Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS PARA ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES

Epistemic Configurations for analysis of the concept of function limit

Telésforo Sol Campuzano, Víctor Larios Osorio
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO.
campuzano_0000@yahoo.com.mx
vilaos@hotmail.com

RESUMEN

En este trabajo se describe el tratamiento institucional que se da al concepto de límite de una función en el curso de cálculo diferencial en algunos libros de texto universitarios utilizando como herramienta de análisis el concepto de configuración epistémica, definido dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción (EOS), también se hace una comparación basada en las configuraciones obtenidas. Se busca dar una respuesta a la siguiente pregunta ¿Cómo puede hacer un profesor el análisis de los libros de texto universitarios para mejorar la argumentación dentro de las demostraciones que involucran el concepto de límite en un curso de cálculo diferencial?

Palabras clave: Argumentación, configuración epistémica, demostración.

ABSTRACT

This paper describes the institutional treatment given to the concept of function limit in the course of differential calculus in some college textbooks using as a tool the epistemic configuration construct, which is defined within the theoretical model about mathematical cognition and instruction, Also made a comparison based on the obtained configurations. It seeks to give an answer to How can a teacher analysis of college textbooks to improve the argumentation in demonstrations involving the concept of limit in a course of differential calculus?

Keywords: Argumentation, epistemic configuration, demonstration.

INTRODUCCIÓN

Un concepto fundamental y al mismo tiempo difícil en el curso de cálculo diferencial en el nivel superior es el de límite de una función lo cual es inmediato de deducir al observar que muchos libros antes de formalizar este concepto trabajan primero con una definición intuitiva. Esto lleva a los profesores a buscar dar de una forma más clara posible el significado de este concepto, considerando que se encuentran con alumnos de nivel superior. Para ello hay que pensar en las prácticas matemáticas, consideradas aquí como se definen en Godino y Batanero (1994), para poder llevarlas a cabo en el salón de clases. Con esto el profesor debe tener la competencia de analizar un mismo tema en diferentes libros de texto, lo cual le permitirá entre otras cosas: tener un panorama amplio respecto a los diferentes enfoques que se le puede dar a un mismo concepto; conocer el tipo de argumentos y demostraciones que el alumnos estudiaran y deberán entender; y ser consciente de los conocimientos previos que el alumno debe tener en los cuales se consideran conceptos, procedimientos, proposiciones, lenguaje matemático y diferentes formas de argumentar.

En el presente trabajo se hace un análisis de una de las herramientas didácticas más utilizadas en los cursos que es el libro de texto. En particular se analizan cuatro libros de texto universitarios utilizados para cursos de Cálculo Diferencial en el tema de límite de una función los cuales son: Spivak (2003), Apostol (2007), Stewart (2008) y Swokoski (1988). Estos libros fueron seleccionados principalmente porque presentan diferentes enfoques de estudio, por ejemplo algunos se apoyan de software, otros son más formales, algunos utilizan más imágenes para aclarar ideas y uno de ellos cambia el orden de los temas.

Para el análisis se echa mano del sistema teórico llamado Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), ya que en este sistema teórico permite estudiar las prácticas matemáticas institucionales considerando como objetos matemáticos primarios: el lenguaje, situaciones problemas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.
La herramienta del EOS que se utiliza principalmente para analizar los libros de texto es la configuración epistémica (CE) pues permite estudiar textos matemáticos como se ve en (Font & Godino, 2006).

Con base en estos elementos metodológicos se nota los diferentes enfoques que los autores han trabajado en la elaboración de sus textos.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

En el EOS se considera que los objetos matemáticos se generan de sistemas de prácticas y se tienen en cuenta los siguientes dos niveles de objetos generados de sistemas de prácticas.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Aquí están las entidades que se pueden observar en un texto matemático.

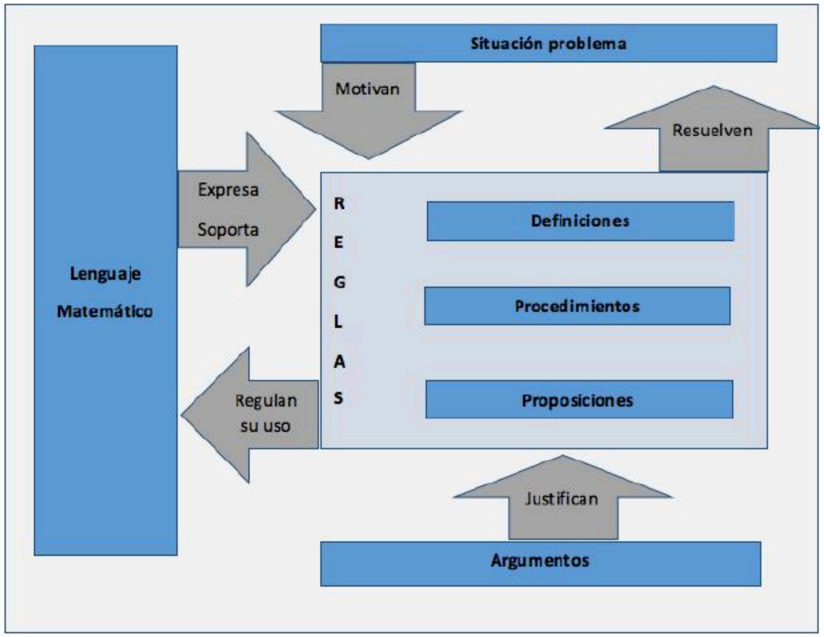
Segundo nivel: Atributos contextuales. Aquí se tiene una tipología de objetos que se genera de las diferentes formas de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del primer nivel.

Para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático y en general la actividad matemática dentro del EOS se contempla una ontología formada por los siguientes objetos matemáticos primarios:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios).
- Conceptos – definición (definiciones de función, límite, dominio, etc.).
- Procedimientos, técnicas (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Proposiciones, propiedades, teoremas.
- Argumentaciones (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Con la relación de estos seis tipos de objetos se forman configuraciones epistémicas (CE), donde las situaciones problemas dan pie a la actividad; el lenguaje representa los otros objetos y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que se relacionan por los conceptos, las CE permiten conocer la estructura de las demostraciones. Como se menciona en (Font & Godino, 2006) las configuraciones epistémicas utilizadas en los libros de texto universitarios son de alguna manera laxas respecto a la parte precisión y rigor en el concepto de prueba, donde se busca trabajar en las pruebas de una manera axiomática, donde no se explica cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. La Figura 1 se puede considerar como el modelo básico de las configuraciones epistémicas.

Figura 1 Configuración epistémica



LA DEFINICIÓN DE LÍMITE.

Hay que mencionar que de los cuatro libros considerados, el de Apostol tiene diferente orden en sus capítulos ya que primero presenta los conceptos de Cálculo Integral, después una idea intuitiva de continuidad y posteriormente aborda la definición formal de límite. A diferencia de los otros libros que presentan primero una definición intuitiva de límite y después abordan el concepto formal de límite. Desde esta diferencia de orden para presentar los capítulos con ideas intuitivas del concepto de límite se ve la importancia de analizar y comparar los libros de texto.

También en todos los libros excepto el de Apostol se trabaja con una definición no formal antes de la formal, y en estas definiciones intuitivas no se utiliza el valor absoluto.
Ahora bien, de manera general se describirá la forma en que se trabaja el concepto de límite en cada libro:

- Spivak (2003, págs. 107-131): Se presenta una definición provisional con apoyo de algunas imágenes, con esta definición provisional calculan los límites de algunas funciones y muestran cómo otras no tienen límites, en estos cálculos utilizan las variables ε, δ, la función valor absoluto y muestran algunas formas de calcular los límites de una función, después está la definición formal de límite e inmediatamente se estudia la negación de la definición del límite (esta negación no se menciona en los otros libros), aquí se está definiendo un procedimiento, después se hace un análisis de la notación, se demuestra un lema para después utilizarlo en la demostración del siguiente teorema.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Teorema 1

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces

$$(1)\ \lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + m;$$

$$(2)\ \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = l\cdot m.$$

Además, si $m \neq 0$, entonces

$$(3)\ \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}.$$

Por último se define los siguientes conceptos $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ y $\lim_{x\to \infty} f(x) = l$.

- Apostol (2007, págs. 156-169): El concepto de límite en este libro es el segundo tema dentro del capítulo de continuidad donde el primer tema es la idea intuitiva de continuidad. Para la definición de límite se da primero la definición de entorno de un punto y apoyado de esta definición se da la definición de límite, después se representa geométricamente el concepto de límite, se dan como ejemplos el límite de la función constante y el de la función identidad, después define límites laterales, hay tres ejemplos de límites laterales, se pasa al siguiente tema que es la definición de continuidad donde se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 2

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

En el siguiente tema demuestra el Teorema 1 y es lo último que se enfoca al tema de límites.

- Stewart (2008, págs. 83-116): Se da un acercamiento al concepto de límite mediante la idea de hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto con tres ejemplos apoyados de gráficas, se da una definición de límite no formal (no se hace explícito que la definición no es formal) con apoyo de algunas gráficas, se trabajan algunos ejemplos con esta definición, se definen límites laterales (también de manera no formal), se definen los límites al infinito, se define lo que es una asíntota vertical con el concepto de límite, se dan las siguientes proposiciones llamadas leyes; ley de los límites el cual es prácticamente el teorema 1, ley de potencia y luego ley de la raíz, después se da una proposición a la cual le llaman propiedad de sustitución directa, por último se dan dos teoremas uno que tienen que ver con desigualdad de funciones y límites, el último teorema se llama teorema de la compresión el cual es el teorema 2. (En este libro algunas de las proposiciones son propiedades, leyes y teoremas), en la siguiente sección se define de manera formal todos los conceptos y solo se demuestra el primer inciso del teorema 1.

- Swokoski (1988, págs. 52-80): Se presenta una introducción al cálculo con la que muestran ejemplos donde el concepto de límite formaliza la idea de velocidad y pendiente. Después se expone de manera informal el concepto de límite, en la sección tres de la definición formal (en esta definición se utilizan imágenes que no relacionan los intervalos de longitud 2δ y 2ε) y la última sección es sobre algunas propiedades importantes, entre ellos el teorema 1 y el teorema 2.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA SOLUCIÓN DE PROPOSICIONES RESPECTO AL CONCEPTO DE LÍMITE

El siguiente análisis sobre estructura de una demostración utilizando el constructo de configuración epistémica es sobre la primera demostración que aparece en el libro de Spivak (2003, pág. 120) después de la definición formal de límite, la cual trata de la unicidad del límite de una función en un punto. La demostración que está en el libro es la siguiente:

Teorema 3

Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos, si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.

Demostración

Por ser el primer teorema acerca de límites, será ciertamente necesario traducir la hipótesis en concordancia con la definición.

Puesto que *f* tiende hacia l en *a*, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo *x*,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_1, entonces\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sabemos también, puesto que *f* tiende hacia *m* en *a*, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que para todo *x*,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_2, entonces\ |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Hemos tenido que emplear dos números, δ_1, δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo *x*,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta, entonces\ |f(x) - m| < \varepsilon \quad y \quad |f(x) - l| < \varepsilon;$$

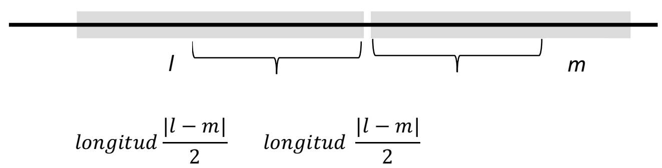
basta simplemente elegir $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$.

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\varepsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones

$$|f(x) - m| < \varepsilon \quad y \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

No puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$. La elección adecuada la sugiere la Figura 2.

Figura 2



Si $l \neq m$, de modo que $|l - m| > 0$, podemos tomar como ε a $|l - m|/2$. Se sigue que existe un δ > 0 tal que para todo x,

$$si\ 0 < |x - a| < \delta_2, entonces\ |f(x) - m| < \frac{|l - m|}{2}$$

$$y \quad |f(x) - l| < \frac{|l - m|}{2};$$

Esto implica que para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leq |l - f(x)| + |f(x) - m|$$

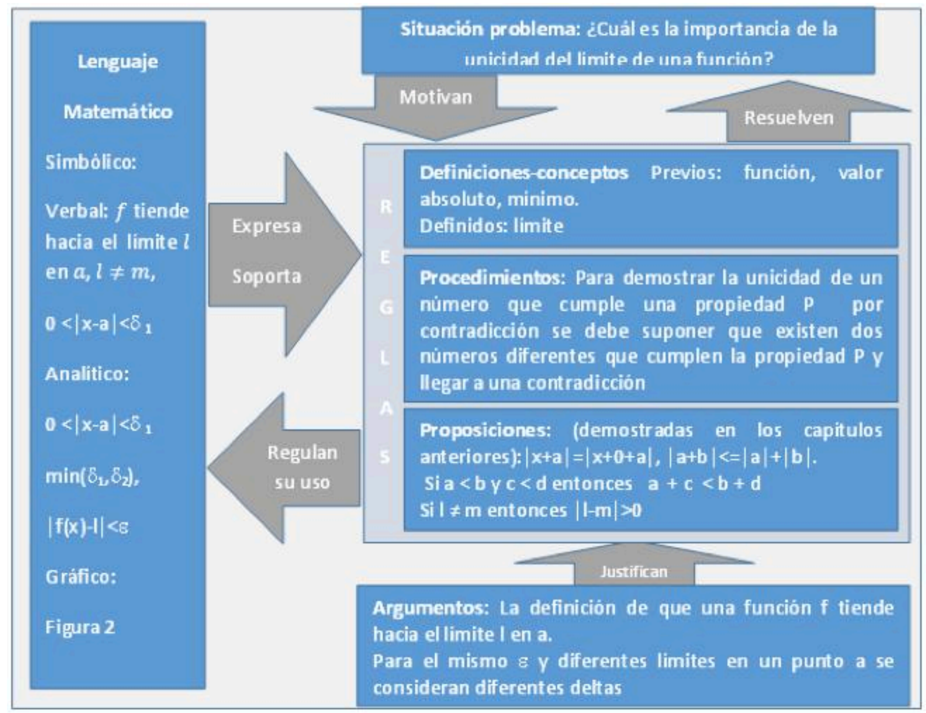
$$< \frac{|l - m|}{2} + \frac{|l - m|}{2}$$

$$= |l - m|$$

Lo cual es una contradicción.█

La configuración epistémica de la demostración se puede representar con la Figura 3 :

Figura 3: Configuración epistémica de la unicidad de límite



En el libro de Apostol (2007) después de dar la definición formal de límite, solo trabaja dos ejemplos para ejercitar dicha definición y después da el teorema de reglas básicas para operar con límites, con su demostración en la siguiente sección y es prácticamente

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

todo lo que trabaja enfocado al concepto de límite. Es decir no profundiza tanto en este concepto pero lo aprovecha para trabajar continuidad.

El teorema que aparece en todos los libros es el teorema 1, pero este solo se demuestra en Spivak (2003) y Apostol (2007).

La siguiente proposición respecto al concepto de límite que aparece en casi todos los libros es el teorema 2. En el libro de Spivak (2003, pág. 134) está como ejercicio a demostrar en la sección de problemas propuestos, como el teorema de la intercalación en el de Swokoski (1988, pág. 79), como principio de intercalación en el de Apostol (2007, pág. 164) y como teorema de la compresión en Stewart (2008, pág. 105), esta proposición solo aparece con demostración en el libro de Apostol (2007) en la sección de límites en el Swokoski la demostración está en el Apéndice II. En los libros de Stewart (2008, pág. 106) y Swokoski (1988, pág. 79) el teorema se aplica en la misma función para calcular su límite y sólo en estos dos libros se representa gráficamente la idea del teorema 2.

En el libro de Swokoski (1988, pág. 79) el ejemplo aparece de la siguiente forma:
Ejemplo. La función seno tiene la propiedad de que $-1 \leq sen t \leq 1$ para todo número real t. Usar este hecho y el teorema de la intercalación para demostrar que:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Solución: Podemos escribir

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Para todo $x \neq 0$. Multiplicado por x^2 (que es un número positivo cuando $x \neq 0$), obtenemos

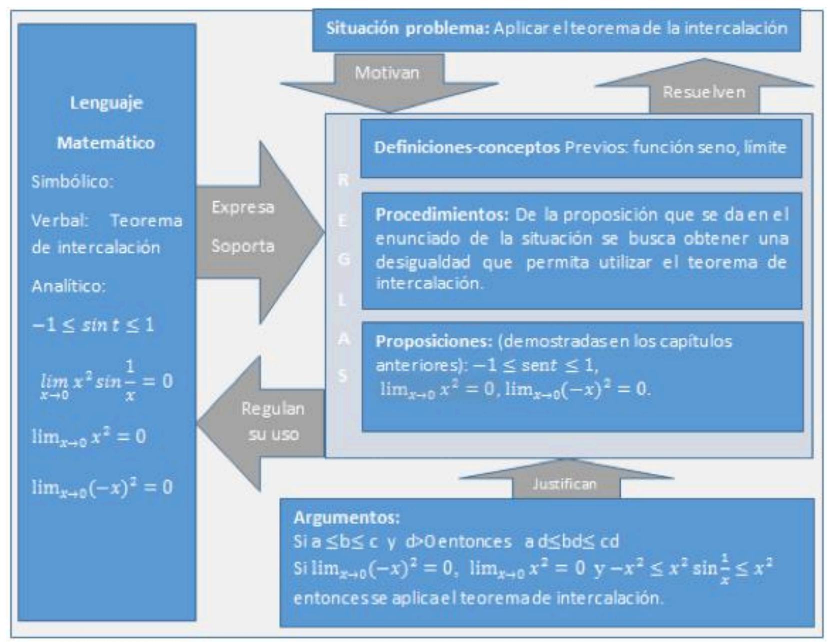
$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,
Se deduce del teorema de la intercalación, con $f(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

La configuración epistémica de esta solución se puede representar como se ve en la Figura 4:

Figura 4



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

En el libro de Stewart (2008, pág. 106) aparece de la siguiente forma:

Ejemplo. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

Solución: En primer lugar note que no puede aplicar:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

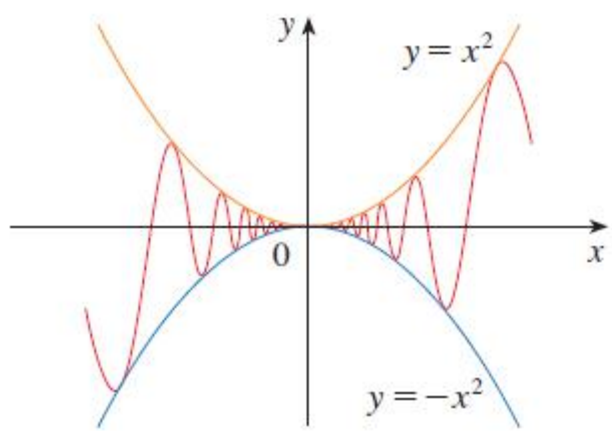
Porque $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ no existe. Sin embargo, como

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Se tiene, como se ilustra mediante la Figura 5,

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

Figura 5 gráfica de la función y= x^2 sin 〖1/x〗



Se sabe que

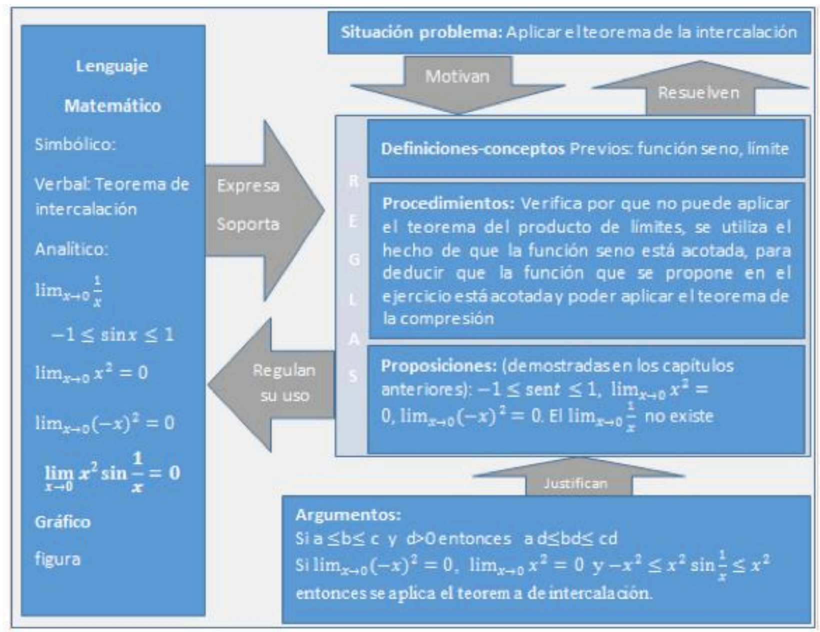
$\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,

Al tomar $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la comprensión, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \blacksquare$$

La configuración epistémica de la solución anterior se puede representar con la Figura 6:

Figura 6



Se puede observar que la información que se proporciona en el planteamiento del ejemplo en el primer caso es más que la que se proporciona en el segundo, al mencionar que la función seno está acotada. En el segundo caso se maneja el lenguaje gráfico durante la solución y de hecho se utiliza como argumento para deducir que $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$ (Figura 5).

En la segunda solución se refuerza la importancia de las hipótesis dentro de los teoremas al verificar que no se puede aplicar el teorema de que si los límites de dos funciones existen en un punto de su dominio entonces el límite del producto de las funciones en ese mismo punto existe, porque no se cumple una de las hipótesis de este. Lo cual no se considera en la primera solución.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Spivak (2003), cuando aborda la demostración de unicidad de límite, utiliza un lenguaje gráfico que no hace referencia a la variable ε y la imagen no considera que el intervalo (l – ε , l + ε) se toma en el eje *y*.
En el libro de Swokoski (1988) en la definición formal de límite el lenguaje gráfico que se utiliza para representar el intervalo (l – ε , l + ε) al principio no se relaciona con el eje *y*, después en un ejemplo si lo hacen.

El teorema sobre la unicidad del límite de una función no se menciona en Stewart (2008), Swokoski (1988), ni en Apostol (2007). Esto da pie a las siguientes preguntas: ¿Los alumnos serán conscientes de esta proposición? y ¿por qué en un libro menciona una proposición como teorema y en los otros no existe comentario alguno respecto de esta? Con esto el profesor debe decidir si trabaja este teorema en clase o solo lo menciona o definitivamente omitirlo mostrando así la importancia de analizar diferentes libros de texto.

Al tener diferentes procedimientos en la misma situación problema como fue el caso de las dos últimas configuraciones el lector tiene más opciones para entender una misma situación problema o un profesor puede plantear más opciones de solución de un mismo problema a los alumnos.

Las configuraciones dan la estructura de la demostración pero no dan el orden de cómo se dan las relaciones de los conceptos primarios que participan en ellas, una forma de complementar la estructura de las demostraciones podría ser dando un orden de las relaciones que se van dando entre los objetos primarios.

Las configuraciones epistémicas permiten hacer explícitos los objetos matemáticos que se utilizan en los libros de texto universitario los cuales no necesariamente se mencionan en el texto principalmente los argumentos y procedimientos no son tan claros en los libros de texto, Así las configuraciones permiten analizar un texto matemático de una forma más amplia.

Con la configuración epistémica de una situación problema los profesores podrían verificar de manera más puntual los objetos matemáticos en los cuales los alumnos tienen mayor dificultad de manejo.
Al generar las configuraciones epistémicas de una misma situación-problema de un texto matemático en diferentes

libros se puede intuir el enfoque que el libro busca respecto a un tema en particular. Por ejemplo, los libros de Apostol (2007) y de Spivak (2003) estudian de una manera más formal el concepto de límite pero de diferente forma pues el primero le da mayor importancia al estudio de la continuidad y es esto para lo que utiliza principalmente el concepto de límite, mientras que el segundo estudia el concepto de límite de manera independiente. Por otro lado los libros de Stewart (2008) y de Swokoski (1988) están enfocados de alguna forma en dar más herramientas para cálculo de límites al dar más proposiciones y menos demostraciones, trabajando con mayor peso en técnicas y mencionando más ideas intuitivas. Algunas preguntas que quedan pendientes por explicar son:

- ¿Cómo se pueden aprovechar las configuraciones epistémicas generadas en el análisis de libros de textos matemáticos para enseñanza de límite de una función?
- ¿Dada una configuración epistémica del desarrollo de una proposición se puede replantear la situación problema que la genera para proponer nuevas situaciones didácticas que faciliten la demostración?

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, M. T. (2007). *Calculus I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra lineal.* Barcelona: Reverté, S.A.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui.* , 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 325-355.

Spivak, M. (2003). *Cálculo inifnitesimal* (segunda ed.). Barcelona, España: Reverté, S. A.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable.* México: sexta.

Swokoski, E. (1988). *Cálculo con Geometría Anlaítica* (Cuarta ed.). Colombia: Grupo Editoria Ineroamerica.