

# PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LÓGICA MATEMÁTICA EN UN CURSO PROPEDEÚTICO BAJO LA TEORÍA APOE

A DIDACTIC PROPOSAL FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS LOGIC ON APOS THEORY

**Jesús Alfonso Noriega Márquez**

DIVISIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO, FACULTAD DE INGENIERÍA,  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO

[jalfonsonoriega@gmail.com](mailto:jalfonsonoriega@gmail.com)

## **RESUMEN:**

El siguiente trabajo es una propuesta para enseñar tablas de verdad en un curso propedéutico para la carrera de ingeniería. La propuesta se divide en dos partes, la primera es un análisis de los conocimientos que debe tener un estudiante antes de llevar los cursos de Cálculo Diferencial, presentados en forma de esquemas por la teoría APOE y la segunda parte es una descomposición genética del concepto de tabla de verdad, en el cual se explican las abstracciones que debe ir desarrollando el estudiante para crear las estructuras mentales que formen el concepto.

**Palabras clave:** propuesta didáctica, tabla de verdad, teoría APOE.

## **ABSTRACT:**

This paper is a proposal to teach truth tables in a preparatory course in Engineering career. The proposal is divided in two parts, the first is an analysis of knowledge must have a student before taking courses differential calculus, presented in the form of schemes in APOS theory and the second part is a genetic decomposition of the concept of truth table in which the abstractions that should be developing the student to create mental structures that form the concept are explained.

**Key words:** APOS theory, didactic proposal, truth table.

## INTRODUCCIÓN

### CURSO PROPEDEÚTICO

Muchos de los estudiantes temen estudiar una carrera en ingeniería por la fuerte base matemática que ésta involucra, principalmente por materias referentes al análisis infinitesimal, además que el cálculo es el culpable de que cerca del treinta por ciento de los estudiantes deserten una vez que deciden estudiar una licenciatura en ingeniería (Farfán, 1997). Es por ello que se han desarrollado diferentes estrategias para que el alumno pueda demostrar aprendizaje principalmente en esta área de la matemática. Una de las propuestas que se están trabajando son cursos propedéuticos. La finalidad de un curso propedéutico es poder reforzar diferentes conceptos que el alumno ya cursó, en este caso, dentro de la preparatoria.

Ausubel, Novak y Hanesian apuntan: “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983, p. 1). Es por ello que se le debe de dar la importancia requerida a un curso propedéutico. En éste se intenta generar o reforzar el conocimiento que necesita

el alumno para poder generar nuevo conocimiento en cursos posteriores. Ausubel indica que es importante saber cuáles son los conocimientos con los que cuenta el estudiante, y éstos conocimientos son los que queremos reforzar dentro del curso propedéutico, en este caso serían los conceptos de lógica matemática, para que estos sirvan como base de los siguientes conceptos que el alumno formará durante la curricula subsiguiente en ingeniería. Además, la descomposición genética propuesta por la teoría APOE requiere de ciertas bases para lograr un esquema de comprensión por parte del estudiante, Barbosa (2003) los nombra Preacción. Si el lector le interesa conocer más acerca de la importancia de un curso propedéutico desde un punto de vista constructivista se sugiere que se revise el artículo de Noriega (2015).

### TEORÍA APOE

La teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky para comprender la formación del conocimiento en los estudiantes. Está basada en los trabajos de Piaget sobre constructivismo, la cual nos menciona que el sujeto tiene que construir sus propios conocimientos, y no los puede recibir contruidos por los otros, aunque para la propia construcción sea indispensable la interacción entre individuo y medio. Y también se basa en la abstracción reflexiva que es un conocimiento no observable, pues es la

persona quien lo construye en su mente a través de relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, es un conocimiento que una vez aprendido ya no se olvida, ya que la experiencia no viene sobre los objetos sino sobre la acción de los mismos.

Para Dubinsky la abstracción reflexiva será la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos ya que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción de las acciones matemáticas para la solución de situaciones, a este análisis Dubinsky lo llamo "análisis cognitivo" (Cañas Gutiérrez, 2010).

De este análisis cognitivo surge la teoría APOE, que es llamada así por sus siglas Acción, Proceso, Objeto y Esquema, los cuales son construcciones mentales que produce el sujeto mientras va asimilando el conocimiento. La teoría nos ayuda a investigar el por qué de las dificultades que se presentan al construir un conocimiento. El análisis teórico que se desarrollará en la propuesta se divide en dos partes las estructuras mentales (acciones, proceso, objetos y esquemas) y las abstracciones mentales

(interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión) (Trigueros, 2005).

Dentro de las estructuras tenemos el más simple que es la acción, la cual es cualquier objeto físico o mental, convirtiéndose en un objeto matemático dentro de la experiencia del alumno. Son acciones que tienden a ser algorítmicas por su simplicidad donde el estudiante comienza a manipularlas, se hacen evaluaciones individualizadas relacionado con la aparición de números algebraicos y cálculo de valores resultantes. Conforme una acción se interioriza (generalmente por repetición) la acción se vuelve interna y se le conoce como proceso. Cuando el alumno llega al proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de transformación. Aquí el estudiante puede crear nuevos procesos por coordinación o reversión. Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera encapsulado para convertirse en un objeto. Una vez encapsulado el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta que permite nombrar el objeto y conectarlo con el proceso. El alumno debe ser capaz de des-encapsular su objeto y regresar al proceso para la resolución de problemas. El último nivel es el esquema, que es una colección de procesos y objetos,

donde pueden ser más o menos coherentes, pero el estudiante los utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observado. Un esquema puede tener esquemas subordinados y puede utilizarse para resolver una situación problemática desencapsulando y trabajando con los procesos y objetos del individuo. Después un esquema puede trabajarse como un objeto. La construcción de los esquemas requiere de un mecanismo llamado generalización, el cual permite un alcance más amplio.

Las abstracciones mentales que intervienen en el proceso de formación del conocimiento son las siguientes: *interiorización*: que es donde una acción se interioriza a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma. *Coordinación*: la coordinación de los procesos múltiples da como resultado nuevos procesos. Es necesario para un estudiante encontrar elementos de un nuevo tema y reconocer las estructuras subyacentes que permite la aplicación. *Reversión*: permite al estudiante concebir un nuevo proceso, que deshaga la secuencia de transformaciones que comprende el proceso inicial. Es la construcción de un proceso que es una contraorden de un proceso internalizado. *Encapsulamiento*: cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción se convierte en objeto. *Generalización*: permite un alcance más amplio de la

utilización del esquema. Se presenta cuando el estudiante amplía el ámbito de aplicación sin cambiar la estructura del esquema. (Meel, 2003).

## PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta a trabajar está diseñada para un curso propedéutico, por lo cual se espera que los alumnos posean ciertas nociones de los conceptos, o al menos, los hayan trabajado con anterioridad. La finalidad de la teoría APOE es que el estudiante pueda construir el concepto matemático a trabajar, en este caso el concepto que manejaremos serán las tablas de verdad. Para esto se creó una descomposición genética de las tablas de verdad, y se mencionan las diferentes abstracciones que necesita el estudiante para poder crear estructuras mentales con las cuales logre concebir el concepto trabajado. Se divide en dos partes, por un lado, se realiza un ejercicio, el cual si un estudiante es capaz de resolver es porque demuestra que tiene los conocimientos bien fundamentados y la segunda parte, en caso que el estudiante no resuelva el ejercicio, consta de la propuesta como tal para que el alumno vaya construyendo el concepto.

En este artículo solo se trabajan las tablas de verdad, pero se espera poder crear las descomposiciones genéticas de los diferentes temas a tratar en el curso propedéutico: lógica

matemática, teoría de conjuntos, trigonometría, ecuaciones e igualdades y desigualdades e inecuaciones.

La idea de la propuesta está basada en el libro “El laberinto mágico” de Ian Stewart (Stewart 2001), en el cual se plantea una serie de problemas o acertijos matemáticos que se tienen que resolver para avanzar dentro del laberinto y poder salir de él. Cada acertijo le sirve a Stewart para poder explicar diversos temas matemáticos y así resolver cada problema al que nos enfrentamos. De la misma manera se plantea diseñar el curso propedéutico, crear un cuestionario, en el cuál, la respuesta de cada pregunta necesite cierto nivel de conocimiento del concepto matemático además de ciertos esquemas a trabajar como el de interpretación y el de resolución. Si el estudiante logra resolver los problemas demuestra que maneja los esquemas necesarios para estudiar una ingeniería, en caso que no logre responder correctamente a los cuestionamientos se intenta desarrollar el conocimiento requerido dentro del curso propedéutico.

## LÓGICA

Para la parte de lógica lo que se espera en los alumnos es un correcto uso de las tablas de verdad, para ello se ha encontrado que el concepto se puede dividir en dos partes (Barbosa, 2003). Por un lado, analizamos si el estudiante puede interpretar un ejercicio que necesite uso de las tablas

de verdad para su resolución, y por otro lado analizamos si el estudiante conoce las definiciones, teoremas, leyes y propiedades necesarias para poder desarrollar las tablas de verdad. La teoría APOE nos maneja que para cada parte que dividimos el concepto el estudiante necesita manejar dos esquemas diferentes, uno para la interpretación y otro para la resolución. Es por ello que el cuestionario comienza con un ejercicio que está descontextualizado para poder averiguar cuantos y cuales estudiantes manejan el esquema de interpretación.

La *interpretación* la definimos como el conocimiento que necesita el estudiante para poder contextualizar cualquier problema que necesite un análisis, sin que necesariamente esté relacionado con la matemática. Así mismo una vez que resuelva el ejercicio, el estudiante debe ser capaz de regresar el resultado al contexto original.

La *resolución* la entendemos como los conocimientos que necesita el estudiante relacionado con las leyes, teoremas, algoritmos, operaciones, etc. Que son necesarios para poder resolver las tablas de verdad.

La pregunta correspondiente a la parte de lógica es la siguiente:

1. *¿Qué se necesita para pasar el curso? Justifique sus respuestas*

## **ANÁLISIS DE ESQUEMAS**

La idea del curso propedéutico es conocer el nivel que tiene el estudiante sobre los temas y conceptos que sirven como base para las diferentes materias que va a estudiar en ingeniería, es por ello que el propedéutico se plantea con los conceptos que sirven como pre-acción a los diferentes procesos que desarrollara el estudiante. Por eso se observa que la pregunta no plantea que se trabaje directamente con lógica matemática, mucho menos con tablas de verdad. Para que el profesor pueda observar que: si el estudiante logró identificar y asociar la pregunta con tablas de verdad es porque posee tanto el esquema de interpretación como el esquema de resolución, lo cual indica que el estudiante comprende el concepto matemático y puede utilizarlo y aplicarlo en una gran variedad de problemas que no tienen que ver directamente con la lógica. En caso de no lograr resolverlo o utilizar una técnica diferente a las tablas de verdad es porque el estudiante no posee el esquema de interpretación. Para poder proseguir con el análisis se explicará que se entiende por esquema de interpretación y esquema de resolución.

## **ESQUEMA DE RESOLUCIÓN**

Que el estudiante posea un esquema de resolución significa que es capaz de utilizar los conectivos lógicos para encontrar los valores de verdad de las proposiciones trabajadas, conoce y aplica las leyes, propiedades y la notación para resolver las tablas de verdad. Básicamente el alumno es capaz de resolver cualquier tabla de verdad que se le asigne.

Para que el estudiante pueda alcanzar este nivel de conocimiento es necesario que pase por las etapas anteriores al esquema, las cuales se indican a continuación:

## **ACCIÓN**

El estudiante posee una concepción de acción de la tabla de verdad si es capaz de utilizar la definición de los conectivos lógicos para resolver tablas de verdad de máximo dos valores. Es capaz de mezclar dos o más conectivos, pero no más de dos valores de verdad, realiza los procedimientos de manera mecánica y tiene pocas nociones de cómo utilizar las leyes.

## **PROCESO**

Cuando el estudiante logra entender el origen del conectivo lógico y comprende porque se le da el valor de verdad a cada conectivo entonces el estudiante tiene una concepción de proceso de la tabla de verdad. Aquí es capaz de utilizar

su razonamiento para resolver tablas de verdad con más de dos valores de verdad.

### **OBJETO**

Cuando el alumno logra encontrar algunas propiedades o leyes utilizando el razonamiento de la resolución de ejercicios se dice que tiene una concepción de objeto de las tablas de verdad. Aquí entiende las leyes y las aplica cuando son necesarias, no es un procedimiento algorítmico, sino que al entender el origen de los conectivos lógicos utiliza estos para resolver algunos problemas y después logra generalizar algunas leyes o entiende de mejor manera las leyes expuestas por el profesor o algún libro. En este punto es capaz de resolver prácticamente cualquier tabla de verdad que se le presente.

### **ESQUEMA**

El esquema es el conjunto de los procesos, objetos y procesos que generó el estudiante para un concepto dado, entonces cuando el estudiante es capaz de resolver cualquier tipo de tabla de verdad decimos que su esquema es de un nivel sobresaliente. Piaget menciona que el conocimiento no es un procedimiento lineal, sino que es un proceso escalonado, en el cual cada etapa corresponde a un nivel cognoscitivo característico, donde en cada etapa existe una reorganización de los conceptos aprendidos en

etapas anteriores. (Piaget y García, 2004). Entonces cuando el estudiante logró pasar desde el nivel de acción al nivel de procedimiento y termina en el nivel de objeto, y va reorganizando cada uno de los conceptos nuevos con los anteriores, logra generar un esquema bastante amplio para trabajar en la resolución de tablas de verdad.

### **ESQUEMA DE INTERPRETACIÓN**

No solo basta que el alumno pueda resolver tablas de verdad, también es necesario que pueda usarlas en contextos diferentes, es por eso que necesita saber interpretar las diferentes proposiciones. Interpretar una tabla de verdad significa que el estudiante es capaz de comprender las proposiciones, conoce el lenguaje matemático, maneja la sintaxis y la semántica para contextualizar problemas de la vida diaria en problemas de lógica. Para que este objetivo se logre se debe pasar por diferentes niveles cognoscitivos.

### **ACCIÓN**

Que el estudiante sea capaz de comprender que son las proposiciones significa que tiene una concepción de acción de la interpretación de la tabla de verdad. Aquí es capaz de pasar del contexto no matemático a un contexto matemático de proposiciones simples, y poder resolverlas.



Sin embargo, no es capaz de analizar o modificar las proposiciones.

### **PROCESO**

Cuando el estudiante es capaz de utilizar varias proposiciones para trabajar con ellas significa que tiene una concepción de proceso de interpretación de las tablas de verdad. Es capaz de trabajar con diferentes y con varias proposiciones y logra entender el significado de estas. Comienza a trabajar la sintaxis y la semántica de las proposiciones.

### **OBJETO**

Una vez que logra entender el significado de las proposiciones y su representación en tablas de verdad es capaz de poder modificarla, por ejemplo, con cuantificadores o negaciones. Comienza a resolver algunos ejercicios sin necesidad de pasarlo a una tabla de verdad y analiza las proposiciones con más detalle. Comprende mejor su sintaxis y su semántica. Cuando el estudiante es capaz de esto se dice que está en la concepción de objeto de la interpretación de las tablas de verdad.

### **ESQUEMA**

El estudiante tiene una concepción coherente de esquema de la interpretación de las tablas de verdad cuando es

capaz de contextualizar diferentes ejercicios para poder ser resueltos por tablas de verdad. Aquí se nota que el esquema de interpretación va ligado con el de resolución. Para un estudiante que quiere ser ingeniero es fundamental poder interpretar valores de la vida diaria y poder describirlos matemáticamente.

Si el estudiante es capaz de resolver el ejercicio descontextualizado es porque maneja ambos esquemas, en caso contrario, que no logre resolver el ejercicio, se pretende que el profesor realice una descomposición genética más detallada para poder generar ambos esquemas.

A continuación, se propone una descomposición genética para ambos esquemas en los cuales se irán describiendo tanto los procesos como las abstracciones que debe generar al estudiante a partir de los ejercicios y problemas planteados.

## **DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA**

Como se enfatizó en la introducción un problema que afecta a los ingenieros es la falta de conocimientos sobre modelación y demostración, un ingeniero va a estar trabajando constantemente con modelos y es por ello que en esta descomposición genética se utilizan nociones para que el estudiante pueda modelar y argumentar sus conocimientos. Esto es porque cuando un estudiante utiliza

sus conocimientos para generar un modelo matemático o para argumentar algún concepto matemático demuestra que el concepto lo tiene en una concepción de objeto, el cual significa que ha logrado aprender el concepto y lo manipula en diferentes contextos.

Para crear la descomposición genética debemos partir de la definición a la que queremos llevar al estudiante. Una vez que conocemos la definición la descomponemos en los mínimos detalles y trazamos el camino por los cuales el estudiante debe dirigirse para lograr unas estructuras mentales coherentes que le permitan asimilar el contenido y la concepción del concepto trabajado. En nuestro caso la definición a la que queremos llegar es la siguiente:

$P$	$\neg P$	$Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1

Donde el estudiante no solo debe ser capaz de resolver las tablas de verdad que se le asignen, sino que sea capaz de

utilizar las leyes de implicación, asociativa, distributiva, De Morgan, idempotencia, doble negación, etc.

Para que el estudiante pueda llegar a la concepción de objeto de este concepto se propone pasar por los siguientes niveles:

### PRE-ACCIÓN

Para poder comenzar con la construcción genética es importante que el estudiante posea ciertos conceptos previos, a los que denomino pre-acción, como menciona Piaget el aprendizaje es una reestructuración de conceptos que ya tiene el alumno (Piaget y García, 2004), entonces para poder generar el concepto de tabla de verdad es de suma importancia que se conozcan y manejen ciertos conceptos previos.

Para el caso de las tablas de verdad es fundamental que el estudiante posea la noción de proposición desde el punto de vista de la sintaxis, referente a la composición y estructura de éstas. Para ello se utiliza una lluvia de ideas o un discurso por parte del profesor indicando que es una proposición, preferentemente de forma vaga donde se indique que es una frase que se puede afirmar o negar. La idea es que el estudiante recuerde las proposiciones y pueda utilizarlas a partir de aquí.

En caso que los estudiantes no hayan trabajado con lógica matemática, que no recuerden nada de cursos anteriores o que no posean el concepto de proposición se sugiere que el profesor se enfoque primero en este concepto hasta que los alumnos lo manejen adecuadamente, como recordamos la base para comprender un buen concepto es tener buenas bases de conocimientos previos. Para que el alumno pueda comprender fácilmente el concepto de proposición se recomienda comenzar con el concepto de término, donde un término es una palabra o un grupo de palabras que se utilizan para hacer referencia a uno o varios objetos. Si nos referimos a un solo objeto decimos que es un término singular y si lo usamos para referirnos a todos los elementos de una clase se conoce como término general. Con ayuda de un par de ejemplos es sencillo que el estudiante pueda concebir el concepto de término. Ayuda mucho cuando es el propio estudiante el que alimenta la clase con más ejemplos, por un lado, para que los compañeros encuentren más opciones de ejemplos y por otro para que el profesor corrobore si el concepto quedó bien aprendido. Una vez que se entiende lo que es el término se puede proceder de forma análoga a la proposición, donde el término funciona como sujeto en una oración y necesita un predicado para poder asignarle un valor de afirmación o negación. Se recomienda utilizar apuntes creados por el

profesor de las nociones principales para que el alumno pueda repasar y seguir estudiando en casa.

Ya que el estudiante puede manejar el concepto de proposición se pasa a un siguiente nivel donde trabajara las proposiciones, el nivel de acción.

### **ACCIÓN**

El alumno posee una concepción de acción cuando puede manipular de forma física los objetos con los que está trabajando.

Para que el alumno construya una concepción de acción de las tablas de verdad es necesario que manipule diferentes proposiciones y comience a trabajar con ellas. La manipulación al principio tiene que ser física, esto es utilizando un modelo que le ayude a trabajar más fácilmente. Ahora que el alumno entiende la proposición el siguiente paso es que pueda encontrar una forma para representar sus proposiciones. La idea es que el alumno logre encontrar que el modelo más sencillo a trabajar es con las tablas de verdad, pero si no logra llegar a esta idea es necesario que el profesor le indique cual es el modelo apropiado.

Ya que la tabla de verdad es una representación matemática podemos utilizarla como medio físico para que

el alumno manipule sus proposiciones. Los modelos a los que el estudiante debe de llegar, o en su defecto el profesor debe mostrarle son los siguientes:

Negación:

$P$	$\neg P$
$V$	$F$
$F$	$V$

Disyunción:

$P$	$Q$	$P \vee Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Conjunción:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

Implicación:

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$

$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

Doble implicación:

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

El alumno poseerá la concepción de acción cuando sea capaz de representar sus dos proposiciones en forma de valores de verdad y a los cuales les pueda aplicar un conectivo lógico. Aquí únicamente utiliza los valores de verdad y los manipula para encontrar algunos valores, pero no razona del por que ese resultado. El siguiente paso en el proceso de descomposición genética es hacer que el alumno interiorice el concepto.

### INTERIORIZACIÓN

La interiorización consiste en construir una estructura mental que realice el mismo trabajo que la acción externa, los alumnos logran interiorizar un concepto cuando lo repiten y reflexionan sobre éste.

Aquí se propone a que el alumno realice un análisis sobre la concepción de las tablas de verdad, para llegar a esta reflexión es necesario que el estudiante utilice un ejemplo creado por él y encuentre a partir de los valores de sus proposiciones los resultados obtenidos en las tablas de verdad, un ejemplo puede ser el siguiente:

Basándonos en la pregunta “¿qué se necesita para pasar el curso?”, las opciones a trabajar pueden ser las siguientes: pasar el examen y realizar las tareas, donde las proposiciones pueden tener los siguientes valores:

Se acreditó el examen: Sí

No

Se realizaron las tareas: Sí

No

Como en la respuesta se está utilizando un conector “y” nos indica que únicamente se puede acreditar el curso cuando se acredita el examen y cuando se realizaron las tareas, quedándonos un modelo de tabla de verdad como el siguiente:

Se acreditó el examen	Se realizaron las tareas	Se acreditó el curso
SÍ	SÍ	SÍ
SÍ	NO	NO
NO	SÍ	NO
NO	NO	NO

Se puede utilizar el mismo método para generar las tres tablas faltantes, donde es el alumno el que genera, por razonamiento, las tablas de verdad. Al repetir el proceso con otros ejemplos, ya sea del profesor o de sus compañeros, podrá llegar a una mejor comprensión. Una vez que entiende el origen de las tablas de verdad significa que interiorizó el concepto para llegar al siguiente nivel.

## PROCESO

Se dice que un estudiante tiene la concepción de proceso cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Se puede llegar a la concepción de proceso por dos abstracciones ya sea por interiorización o por coordinación.

En nuestra descomposición genética llegamos a la concepción de objeto por medio de la interiorización. Aquí el estudiante es capaz de reflexionar cuando se le presentan proposiciones aleatorias y es posible que pueda encontrar valores de verdad cuando asocia más de dos proposiciones.

Además de poder reflexionar sobre los valores de verdad de las proposiciones también el estudiante ha ido familiarizándose con la simbología que se utiliza en matemáticas y que es necesaria para el entendimiento de

la lógica. Algunos de los símbolos que el estudiante ha ido trabajando en las proposiciones o en la formación de las representaciones por tablas de verdad son los siguientes:

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>
$\Rightarrow$	<i>Implica</i>
$\Leftrightarrow$	<i>Si y solo si</i>
$\in$	<i>Pertenece, es un elemento de:</i>
$\subseteq$	<i>Subconjunto de:</i>
$\emptyset$	<i>Conjunto vacío</i>
$\forall$	<i>Para todo</i>
$\exists$	<i>Existe</i>

Ya el estudiante en esta etapa del aprendizaje es capaz de reflexionar, argumentar y resolver diferentes tablas de verdad para más de dos valores de verdad, además de que entiende el origen de los valores que se le asignaron a los conectivos lógicos. Ya el proceso puede enfocarse en la siguiente abstracción.

### COORDINACIÓN

La coordinación permite establecer relaciones entre los procesos para determinar nuevos procesos.

Para esta etapa es conveniente que varios de los ejercicios propuestos por el profesor lleven a una tautología, esto es

para que el alumno pueda seguir reflexionando y conozca este nuevo concepto. Una vez que maneja y puede encontrar el resultado de verdad que lo lleve a tautologías se pueden establecer diferentes relaciones en sus procesos para llegar a las leyes.

Como la teoría APOE es una teoría constructivista se busca que sea el estudiante el que forma sus conceptos, el que crea sus conocimientos, es por ello que en lugar de darle la ley explícita al estudiante y el demuestre su veracidad, procederemos a que a partir de algunos ejemplos el estudiante pueda encontrar la ley aplicada.

Como el estudiante ya obtuvo la abstracción de las propiedades de la conjunción en las tablas de verdad podemos desarrollar el siguiente ejercicio:

*Realiza los siguientes ejercicios:*

1.-

$A$	$B$	$C$	$(A \wedge B) \wedge C$
-----	-----	-----	-------------------------

2.-

$A$	$B$	$C$	$A \wedge (B \wedge C)$
-----	-----	-----	-------------------------

3.- *Encuentra tres proposiciones que cumplan con las condiciones de las tablas de verdad pasadas.*

Una vez que llegue al resultado de ambos ejercicios se espera que pueda reflexionar sobre el resultado y encuentre la ley por sí mismo, generalizando los resultados y encontrando que es verdad la ley propuesta. Aquí trabajamos con otro aspecto de importancia que es la demostración, una vez que verifica que los modelos de las tablas de verdad funcionan para cualquier proposición y comprueba que la ley se cumple para todos los casos a partir de sus modelos y representaciones en tablas de verdad está comenzando a demostrar y argumentar sus ideas, también es un propósito que se tiene en el curso propedéutico que el estudiante comience a demostrar pequeñas leyes o teoremas para una vez que tome el curso de cálculo se le facilite demostrar y entender las demostraciones.

Las demás leyes se pueden trabajar de la misma manera, como el tiempo es corto en un curso propedéutico se propone que se divida el grupo en equipos y cada equipo deduzca una ley diferente para después generalizar sus ideas al grupo. Se aconseja que de ejercicio para el estudiante por su cuenta termine de construir las leyes restantes.

Ya que el estudiante es capaz de coordinar el concepto se dice que lo paso al siguiente nivel, objeto.

## **GENERALIZACIÓN**

Cuando el alumno consigue pensar en nuevos conceptos usando características o propiedades del concepto aprendido se dice que utilizó la abstracción de generalización.

Para poder llegar a esta abstracción se proponen trabajar con analogías que puedan servir de enlace del concepto con otros conceptos que compartan sus propiedades. Un ejemplo en el caso de las leyes puede ser que identifiquen que en teoría de números y en álgebra se cumplen algunas propiedades como la legislativa, doble negación, asociativa, etc.

## **OBJETO**

Cuando el estudiante piensa en el proceso como un todo y es capaz de realizar y construir transformaciones sobre esa totalidad se dice que tiene el concepto en la concepción de objeto.

Se han ido trabajando paralelamente los esquemas de resolución e interpretación para que el alumno comprenda que es importante vincular la parte de identificar el problema con la parte de resolución. De nada sirve que un estudiante pueda interpretar un problema y plantearlo por medio de proposiciones si no puede

resolverlo por tablas de verdad, así mismo, de nada sirve que conozca los métodos de resolución de tablas de verdad si no es capaz de identificar un problema para resolverlo así.

El alumno en esta etapa ya tiene una concepción de objeto de la tabla de verdad, tanto de identificación como de resolución, ha reflexionado sobre la deducción de las tablas de verdad para los conectivos lógicos, ha abstraído sus propiedades y usado para poder llegar a deducir las leyes generales y pudo identificar diferentes ejemplos en este proceso. Ahora lo que prosigue es que el proceso que ha construido pueda visualizarlo como un todo para transformar ese proceso en uno más general. Para esto se intenta utilizar ejercicios descontextualizados en los cuales necesiten primeramente su identificación y después el proceso de resolución para poder resolver el ejercicio, un ejemplo sería el siguiente: se propone realizar la misma pregunta con la que se inició la parte de lógica matemática que es la siguiente:

1.- *¿Qué se necesita para pasar el curso? Justifique sus respuestas.*

Esto es por dos razones, se espera por un lado que el estudiante sea capaz de poder resolver el ejercicio

utilizando los conocimientos que ya recordó o aprendió, y por otro lado para que el mismo estudiante compruebe que ha mejorado su aprendizaje. Esto lo lleva al siguiente nivel de abstracción.

## **ENCAPSULACIÓN**

Este proceso se define como la conversión de una estructura dinámica, en este caso el proceso, en una estructura estática, que vendría siendo un objeto, que se genera cuando el individuo debe transformar el objeto para resolver una situación.

Para poder llevar al estudiante a este nivel de abstracción se propone que se continúe con ejercicios de manera descontextualizada como en el caso de la pregunta a-didáctica. Esto es para que comience a utilizar los procesos de identificación y resolución de manera natural, y gracias a los ejercicios sea capaz de interpretar y resolver cualquier problema. Un ejemplo es el siguiente:

*Si tenemos un tablero de ajedrez, en el cual le quitamos la última celda de la primera columna y la primera celda de la última columna, ¿es posible cubrir el tablero con 31 fichas de dominó?, pensando que cada ficha de domino cubre dos cuadros del tablero de ajedrez*



Como se nota el ejercicio no tiene que ver en primera instancia con lógica, sin embargo, se puede interpretar que cada ficha de dominó cubre dos celdas de tablero de ajedrez, entonces cada ficha cubre una celda negra y una celda blanca, ya que éstas van sincronizadas, una sí, una no. Si nos fijamos en las instrucciones las celdas que quitamos corresponden a dos celdas del mismo color, y como tenemos 31 fichas para cubrir el tablero necesitamos 31 celdas negras y 31 celdas blancas. Aquí es donde utilizamos la lógica, dentro del conectivo de las celdas totales que necesitamos para cubrir el tablero. Como nos quitamos dos celdas del mismo color entonces se entiende que no podemos cubrir el tablero con las fichas de dominó asignadas.

Como se observa el estudiante debe ser capaz de identificar el tipo de problema y poder resolverlo. Con ejercicios de este tipo lo que hacemos es que el estudiante pueda interiorizar sus procesos para poder utilizarlos como un objeto.

### **DESENCAPSULACIÓN**

Este nivel de abstracción consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto.

Para que el alumno pueda resolver ejercicios con los conceptos en el nivel de proceso no solo debe manejarlos como objetos, sino que debe realizar el proceso inverso, esto se refiere a que necesita conocer el procedimiento que utilizó para generar su proceso en objeto y poder regresar para que el objeto se convierta de nuevo en proceso y pueda utilizar los procedimientos para resolver ejercicios.

En el caso del ejercicio pasado se necesita que el alumno pueda identificar el problema como uno de lógica y después pueda resolverlo, para esto es necesario que su concepción de objeto de resolución regrese a una concepción de progreso para que pueda resolver el ejercicio como los diferentes ejemplos que resolvió cuando estaba en este nivel de concepción.

Esta abstracción es fundamental ya que es el puente que necesita el alumno para poder reflexionar sobre el problema que está trabajando.

### **ESQUEMA**

El esquema es el conjunto de los procesos, objetos y acciones que desarrollo el estudiante para comprender un concepto.

En la propuesta se trabajaron dos esquemas de manera paralela, por un lado, la identificación de los problemas y por el otro la resolución, aunque se trabajaron

prácticamente juntos se denominan como dos esquemas diferentes por los niveles de abstracción que manejaron, es importante que el profesor, aunque trabaje los esquemas en paralelo, no pierda cada uno de los procesos trabajados, que identifique cada esquema y como se debe ir creando.

Con estos dos esquemas dentro de la estructura mental del alumno como base se pueden ir generando más esquemas dentro de la formación del estudiante. Aunque se trabajan con construcciones mentales diferentes como son los esquemas, se pueden crear en un mismo ejercicio, siempre y cuando el profesor sea consciente de las abstracciones que están realizando los estudiantes y el camino que necesitan seguir para construir el concepto.

## CONCLUSIONES

El trabajo que se presentó es un primer avance en la formación de un curso propedéutico bajo la teoría APOE. En el cual se describe una forma para analizar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre la lógica matemática y una descomposición genética para construir los conceptos esperados. Todo basado en una pregunta descontextualizada, a-didáctica, que le permite al profesor ganarse el interés del alumno.

En una primera parte del trabajo se mostró un análisis sobre la pregunta a-didáctica y como, si el alumno puede responder el ejercicio correctamente, demuestra gran conocimiento del concepto de tablas de verdad. Se describen los dos esquemas que necesita el estudiante para responder adecuadamente, por un lado, el esquema de resolución y por otro el de interpretación. Además, se muestran las estructuras mentales que necesita el alumno para comprobar ambos esquemas.

En una segunda parte se realiza una descomposición genética del concepto de tablas de verdad, en el cual se muestran tanto las estructuras mentales como las abstracciones reflexivas que necesita ir trabajando el alumno para una correcta construcción del concepto. En esta etapa se define que es cada una de las construcciones y reflexiones y después se describe cómo se trabajó la propuesta a partir de esta definición, con algunos ejemplos que facilitan su comprensión, trabajando paralelamente tanto el esquema de resolución como el de interpretación.

También se hace referencia a trabajar con modelación y demostración, esto es por dos razones de total interés para el autor, primeramente, por ser dos aspectos que poco se trabajan en las aulas de ingeniería y

que es importante que el alumno conozca desde niveles iniciales de su formación y por otro por ser concepciones que necesitan de un manejo del conocimiento muy avanzado, en cual desde la teoría APOE, muestra una concepción de objeto del concepto trabajado. Así es que se trabaja con modelación y demostración dentro de las abstracciones reflexivas para ir creando las diferentes estructuras mentales, el modelar y el demostrar nos ayudan a que el estudiante abstraiga ciertas propiedades que son necesarias para comprender de manera correcta el concepto.

Esta es una primera etapa del curso propedéutico, el siguiente paso es crear descomposiciones genéticas para los conceptos de teoría de conjuntos, ecuaciones e igualdades, inecuaciones y desigualdades y trigonometría, conceptos que son fundamentales para poder crear un aprendizaje en el alumno dentro de materias como análisis diferencial.

## REFERENCIAS

Alvarado A. y González M. T., (2013), Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas, *Revista Latinoamericana de matemática educativa*, 16(1), 37 - 63.

Aravena M., Caamaño C. y Giménez J., (2008), Modelos matemáticos a través de proyectos, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 11(1), 49 - 92.

Arrieta J. y Díaz L., (2015), Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 18(1), 19 - 48.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas

Barbosa K. (2003), La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE, *Revista latinoamericana de matemática educativa* 6(3), 199 - 219.

Cañas Gutiérrez, A. M. (2010). *Aprendemos Matemáticas. Innovación y experiencias educativas*.

Carraher T., Carraher D. y Schliemann A. (1991), *En la escuela diez en la vida cero*, Siglo veintiuno editores, séptima edición,

Crespo C. y Farfán R. M. (2005), Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 8(3), 287 - 317.

Crespo C., Farfán R. M. y Lezama J., (2010), Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 13(3), 283 - 306.

Farfán R. M., (1997), La investigación en matemática educativa en la reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 1(0), 6 - 26.

Ferreira A. V. y Burak D. Modelagem Matemática: Uma alternativa de ensino aprendizagem da matemática,

Larios V. y González N., (2010), Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica, *Revista latinoamericana de matemática educativa*, 13(4), 147 - 160.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Educación Matemática*, 221-278.

Noriega J. A. (2015), Importancia y propuesta de un curso propedéutico para estudiantes de nuevo ingreso en ingeniería, Noveno coloquio de posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, 2015.

Rodríguez R., (2010), Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales, *Revista latinoamericana en matemática educativa*, 13(4), 191 - 210.

Solow D. (1993), *Como entender y hacer demostraciones en matemáticas*, Limusa Noriega Editores, México. Primera edición, tercera impresión.

Stewart Ian, (2001), *El laberinto Mágico*, Editorial Critica

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 5-31.