Recibido el 25 de septiembre de 2024, aceptado el 28 de octubre de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Funciones continuas y sus derivadas

Continuous functions and their derivatives

Jesús Jerónimo Castro*
Víctor Larios Osorio

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*jesus.jeronimo@uaq.mx

RINCÓN MATEMÁTICO

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?

Jerónimo Castro, J. y Larios Osorio, V. (2025). Funciones continuas y sus derivadas. *PädiUAQ*, *8*(15), 1-12.

Resumen

La derivada de una función denota un concepto central del cálculo que se estudia en los niveles de educación media superior y superior en México. Este concepto está íntimamente ligado con la noción de función y resulta de amplia utilidad en numerosos escenarios que se solucionan al desglosar el cambio de las variables involucradas. En específico, la derivada permite estudiar el desplazamiento y la velocidad, optimizar funciones y obtener líneas rectas. La investigación aquí presentada se concentra en los conceptos de función, derivada, interpretación geométrica y determinación de máximos y mínimos. Su meta principal es demostrar algunas propiedades de estos tipos de funciones a través de teoremas y plantear problemas y ejercicios vinculados con estos conceptos. De tal modo, se busca que los lectores encuentren interesante y útil el abordaje teórico de las derivadas y su aplicación en situaciones prácticas.

Palabras clave: cálculo, educación matemática, derivada de una función, función continua, interpretaciones de la derivada de una función, matemáticas.

Abstract

The derivative of a function is a central concept that is approached in the upper secondary and higher education levels in Mexico. This concept is closely linked to the principle of function and instrumental in numerous situations where it is essential to analyze the changes of the variables involved. As an example, derivatives are crucial in the study of motion and velocity, the optimization of functions and obtaining straight lines. This didactic dissertation focuses on the concepts of function, derivative, geometric interpretation and determination of maxima and minima. The main goal is to demonstrate a few properties of this function type through theorems and to lay out a set of problems and exercises associated to these concepts. Hopefully, our readers will find interest and usefulness in the theoretical study of derivatives and their application in practical situations.

Keywords: calculus, mathematics education, derivative of a function, continuous function, interpretations of the derivative of a function, mathematics.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Funciones continuas y teorema del valor intermedio

El concepto de *función*, en específico el de *función continua*, es fundamental en el cálculo de variables reales. Afirmamos que una función $y = f(x)$ tiene continuidad si su gráfica es una curva conexa, en términos prácticos, si podemos dibujarla sin despegar el lápiz del papel. Por ejemplo, las funciones $y = 2x + 1$, $y = x^2 - 2$, $y = x^3 - 2x$ son continuas (Figura 1), mientras que las funciones cuyas gráficas aparecen en la Figura 2 no lo son.

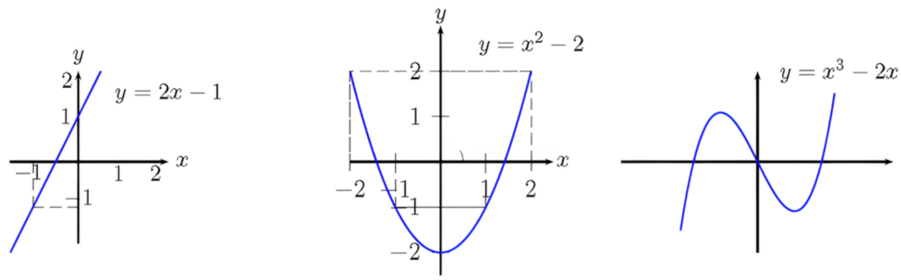

FIGURA 1. Gráficas de algunas funciones continuas.

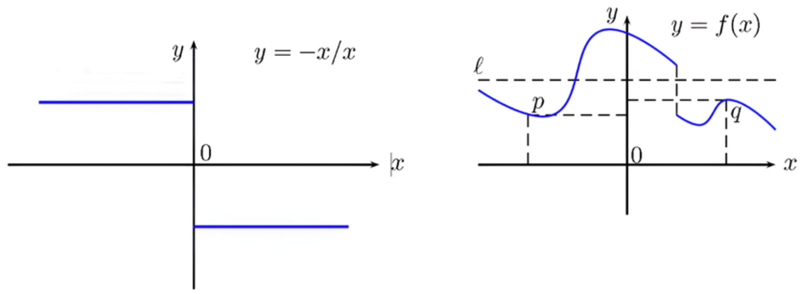

FIGURA 2. Gráficas de algunas funciones con discontinuidades.

Podemos dar la idea de la noción de continuidad sin hacer uso de las propiedades de las gráficas. Sea x_0 un valor de la variable x y sea x_1 un valor cercano a x_0; la función f es continua si, cuando x_1 se aproxima a x_0, el valor absoluto de la diferencia $f(x_1) - f(x_0)$ es arbitrariamente pequeño.

Definición 1.1. Una función $f(x)$ es continua en el punto x_0 si para todo número ε positivo existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ cada vez que $|x_1 - x_0| < \delta$. Si para todo x en un intervalo $[a, b]$ la función $y = f(x)$ es continua en x, decimos que la función es continua en el intervalo $[a, b]$. Utilizando la noción de límites podemos enunciar la definición de continuidad de la siguiente manera.

Definición 1.2. Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, toma en $x = a$ el valor A y para $x = b$ el valor B; entonces, para cada valor M entre A y B existe por lo menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M$ (Figura 3).

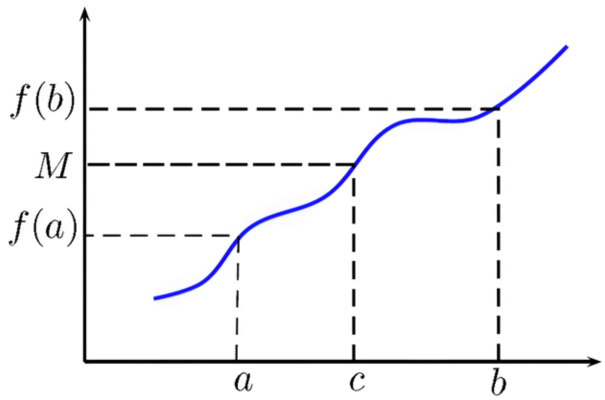

Figura 3. Gráfica de *f(x)*.

Geométricamente, el teorema es obvio. Afirma que si una curva continua, la cual es la gráfica de una función $y = f(x)$, atraviesa un par de puntos $P(x = a, y = A)$ y $Q(x = b, y = B)$ dispuestos en diferentes lados de una línea ℓ paralela al eje x, necesariamente interseca la línea ℓ. Las funciones con discontinuidades no necesariamente manifiestan esta propiedad, las gráficas de las funciones ilustradas en la Figura 2 son un ejemplo. De este modo, tenemos uno de los teoremas más importantes sobre funciones continuas.

Teorema 1.1. Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y λ es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = \lambda$.

Como un primer ejemplo de aplicación de este teorema, veremos el siguiente.

Ejemplo 1.1. Un corredor a campo traviesa recorre seis kilómetros en 30 minutos. Probar que en algún momento en el transcurso de la carrera recorrió un kilómetro en exactamente cinco minutos.

Demostración. Si denotamos por x la distancia recorrida, medida en kilómetros desde el punto de partida, para cada x en $[0, 5]$, $f(x)$ denota el tiempo empleado para el kilómetro desde el punto x hasta el punto $x + 1$. La función f es continua. Sabemos que $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 30$. No todos los $f(0), \ldots, f(5)$ son menores que 5 y, análogamente, no todos son mayores que 5. Por lo tanto, existen puntos a y b en $[0, 5]$ tales que $f(a) \leq 5 \leq f(b)$. Por consecuencia del teorema del valor intermedio, existe un c entre a y b tal que $f(c) = 5$; es decir, el kilómetro desde c hasta $c + 1$ se recorrió en exactamente 5 minutos.

Ejemplo 1.2. Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

domingo a las 8:00 de la mañana desciende corriendo la montaña. Tarda 20 minutos para subir y solo 10 en bajar. En un momento del camino cuesta abajo, se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demuestra que el hombre está en lo cierto (Larson y Edwards, 2010, p. 82).

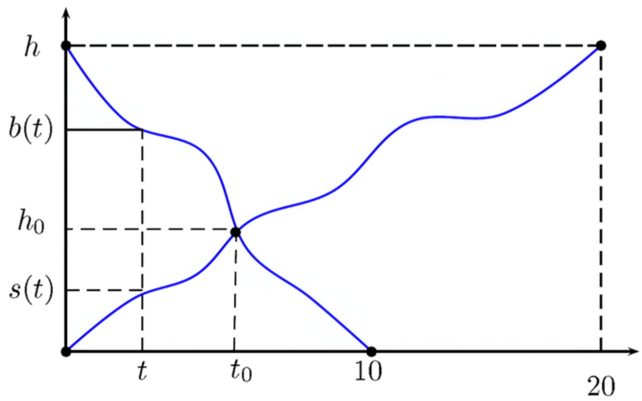

Figura 4. Las gráficas de los recorridos se cruzan.

Demostración. Expresemos con la variable t el tiempo transcurrido y consideremos la altura en que se ubica a cada momento sobre el eje y. Sea $s: [0, 20] \rightarrow [0, h]$, donde h denota la altura de la montaña, la función de subida $s(t) = c$ significa que en el momento t el hombre se encuentra a una altura de c metros. De una manera análoga, definimos la función de bajada $b: [0, 10] \rightarrow [0, h]$. Claramente, ambas funciones son continuas, entonces también la función f tal que $f(t) = b(t) - s(t)$ es continua. Dado que $f(0) = b(0) - s(0) = h - 0 = h > 0$ y $f(10) = b(10) - s(10) = 0 - s(10) < 0$, tenemos, por el teorema del valor intermedio, que existe un $t_0 \in [0, 10]$ tal que $f(t_0) = 0$. De esto se sigue que $b(t_0) = s(t_0)$, es decir, en el momento t_0 el hombre se encontraba ambos días a la misma altura.

Como un ejemplo más de la aplicación del teorema del valor intermedio, probaremos la siguiente afirmación:

Ejemplo 1.3. Cada ecuación cúbica con coeficientes reales tiene al menos una raíz real, a diferencia de las ecuaciones cuadráticas, las cuales no necesariamente tienen raíces reales.

Demostración. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nuestra ecuación cúbica. Esta puede escribirse de manera más conveniente como:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \text{ (con } p = b/a,\ q = c/a,\ r = d/a)$$

así que investigamos la función $y = x^3 + px^2 + qx + r$, o escrita de manera diferente:

$$y = x^3(1 + p/x + q/x^2 + r/x^3)$$

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Esta función tiene continuidad. Siempre que el valor absoluto de x sea mayor que $max\left\{3p|, \sqrt{|3q|}, \sqrt[3]{|3r|}\right\}$ tenemos que:

$$\left|\frac{p}{x}\right| = \frac{|p|}{|x|} < \frac{|p|}{|3p|} = \frac{|p|}{3|p|} = \frac{1}{3}$$

$$\left|\frac{q}{x^2}\right| = \frac{|q|}{|x^2|} < \frac{|q|}{\left|\left(\sqrt{|3q|}\right)^2\right|} = \frac{|q|}{|3q|} = \frac{|q|}{3|q|} = \frac{1}{3}$$

y

$$\left|\frac{r}{x^3}\right| = \frac{|r|}{|x^3|} < \frac{|r|}{|(\sqrt[3]{|3r|})^3|} = \frac{|r|}{|3r|} = \frac{|r|}{3|r|} = \frac{1}{3}$$

Además, como:

$$\left|\frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3}\right| < \left|\frac{p}{x}\right| + \left|\frac{q}{x^2}\right| + \left|\frac{r}{x^3}\right| < 1$$

se sigue que:

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0$$

Esto quiere decir que el signo de $x^3\left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3}\right)$ lo determina el signo de x^3, ya que:

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0$$

siempre que $|x| > |3p|, |\sqrt{|3p|}, |\sqrt[3]{|3r|}$. Es decir, si:

$$a = max\left\{|x| > |3p|, |\sqrt{|3p|}, |\sqrt[3]{|3r|}\right\}$$

para $x < -a$ tenemos que $f(x) < 0$, y para $x > a$ tenemos que $f(x) > 0$.

Por el teorema del valor intermedio, tenemos que existe un punto $x_0 \in [-a, a]$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir x_0 es una raíz real de $f(x)$.

Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Prueba que f tiene un punto fijo en $[0, 1]$, es decir, que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

PädiUAQ

Ejercicio 1.2. Sean A y B dos ciudades conectadas por dos caminos distintos. Supongamos que dos carros pueden viajar desde A hasta B sobre caminos distintos de manera que siempre mantienen una distancia entre ellos que no excede un kilómetro. ¿Es posible que el primero viaje de A a B y el segundo de B a A, de tal manera que la distancia entre ellos sea siempre mayor que un kilómetro?

Ejercicio 1.3. Encuentra todas las funciones continuas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las cuales se cumple que $f(0) = 1$ y $f(2x) - f(x) = x$, para todo número real x.

Derivada de una función

Mientras que el concepto de integral tiene sus orígenes en la antigüedad, el concepto de derivada fue formulado en el siglo XVII por Fermat y otros. Fermat, en particular, estaba interesado en desarrollar un método para determinar el máximo y el mínimo de una función. La definición de la derivada de una función es:

Definición 2.1. Una función f es derivable en x_0 si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe. En este caso, el límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de "derivada de f en x_0".

Ejemplo 2.1. Probaremos que la derivada de un polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

es el polinomio:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Teorema 2.1. Si una función f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Entonces, como $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0$, tenemos que $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x_0)$.

Dado un polinomio $p(x)$ y un número real r (o complejo), decimos que este es una raíz o cero de $p(x)$ con multiplicidad k, si $(x - r)^k$ es un factor de $p(x)$, pero $(x - r)^{k+1}$ no es un factor de $p(x)$. Ahora veremos un resultado muy interesante sobre la multiplicidad de una raíz de un polinomio.

Teorema 2.2. Sea z_0 una raíz de un polinomio $p(z)$. Supongamos que la multiplicidad de z_0 es un número entero $k \geq 2$. Entonces z_0 es también una raíz de $p'(z)$ con multiplicidad $k - 1$.

Demostración. Supongamos que el grado de $p(z)$ es n y que la multiplicidad de z_0 es k; entonces, tenemos que $p(z) = a(z - z_0)^k\, q(z)$, donde $q(z)$ corresponde a un polinomio de grado $n - k$ y para el cual se cumple que $q(z_0) \neq 0$. Como:

$$p'(z) = a[k(z - z_0)^{k-1}\, q(z) + (z - z_0)^k\, q'(z)]$$

tenemos que $p'(z) = a(z - z_0)^{k-1}[kq(z) + (z - z_0)q'(z)]$. Es decir, $p'(z)$ se factoriza como el producto de $a(z - z_0)^{k-1}$ por un polinomio de grado $n - k$. Como $k - 1 \geq 1$, tenemos que z_0 es un cero de $p'(z)$. Además, como:

$$kq(z_0) + (z_0 - z_0)\, q'(z_0) = kq(z_0) \neq 0$$

tenemos que la multiplicidad de z_0 como raíz del polinomio $p'(z)$ es $k - 1$.

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Prueba que la derivada de una función constante es cero.

Ejercicio 2.2. Demuestra que, si f y g son dos funciones derivables en x_0, entonces la función $f \cdot g$ también es derivable en x_0.

Interpretación geométrica

La derivada de una función f evaluada en un punto x_0 es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Esta igualdad se puede visualizar como se describe en el siguiente párrafo.

Sea $P(x_0, f(x_0))$ el punto donde queremos analizar la recta tangente, y consideremos un punto distinto sobre la gráfica de f, digamos $P(x_1, f(x_1))$. Denotemos por t y t_1 la recta tangente por P y la recta secante por P y P_1. Tenemos que la pendiente de t_1 se obtiene como:

$$\frac{P_1Q}{QP} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Entonces, a medida que el punto P_1 se aproxima al punto P, a través de la gráfica de f, tenemos que el valor de la pendiente de t_1 se aproxima al valor de la pendiente de t.

Tenemos entonces que la pendiente de t es igual a:

$$\lim_{P_1 \to P} \frac{P_1Q}{QP} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ con } h = x_1 - x_0$$

Pero esta expresión es, precisamente, la que corresponde a la derivada de f evaluada en x_0, es decir, es igual a $f'(x_0)$.

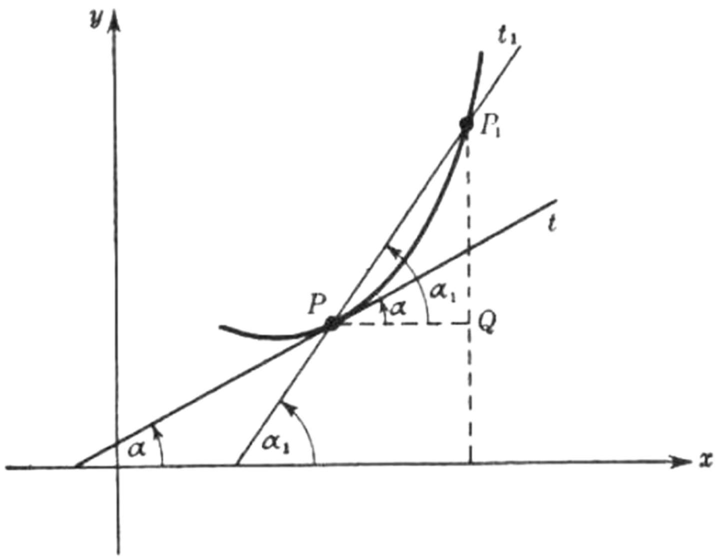

Figura 5.
Significado geométrico de la derivada.

Problemas de máximos y mínimos

La derivada de una función es una herramienta invaluable al resolver problemas de optimización. Uno de los teoremas más importantes es el siguiente:

Teorema 2.3. Sea f una función definida sobre (a, b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a, b), y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Ejemplo 2.2. De un tronco cilíndrico debe sacarse una viga rectangular del máximo volumen posible. ¿Qué forma debe tener su sección transversal? (Perelman, 1993, p. 200).

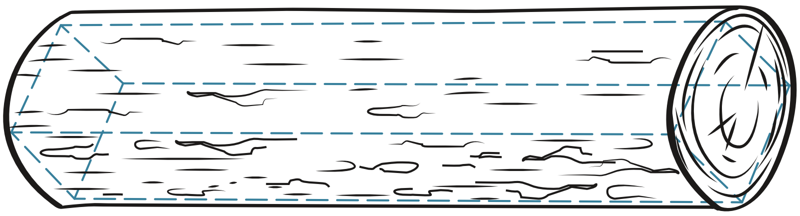

FIGURA 6. Viga de volumen máximo.

Ejemplo 2.3. Dos pasillos que tienen anchos respectivos *a* y *b* se encuentran formando un ángulo recto. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser transportada horizontalmente de un pasillo a otro? (Angoa *et al.*, 2005, p. 231)

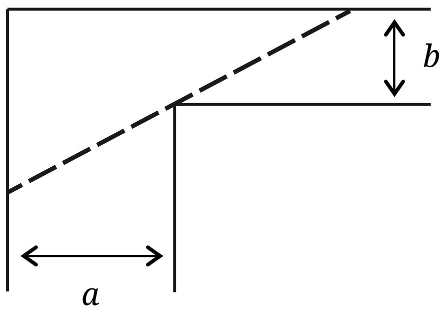

FIGURA 7. Escalera a través del pasillo.

Ejemplo 2.4. A las 7:00 a. m. un barco estaba a 60 kilómetros en dirección este de un segundo barco. Si el primero navega hacia el oeste a 20 km/h y el segundo hacia el sureste a 30 km/h, ¿en qué momento se encuentran más próximos uno del otro? (Villena, 2017, p. 172)

Ejercicios

Ejercicio 2.3. Dos líneas férreas se intersectan conformando un ángulo recto. Los trenes se aproximan a gran velocidad hacia el cruce. Uno parte de cierta estación situada a 40 km del cruce; el segundo, de una estación que dista 50 km del cruce. El primer tren avanza a una velocidad de 800 m por minuto; el segundo, a 600 m cada minuto. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el instante de partida hasta que las locomotoras se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia? (Perelman, 1993, p. 187)

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Ejercicio 2.4. Dada una recta ℓ en el plano y dos puntos A y B en el mismo lado de la recta, encuentra qué condiciones cumple el punto $X \in \ell$ tal que la suma de distancias $AX + BX$ sea mínima.

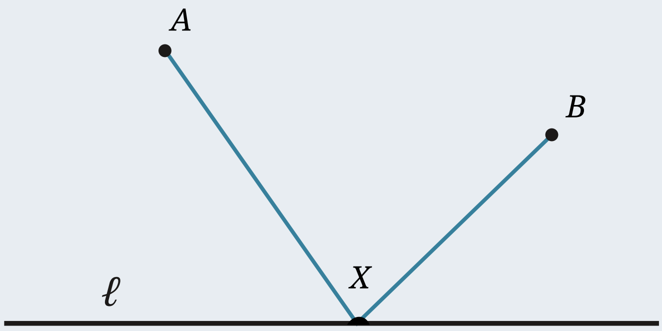

FIGURA 8. Distancia $AX + XB$ mínima.

Ejercicio 2.5. Encuentra la forma de una cometa con un sector circular que tenga la mayor superficie, partiendo de un perímetro previamente dado (Perelmán, 1993, p. 202).

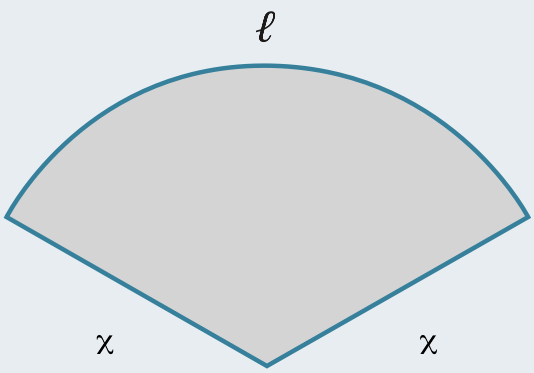

FIGURA 9. Cometa de área máxima.

Razón de cambio

Como la derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra, para una función $y = f(x)$ se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables x y y con respecto al tiempo t, es decir, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$. Esto nos permitirá resolver problemas de aplicación.

Ejemplo 2.5. Un aeroplano que vuela hacia el norte a 640 km/h pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 km/h está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si las aeronaves están volando a la misma altitud, ¿qué tan rápido se estarán separando a la 13:15? (Villena, 2017, p. 143)

PädiUAQ

Ejercicios

Ejercicio 2.6. Una rueda de la fortuna tarda 2 minutos en completar una vuelta y su eje se encuentra a una altura de 21 metros del suelo. El radio de la rueda es de 20 metros. ¿Con qué rapidez se eleva un pasajero en el instante que se encuentra a 18 metros del suelo? (Villena, 2017, p. 145)

Referencias

Angoa A., J. J. *et al.* (2005). *Cálculo diferencial en una variable*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. http://computo.fismat.umich.mx/~fhernandez/Cursos/Calculo/cal_deuv.pdf

Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. McGraw Hill.

Perelman, Y. (1993). *Álgebra recreativa*. Quinto Sol.

Villena, M. (2017). *El libro negro. Cálculo diferencial e integral*. Academia de Ciencias Exactas APOL.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

¿Quieres publicar en esta revista?

Enviar artículo

Síguenos en nuestras redes:

¿Dudas o sugerencias? Escríbenos a:

padiuaq@uaq.mx

REVISTA INCLUIDA EN:

latindex LatinREV

Red Latinoamericana de Revistas en Ciencias Sociales

Edición cuidada, diseñada y maquetada por

DESPACHO DE PUBLICACIONES

Visítanos y conoce las publicaciones que la **FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERETARO** tiene para ti:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO FACULTAD DE INGENIERÍA