Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA DE BACHILLERATO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Learning difficulties on high school Algebra: An exploratory study

Víctor Larios Osorio, Ma. del Carmen Fajardo Araujo, Teresa de Jesús Valerio López, Patricia Isabel Spíndola Yáñez, Carmen Sosa Garza, Rita Ochoa Cruz

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, MÉXICO

vil@uaq.mx

RESUMEN

El Álgebra en bachillerato en México (15 a 18 años) es el área de las Matemáticas que es prácticamente la base de los cursos posteriores, por lo que los problemas que tengan los alumnos durante su aprendizaje se verán reflejados en su desarrollo académico posterior (Geometría Analítica, Trigonometría, Cálculo, Probabilidad y Estadística). Es por ello que en el contexto específico de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) se ha querido indagar sobre los problemas en su aprendizaje. Este trabajo presenta los primeros resultados de un proyecto al seno de la institución orientado en este sentido. En este proyecto se hizo un estudio muestral que tomó en cuenta aspectos semióticos, el uso del Álgebra como herramienta para resolver problemas y sobre las justificaciones que los alumnos formulan para sustentar sus respuestas. Se observó la necesidad de que los alumnos le den sentido a las representaciones y a los objetos algebraicos, para que el Álgebra se convierta en una herramienta.

Palabras clave: Álgebra en bachillerato, justificaciones y argumentaciones, representaciones semióticas.

ABSTRACT

The high school Algebra in Mexico (15-18 years old students) is a basic mathematic curse, fundamental for de subsequent math courses. This means that every problem students have when they learn Algebra will be reflected in their academic development (Analytic Geometry, Trigonometry, Calculus, Probability and Statistics). That is why we are interested to research about the learning problems in Algebra at the specific context of the Bachelors' School of the Autonomous University of Querétaro (UAQ). This paper presents the first results of one project inside the institution oriented in this direction. In this project a sample of students was taken and a quiz has been applied to the students asking about semiotic aspects, use of Algebra as a tool to solve problems, and students' justifications to support their answers. We observed the students' need to give meaning to representations and to algebraic objects, in order to Algebra becomes a tool and no to be just a collection of algorithmic processes that must be memorized.

Keywords: High school Algebra, justifications and argumentations, semiotic representations.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las Matemáticas tiene dificultades por muy diversas razones, algunas de las cuales están determinadas por las dificultades en el aprendizaje. En la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) se ha estado planteando la necesidad de considerar al aprendizaje como fuente para identificar problemas en la enseñanza.

Para ello se han realizado varios proyectos de investigación, como es el caso del proyecto "La interacción maestro-alumno en las clases de Matemáticas en el Estado de Querétaro" (2010-2012), en el cual se realizó un estudio descriptivo de las prácticas de profesores de Matemáticas en el Estado de Querétaro en los niveles educativos de la Primaria, la Secundaria y el Bachillerato. Algunas de las conclusiones fueron referentes al nivel bachillerato en todo el Estado (Larios y Díaz Barriga, 2013, pág. 187 y ss.) y entre éstas se incluye el cambio en la "típica" dinámica de las clases de acuerdo con los enfoques que se plantean en el Sistema Nacional de Bachillerato y que buscan el aprendizaje por medio de actividades que están centradas en el desarrollo de los alumnos y de un trabajo con los objetos matemáticos.

También se desarrolló el proyecto "El proceso de justificar y el pensamiento reflexivo en alumnos del nivel medio" (2012-2014). En este proyecto se ha observado que los alumnos del nivel medio pueden argumentar matemática de manera progresiva y adecuada al considerar actividades diseñadas con una finalidad específica y que consideran un esquema que tenga la reflexión como base (Arellano, 2013; Avilés, 2014). Estas actividades estaban asociadas a conceptos que se incluyen en los currículos oficiales, pero se le dio más énfasis a procesos como la observación, la argumentación y la experimentación.

Con estos esfuerzos se ha ido acotando el campo de estudio hacia el aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (EB UAQ), para así proponer líneas de trabajo en la enseñanza. Este interés se considera justificado por dos razones:

Por una parte, si se considera un enfoque sociocultural, sabemos que el contexto social y escolar influyen los procesos de aprendizaje. Como menciona Valero (2012, pág. 190), "numerosas investigaciones han mostrado cómo la interacción social en el aula puede ser un factor determinante en el desarrollo de competencias matemáticas por parte de los estudiantes. La manera como los estudiantes pueden llegar a tener competencia sobre cualquier noción depende de cómo se desarrolla una cadena de actividades e intercambios en la que el maestro y estudiantes negocian el significado de tal noción."

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Es por estas razones que se ha realizado un proyecto para estudiar la problemática del aprendizaje del Álgebra en el contexto particular de la institución. Lo cual permitirá plantear las bases para el diseño de estrategias o acciones específicas en varios niveles que irían desde la práctica docente, en el aula y hasta el nivel curricular.

Tanto el proyecto, como los resultados que se han obtenido, se describen a continuación.

ANTECEDENTES Y EL PROYECTO

En Martínez, Rojas y Villanueva (2015) se describe una experiencia realizada con alumnos del bachillerato de la UAQ a partir de talleres intensivos de regularización. En esta experiencia se consideraron los cursos relativos al Álgebra, la Geometría Analítica y el Cálculo (Diferencial e Integral). Las autoras detectaron como principales problemas para el aprendizaje lo siguiente en cada uno de los cursos (págs. 239-240):

Cursos	Álgebra	Geometría Analítica	Cálculo
Temática con dificultades:	Multiplicaciones, uso de signos (positivo y negativo), signos de agrupación, factorización, simbología y conjuntos de números.	Despejes y uso de signos.	Leyes de los exponentes, multiplicación algebraica y factorización.

Es notorio que entre estas dificultades no aparecen referencias a representaciones gráficas, sino a operaciones aritméticas y algebraicas, así como a representaciones de éste último tipo.

En este sentido afirman:

> "Para los alumnos entender el lenguaje matemático fue algo complicado, pues están acostumbrados a expresar sus ideas en un lenguaje cotidiano y no en uno abstracto, en específico en Álgebra en el tema de conjuntos." (pág. 240)

En 2008 el Departamento de Educación de los EEUU presentó *The final report of the National Mathematics Advisory Panel* (NMAP, 2008) en el cual participaron veinticuatro instituciones de ese país. Entre los comentarios que aparecen está el siguiente:

> "Aunque nuestros estudiantes encuentran dificultades con muchos aspectos de matemáticas, la mayoría de los que están involucrados con las políticas educacionales, ven el desempeño en Álgebra como una preocupación central. […] Éstas son preguntas con grandes consecuencias, pues se ha demostrado que el curso de Álgebra es la puerta para lograr mejores resultados en el futuro del estudiante. Los estudiantes necesitan este curso para poder cursar cursos de matemáticas más avanzadas en sus siguientes etapas educativas; más aún, investigaciones demuestran que el cursar aprobatoriamente el curso de Álgebra II está

relacionado de manera significativa con el éxito que los estudiantes tienen en la etapa de educación superior, y con los ingresos que recibirán al obtener un trabajo. De hecho, **los estudiantes que terminan satisfactoriamente el curso de Álgebra II tienen más del doble de posibilidades de graduarse de la licenciatura que aquéllos que tienen menor preparación matemática."** (2008, pág. xiii)

Todo este interés resulta particularmente relevante si consideramos que el Bachillerato en la UAQ está orientado al aprendizaje final de dos áreas matemáticas: Cálculo y Estadística. Para ello existe una serie de cursos que consideran un año de Álgebra, después Geometría y Trigonometría, tras ello Geometría Analítica y, finalmente en el tercer año, los dos cursos mencionados. En otras palabras, y a pesar de que no existe una seriación legal entre los cursos de Matemáticas, pues se considera que un curso posterior puede ayudar a un alumno a superar sus dificultades de cursos anteriores, si se tienen problemas en el curso de Álgebra del primero año es posible que los alumnos tengan problemas en la comprensión de los siguientes cursos que tienen una fuerte carga de uso del lenguaje algebraico.

Martínez, Rojas y Villanueva, en el mismo trabajo que ya se mencionó afirman:

> "En la asignatura de Cálculo los alumnos llegan con deficiencias algebraicas y estas no permiten la comprensión de los nuevos conceptos de la materia, haciendo de ella una de las menos aceptadas por los alumnos, ya que hace uso de casi todas las asignaturas impartidas con anterioridad en su paso por el bachillerato." (pág. 241)

Este tipo de situaciones han llevado a plantear un proyecto exploratorio que proporcione información inicial para el diagnóstico de la situación del aprendizaje en la Escuela de Bachilleres de la UAQ y que a continuación se ampliará.

DESARROLLO

a. La muestra

Dado que el proyecto fue pensado para indagar de manera exploratoria sobre las dificultades sobre Álgebra de los alumnos se consideró la posibilidad de hacer un estudio cuantitativo tomando una muestra que resultase hasta cierto punto representativa en los dos principales planteles de la institución y que además se encuentran en la zona metropolitana de la ciudad de Querétaro, capital del Estado homónimo y sede de la UAQ. Estos planteles (conocidos por "Sur" y "Norte" por su ubicación geográfica) agrupan a poco más de 4,100 estudiantes que representan la mayor parte de la población estudiantil de la institución (el 71.2% de los poco más de 5,800 alumnos que atiende en total en sus siete planteles repartidos en el Estado).

Con base en lo anterior se seleccionó una muestra aleatoria de manera estratificada, tomando de cada grupo una cantidad fija de alumnos dependiendo del grado, el turno y el plantel, ya que se contó con el apoyo de las autoridades de la institución y se tuvo acceso a las listas de los grupos. A los alumnos seleccionados se les invitó a participar y se les aplicó un "examen diagnóstico" tipo encuesta que constó de diez reactivos de diferente tipo y que se ampliará enseguida. En total se aplicaron 373 "exámenes diagnóstico" a igual cantidad de alumnos de los dos planteles mencionados.

b. El instrumento

El instrumento para la recolección de la información fue un examen diagnóstico de diez reactivos, algunos de opción múltiple y otros para respuestas abiertas, que tenían diversas orientaciones. En este trabajo sólo mencionaremos los reactivos que estuvieron orientados al estudio de:

- El uso o desuso de modelos algebraicos para resolver planteamientos.
- El sentido de los signos algebraicos.
- El uso de tipos argumentos para justificar las respuestas.
- El uso de diversos registros semióticos de representación (gráfico y algebraico).

En este sentido se irán considerando los reactivos utilizados de acuerdo a la temática recién mencionada.

La aplicación duró, en todos los casos, a lo mucho una hora y fue durante su jornada normal de clases y en sus respectivos planteles. Los alumnos que asistieron estuvieron en salones normales (con butacas) y no utilizaron calculadoras (no se les pidió, ni se les prohibió). Estuvieron organizados por el grado académico.

Dado el tamaño de la muestra y el compromiso de respetar los datos personales de los alumnos participantes, no se les dio un seguimiento posterior. No obstante, uno de los propósitos de estos resultados es que sirvan de base para un estudio posterior en la misma Escuela de Bachilleres.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

c. Uso o desuso de modelos algebraicos para resolver planteamientos

Dos de los reactivos del instrumento fueron pensados para este rubro, pues se esperaba que los alumnos utilizaran en alguna medida el Álgebra como medio (herramienta) para resolver una situación planteada. Los reactivos son:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

3. Un auto inició un viaje con el tanque lleno y cuando se detuvo en una gasolinera había consumido $\frac{7}{8}$ de su capacidad. Cargó sólo 38 litros y entonces el medidor marcó $\frac{3}{5}$ partes del tanque. ¿Cuál es la capacidad del tanque? Describe todo el desarrollo y la respuesta.

8. ¿De qué número 78 es el 150%? Escribe todo el procedimiento que hagas.

En el primer caso (reactivo 3) se esperaba que los alumnos realizaran un desarrollo algebraico similar a lo siguiente:

$$\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$$

$$38 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{8}\right)x = \frac{24-5}{40}x = \frac{19}{40}x$$

$$x = \frac{40 \cdot 38}{19} = \frac{40 \cdot 19 \cdot 2}{19} = 40 \cdot 2 = 80$$

Así que la capacidad del tanque de combustible es de 80 litros, pues así el automóvil inició su viaje con el tanque lleno y en la primera parte se gastó $\frac{7}{8}$ del tanque, es decir 70 litros. En la gasolinera cargó 38 litros y así el tanque tuvo 48 litros, que son $\frac{3}{5}$ del tanque.

En el caso del reactivo 8 lo que se esperaba que los alumnos pudiesen plantear (y resolver) una ecuación como la siguiente:

$$1.5x = 78$$

$$x = \frac{78}{1.5} = 52$$

Es decir, que la respuesta buscada es 52.

Como se puede observar los dos reactivos tienen diferente nivel de dificultad en términos de la necesidad de plantear un modelo algebraico como herramienta para resolverlos. Mientras que en el primero podría ser más útil aplicar técnicas algebraicas, en el segundo podría resultar superfluo. Sin embargo la idea era ver qué tanto los alumnos utilizaban Álgebra, si tenían preferencia. En este sentido también es importante mencionar que se contabilizó la cantidad de alumnos que dieron la respuesta correcta independientemente si utilizaron estrategias aritméticas o algebraicas, pero también se consideró la situación en que los alumnos plantearon ecuaciones "incorrectas" o que manipularon erróneamente las expresiones planteadas pues una situación es resolver un problema y otra tratar de hacerlo con una cierta herramienta que puede estar disponible.

En otras investigaciones se han hecho categorizaciones para estudios parecidos, como el de Frost (2015, pág. 3) que plantea las siguientes categorías para las respuestas:

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

1. "Correcto — La estrategia de solución es válida matemáticamente y el conjunto solución fue declarado explícitamente.
2. "Conjunto solución ausente — La estrategia de solución es válida matemáticamente, pero no es proporcionado el conjunto solución.
3. "Conjunto solución incorrecto — La estrategia de solución es válida matemáticamente, pero el conjunto solución dado es incorrecto.
4. "Error algebraico/aritmético — Un error algebraico o aritmético ocurre. Típicamente este error cambió tanto la naturaleza del problema como del conjunto solución.
5. "Inserción de símbolos literales — Un símbolo literal fue insertado artificialmente en algún punto de la respuesta escrita.
6. "Otro — Esta categoría incluye respuestas en blanco, 'no sé', etc."

Sin embargo después de revisar las repuestas de los alumnos para nuestro trabajo y considerando que, por ejemplo, la categorización anterior se planteó para estudiar la resolución de ecuaciones y desigualdades mas no para resolver planteamientos, se propuso la siguiente categorización:

Categoría	**Subcategoría**
Se plantea un modelo algebraico (correcto o no)	Manipula correctamente las literales y resuelve correctamente
	Lo resuelve parcialmente con la manipulación algebraica
	No utiliza el modelo algebraico para resolver
	Utiliza estrategias aritméticas
	No resuelve
Introduce algunas literales	Hace alguna manipulación con las literales, pero utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No manipula las literales, pero utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No resuelve
No utiliza literales	Utiliza estrategias aritméticas y lo resuelve
	No resuelve
No lo resuelve	

Es importante mencionar que la última categoría incluye la ausencia de respuestas o respuestas del tipo "no sé" en las que se indique no hubo intento por resolver la situación.

Ahora bien, en cuanto al reactivo 3 resultó que sólo 25 alumnos (el 6.7%) lo resolvieron correctamente. Esta cantidad es realmente baja, pero sólo cinco de ellos (1.3% del total) utilizaron un planteamiento algebraico y el resto (20 alumnos) utilizaron estrategias puramente aritméticas. Es interesante ver que otros tres alumnos (0.8% del total) plantearon bien la ecuación, pero incurrieron en errores en la manipulación algebraica (ver la Ilustración 1 en la que el alumno termina resolviendo una ecuación cuadrática).

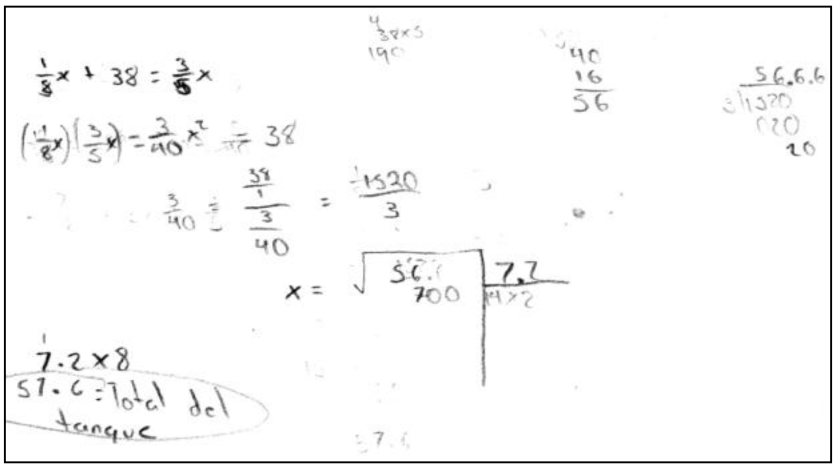


Ilustración 1. Ejemplo de respuesta de un alumno de segundo año (alumno Nm-3-006).

Ahora bien, con la intención de mirar el uso de estrategias algebraicas se tuvo que de los 273 alumnos que contestaron el reactivo (correcta o incorrectamente) 233 utilizaron (el 62.5%) estrategias aritméticas, hubiesen o no incluido el uso de símbolos algebraicos. Además, este porcentaje se mantiene más o menos constante en los distintos grados de la escuela (64% para primer año, 59% para segundo y 64% para tercero), lo que muestra un cierta preferencia en el tipo de estrategias independientemente del avance escolar.

Resultó que, de hecho, 222 alumnos (el 59.5%) no utilizaron en absoluto símbolos o estrategias algebraicas. Si consideramos estos datos se tiene que sólo el 14.65% de los estudiantes utilizaron estrategias algebraicas (correctas o no) para resolver este planteamiento.

Por otro lado, en el caso del reactivo 8 se tuvieron datos todavía más cargados hacia las estrategias aritméticas. 255 alumnos (el 68.4% de los alumnos participantes y 96.6% de los alumnos que contestaron el reactivo) utilizaron estrategias puramente aritméticas. Sólo ocho alumnos en total utilizaron estrategias algebraicas con mayor o menor éxito:

La cantidad de alumnos que utilizaron estrategias algebraicas en los tres niveles de la escuela prácticamente no cambiaron: un alumno de primer año, dos de segundo y cuatro de tercero. Proporcionalmente la diferencia es inapreciable y se puede decir que la preferencia en el uso de las estrategias aritméticas se mantiene a lo largo del bachillerato (66% al 71%).

Una de las estrategias más utilizadas para resolver este planteamiento fue la llamada "regla de tres". 118 alumnos (casi la tercera parte) lo utilizan para abordar la situación (incluso con estrategias algebraicas), aunque a veces de manera errónea.

Uno de los casos erróneos es cuando se considera el dato original (78) no como el 150%, sino el 100%, y entonces el alumno lo que busca es el 150% y obtiene 117 como resultado. En este sentido sí se notó un cambio en el proceso de control a lo largo del desarrollo académico, pues el 15.63% de los alumnos del primer año hicieron esto, el 9.6% de los alumnos del segundo año lo hicieron y el porcentaje disminuyó al 2.5% para los alumnos del tercer año.

Como se mencionó unos párrafos más arriba, este reactivo puede ser resuelto más fácilmente utilizando estrategias puramente aritméticas que el anterior y, de hecho, el uso de la incógnita (una x por lo general) pareciera que es para señalar dónde está el dato que se busca en la regla de tres, pero no para hacer manipulaciones algebraicas (ver, por ejemplo, la siguiente ilustración).

$$\left(\frac{78}{150\%}\right)\left(\frac{100\%}{x}\right) = \frac{7800}{150} = 52 \text{ es el } 100\%,\ 78 \text{ es el } 150\%$$

Ilustración 2. Ejemplo del uso de la incógnita para señalar el dato buscado, pero no para utilizarlo como parte de un estrategia algebraica (alumno Sm-6-001).

b. El sentido de los signos algebraicos

Para revisar este aspecto se consideraron varios de los reactivos diseñados, a saber el reactivo 1, el reactivo 3 (ya mencionado), el reactivo 7 y el reactivo 8 (ya mencionado también).

El primer reactivo del instrumento fue de opción múltiple y es el siguiente:

1. Selecciona el inciso que corresponda a la respuesta que consideres correcta de la siguiente pregunta:

¿Por qué $\sqrt{2}$ no es un número racional?

a) No puede expresarse como el cociente de dos números enteros.

b) Así lo establece la definición de $\sqrt{2}$.

c) No se puede expresar como $\frac{p}{q}$ con *p* y *q* enteros, y $q \neq 0$.

d) Eso es falso porque $\sqrt{2}$ es un número racional.

e) Así lo dicen los maestros.

En este caso el énfasis está en el hecho de que las opciones *a* y *c* son prácticamente la misma (la diferencia es que la primer opción no establece la necesidad de que el divisor no sea nulo, pero no se incluyó porque alargaría "sospechosamente" la opción), por lo que fueron consideradas como opciones correctas.

Es interesante observar que prácticamente la mitad de los alumnos (49.87%) seleccionó la opción *a*, mientras que sólo el 10.99% seleccionó la opción *c* (porcentaje incluso menor al 31% que seleccionó la opción *d*, ver la Ilustración 3).

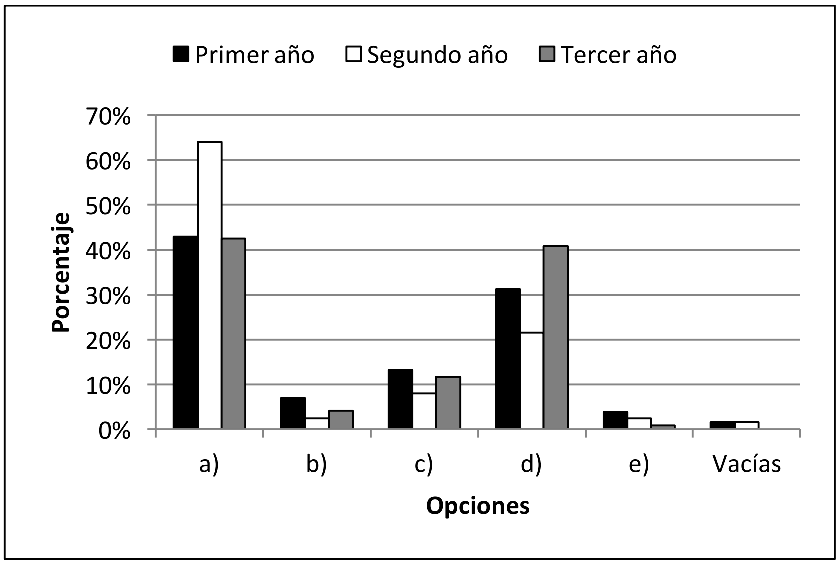


Ilustración 3. Porcentaje de selecciones de opciones del reactivo 1 por año que de bachillerato que cursan los participantes.

Hemos considerado como una posibilidad de que esta diferencia en las preferencias por las opciones *a* y *c* se debe al lenguaje utilizado: mientras que la opción a utiliza un lenguaje coloquial ("natural"), la opción c echa mano de un lenguaje que involucra símbolos algebraicos. Como sabemos, el lenguaje juega un papel clave al funcionar como un mediador entre los objetos matemáticos y el alumno. A este punto de su desarrollo académico los alumnos han tenido mucho más contacto con su lenguaje natural que con el lenguaje algebraico, por lo que explica esta preferencia. Sin embargo, al comparar los porcentajes en la selección de opciones para los tres grados del bachillerato se puede observar en la misma Ilustración 3 que las preferencias por la opción *a* prácticamente no disminuyen y por la opción *c* prácticamente no aumentan.

En cuanto al reactivo 3 se observó, vinculado al uso de estrategias aritméticas, la no utilización de símbolos algebraicos que llevó a algunos alumnos a inconsistencias en la escritura. Un caso notable es el que se muestra a continuación:

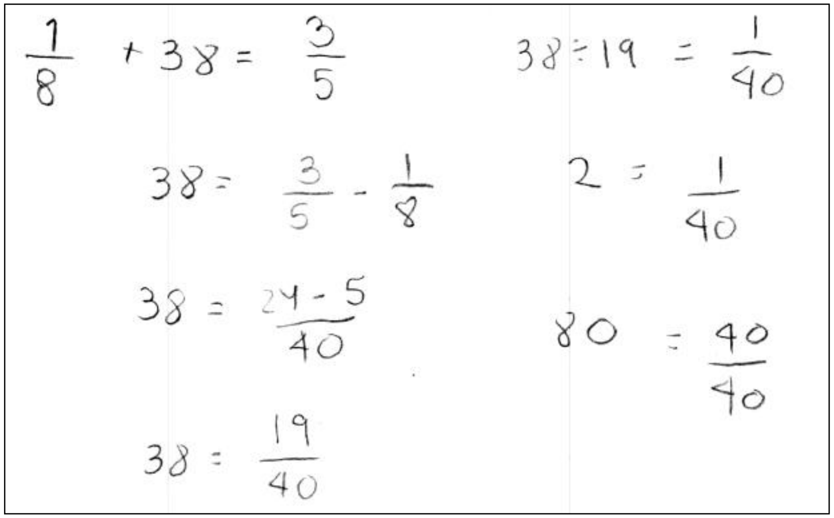


Ilustración 4. Respuestas al reactivo 3 de un alumno del segundo año (Sm-4-023).

Es interesante notar que a primera vista el signo de igualdad no cumple la función que debería desde el punto de vista matemático como relación de equivalencia. Sin embargo lo que ha escrito el alumno y el proceso realizado sería correcto si se le añaden literales en los sitios apropiados:

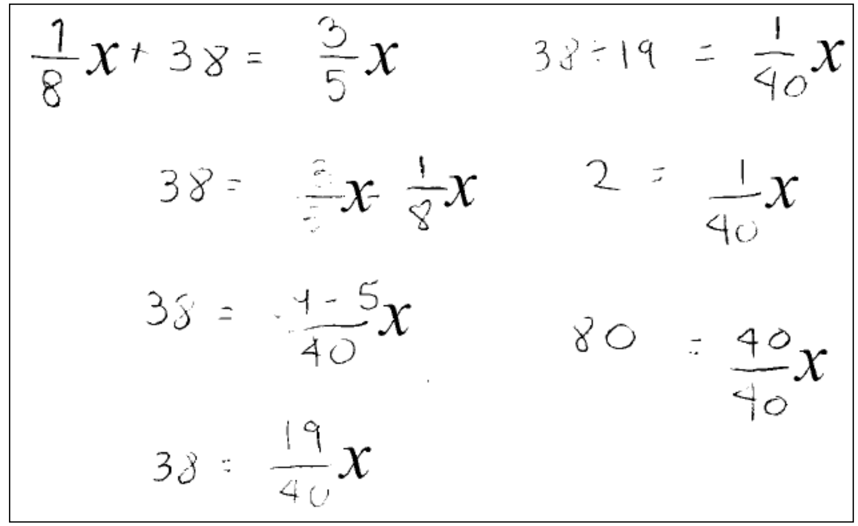


Ilustración 5. Respuesta mostrada en la Ilustración 7 con las literales añadidas.

Esto lleva a suponer que el alumno ha comprendido en alguna medida la situación y ha planteado un modelo que la representa, pero el problema está en el significado de las literales. En otros casos los alumnos han expresado fracciones del tanque igualándolas con cantidad de litros de manera explícita (ver abajo).

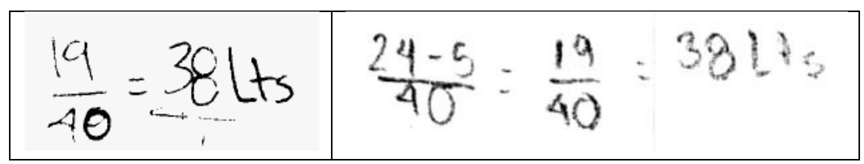
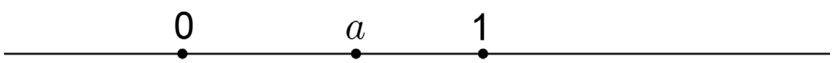


Ilustración 6. Ejemplos de expresiones propuestas por dos alumnos del tercer año (Sv-6-009 y Sm-6-029).

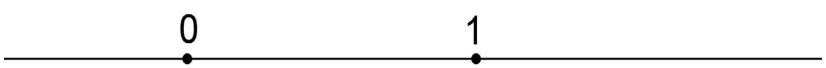
Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Lo que podemos suponer es que el símbolo "Lts", relacionado con "litros", tiene sentido para los alumnos, mientras que el símbolo "*x*" no tiene sentido para ser relacionado con "partes del tanque" o "fracciones del tanque".
Un caso similar ocurrió con el reactivo 7, el cual establecía lo siguiente:

7. En la recta numérica tienes un número a que está localizado de la siguiente manera:

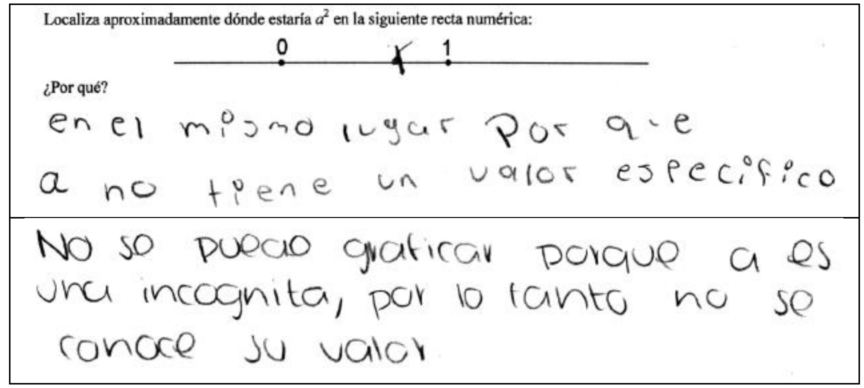


Localiza aproximadamente dónde estaría a^2 en la siguiente recta numérica:



¿Por qué?

Lo que se esperaba en este caso era que los alumnos señalaran un punto entre el 0 y la posición de *a*.
Con respecto a lo que se ha mencionado en los párrafos anteriores algunos alumnos declararon explícitamente que no podían ubicar la posición del punto correspondiente a a^2 porque no se conocía el valor de *a* (ver Ilustración 7). En otras palabras, es necesario que la literal tenga un valor numérico para poderse manipular como número, de otra manera es un símbolo que hace referencia a algo no numérico.


Localiza aproximadamente dónde estaría a^2 en la siguiente recta numérica:

0 1

¿Por qué?

en el mismo lugar Por q-e a no tiene un valor especifico

No se puedo graficar porque a es una incognita, por lo tanto no se conoce su valor

Ilustración 7. Ejemplos de justificación sobre la posición de a^2 en el reactivo 7 (Sv-2-025 y Sv-6-021, respectivamente).

Aquí es muy importante considerar que, finalmente, los objetos matemáticos los "manipulamos" por medio de representaciones que pertenecen a registros de representaciones semióticas (en el sentido de Duval, 1998), pero los significados que un individuo les atribuye a estas representaciones no necesariamente coinciden con las esperadas. Es por ello que lo que escriben los alumnos carecen de sentido para el lector experto, pero bien podrían tener sentido para el alumno.

También se pueden considerar los planteamientos para resolver el reactivo 8 ya mencionado, donde la expresión "78 es a 150%", en el registro semiótico de la lengua natural, es traducida a "78 = 150%" en el registro semiótico algebraico como si "es a" fuese lo mismo que "=".

En este mismo sentido se debe considerar que el signo "=" tiene dos funciones debido a la homonimia en el uso de los símbolos y que, se ha visto, causa dificultades en su comprensión:

> "La investigación ha mostrado que una concepción errónea común es ver al signo de igual como un signo de entrada-salida, como en cuando tres más cinco produce (es igual a) ocho (Kieran, 1981). En otras palabras, muchos estudiantes tienen una visión operacional del signo de igual. El signo de igual puede ser visto como 'el total' o 'la respuesta' (McNeil y Alibali, 2005). Esta visión operacional puede llevar a errores como contestar 17 cuando se intenta resolver la oración numérica: 8 + 4 = ■ + 5 (E.J. Knuth et al., 2006). Por el contrario, una comprensión relacional del signo de igual reconoce que el signo de igual es un símbolo para la equivalencia matemática; que ambos lados deben balancearse (A.C. Stephens, 2006)." (Frost, 2015, pág. 2)

Esta diferencia entre los dos usos permiten explicar la razón por la que alumnos del tercer año de bachillerato siguen escribiendo "cadenas" de igualdades como la siguiente:

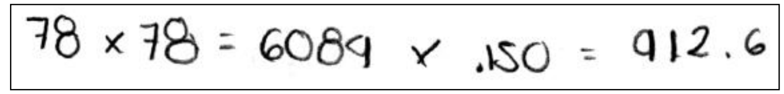


Ilustración 8. Ejemplo de expresión con el uso del signo igual de un alumno de tercer año (Nv-5-017).

c. El uso de diversos registros semióticos de representación

La noción de registro de representación semiótico (Duval, 1998) nos ayuda a identificar las diferentes maneras en que se representan los objetos matemáticos y cómo el individuo hace una manipulación de las representaciones para darle un significado al objeto, pero también para identificar si existe una confusión entre las representaciones o entre las representaciones y los objetos.

A pesar de que el tema de la investigación es sobre Álgebra y se podría pensar que mucho estaría relacionado a representaciones simbólicas ligadas al registro de representación algebraico, nos llamó la atención el uso de otros registros de representación, principalmente el gráfico y el del lenguaje natural.

En lo que respecta al uso de representaciones gráficas los reactivos que hemos tomado en cuenta son

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

dos: el reactivo 3 (ya mencionado desde el inicio) y el reactivo 7 (recién mencionado).

En el primer caso el 9.4% de los alumnos utilizó alguna representación gráfica para ilustrar la situación y ayudarse. En su mayoría son representaciones que provienen de la Escuela Primaria, donde las fracciones se presentan como pasteles rebanados o bien rectángulos divididos en n partes.

Según Otte (2006, pág. 16) "los profesores de Matemáticas muy a menudo no les gustan las representaciones icónicas, creyendo que son confusas y no controlables con respecto a su impacto (…). Esto podría ser tan cierto como esencial, si algo nuevo es aprendido. Los razonamiento matemático y lógico son imposibles sin observación, percepción generación intuitiva de ideas e hipótesis nuevas." Sin embargo, en algunos casos estas representaciones sirvieron como medio para darle sentido a la situación planteada al funcionar como sustitutos de las literales como en el siguiente ejemplo:

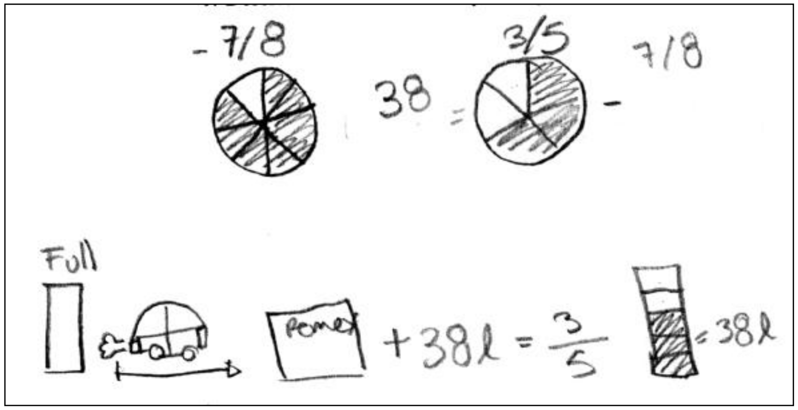


Ilustración 9. Ejemplo donde se sustituye el uso de la incógnita (literal) por una representación gráfica en la respuesta del reactivo 3 (Nv-5-015).

Para el caso del reactivo 7 la cosa es distinta, pues mientras que en el anterior las representaciones gráficas son ayudas, en el caso de este último reactivo es necesario utilizar el registro gráfico porque está incluido en la consigna. Además, se esperaba que echaran mano de otros registros, como el algebraico o el lenguaje natural, para vincularlo con el gráfico. Sin embargo, esto no siempre ocurrió.

Casi dos terceras partes de los alumnos (el 64.6%) sólo utilizaron el registro gráfico mientras que sólo poco más de un quinto (el 21.2%) echaron mano de un registro semiótico simbólico para luego "regresar" al registro gráfico (ver Ilustración 10).

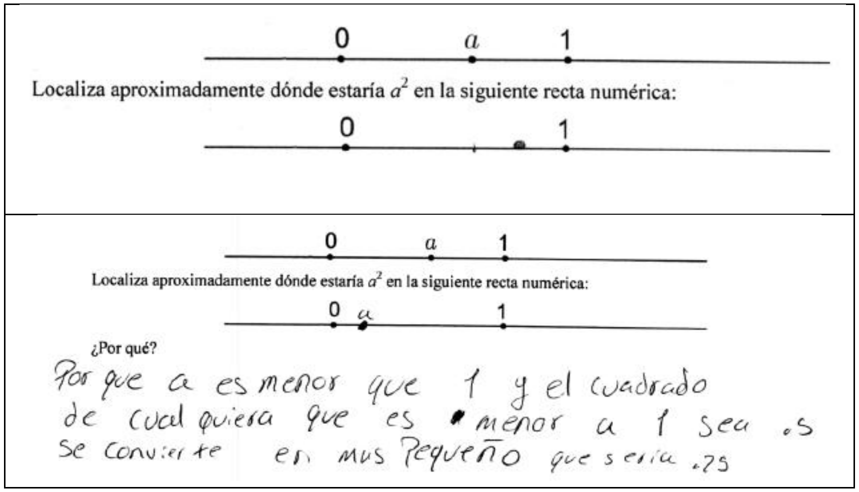


Ilustración 10. Ejemplos de un caso en el que sólo se echa mano del registro gráfico (arriba) y otro en el que el alumno utiliza un registro simbólico y luego regresa al gráfico (Sv-6-020 y Sv-6-024).

Al parecer el uso predominante de este registro de representación gráfico apoya la idea errónea de que el cuadrado de un número (positivo) siempre es mayor que el número (positivo) dado, aunque esto cause un conflicto al momento de pasar de un registro de representación a otro: El 62.2% de los alumnos consideró esto de manera explícita (el 7% del total utilizó incluso representaciones simbólicas e hizo operaciones) y colocó el punto correspondiente a a^2 a la derecha del punto que correspondía a *a* (ver la Ilustración 10, arriba, e Ilustración 11). Este porcentaje baja conforme avanzan los alumnos en su desarrollo académico, pues así lo hicieron el 78.9% de los alumnos del primer año, 58.4% del segundo año y 48.33% del tercer año, aunque los porcentajes son relativamente altos.

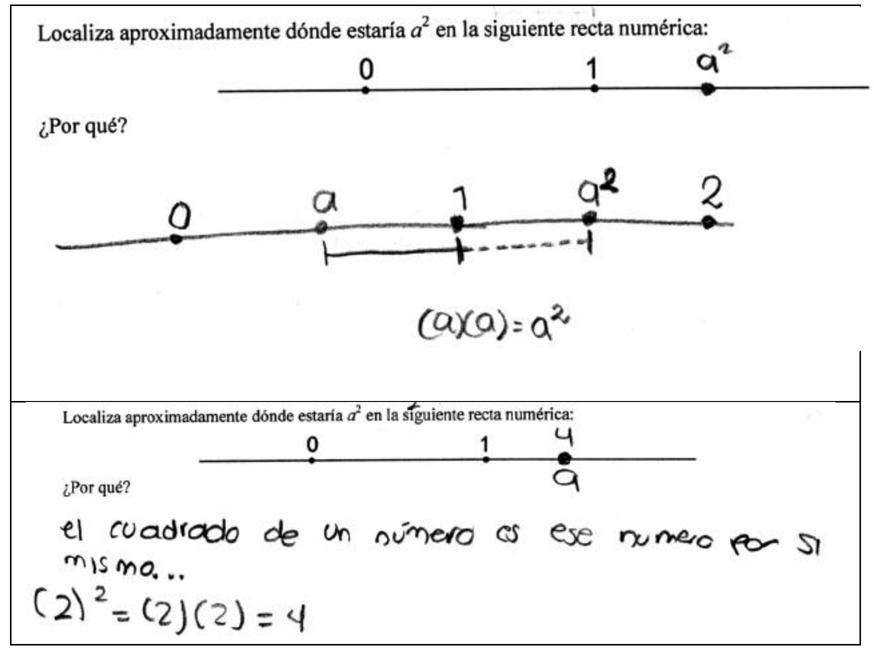


Ilustración 11. Ejemplos donde se aprecia la necesidad de que a^2 sea mayor que *a*, aunque se utilicen representaciones simbólicas y aunque se resuelva el conflicto echando mano de datos no proporcionados originalmente (Nv-5-015 y Nv-1-043).

Adicional a lo anterior el 38.1% de los alumnos consideró erróneamente que el cuadrado de un número es lo mismo que el doble del mismo número de manera explícita, lo cual refuerza la idea de que el cuadrado siempre es mayor que el número original. En este caso sucedió algo similar a lo recién mencionado: mientras que el 46.7% de los alumnos del primer año expresó (explícitamente) que el cuadrado de un número es su doble, el porcentaje disminuyó levemente al 40% en el segundo año y un poco más (el 26.7%) para los alumnos del tercer año. Estas dos situaciones sí muestran un cambio en la concepción errónea a lo largo del desarrollo académico de los alumnos.

CONCLUSIONES

Como se mencionó al inicio, este proyecto es de tipo diagnóstico orientado a proporcionar información útil para la toma de decisiones sobre estrategias orientadas a la enseñanza de las Matemáticas y modificaciones curriculares en el contexto particular de la Escuela de Bachilleres de la UAQ. Al momento se tiene información más bien cuantitativa como es el caso del EXHCOBA para el ingreso al nivel superior. Larrazolo, Backhoff y Tirado (2013) analizaron los resultados de estos exámenes para ingresar a universidades públicas de cinco Estados del país, entre ellas la UAQ, y observaron que "los estudiantes que aspiran a ingresar al nivel de educación superior (...) presentan serias deficiencias en los aprendizajes esperados de matemáticas de los niveles de primaria y de secundaria" (2013, pág. 1157).

En específico sobre la institución se tienen los resultados de la prueba ENLACE (SEP, 2013). En la aplicación de 2013 los alumnos de la UAQ tuvieron mejores resultados que el promedio estatal y nacional: Mientras que en el nivel 'insuficiente' se tuvieron porcentajes de entre 4% y 24% en la UAQ, a nivel Estado y país se tuvieron 29% y 34%, respectivamente; en la misma tónica mientras que en el nivel 'excelente' la UAQ tuvo a entre 12% y 38%, en el Estado y el país estuvieron el 10% y el 12%, respectivamente.

Además, en los tres temas considerados ("cantidad", "espacio y forma" y "cambios y relaciones") se vio un progresivo aumento en la cantidad de errores ya que en el primer tema la mayoría de los reactivos fueron respondidos correctamente más del 60%, pero en el último tema (que se aborda en el quinto semestre principalmente) casi la mitad de los reactivos tuvieron respuestas incorrectas en más del 60% de los casos.

Esta información nos está proporcionando un panorama general y algo de información referente a la problemática del aprendizaje de los alumnos en Matemáticas, pero no proporciona información sobre cuáles son las posibles causas de tales problemáticas.

Es importante reflexionar sobre lo que se ha mencionado, pues al considerar que la mayoría de los

alumnos participantes, sin importar el nivel educativo en el que están, prefieren utilizar estrategias aritméticas por sobre las algebraicas o muestran problemas para el manejo de las representaciones algebraicas se podrían llegar a plantear preguntas como "¿para qué estudian los alumnos de bachillerato el Álgebra, si no se convierte en una herramienta útil al final de su paso por la escuela?"
Sin embargo esta pregunta podría no ser la pertinente por todas las implicaciones que tiene el aprendizaje del Álgebra (no sólo para Matemáticas, sino para otras disciplinas) como medio para aprehender técnicas, usos de representaciones (lenguaje), procesos cognitivos (generalización, validación, etcétera). Es posible que sean más pertinentes preguntas como "¿qué podemos hacer para que se convierta en dicha herramienta útil?" o bien "¿cómo lograr que el uso del Álgebra tenga sentido para los alumnos?"

El reto es importante, porque los distintos registros de representación semiótica involucrados en el estudio de Álgebra implica conflictos con los antecedentes de los alumnos y conflictos entre los diversos registros. En los cursos de Matemáticas a partir de la Secundaria y en el Bachillerato se les pide a los alumnos que, por ejemplo, consideren símbolos originalmente considerados como no números y los consideren números. Y no sólo las literales, sino otros números representados por letras (por ejemplo *e*, base de los logaritmos naturales, o *i*, unidad imaginaria), letras griegas (π y φ, por ejemplo) o bien mezclas que deben mantenerse sin "convertir" a aproximaciones racionales (por ejemplo $\sqrt{2}$).
Así pues, la información obtenida puede dar pie a nuevas investigaciones que generen y difundan conocimientos educativos sobre el aprendizaje del Álgebra, considerando los retos que implican las demandas sociales, políticas, científicas, culturales y económicas. Todo ello con la finalidad de establecer las bases para proponer estrategias de cambio en los procesos educativos (capacitación docente, cambios curriculares, etcétera).

RECONOCIMIENTOS Y AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con apoyo del *Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación de la Universidad Autónoma de Querétaro* (FOFI-UAQ 2013) con registro FIN-2014-21.

Se agradece el apoyo de la las autoridades de la Escuela de Bachilleres de la UAQ y a los alumnos que participaron en la aplicación de los instrumentos para la obtención de la información: Andrea L. Rojas R., Azalia G. Martínez H., Dulce G. Rivera S., Miguel Á. Martínez O. y Noemí G. Lara S. de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas; Emir Martínez A. del Doctorado en

Tecnología Educativa y Meliza M. Bautista V. y Víctor Larios G. de las licenciaturas de la UAQ.

REFERENCIAS

Arellano C., C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro (Tesis de maestría no publicada, http://ri.uaq.mx/handle/123456789/1232).

Avilés F., A. (2014). *El pensamiento reflexivo como marco para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en un sistema por competencias*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro. (Tesis de maestría no publicada, http://ri.uaq.mx/handle/123456789/2883).

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt Espinosa (ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (págs. 173-201). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Frost, J. (2015). Disappearing *x*: When solving does not mean finding the solution set. *Journal of Mathematical Behavior*, *37*, 1-17.

Larios O., V. y Díaz Barriga C., A. J. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el Estado de Querétaro*. Querétaro, México: Editorial Universitaria UAQ.

Larrazolo, N., Backhoff, E. y Tirado, F. (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *18*(59), 1137-1163.

Martínez H., A., Rojas R., A. L. y Villanueva G., C. E. (2015). Experiencias de enseñanza-aprendizaje en matemáticas en cursos intensivos a nivel bachillerato. En V. Larios O. y S. Obregón B. (edits.), *Avances de Jóvenes Investigadores 2015* (págs. 237-242). Querétaro, México: Editorial Universitaria UAQ.

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, EEUU: U.S. Department of Education.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 11-38.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2013). *Educación Media Superior*. Recuperado el 30 de enero de 2014, de ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico de Centros Escolares): http://www.enlace.sep.gob.mx/ms/

Valero, P. (2012). La inclusión de visiones sobre lo «social» y lo «político» en educación matemática. En N. Planas (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (págs. 187-203). Barcelona, España: Editorial Graó.