Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ACUMULACIONES VS INTEGRAL

José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera, Carlos Humberto Ruiz
FACULTAD DE FÍSICO MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO (MÉXICO)
jcortes@umich.mx, lilia_lopez@hotmail.com, carloshruizp@gmail.com

RESUMEN

El artículo siguiente tiene como objetivo el presentar acercamientos numéricos, mediante sumas, que permitirá a los estudiantes realizar transferencias entre representaciones semióticas, para la aprehensión de los procesos matemáticos asociados al concepto de integral. Se utilizará el potencial del ajuste de puntos con funciones de Geogebra como medio de enseñanza.

Palabras clave: acumulación, geogebra, integral, noesis, semiosis

ABSTRAC

This paper aims to show numerical approaches, through sums, which allow students to make transfers bewtween semiotic representations, for apprehension of mathematical processes associated to integral concept. We will use the Geogebra's potential for a function's points adjustment as the teaching medium.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

El curso de Cálculo Integral que se imparte en los diferentes bachilleratos, se centra en la utilización de algoritmos que propician solamente el desarrollo de habilidades mecánicas (por habilidades mecánicas entenderemos la secuencia de pasos algebraicos necesaria para llegar al resultado deseado), es decir existe una tendencia a privilegiar el aspecto algebraico, y se da poca importancia a la adquisición de los conceptos fundamentales del curso tales como entender que es una integral. Este esquema de enseñanza a producido, entre otras cosas, una tendencia al uso de algoritmos por parte de los estudiantes.

Aun cuando en el programa del curso se menciona que "Dada la importancia que tienen las definiciones y conceptos es conveniente que se introduzcan a un nivel intuitivo", en la práctica solamente se parte de estas ideas para llegar a la manipulación algebraica, es decir que la enseñanza del Cálculo parte de una concepción estructural del mismo; lo anterior según menciona Duval (1993), en su artículo Semiosis y Noesis "los aprendizajes de base en matemáticas no pueden solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo), sino que debe también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados".

Las investigaciones educativas realizadas, ponen de manifiesto la dificultad de aprehensión, por parte del estudiante, de los conceptos, y resaltan la importancia que tiene la articulación de los diferentes registros de representación del concepto, para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por ejemplo: Hitt (1992) considera que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si él puede reconocer este concepto en sus diferentes representaciones."

Es importante señalar que algunas de las causas de la ausencia de utilización de diferentes registros de representación, por los estudiantes, en los cursos de Cálculo Integral, se pueden deber a:

1. La complejidad en su utilización: Al respecto, Eisenber y Dreyfus (1966) mencionan que "siempre que es posible, los estudiantes parecen escoger una estructura simbólica para procesar información matemática más que visual", lo cual nos lleva a pensar que el uso de diferentes registros de representación puede ser un problema de aprendizaje.

2. Pérdida de tiempo para usarlos: Por lo que es importante subrayar que con el advenimiento de las nuevas tecnologías, tales como súper-calculadoras y computadoras, se puede tener acceso a diferentes registros de representación con un gasto reducido de tiempo
3. Los profesores no consideran que es un proceso significativo por el que tienen que transitar los estudiantes, además de no encontrarles el valor

didáctico en su incorporación, dando como resultado que no sean parte esencial de su trabajo en el aula. Esta causa la podemos considera como un problema de enseñanza.

4. En los libros de texto que son normalmente utilizados se resalta, solamente, la utilización de técnicas de manipulación algebraicas.

Resumiendo, la enseñanza del Cálculo Integral en el bachillerato es puramente algebraica, lo cual oculta información muy importante para el estudiante. En este artículo se expone un acercamiento numérico y gráfico para propiciar el entendimiento del concepto de integral que viene a ser un complemento de lo expuesto por Cortés (Cortés, 2012).

MARCO TEÓRICO

A la fecha, se ha publicado una gran cantidad de investigaciones educativas sobre el diseño de propuestas metodológicas desde diversos paradigmas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el Nivel Medio Superior y Superior. Se han señalado los conflictos que enfrenta la enseñanza formal del Cálculo, considerando que privilegia a una algoritmia desprovista de significados para su aplicación en otras disciplinas o profesiones;

Otras publicaciones presentan resultados obtenidos, tanto en innovaciones que responden a las demandas institucionales de aplicar el conocimiento a Problemas Reales (Modelo Educativo por Competencias), como en las innovaciones que responden a la Reforma del Cálculo definida en los Estados Unidos desde 1986, con el propósito de presentar al Cálculo "más esbelto y lleno de vida". También se han publicado resultados de prácticas y estrategias didácticas, con o sin la implementación de recursos tecnológicos; e innovaciones para la enseñanza del Cálculo en diferentes ambientes y escenarios educativos, para promover la asignación de Significados a la Integral de una función como objeto matemático.

En relación a las dificultades en el aprendizaje del Cálculo Integral, Muñoz (2000) afirmó que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Considera que se realiza un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas e integrales indefinidas, descuidando a la conceptualización de la integral definida. En esa misma dirección, se ha identificado que los problemas que deben resolver los estudiantes en los que se aplica la integral, son muy estereotipados, reduciendo su actividad de aprendizaje a la mecanización de técnicas de integración, con una excesiva orientación algebraica, en descuido de lo geométrico y del significado del proceso de integración (Artigue, 2002).

Las ideas teóricas en las que se basa está propuesta es explicada a través de la teoría de Registros semióticos de representación propuesta por Duval (1988, 2003, 2005). "Para las matemáticas las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasformar ideas intangibles en imágenes u objetos reales, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos (vista, tacto, etc.)" (Cortés, 2002). Además según lo expuesto por Duval (1993), menciona que "los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces poder proporcionar representaciones". Con base en esto, Ferrara, Pratt, & Robutti (2006) citan que:

> Es importante construir un entendimiento de las funciones a través de representaciones múltiples y problemas contextuales antes de poner énfasis en las definiciones estáticas. Una aportación de la tecnología es el ofrecer el acceso a varios tipos de representación de función. Esta aportación ha sido importante en la investigación PME a lo largo de las tres décadas pasadas.

Las representaciones se pueden considerar en dos sentidos, por un lado las representaciones mentales y por otro a las representaciones semióticas. Es necesario resaltar la relación del sujeto con las representaciones mentales y con las representaciones semióticas; Dupuis (1997) dice que "Las representaciones semióticas son conscientes (notorias para el sujeto) y externas (directamente visibles y observables) y las representaciones mentales son conscientes e internas".

Duval (1993) hace una diferenciación de la aprehensión de las representaciones semióticas y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además afirma que hay necesidad de utilizar en el aprendizaje, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático ya que considera que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de una representación a otra existen diferentes aspectos de contenido que son representados, y también alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades que existen para no hacerlo, es usar múltiples sistemas de representación semiótica.

Es de relevante importancia mencionar que "La coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos" Duval (1993). Es decir, que para lograr la aprehensión del objeto matemático (noesis) debemos, entre otras cosas, lograr primero la aprehensión de los diferentes registros de representación (semiosis).

De las investigaciones sobre el aprendizaje mediado con el uso de tecnología en la enseñanza del Cálculo, se ha señalado que no es suficiente enfocar el significado geométrico del concepto de Integral de una función como Área bajo la curva, para comprender la definición de la integral como sumas de Riemann. Por otra parte, Gordon y

Gordon (2007), plantearon la idea de ajustes de funciones con datos numéricos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo por parte de los estudiantes, con el apoyo de recursos tecnológicos.

Se coincide con Thompson y Silverman (2007), quienes realizaron investigación de índole cognitiva, considerando algunas dificultades sobre la concepción de *función* como *proceso;* plantearon que para comprender la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann, los estudiantes deben conceptualizar primero la función de acumulación, como una conceptualización auxiliar; y afirmaron que "la mayor fuente de problemas cognitivos para la comprensión matemática de la acumulación, se da porque es raro que dicha idea se enseñe en los cursos de Cálculo Integral, o si se enseña, es raro que se tenga intención de que se aprenda."

Por lo anterior es que en este trabajo se pretende abordar conceptos de Cálculo Integral a través de un acercamiento numérico, y estos serán tratados con diferentes registros de representación semiótica.

EXPOSICIÓN DE LA PROPUESTA

A continuación se presentan dos casos de funciones de acumulación: primero de una función. Después, de una función no polinomial de la forma $f(x)=\sqrt{x+1}$.

CASO I: ACUMULACIONES DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Partiendo de una función constante, sea la función *f(x)= 3* cuando el incremento es.
La función *f(x)=3*, se puede ver en la figura 1.

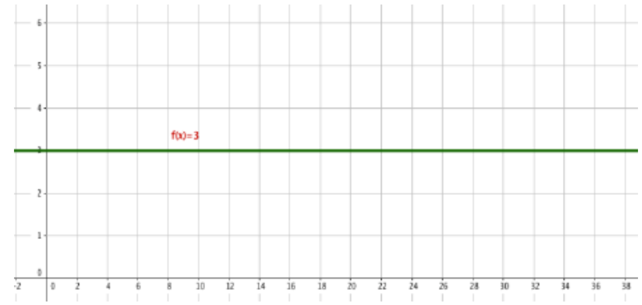

Figura 1. Gráfica de la función f(x)=3.

1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o para obtener una aproximación de la primera integral de la función *f(x)= 3* cuya función llamaremos *B(x)*, necesitamos dar un valor inicial por ejemplo *B(0)=-5*, y sumando la función *f(x)*, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:
Cuando *x* vale 0 (valor inicial), *B(0)=-5*, después incrementando en una unidad a *x, x=1*, *B(0)* se incrementa en *3* unidades (porque *f(x)=3*) obteniéndose que *B(1)= -5+3=-2*. Incrementando a *x* en *1* unidad, *x=2*, *B(1)* se incrementa en *3* unidades, *B(2)=B(1)+3=-2+3=1* y así sucesivamente. En la tabla 1 se ven los resultados para *x* desde *0* a *10*.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
f(x)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Tabla 1. Tabla de valores de B(x) y f(x).

Tomando 2 puntos para calcular la expresión algebraica de la función *B(x)* se encuentra que la función representa a la recta *B(x)= 3x-5*. El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente como sigue:

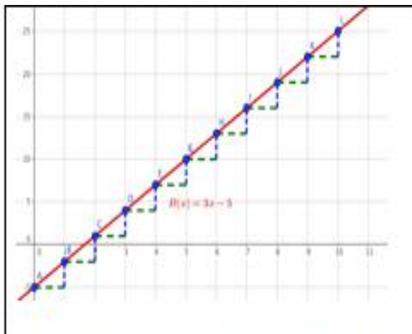

Figura 2. Tratamiento de la Primer Acumulación

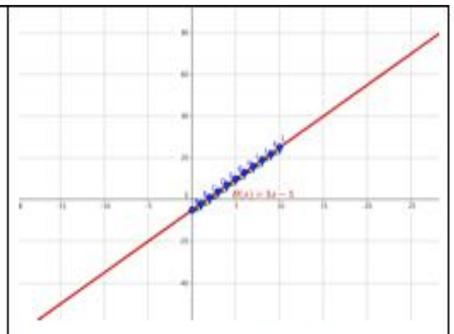

Figura 3. Comportamiento de la función lineal $B(x)$.

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de *B(x)*, construyamos la segunda acumulación, que llamaremos *C(x)*. Para esto, se necesita dar un valor inicial *C(0)=-3*. Se procede a elaborar la tabla 2 del modo siguiente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60	82
B(x)	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	

Tabla 2. Tabla de valores de C(x) y B(x).

Con la condición inicial y la suma de la función de la *B(x)*, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$.Tomando tres puntos para calcular la expresión algebraica y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene que los parámetros son $a_2=\frac{3}{2}$ $a_1=\frac{13}{2}$ $a_0=-3$, por lo expresión algebrica de la función es $C(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{2}x-3$. El proceso para obtener la segunda acumulación, se puede observar en la gráfica siguiente:

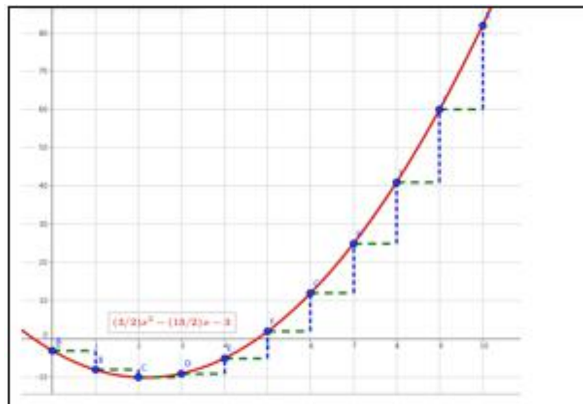

Figura 4. Esta gráfica muestra solo parte de la función C(x),

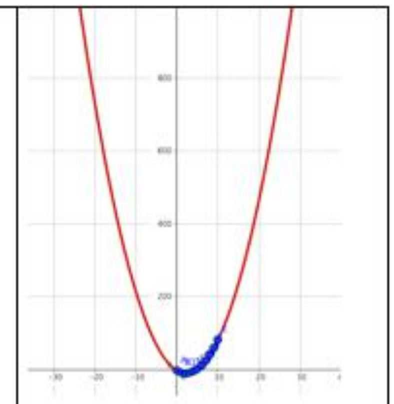

Figura 5. Gráfica para otros valores de x.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de *C(x)*, construyamos la tercera acumulación, que llamaremos *D(x)*. Primeramente se da un valor inicial *D(0)=-1* y se elabora la tabla 3 de acumulaciones:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	-1	-4	12	-22	-31	-36	-34	-22	3	44	104
C(x)	-3	-8	-10	-9	-5	2	12	25	41	60	

Tabla 3. Tabla de valores de D(x) y C(x).

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma, se construye la nueva función *D(x)*, que en este caso es de tercer grado y es de la forma $D(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, para encontrar los valores de los coeficientes se toman 4 puntos y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se encuentra que valen $a_3=\frac{1}{2};a_2=-4;a_1=\frac{1}{2};a_0=-1$, por lo que la expresión algebraica de la función es: $D(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-1$. En la siguiente gráfica se observa el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

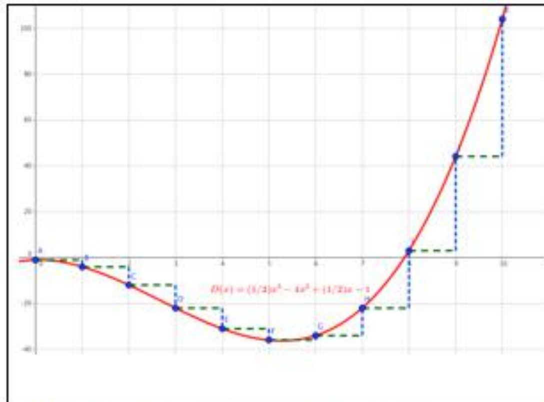

Figura 6. Se muestra el intervalo [0,10] cuando $\Delta = 1$.

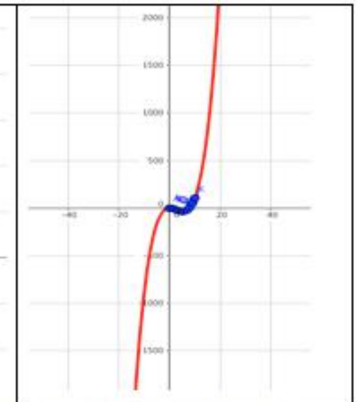

Figura 7. Gráfica de la curva *D(x)*

En la siguiente tabla, se hace una comparación de las acumulaciones obtenidas para la función polinomial y sus respectivas integrales.

$f(x)=3$		
1ª acumulación	$3x-5$	$\int 3dx=3x+c_1$
2ª acumulación	$\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{2}x-3$	$\int(3x+c_1)dx=\frac{3}{2}x^2+c_1x+c_2$
3ª acumulación	$\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{1}{2}x-1$	$\int\left(\frac{3}{2}x^2+c_1x+c_2\right)dx=\frac{1}{2}x^3+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$

Tabla 4. Comparación de las funciones

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Observaciones:

- Se puede observar que en efecto, la 1ª, 2ª y 3ª acumulación se aproximan a la 1ª, 2ª y 3ª integral de *f(x)=3*, respectivamente.
- En cada acumulación, los coeficientes del coeficiente mayor, son los mismos que de los coeficientes del coeficiente de las integrales respectivas. Es decir, en la 1ª acumulación, el valor del coeficiente término de primer grado es 3 para los 2.
- En la 2ª acumulación, el valor del coeficiente del término de segundo grado es; y En la 3ª acumulación, el valor del coeficiente del término de tercer grado es.
- En la tabla se observa que el término constante de cada función acumulación es la condición inicial de que partimos.

CASOII: ACUMULACIONES DE UNA FUNCIÓN NO POLINOMIAL

Se obtienen las sumas en una Función no polinomial por ejemplo $f(x)=\sqrt{x+1}$ cuando el incremento de *x* es .

Partiendo de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ cuando el incremento es .

En la figura de abajo se puede apreciar la tabla 5 de valores de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	3.31

Tabla 5. Valores de la función f(x).

La función $f(x)=\sqrt{x+1}$, se puede ver graficada para algunos puntos en la siguiente figura 8.

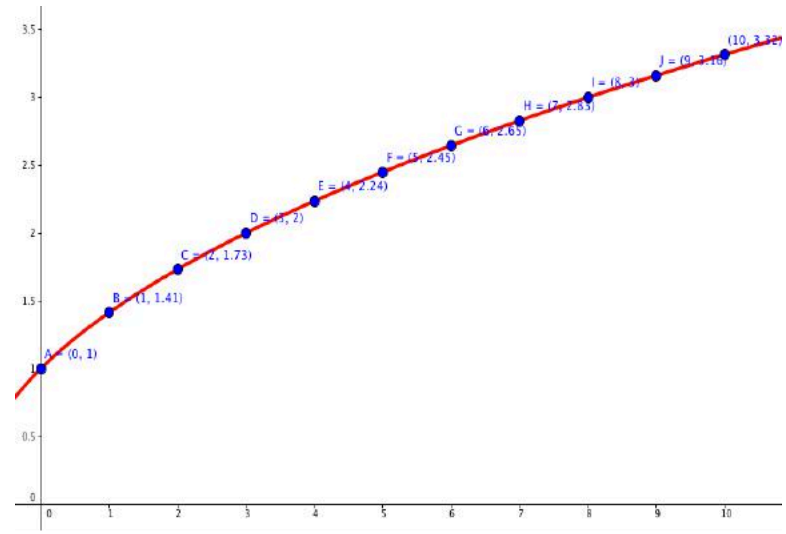

Figura 8. Gráfica de la función f(x).

Construcción de la 1ª, 2ª y 3ª acumulación.

1ª acumulación.

Para calcular la función de la primera acumulación que se llamará *B(x)* y que es una aproximación de la primera integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, primero se da un valor

inicial por ejemplo y sumando los valores de la función f(x) se obtienen los valores de la primera acumulación de la siguiente manera:
Cuando *x* vale *0* (valor inicial), *B(0)=0.5* (es el valor inicial), después incrementado en una unidad las *x*, *x=1*, por lo que *B(0)* se incrementa en el valor de *f(0)*, el siguiente punto *B(1)* es igual a *B(1)=B(0)+f(0)*; incrementando a *x* en una unidad, *x=2*, por lo que *B(2)=B(1)+f(1)=* y así sucesivamente como se muestra en la tabla 6.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	22.93
f(x)	1	1.41	1.73	2	2.23	2.44	2.64	2.82	3	3.16	

Tabla 6. Valores de la funciones B(x) y f(x).

En la siguiente figura se pueden ver graficados algunos puntos de la 1ª acumulación, así como el comportamiento general de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$; también se ha graficado la 1ª integral de la función que es: $R(x)=\int\sqrt{x+1}d_x=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}$.

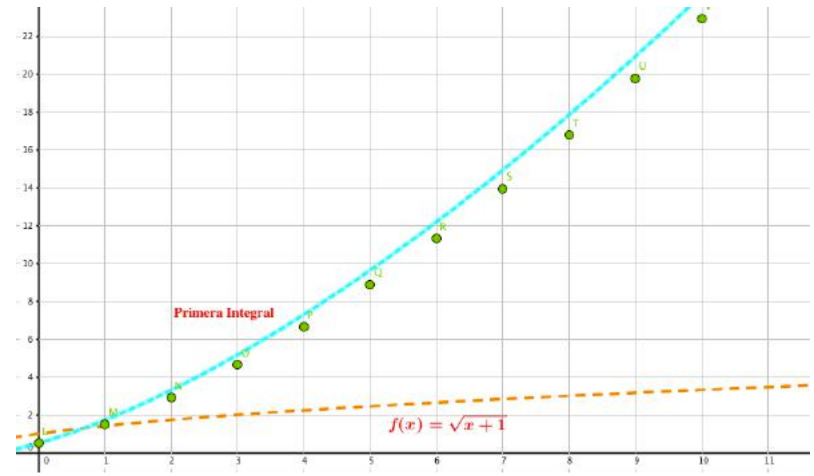

Figura 9. Gráfica de la función f(x), B(x) y R(x)

2ª acumulación.
Para obtener la segunda acumulación o en este caso, una aproximación de la segunda integral de *f(x)*, utilizando la función acumulación *B(x)*, se forma la segunda acumulación, que llamaremos *C(x)*, de la siguiente manera: Se da un valor inicial arbitrario, por ejemplo *C(0)=1*. Se incrementa en una unidad a la *x*, llegando a *x=1*, para obtener *C(1)* se realiza *C(1)= C(0)+B(0)*. Para *x=2*, incrementamos *C(1)* en *B(1)* unidades: *C(2)= C(1)+B(1)*. Y así sucesivamente, como se puede apreciar en la tabla *7*.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	87.86
B(x)	0.5	1.5	2.91	4.64	6.64	8.87	11.31	13.95	16.77	19.77	

Tabla 7. Valores de la funciones C(x) y B(x).

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la 2ª acumulación y de cómo se aproximan a la 2ª integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, que es *R(x)*, la cual algebraicamente se expresa cómo: $M(x)=\int R(x)d_x=\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6}x+\frac{11}{15}$.

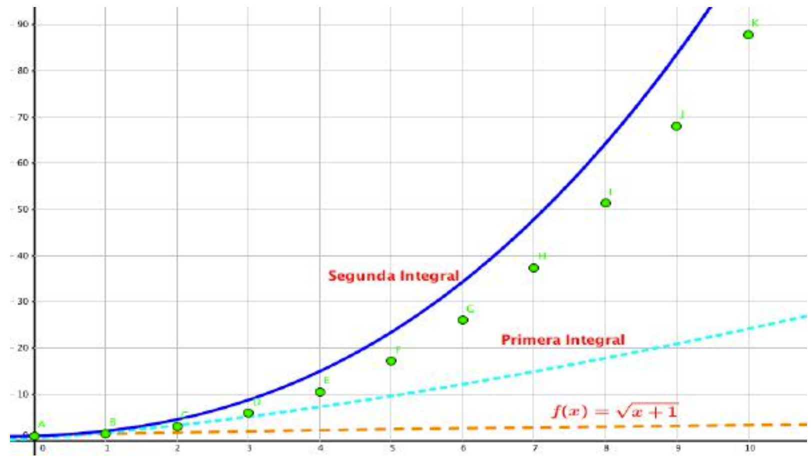

Figura 10. Gráfica de la función f(x), R(x), C(x) y M(x)

3ª acumulación.

Para obtener la tercera acumulación o en este caso, una aproximación de la tercera integral de *f(x)*, utilizando la función acumulación *C(x)*, se forma la tercera acumulación, que llamaremos *D(x)*, primeramente dar un valor inicial arbitrario por ejemplo *D(0)=1.5*, realizamos las sumas *D(1)=D(0)+C(0) =1.5+1=2.5; D(2)=D(1)+C(1)=2.5+1.5=4* y así sucesivamente como se puede apreciar en la tabla 8.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D(x)	1.5	2.5	4	7	12.91	23.46	40.65	66.71	104.08	155.4	223.49
C(x)	1	1.5	3	5.91	10.55	17.19	26.06	37.37	51.32	68.09	

Tabla 8. Valores de la funciones C(x) y D(x).

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la función resultante de la 3ª acumulación *D(x)* y como se aproximan a la 3ª integral de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ que se llamará *P(x)*, la cual algebraicamente se expresa cómo: $P(x)=\int M(x)d_x=\frac{8}{105}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{12}x^2+\frac{11}{15}x+\frac{299}{210}$.

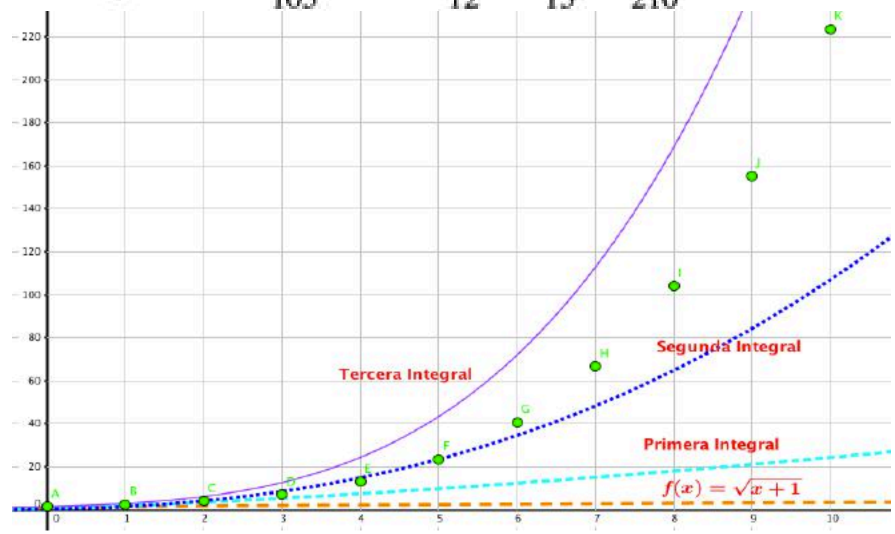

Figura 11. Gráfica de la función f(x), R(x), M(x), D(x) y P(x).

Posteriormente se puede utilizar una herramienta como Geogebra para encontrar la expresión algebraica asociada a las funciones *B(x)*, *C(x)* y *D(x)* a través del ajuste de curvas. Se puede observar que este método da una buena aproximación a la integral. Ahora bien repitiendo los pasos anteriores pero con lo que se obtiene es una mejor aproximación a las correspondientes funciones integrales.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESAMIENTO COGNITIVO QUE SE ESPERA EN LOS ESTUDIANTES

Con esta propuesta se espera que los estudiantes realicen, de forma iterada los 5 pasos del procesamiento cognitivo que se describen a continuación:

- En un primer paso, realizaron el *tratamiento aritmético* (con acciones cognitivas de forma interna al Registro Numérico) para identificar significados de las acumulaciones con la orientación del profesor.
- En un segundo paso, realizaron la *conversión entre el registro numérico y el registro geométrico* a través del potencial que ofrece el ajuste de datos con funciones en Geogebra.
- En tercer paso, realizaron un *tratamiento figural* (con acciones cognitivas hacia el interior del Registro Geométrico) para identificar el comportamiento gráfico de la función de ajuste en Geogebra.
- Como un cuarto paso, se identifica *la conversión entre el registro geométrico y el registro algebraico* que brinda el Geogebra.
- En el quinto paso realizaron un *tratamiento algebraico*, (interno al Registro Algebraico), para identificar la relación existente entre la función real y la función que corresponde a la integral de la misma.

Para obtener la segunda y tercer integral de la función, se realizaron de forma iterada los 5 pasos descritos. De esta forma, se propició la actividad de coordinación de registros semióticos para la aprehensión del concepto de la integral de la función.

CONCLUSIONES

La investigación educativa presente, permitió observar que el proceso de acumulación, y los procesos de acumulación-ajuste, son una buena manera de aproximar a la integral. Si en un curso introductorio de Cálculo Integral, se les explicara este método para aproximarse numéricamente a la integral, se promovería el conocimiento de lo que realmente es "la integral".

Aunque es algo tedioso estar haciendo tablas y en este caso, encontrar una función "explícita" de la función acumulación, como en el caso de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, se puede ver que el hacer esto nos da un acercamiento numérico que pueda permitir al estudiante entender ideas básicas de conceptos del Cálculo Integral.

El presente acercamiento numérico, se constituye en una alternativa que toma en cuenta aspectos cognitivos que permitan la conceptualización y apropiación de la integral como función de acumulación, a fin de propiciar la construcción del significado de la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Cortés, C. (2012). Construyendo funciones derivadas. Revista UNION. Marzo de 2012, Número 29, páginas 23-34 ISSN: 1815-0640. España.

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Antología en Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myriam Vega Restrepo (1ª ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle
Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, 41-76.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. En Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5-53.Eisenber y Dreyfus (1966). On visual versus analytical thinking in mathematics. PME-10 congress (1966). London pp. 153-158)

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. Mathematics Teacher 100 (9), 597-604.

Hitt. F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Memorias del IV Simposio sobre Investigación en Matemática Educativa 1992.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(2), 131- 170.

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp.117-131). Washington D.C.: Mathematical Association of America