Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ALGUNOS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Some geometrical aspects of Lagrange Multipliers

Jesús Jerónimo-Castro, Marco Antonio Rojas-Tapia y Tanis Villasana-Barrera
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO
tanislao.barrera@live.com.mx

RESUMEN:
En este trabajo se muestran algunos fundamentos geométricos de los Multiplicadores de Lagrange, de este modo, se pretende dar una explicación más detallada de por qué estos funcionan para resolver problemas de optimización que involucran funciones de varias variables. Después, mediante una adecuada introducción de variables, se resuelve un problema geométrico en el que se usan los multiplicadores de Lagrange. Finalmente, se muestra como el estudio de un problema no se acaba con la solución de éste, al contrario, muchas veces se puede generalizar de una manera natural.

Palabras claves: Funciones de varias variables, Multiplicadores de Lagrange, problemas geométricos.

ABSTRACT:
In this work we show some geometric fundamentals of Lagrange Multipliers, in this way, we pretend to give a more detailed explanation about why they works for solving optimization problems that involve several variables. By a suitable use of variables, we solve a geometric problem with the use of Lagrange Multipliers. Finally, we show how sometimes the study of a problem is not ended with its solution, instead we can generalize it in a natural way.

Key words: Functions of several variables, Lagrange Multipliers, geometric problems.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Los Multiplicadores de Lagrange es comúnmente conocido como un método clásico utilizado para optimizar funciones real-valuadas de diferentes variables; en otras palabras, se usa para encontrar máximos o mínimos de una función escalar sujeta a una o más restricciones. Sin embargo, pocas veces se explica por qué estos funcionan al resolver problemas de optimización. La mayoría de los textos de Cálculo, se concentran en utilizarlos en la solución de algunos ejemplos directos y otros, aunque dan una demostración analítica del teorema, no explican de manera intuitiva la razón de por qué es que estos funcionan.

Además, en los cursos de cálculo en ingeniería o en la licenciatura en matemáticas no se les da la importancia necesaria a estos, es decir, sólo se ve como un tema más quedando en el olvido de la gran mayoría de los estudiantes, cuando en la vida real siempre estamos buscando lo mínimo, máximo u optimizar algo. Es por esto que en este artículo se propone primero, entender bien qué son y de dónde se originan los Multiplicadores de Lagrange y después, dar ejemplos concretos de su útil uso.

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En esta parte del artículo discutimos el método desde un enfoque geométrico, cuando deseamos encontrar los valores extremos de una función de dos variables $f(x,y)$, sujeta a la restricción $g(x,y)=c$. Antes de discutir la técnica de los Multiplicadores de Lagrange, debemos recordar conceptos básicos de Cálculo Vectorial que nos ayudarán a lograr una mejor comprensión del tema.

A continuación, desarrollamos de manera geométrica y analítica el concepto de derivada direccional.

Definición 1: Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones

$\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ definidas como

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Definición 2: La derivada direccional de $\boldsymbol{f}$ en un punto $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ es

$$D_u f(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h},$$

si este límite existe.

Para entender geométricamente la definición 2, imaginemos una superficie $z=f(x,y)$ la cual es intersecada por un plano M_u $(M_u\cap f(x,y))$, siendo este último ortogonal al plano xy, y que además pasa por un punto $p=(x_0,y_0)$ en dirección u. La derivada direccional

$D_u f(p)$ es la pendiente de la línea recta que se muestra en la Figura 1.

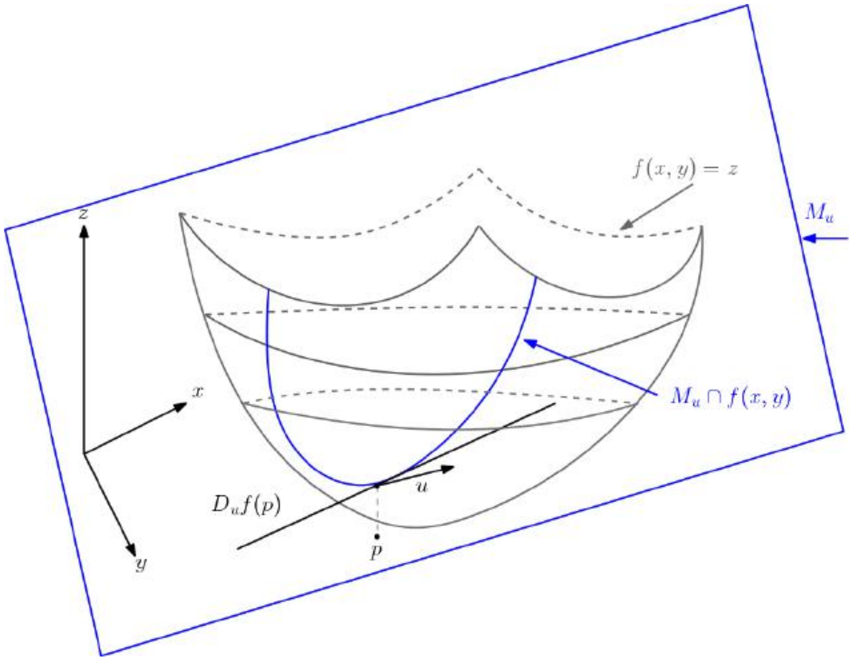


Figura 1: Derivada direccional

Teorema 1: Si f es una función diferenciable en (x, y), entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $u = (a, b)$ y

$$D_u f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b.$$

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto arbitrario. Si definimos g, una función de una variable h, como

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb),$$

entonces, por definición de derivada, se tiene que

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0). \qquad (1)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$ y $y = y_0 + ha$. Entonces, si aplicamos el Teorema de la Regla de la Cadena obtenemos que

$$g'(h) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dh} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b.$$

Si ahora hacemos $h = 0$, obtenemos que $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$g'(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} b. \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), vemos que

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} b.$$

■

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Observación.

Podemos ver que la derivada direccional se puede expresar como el producto punto de dos vectores

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} b \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \cdot (a,b) \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \cdot u. \end{aligned}$$

La siguiente definición es muy útil en muchos conceptos en Matemáticas, en particular cuando se trabaja con derivadas direccionales.

Definición 3: Si f es una función de dos variables x y y, entonces el *gradiente* de f es la función vectorial ∇f definida como

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Con la notación para el vector gradiente, podemos reescribir la derivada direccional como

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u.$$

Lo anterior, expresa a la derivada direccional en la dirección u, como la proyección escalar del vector gradiente sobre el vector u.

Definición 4: Las *curvas de nivel* de una función f de dos variables son las curvas con ecuación $f(x,y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

La Figura 2 muestra geométricamente lo que significan las curvas de nivel para diferentes valores de la constante k.

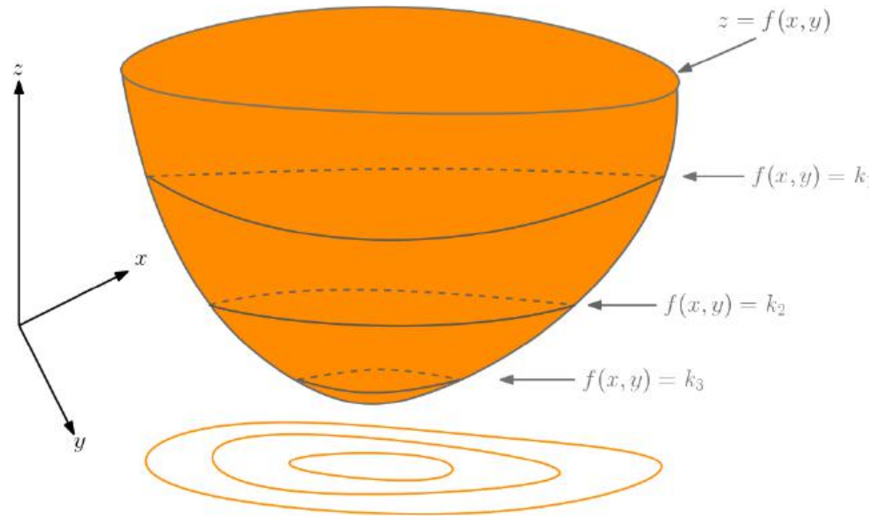


Figura 2: Curvas de nivel

Una vez introducidos los conceptos anteriores, ahora sí nos disponemos a presentar la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Como $f(x,y)$ es una función, las curvas de nivel $f(x,y) = k$ no se intersecan. Ahora, imaginemos que se camina sobre la curva

$g(x,y) = c$. Luego, como las curvas $f(x,y) = k$ y $g(x,y) = c$ son generalmente distintas, entonces al caminar sobre $g(x,y) = c$ nos cruzamos con muchos caminos $f(x,y) = k$. Por tanto, el valor k crece o decrece al caminar sobre $g(x,y) = c$ hasta encontrar un punto p de tangencia entre $f(x,y) = k$ y $g(x,y) = c$. Cuando la curva $g(x,y) = c$ toca tangencialmente a una curva $f(x,y) = k$ en algún punto $p = (x_0, y_0)$, entonces al caminar en ambas direcciones sobre $g(x,y) = c$, desde p los valores de k cambian en la misma dirección, ver Figura 3.

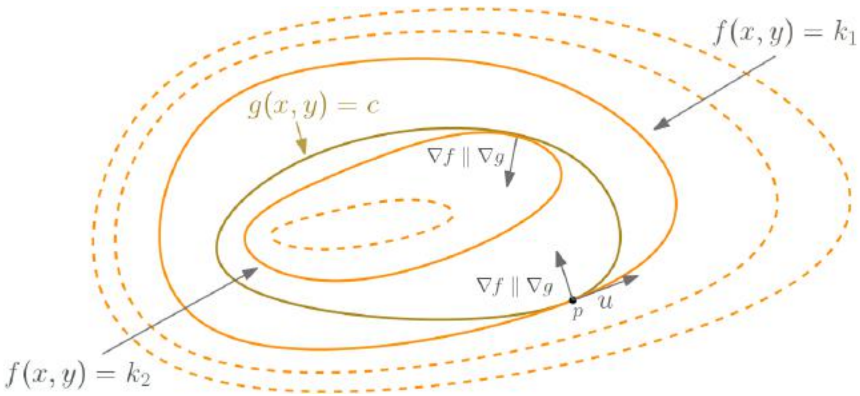


Figura 3: Curvas tangentes

Por otro lado, sea u un vector tal que esté contenido en la recta tangente común entre $g(x,y) = c$ y $f(x,y) = k$ y que pasa por el punto $p = (x_0, y_0)$. Entonces, el punto p corresponde a un extremo local de $f(x,y)$ sujeta a la restricción. Esto se puede ver si observamos la curva $M_u \cap f(x,y)$, donde M_u es el plano que pasa por p y contiene a u. Lo anterior, nos dice que las derivadas direccionales son iguales a cero, esto es, $D_u f(p) = 0$ y $D_u g(p) = 0$, ver Figura 4.

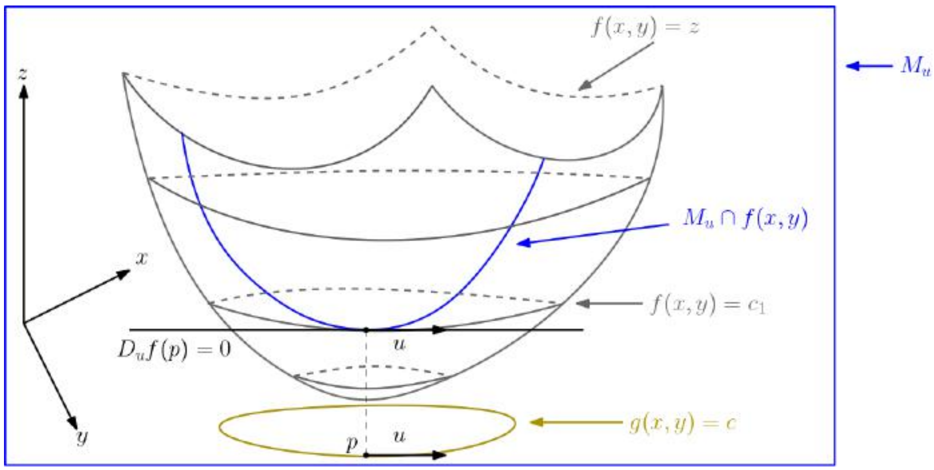


Figura 4: Derivada direccional tangente a una curva de nivel

Más precisamente, el extremo ocurre cuando $\nabla f(x,y) \cdot u = \nabla g(x,y) \cdot u = 0$; en otras palabras, cuando $\nabla f(x,y)$ y $\nabla g(x,y)$ son paralelos y, por tanto, cuando se tiene que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ para algún número real λ, ver Figura 3. Este valor λ es conocido como Multiplicador de Lagrange. En consecuencia, para funciones de dos variables, la optimización con una restricción equivale a resolver el sistema

$$\begin{Bmatrix} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) = c. \end{Bmatrix}$$

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Esta técnica se puede generalizar para múltiples restricciones. Además, la técnica también puede ser extendida a problemas de cálculo de variaciones con restricciones del tipo integral.

UN EJEMPLO EN GEOMETRÍA

Ahora mostraremos el uso de los Multiplicadores en la solución de un problema geométrico.

Ejemplo (Tikhomirov, 1986, p. 137): Dado un ángulo $\measuredangle BAC$ y dos puntos M y N en su interior, trace un segmento DE que pase por M, de tal manera que el área del cuadrilátero $ADNE$ sea mínima.

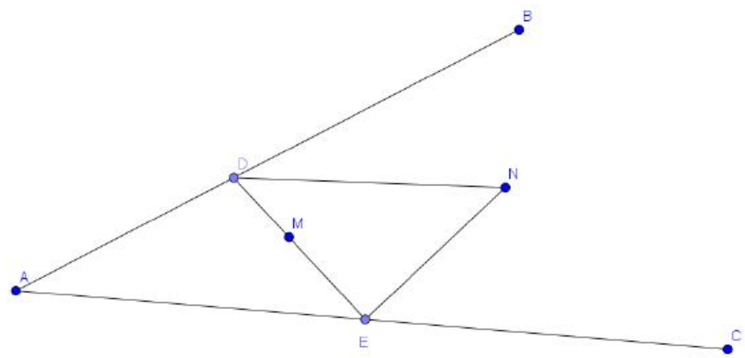


Figura 5: Problema de Shariguin.

Solución: Tracemos segmentos MF y MG paralelos a los lados AC y AB, respectivamente, y denotemos su longitud como a y b. Tracemos las perpendiculares desde N hacia AB y AC y denotemos sus longitudes como d y c, respectivamente.

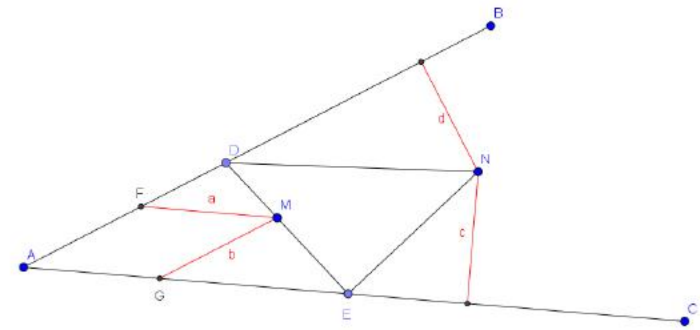


Figura 6

Claramente, el doble del área de $ADNE$ es igual a $(b+x)d=(a+y)c$, donde $x=|FD|$ y $y=|GE|$. Además, por semejanza de los triángulos DFM y MGE podemos deducir que $xy=ab$.

Tenemos entonces las siguientes funciones:

$$f_0(x,y)=(b+x)d+(a+y)c,$$

la cual queremos minimizar sujeta a la restricción

$$f_1(x,y)=xy-ab=0.$$

Entonces, la función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}=f_0+\lambda_1 f_1.$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow d + \lambda_1 y = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow c + \lambda_1 x = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos las condiciones necesarias para minimizar el área del cuadrilátero $ADNE$, las cuales son

$$xy = ab, \qquad \frac{x}{y} = \frac{c}{d}.$$

Dado que el máximo del área del cuadrilátero $ADNE$ no está acotada, tenemos que la solución obtenida nos provee de hecho un mínimo.

■

Ahora veremos cómo es posible extender un poco más el resultado obtenido. Supongamos ahora que en lugar de tener un par de puntos M, N, tenemos un conjunto convexo M tangente a AC y AB y un punto N, como se muestra en la figura siguiente. Queremos encontrar el punto P sobre el arco $\widehat{HL}$, de manera que el área del cuadrilátero $ADNE$ sea mínima, donde el segmento DE es tangente a M en el punto P.

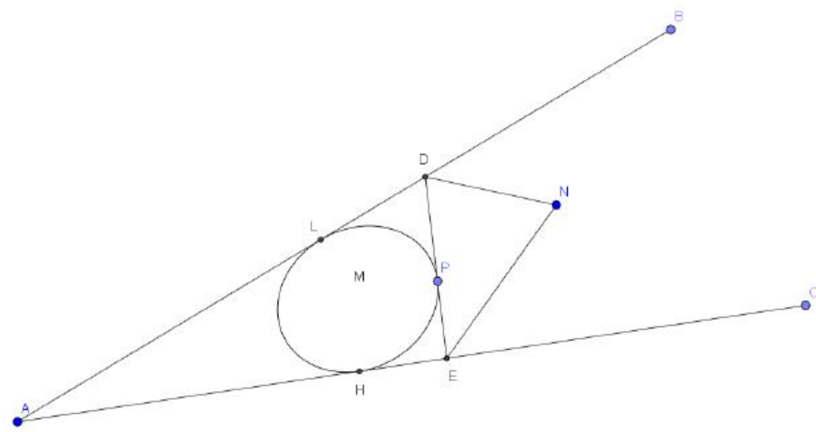
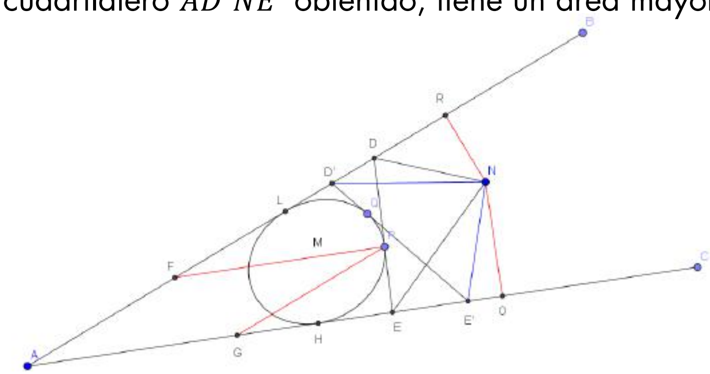


Figura 7: Problema del área generalizado.

Solución: El candidato a ser el punto P que minimiza el área del cuadrilátero es el que cumple las condiciones del ejemplo anterior. Para demostrarlo, basta con ver que escogiendo cualquier otro punto Q sobre el arco $\widehat{HL}$, el cuadrilátero $AD'NE'$ obtenido, tiene un área mayor.



Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Figura 8.

Sea $P \in \widehat{HL}$ tal que $\frac{|FD|}{|GE|} = \frac{|NO|}{|NR|}$, donde FP y PG son paralelos a AC y AB, respectivamente. Ahora, sea $Q \in \widehat{HL}$, tracemos el segmento $D'E'$ tangente a M en Q, donde $D' \in AB$ y $E' \in AC$. Luego, tracemos un segmento $D''E''$ paralelo a $D'E'$ en P.

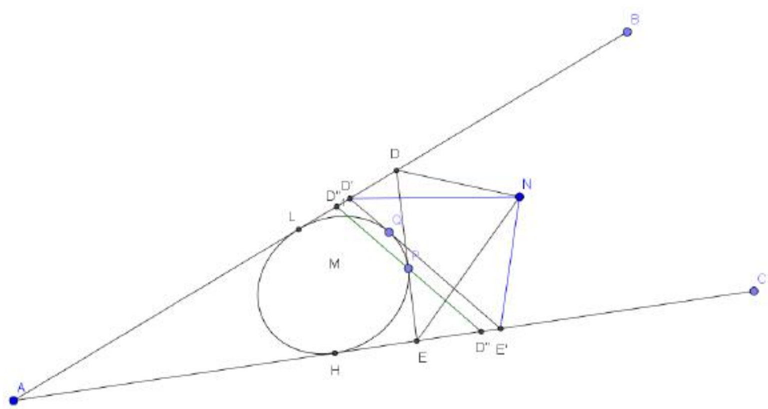


Figura 9.

El cuadrilátero $AD''NE''$ tiene un área mayor que la del cuadrilátero $ADNE$, pues por el ejemplo anterior para el punto P el cuadrilátero con menor área es $ADNE$. Claramente, $AD''NE'' \subset AD'NE'$ por lo que el área del cuadrilátero $AD'NE'$ es mayor a la del cuadrilátero $AD''NE''$, así el área de $AD'NE'$ es mayor al área de $ADNE$. Por lo tanto, si el punto P cumple las condiciones del ejemplo anterior entonces minimiza el área del cuadrilátero $ADNE$, donde el segmento DE es tangente a M en el punto P.

BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.

Rousseau, C., Saint-Aubin, Y., Antaya, H., Ascah-Coallier, I., & Hamilton, C. (2008). *Mathematics and technology*. Springer.

Tikhomirov V.M. (1986), *Stories about maxima and minima,* Mathematical World, Amer. Math. Soc., Volume 1.