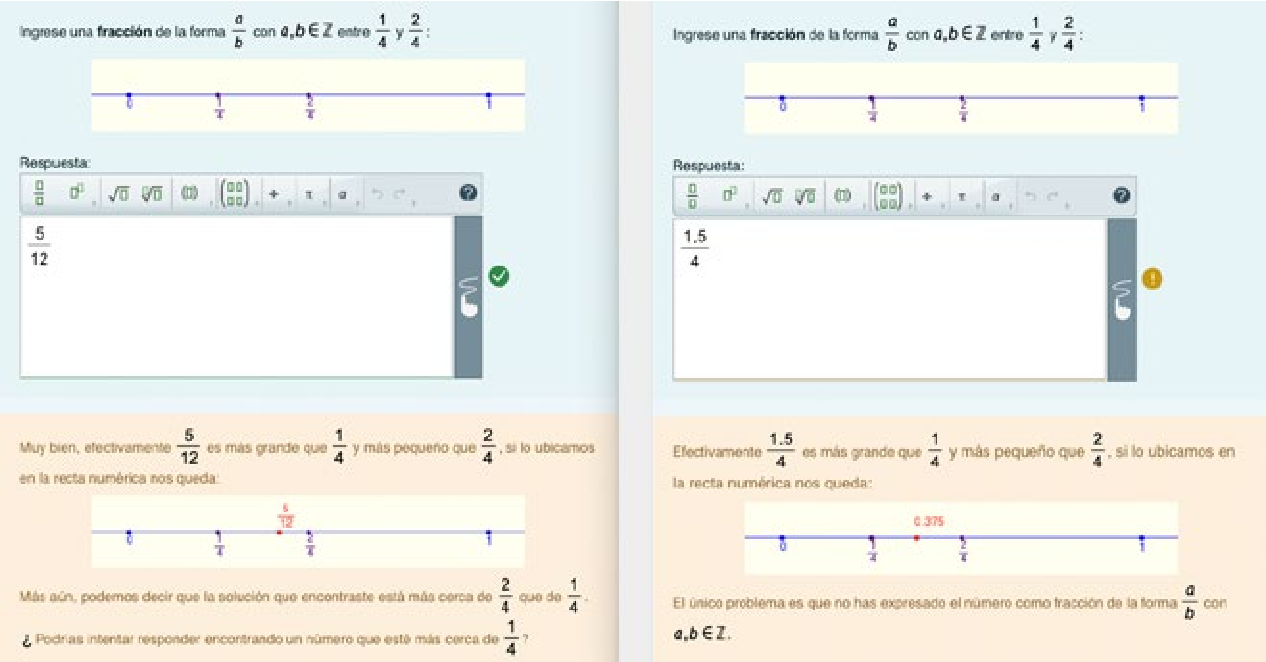


Figura 8. Tareas propuestas en la plataforma de evaluación en línea sobre fracciones. En (a) la respuesta ingresada es 5/12 y el sistema la considera correcta. En (b) el valor es correcto pero la forma en que se ingresó no es la solicitada en las indicaciones del enunciado.

resto de las condiciones; es decir, no brinda la respuesta ni sugiere ninguna estrategia de resolución. Además, para los aciertos, invita al usuario a buscar valorea alternativos al ingresado, por ejemplo, en la **Figura** 8(a), se pide ingresar un valor más cercano a 1/4.

Para implementar la tarea se hizo un trabajo individual en la plataforma de 10 minutos, donde debían encontrar una fracción entre ¼ y ½. Durante el resto de la sesión se discutió sobre las estrategias encontradas, su generalización y demostración.

Caso 3: Estimación de la imagen de una función en un gráfico

Se solicita estimar la imagen de un valor a partir del gráfico de una función. Hay dos versiones de la tarea: en la primera los coeficientes de la ecuación lineal son enteros y en la segunda son decimales.

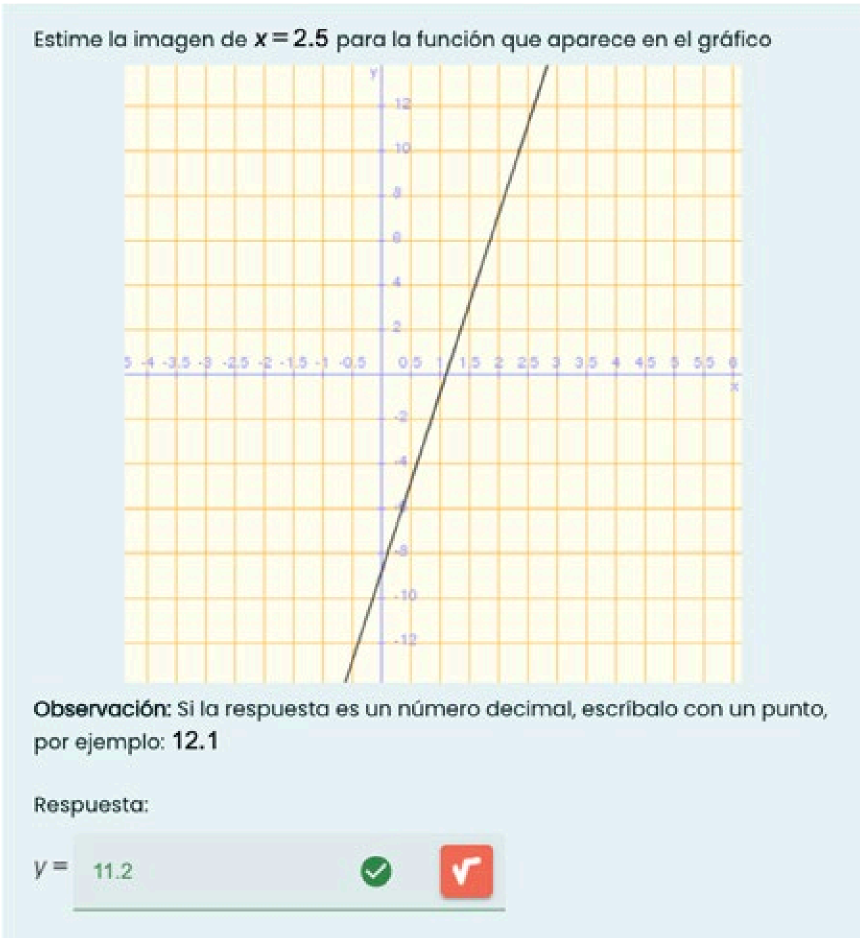


Figura 9. Una de las tareas propuestas en la plataforma de evaluación en línea sobre gráficos. Los coeficientes que definen a la recta son valores decimales, la cuadrícula es de 1 en 1 en el eje x y de 10 en 10 en el eje y. Estos elementos varían en cada pregunta. Extraído de Gaona, Hernández *et al.* (2021).

El *enunciado* de la tarea requiere "estimar la imagen de un valor", y como información se entregan el valor y la función representada de forma gráfica. En la pregunta hay elementos parametrizados (aleatorios) definidos por un algoritmo. Los parámetros aleatorios son: la imagen que pide evaluar (en este caso x = 2.5), la cual puede variar un número entre -8 y 8 con un paso de 0.5 (excluyendo el 0). Los coeficientes que definen a la función que se grafica en el plano cartesiano: pueden ser números enteros o decimales aleatorios. Es decir, si la ecuación de la recta, en ambos casos, es de la forma *y = mx+b*, entonces en una versión de la pregunta los parámetros *m* y *b* son números enteros y en la otra son números con un decimal. Los elementos del plano cartesiano: el alto está definido a partir de un algoritmo en función de los parámetros de la función afín. En cambio, el centro y ancho son fijos. Por ejemplo, en las figuras 9 y 10, el centro es el punto (0,0), el ancho es 20 (10 unidades hacia la derecha e izquierda desde el centro). Por otra parte, el alto de la **Figura** 9 es un poco más de 70 (35 unidades hacia arriba y hacia abajo desde el centro).

En el *sistema de entrada*, el estudiante tiene un espacio para ingresar la respuesta que es de texto plano, pero también hay un editor para ingresar fracciones u otro tipo de símbolos matemáticos. En el *sistema de validación*, la plataforma cuenta con un sistema de cálculo simbólico que permite determinar si una respuesta está en el rango correcto definido en un algoritmo diseñado para esto. El *sistema de feedback* indica si la respuesta es correcta o no. Además, muestra una solución paso a paso donde la estrategia propuesta es trazar una línea vertical y luego horizontal para luego estimar el valor de la imagen (**Figura** 10).

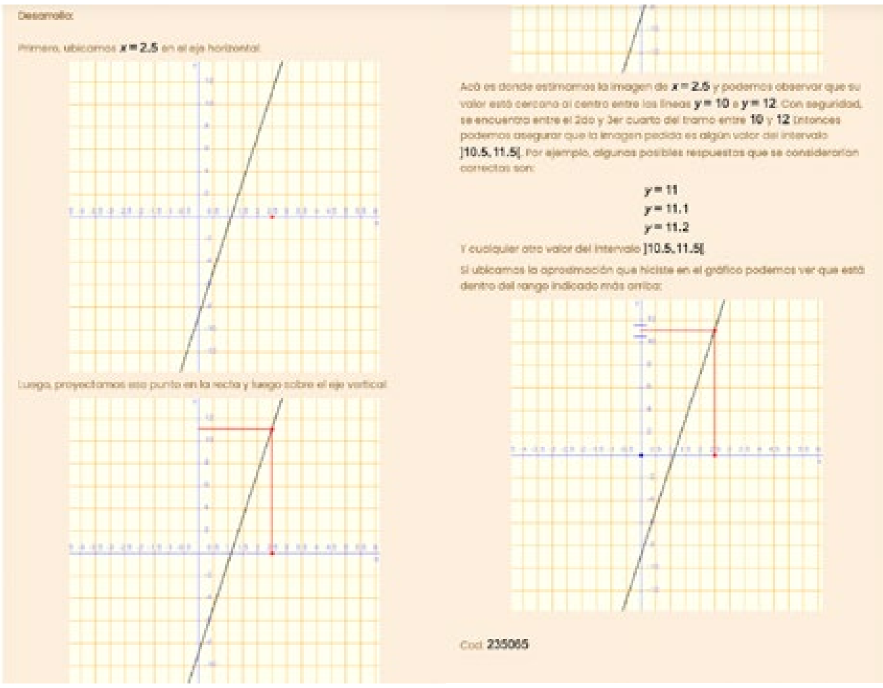


Figura 10. *Feedback* de la pregunta mostrada en la **Figura** 9. Extraído de Gaona, Hernández *et al*. (2021).

RESULTADOS

Los resultados se dividen en tres partes. En la primera, se analiza el rol de los registros de representación, los números que componen estas representaciones y su influencia en el trabajo matemático de los estudiantes. En la segunda parte, se analiza un tipo de pregunta: la pregunta abierta y su influencia en el trabajo matemático. En la tercera y final, se analiza el rol del *feedback* en el trabajo matemático.

Los registros de representación semiótica y los números utilizados en las representaciones de los objetos matemáticos

Las representaciones de los objetos en el enunciado pueden activar la visualización. Tomemos una de las tareas del Caso 1 sobre números complejos; hay dos registros, el algebraico de la ecuación y el gráfico de las soluciones de ésta. Como con ninguno de los registros por sí solo se puede resolver la tarea, puesto que con el algebraico se pueden obtener las soluciones, pero el gráfico indica cuál de ellas se está solicitando, los estudiantes necesitan visualizar las soluciones para saber cuál elegir.

Por otra parte, al utilizar distintos artefactos digitales, se ve que las soluciones que muestran son distintas. Por ejemplo, Symbolab entrega cuatro soluciones simbólicas expresadas con raíces, en cambio en GeoGebra, con el comando *Resuelve(z^4=-5)* aparece solución vacía y con el comando *RaízCompleja(z^4+5)* se obtienen cuatro soluciones complejas aproximadas.

Frente a este resultado, Scarlet, una de las estudiantes que trabajó en estas tareas, indica que no comprende la tarea ni lo que debe hacer. El profesor le pide que comparta pantalla y, acto seguido, que ingrese alguna de las soluciones obtenidas con Symbolab (**Figura** 11). Al comienzo, hay problemas para ingresar los símbolos (episodio que no se analiza acá y que ocurre entre los 49:46 min y 55:10, pero que es analizado en Gaona, López *et al.* (2021)). Superado lo anterior se produce una interacción entre la estudiante y los artefactos junto con un diálogo que da cuenta del tránsito de una génesis instrumental a un plano semiótico-instrumental que le ayuda a comprender los objetos involucrados.

Figura 11. Al ingresar $z^4=-5$ a Symbolab, esta aplicación entrega cuatro soluciones expresadas con raíces. Las cuatro son complejas.

Tabla 1.Transcripción del episodio de Scarlet.

Scarlet: 46:26 Profe, ¿sabe qué? Sinceramente, no sé cómo hacerlo. Como que me explota el cerebro. O sea, estoy ocupando Symbolab, pero… o sea, como que no… no entiendo en sí el ejercicio. No, no logro entender que por qué da eso.
P: 46:46 Ya, comparte pantalla para ver qué es lo que se entiende y qué es lo que no
Scarlet: 46:51 No entiendo nada, pero ya voy a compartir pantalla. Es que me frustra no entender…
Scarlet: 47:03 Ya, mire. Eso es lo que sale, pero no sé qué es lo que me sirve y qué es lo que no, y por qué da eso.
P: 47:17 Mira, ¿puedes abrir otra pestaña donde abras la calculadora de GeoGebra e ingresar las soluciones obtenidas en Symbolab?
P: 49:31 Entonces, en la primera… dice raíz cuarta de 4 por raíz de 2, partido por 2, más la raíz cuarta de 5/4 por i. ¿Cierto?
P: 49:46 Ingrésala ahí al GeoGebra.
Scarlet: 55:10 Entonces, ese es un punto que está… que sería… sería el de acá, ¿o no? No.
Scarlet: 55:25 No sé qué punto es.
P: 55:27 Ubica los otros puntos para que sepas cuál es.
Scarlet: 55:32 Ya me di cuenta.
P: 55:36 ¿Cuál es?
Scarlet: 55:38 O no sé si… a ver déjeme seguir analizando. Es el punto rojo, ¿o no? Este de acá.
EH: 55:48 Era el otro. Ah, depende la pregunta.
P: 55:52 ¿Y cómo puede saber si el punto rojo?
Scarlet: 55:56 Porque aquí están los reales y los imaginarios están acá y aquí está el 1 en positivo y aquí también [refiriéndose a los ejes del plano complejo]. No sé cómo fundamentar mi respuesta, profe, la verdad.
P: 56:15 No, pero está bien. Está bien lo que estás diciendo. O sea…
Scarlet: 56:18 O sea, los relaciono más que nada.
P: 56:21 Ya, mira. De hecho si tú haces un zoom al z_1 en el GeoGebra.
Scarlet: 56:26 ¿Aquí?
P: 56:29 Para ver… el gráfico. Ahí sale un signo +, una lupita.
Scarlet: 56:34 ¿Y cómo corro esto? Ah, ya.
Scarlet: 56:51 Ahí está la lupita.
P: 56:54 ¿Ahora estás entendiendo lo que estás buscando? ¿no?
Scarlet: 56:57 Sí, profe, ahora me queda completamente claro. ¿Y qué es lo que te pide acá? Ahora hay que entender lo que te pide.
P: 57:13 Y, de hecho, ahora leamos el *feedback* que te aparece acá.
Scarlet: 57:19 Ajá.
P: 57:20 Ya, ¿y qué dice en el *feedback*? Que es la parte como media cafecita amarillenta. Léela.
Scarlet: 57:26 Es como roja.
P: 57:28 O como roja, no sé.

Scarlet: 57:30 No sé leer, profe. No sé cómo pasé a la U. Dice "Tu respuesta es una de las soluciones de las ecuaciones, pero no es la que está marcada en el gráfico con el punto rojo, por lo que se cumple que la cuarta raíz de 5 por la raíz de dos, partido en 2, menos la cuarta raíz de 5/4 por i, elevado a 4, es igual a -5. La solución encontrada se muestra con un punto azul en el gráfico. ¿Podrías encontrar la solución marcada con rojo?" Hay que buscar este punto de acá. Pero ahí está lo encontré en GeoGebra.
P: 58:10 Claro, pero ¿cuál fue la que tú ingresaste?
Scarlet: 58:12 Había… esa.
P: 58:16 En el gráfico, ¿cuál sería?
Scarlet: 58:20 Ah, la de acá, concha la lora. Era esa, esta de acá.
P: 58:35 ¿ Y en qué se diferencia esa con la otra?
Scarlet: 58:39 No sé, ahora lo veo.
Scarlet: 58:44 Ah, es que esta es una suma, profe.
P: 45:46 ¿Y la otra?
Scarlet: 58:47 Y la otra… No sé si mi respuesta estaba bien. O sea, era lo mismo solamente que esta era una resta. Si le cambio a suma.

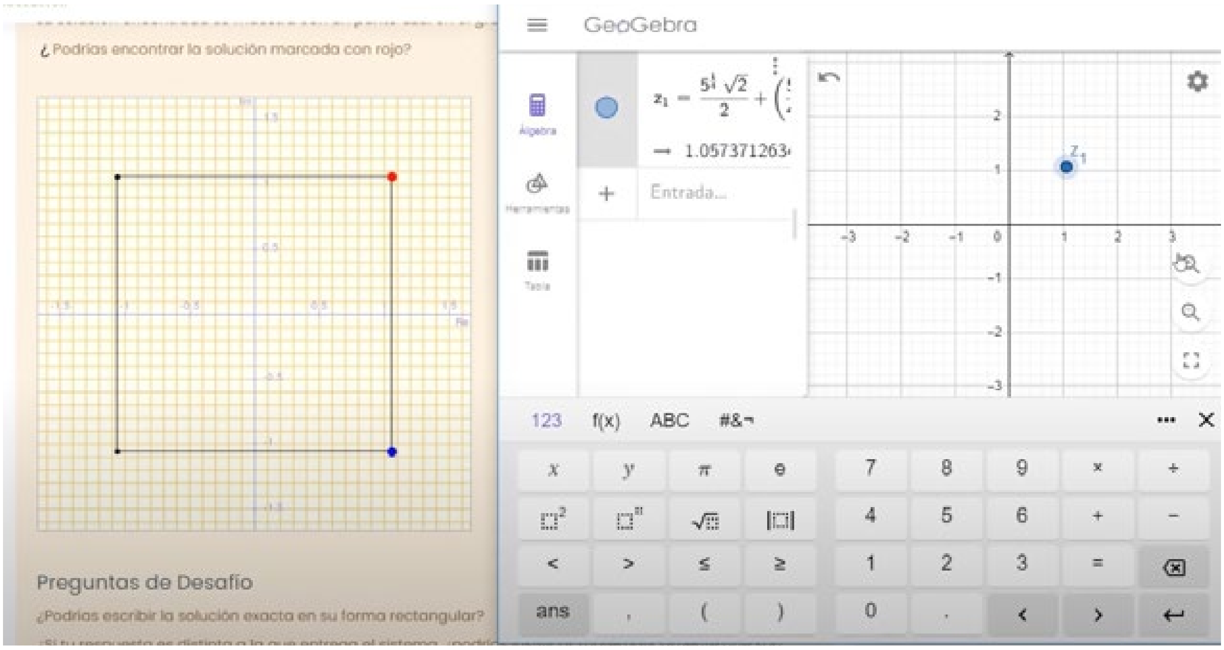


Figura 12. Captura de pantalla del trabajo de Scarlet donde compara la información que entrega la tarea en Moodle/Wiris y el punto que graficó en GeoGebra.

Al analizar el trabajo de Scarlet se constata que logra darle significado a los objetos cuando triangula lo que pide la plataforma Moodle/Wiris, con lo que entrega Symbolab y con la representación gráfica que se obtiene en GeoGebra. Se concluye que un trabajo exclusivamente *instrumental* (por ejemplo, uso de Symbolab) no es suficiente para interpretar las soluciones: es necesario conectarla con la *génesis semiótica* para que pueda comprender qué tipo de objeto es, saber elegir la solución que le sirve y darle sentido a los objetos involucrados. Este trabajo está motivado por la articulación de distintos artefactos digitales y por la presencia de dos registros en el enunciado.

Por otra parte, si tomamos la tarea sobre "estimar la imagen de un valor" a partir de una función representada de forma gráfica del Caso 3 (ver **Figuras** 9 y 10), podemos ver que se utiliza un solo registro para ambas versiones de la tarea. La diferencia entre estas versiones radica en que los coeficientes de una de ellas son números enteros y los de la otra son decimales. La Tabla 2 y la **Figura** 13 muestran la estrategia utilizada según la versión.

Tabla 2. Estrategias utilizadas por los estudiantes.

	Decimales (n)	Enteros (n)	Decimales (%)	Enteros (%)
1. Estima	40	26	63.49 %	46.43 %
2. Calc. ec. de la recta	13	25	20.63 %	44.64 %
3. Estima y calc. ec. de la recta	1	0	1.59 %	0.00 %
4. No recuerda	1	1	1.59 %	1.79 %
5. Otra	1	0	1.59 %	0.00 %
6. No identificable	7	4	11.11 %	7.14 %
Total	63	56	100.00 %	100.00 %

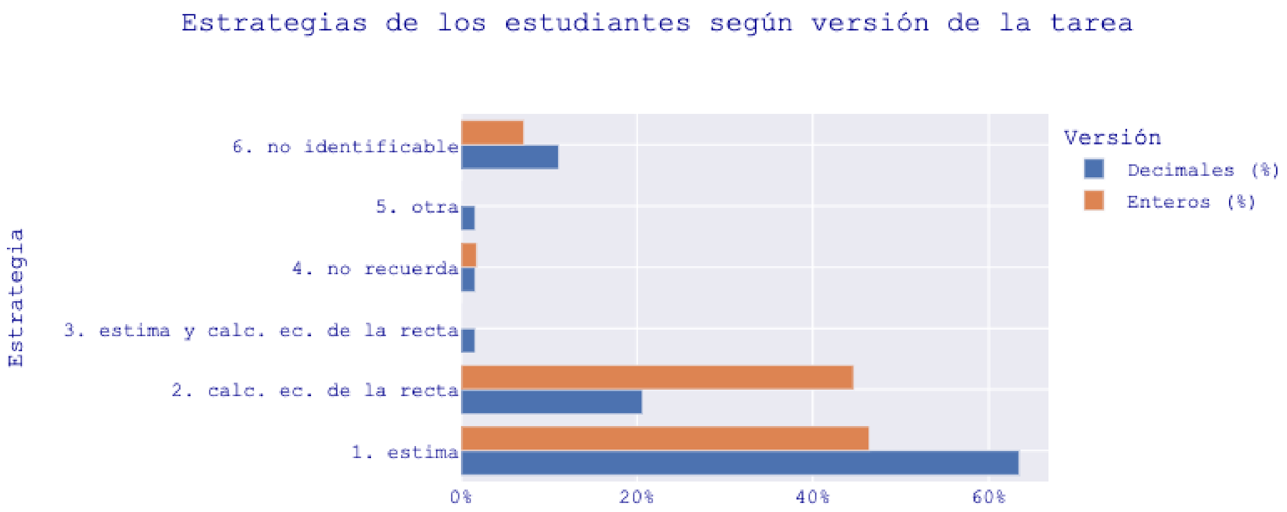


Figura 13. Estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver una tarea de estimación donde los coeficientes eran enteros o decimales.

En los datos se observa que, cuando los estudiantes resuelven la tarea con coeficientes enteros, las estrategias que eligen son la estimación y el cálculo de la ecuación de la recta en proporciones prácticamente idénticas. En cambio, en la versión con decimales, la estrategia de estimación es elegida tres veces más que aquella donde calculan la ecuación de la recta. Sobre la base de estos datos se puede concluir que la naturaleza de los coeficientes influye en la forma que los estudiantes visualizan y resuelven la tarea.

Las otras estrategias aparecen de forma marginal. En particular, llama la atención que las estrategias "estima" y "calcula la ecuación de la recta" prácticamente no se utilicen de forma conjunta, es decir; si un estudiante usa la ecuación de la recta, no recurre a la estimación para confirmar o controlar la solución.

Desde el ETM, la estrategia "calcula la ecuación de la recta" se interpreta como un trabajo que está en el plano semiótico-instrumental, porque se despliega una visualización pero orientada al uso de la fórmula de la ecuación de la recta como artefacto simbólico. En este encargo es tan fuerte el trabajo instrumental que la visualización directa prácticamente no es usada para controlar esta solución algebraica, puesto que una cantidad marginal de estudiantes usan ambas estrategias de forma conjunta.

En ambos casos se observa que los registros semióticos y los números que lo definen (los cuales en este caso no son explícitos) influyen en el trabajo matemático de los estudiantes.

Las preguntas abiertas

Las preguntas abiertas son las de los Casos 2 y 3. En el 2, los estudiantes deben encontrar una fracción entre otras dos. Como la pregunta tiene infinitas soluciones, aparecen de forma natural diferentes estrategias. En la información recogida sobre el trabajo de los estudiantes, se identificaron 3 estrategias: ensayo y error mediante decimales, por amplificación de las fracciones y mediante

Tabla 3. Transcripción de la demostración de la conjetura: si se amplifica el numerador y denominador de ¼ y $^{2}/_{4}$ por n, obtengo n-1 fracciones entre ellas. Extraído de Gaona y Menares (2021)

170. P: E2 nos dijo que había demostrado la otra conjetura. Que si tenemos ¼ y ½ y lo amplifico por n entonces hay n-1 fracciones entre ambos números y E2 dijo que lo había demostrado. ¿Lo quieres mostrar?
171. E2: Profe lo hice en Paint.
172. […] P: Explícanos lo que estamos viendo (E2 está demostrando que al amplificar por n se obtienen n-1 fracciones entre ambas).
173. E2: definí cuantas fracciones… espere, me enredé \\ Puse las fracciones una por una entre n/4n y 2n/4n: n/4n, n+1/4n, …, (2n-1)/4n,2n/4n y conté todas las fracciones que había. Para contarlas resté el numerador de acá [refiriéndose 2n-1] y el de acá [refiriéndose a n] y se obtiene 2n-1-n y me dio n-1.
174. P: Está muy buena la demostración, ¿alguien tiene alguna observación?
175. E2: Puse todas las fracciones que hay entre n/4n y 2n/4n y luego las conté calculando 2n-1-n=n-1.

transformación a decimales. Estas estrategias, mediante un proceso de discusión, dieron paso a una serie de conjeturas de parte de los estudiantes. Una de ellas fue que, en una fracción, al amplificar el numerador y el denominador por *n*, se obtienen *n*-1 fracciones entre ambas fracciones.

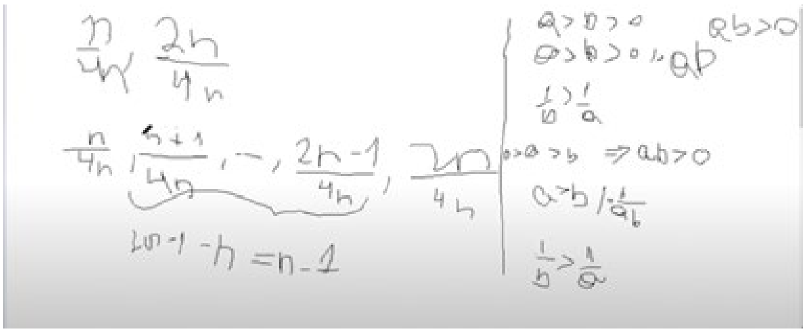


Figura 14. Captura de pantalla de un estudiante explicando la demostración a la conjetura planteada en la clase. Extraído de Gaona y Menares (2021).

La demostración fue realizada por uno de los estudiantes y compartió su resultado en pantalla.

El trabajo inicial de los estudiantes describió las estrategias y las justificaciones fueron principalmente instrumentales, pero en el diálogo, los estudiantes transitaron hacia una génesis discursiva dada por la justificación de las estrategias como las demostraciones de las conjeturas y apoyada en algunos artefactos simbólicos del álgebra.

El *feedback*

En el primer caso, en las tareas sobre números complejos, hay tres tipos de *feedback*, el primero indica si la respuesta es correcta o no. El segundo enseña algebraicamente (evalúa la solución en la ecuación y verifica si se cumple la igualdad) y gráficamente (marca en el plano la solución propuesta) por qué es correcta o incorrecta. Por ejemplo, si los estudiantes ingresan alguna de las soluciones de la ecuación, pero distinta a la marcada en rojo, la verificación algebraica indica que la igualdad se cumple, pero la representación gráfica muestra que lo ingresado no corresponde. Si, por ejemplo, se ingresa una respuesta aproximada, la verificación algebraica indica que la solución es cercana pero no exacta y la gráfica no muestra esa diferencia. El tercer y último tipo de *feedback* da una solución paso a paso de una estrategia mediante factorización algebraica.

El *feedback* aparentemente menos útil para los estudiantes fue el último, porque los estudiantes no lograron comprenderla; generó más dudas que certezas. Esta incomprensión del *feedback* permitió que el profesor pudiera indagar cuáles eran las dudas específicas respecto al proceso de solución paso a paso, pero pudo haber inhibido algunas estrategias distintas, por ejemplo, alguna con perspectiva geométrica.

De forma global, se observa un débil referencial teórico del álgebra: aunque recuerdan algunos elementos, no logran comprender la factorización propuesta en el *feedback* Moodle/Wiris. Hay cuatro procesos sobre los cuales los estudiantes tienen dificultades, uno es la factorización; el segundo es la utilización de las propiedades para descomponer la ecuación en dos ecuaciones más simples; el tercero es sobre la solución de la ecuación de segundo grado que queda al factorizar; el cuarto es convertir las soluciones con argumento negativo en la raíz en números complejos. Salvo lo último, el resto son elementos que están de forma superficial en su referencial teórico. También se observa que algunos estudiantes no pueden movilizar elementos de control para identificar que la solución entregada por algunos *softwares* (cuando ingresan mal los datos) no es adecuada. En cambio, el *feedback* en función de la respuesta ayuda a comprender el significado de los objetos involucrados, pero, por su naturaleza, no permite saber cómo resolver las tareas.

En el segundo caso sobre fracciones, el *feedback* no especifica cómo resolver la tarea, solo indica por qué la respuesta es correcta o parcial. Al ser una pregunta abierta, no condiciona las estrategias de los estudiantes. En el tercer caso sobre estimación de la imagen de una función en un gráfico, el *feedback* sí indica cómo hacerla paso a paso. Se propone cómo estimar un gráfico y en la programación de esta retroalimentación hay un grado de ambigüedad por la naturaleza misma de la estimación. En los resultados se observa que este paso a paso logra modificar el trabajo matemático de algunos estudiantes y hace que la estimación sea la estrategia más utilizada en ambas versiones, aunque no modifica la estrategia de todos los estudiantes y hay algunos que incluso pasan de estimar a calcular la ecuación de la recta.

CONCLUSIONES

En estos tres casos se puede observar el impacto de algunas de las variables didácticas en el trabajo matemático, tales como los objetos matemáticos involucrados, las representaciones semióticas utilizadas y otras componentes, como los números que definen los objetos, las preguntas abiertas y el *feedback*. Cada uno de estos elementos afecta de forma diferente el trabajo matemático y da muestras de lo complejo que puede ser el diseño de una tarea. Se observó que el uso específico de distintas representaciones o distintos tipos de números puede activar la génesis semiótica. En cambio, en los datos observados, la génesis discursiva se activó principalmente a través del trabajo con el profesor. El rol del profesor es fundamental, porque permite, mediante la discusión, que los estudiantes circulen por distintas génesis y planos, enriqueciendo su trabajo matemático.

Este trabajo no aborda todos los aspectos del diseño de tareas, pero busca dar algunas pistas y principios que permitan orientar el diseño teniendo en cuenta elementos epistemológicos, instrumentales y didácticos en sistemas de evaluación en línea.

REFERENCIAS

Ainley, J., Pratt, D. & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, 32(1), 23–38. https://doi.org/10.1080/01411920500401971

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In A. Michèle, G. Régis, L. Colette, T. Patricia, & B. Nicolas (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 364–370). La Pensée Sauvage Éditions.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2015). Semiotic mediation in the mathematics classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Issue 10872). https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28

Bartolini, M. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola* (Vol. 51, Issue 1). Springer-Verlag Mailand. https://doi.org/10.1007/88-470-0403-9

Bastias, D. A. (1980). *Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function Criterios Epistémicos para el Diseño de Tareas sobre Límite de una función en una variable Real*. 179–205.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 97–126.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.

Flores, J., Gaona, J. & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Flores, J. V. & Carrillo, F. I. (2019). Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. *Uni-Pluriversidad*, 19(2). https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.08

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(3–4), 361–372. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.001

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas.* https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946/

Gaona, J. (2021). Trabajo matemático instrumentado ¿qué matemática trabajar cuando hay programas que resuelven tareas mediante una foto? *Simposio ETM 6.1 Sobre El Trabajo Matemático*, 1–6. http://static.ima.ucv.cl.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2021/03/Escrito_Jorge_Gaona_ETM6.1.pdf

Gaona, J., Hernández, R. & Bravo, F. G. y V. (2021). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. *Arxiv.* https://arxiv.org/pdf/2107.11448.pdf

Gaona, J., López, S. & Montoya-Delgadillo, E. (2021). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *Arxiv.*

Gaona, J., López, S. & Montoya-Delgadillo, E. (2022). Aprendizaje de los números complejos usando diferentes sistemas de cálculo simbólico y un sistema de evaluación en línea en formación inicial de profesores. *Arxiv*, 1–27. http://arxiv.org/abs/2201.00407

Gaona, J. & Menares, R. (2021). Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17. https://doi.org/10.29333/ejmste/11425

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P., Tanguay, D. & Vivier, L. (2019). Actas sexto simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018). In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Guerrero-Ortiz, C. & Mena-Lorca, J. (2017). Modelling Task Design: Science Teachers' View. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 389–398. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_32

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carillo Yáñez, J., Climent, N. & Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 39(2), 123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas (A. Contin, Trans)* (8va Ed.). Fondo de cultura económica.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). *Mathematical Work in Educational Context*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2018). La visualización en análisis. In C. A. Cuevas Vallejo, M. Martínez Reyes, & R. G. Cruz Flores (Eds.), *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (pp. 1–18). Pearson Educación de México.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(4), 1–8. https://doi.org/https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. ZDM - *Mathematics Education*, 48(6), 721–737. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education. An ICMI Study*, 22 (pp.

191–225). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_6

Lozano, M. D. (2017). Investigating task design, classroom culture and mathematics learning: an enactivist approach. ZDM - *Mathematics Education*, 49(6), 895–907. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0890-4

Martínez, S., Guíñez, F., Zamora, R., Bustos, S. & Rodríguez, B. (2020). On the instructional model of a blended learning program for developing mathematical knowledge for teaching. ZDM - *Mathematics Education*, 52(5), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01152-y

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Menares, R. (2018). Planos dirigidos en el ETM personal de profesores en formación: una herramienta metodológica. In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp. 245–256). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J. & Mena-Lorca, A. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 188–203. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a09

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2016). Development of the competence in didactic analysis of training of future mathematics teachers through task design. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 19(1), 71–98. https://doi.org/10.12802/RELIME.13.1913

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 405–422. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x

Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A. & Wong, K. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 227–250). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_10

Sierpinska, A. (2014). Research in mathematics keyhole: education through a task. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 7–15.

Simon, M. A., Placa, N. & Avitzur, A. (2016). Participatory and anticipatory stages of mathematical concept learning: Further empirical and theoretical development. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 63–93. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.1.0063

Stacey, K. & Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 721–751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigacion En Educacion Matematica*, 15, 43–55. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256

Vandebrouck, F. (2013). *Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5

Watson, A. & Ohtani, M. (2015). Task Design in Mathematics Classrooms. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), ICMI *Study* 22. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 297–321. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0606-5