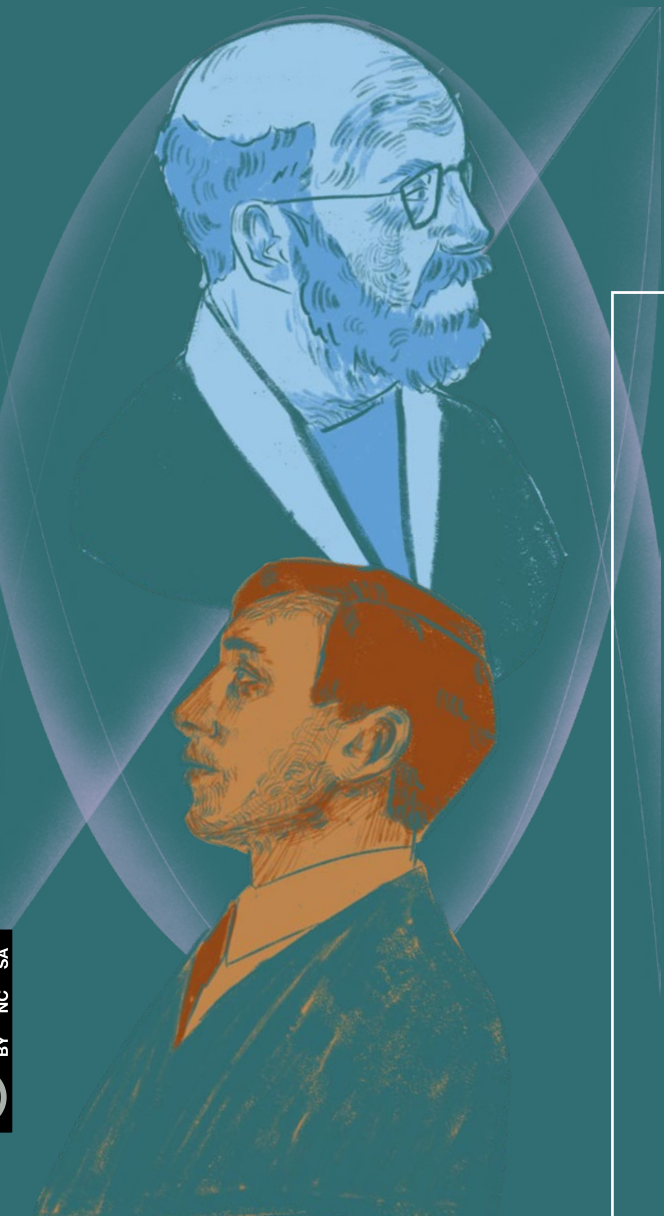
RINCÓN MATEMÁTICO

EL LENGUAJE ALGEBRAICO

THE ALGEBRAIC LANGUAGE



Jesús Jerónimo Castro[1*]
Rafael Iván Ayala Figueroa[2]**
Víctor Antonio Aguilar Arteaga[*]
Víctor Larios Osorio[*]

[*] Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, México
[**] Tecnológico Nacional de México, plantel Mexicali, Mexicali, México

[1] jesus.jeronimo@uaq.mx
https://orcid.org/0000-0002-6601-0004
[2] rafaelivan@itmexicali.edu.mx
https://orcid.org/0000-0001-9988-1626

Introducción

El lenguaje algebraico es un medio que representa situaciones de diversos contextos (escolares, profesionales, de la vida real, etc.) y que permite manipular objetos matemáticos que tienen su contraparte en muy variados contextos. Se trata de una capacidad fundamental para el desarrollo escolar. Además, como cualquier lenguaje, el alumno debe internalizarlo y aprehenderlo de manera "automática", ya que así no se convertirá en un obstáculo para el aprendizaje de otros conceptos más complejos. En este trabajo se presentarán algunos problemas y ejercicios, agrupados de acuerdo con la temática, que podrán ser resueltos de varias formas; empero, valdría la pena intentar expresarlos con lenguaje algebraico. Esperamos que el lector se divierta y se entretenga con este material.

1. Ecuaciones con una variable

Ejemplo 1.1. ¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla, y la séptima parte de su existencia transcurrió a en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

Solución. De las condiciones del problema se obtiene la ecuación:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

De la cual se obtiene que $x = 84$

Ejemplo 1.2. (Ladrones Fuertemente Jerarquizados). Un grupo de ladrones (los LFJ) roba monedas de oro de un banco. Los ladrones tienen jerarquía, entonces el de mayor jerarquía dijo: *propongo que al de menor jerarquía se le dé una moneda, al que sigue 2, luego 3, y así sucesivamente*. Entonces el de menor jerarquía protestó y dijo: *propongo que cada uno tenga 5 monedas*. Si en ambos casos las monedas alcanzan perfectamente, ¿cuántos ladrones eran?

Solución. Contaremos de dos formas las monedas robadas. Supongamos que hay n ladrones. Con la manera de repartir propuesta por el ladrón de mayor jerarquía tenemos que la cantidad de monedas es:

$$1 + 2 + \cdots + n + \frac{n(n+1)}{2}$$

Por otro lado, en la propuesta del ladrón de menor jerarquía tenemos que la cantidad de monedas es $5n$. Como ambas cantidades deben ser iguales, obtenemos la ecuación:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5n$$

De donde se obtiene que $n = 9$. Por lo tanto, son 9 ladrones.

Ejemplo 1.3. A una velada asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga, con ocho; Vera, con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

Solución. Supongamos que la cantidad de mujeres en la fiesta es n. La primera de ellas bailó con 7 hombres, lo que podemos expresar como $6 + 1$. La segunda de las mujeres bailó entonces con $6 + 2$, y así sucesivamente hasta la última que bailó con $6 + n$. En total había 20 personas, entonces $n + 6 + n = 20$, de donde se obtiene que $n = 7$. Por lo tanto, había 13 muchachos en la fiesta.

En el siguiente ejemplo podemos observar cómo la geometría y el álgebra, en ocasiones, se armonizan y resultan en demostraciones de gran belleza.

Ejemplo 1.4. Expresa el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.

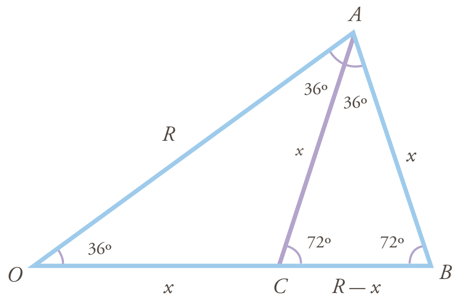
Solución. Sean $AB = x$ uno de los lados del decágono, O el centro de la circunferencia y R su radio. Sea C un punto sobre el lado OB de tal manera que $\measuredangle OAB = \measuredangle CAB = 36°$. Así, obtenemos el triángulo $\triangle CAB$, el cual es semejante al triángulo $\triangle OAB$. Al utilizar la proporción entre los lados tenemos:

$$\frac{x}{R} = \frac{R - x}{x}$$

Esto da lugar a la siguiente ecuación (aquí se acabó la geometría y le toca el turno al álgebra):

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

La cual tiene como raíces a $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ y $-R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. Claramente, la segunda no puede ser solución de nuestro problema, ya que no existen longitudes negativas. Por lo tanto, la solución es $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.



Ejercicios

Ejercicio 1.1. Un rectángulo tiene lados de longitudes a y b, con $a < b$. Se sabe que, si recortamos un cuadrado del lado a de dicho rectángulo, entonces obtenemos un rectángulo semejante al original. Encuentra la razón a/b.

SOLUCIÓN. $\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Ejercicio 1.2. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. Las alturas son de 30 y 20 codos; la distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un ave. De súbito, ambos pájaros avistan un pez que aparece en la superficie del agua entre las dos palmeras. Los cazadores se lanzaron y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

SOLUCIÓN. A 20 codos.

Ejercicio 1.3. Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

SOLUCIÓN. 12 personas.

2. Ecuaciones con dos o más variables

Ejemplo 2.1. Un barco navega durante 5 horas sin interrupción río abajo desde la ciudad A hasta la ciudad B. De regreso avanza contra la corriente durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitará una balsa para desplazarse de la ciudad A a la ciudad B, yendo a la misma velocidad de la corriente?

SOLUCIÓN. 35 horas.

Ejemplo 2.2. Encontrar un número de tres cifras distintas tal que, si se le resta el número con las cifras invertidas, se obtiene un número con las mismas tres cifras.

SOLUCIÓN. 954.

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Ejercicios

Ejercicio 2.1. Dos campesinas llevaron en total 100 huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero ambas recibieron la misma cantidad de dinero por sus productos. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: *si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 pesos. La segunda contestó: Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú, habría sacado de ellos $6\frac{2}{3}$ de pesos.* ¿Cuántos huevos llevó cada una?

Solución. La primera campesina llevó 40 huevos y la segunda 60.

Ejercicio 2.2. Dos ciclistas corren en el velódromo a velocidades constantes. Al llevar direcciones opuestas se encuentran cada 10 segundos; cuando van en la misma dirección, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos. ¿Cuál es la velocidad que desarrolla cada ciclista si la longitud de la pista es de 170 metros?

Solución. El primer ciclista recorre 9 metros por segundo y el segundo ciclista recorre 8 metros por segundo.

3. Soluciones en números enteros

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Los lados de un rectángulo son números enteros. ¿Cuál será la longitud de dichos lados para que el área y el perímetro se expresen con el mismo número?

Ejercicio 3.2. Pedro le comenta a Juan: "He observado que si al cuadrado de mi edad le resto el producto de tu edad con la edad que yo tendré dentro de un año, el resultado es 18". ¿Qué edad tiene Pedro?

Ejercicio 3.3. Encuentra todos los números enteros positivos b y k que satisfacen la ecuación:

$$b2 + 1 = k(b - 1)$$

Ejercicio 3.4. Determina todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1999}$$

Ejercicio 3.5. Encuentra todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:

a) $x^2 - y^2 = 31$

b) $x^2 - y^2 = 303$

Ejercicio 3.6. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ es un múltiplo entero de $n + 1$.

4. Problemas de optimización

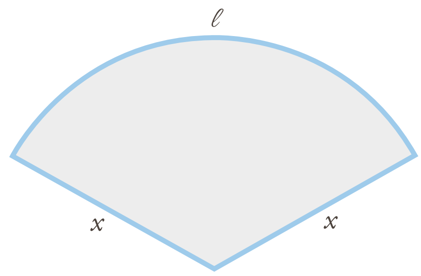
Ejemplo 4.1. Se sabe que un rectángulo tiene un perímetro de 20 cm. ¿Cuánto deben medir sus lados para que su área sea máxima?

Solución. Sus lados miden 5 cm cada uno.

Ejemplo 4.2 De un tronco cilíndrico debe tallarse una viga rectangular del máximo volumen. ¿Qué forma debe tener su sección transversal?

Solución. La forma de un cuadrado.

Ejemplo 4.3. Búsquese la forma de una cometa con un sector circular que tenga la mayor superficie, partiendo de un perímetro previamente dado.

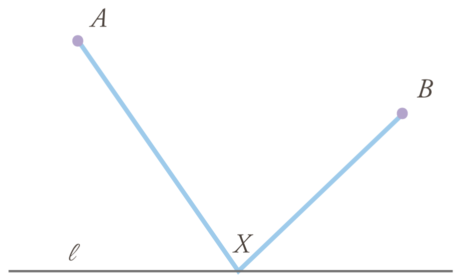


SOLUCIÓN. El ángulo del sector es de 2 radianes, lo cual es aproximadamente 115°.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Dos líneas férreas se cruzan formando un ángulo recto. Los trenes se acercan a gran velocidad hacia el cruce. Uno parte de cierta estación situada a 40 km del cruce; el otro, de una estación que dista 50 km del cruce. El primero marcha a una velocidad de 800 m por minuto, el segundo a 600 m por minuto. ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida hasta que las locomotoras se hallen a la distancia mínima entre sí, y cuál será esa distancia, si emprendieron su viaje al mismo tiempo?

Ejercicio 4.2. Dada una recta ℓ en el plano y dos puntos A y B en el mismo lado de la recta, encuentra qué condiciones cumple el punto $X \in \ell$ tal que la suma de distancias $AX + BX$ sea mínima.



SOLUCIÓN. El ángulo que forma el segmento AX con la recta ℓ debe ser igual al ángulo que forma el segmento BX con la recta ℓ.

5. Relaciones entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes

Consideremos un polinomio cuadrático:

$$ax^2 + bx^2 + c$$

Cuyas raíces son los números r_1 y r_2 . Como sabemos que:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

Tenemos la equivalencia:

$$ax^2 - a(r_1 - r_2)x + a\, r_1 r_2 = ax^2 + bx + c$$

De aquí se obtiene la siguiente relación entre las raíces y los coeficientes:

$$-ax^2(r_1 - r_2) = b, \qquad a\, r_1 r_2 = c$$

Para el caso en que $a = 1$, obtenemos que:

$$-(r_1 + r_2) = b, \qquad r_1 r_2 = c$$

Esto es conocido como las Fórmulas de Vieta.

Ejemplo 5.1 Si r y s son las raíces de $x^2 + bx + 1 = 0$, encuentra el valor de:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} =$$

Solución. Dado que r y s son las raíces de la ecuación, tenemos que $(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs$ debe ser igual a $x^2 + bx + 1$. De aquí obtenemos $-(r - s) = b$ y $rs = 1$. Reescribimos:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2} = \frac{(r + s)^2 - 2rs}{(rs)^2}$$

Sustituyendo los valores de $r + s$ y rs obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} = b^2 - 2$$

Por otro lado, dado un polinomio de grado n con coeficientes enteros:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Sabemos que si posee una raíz racional p/q, con p/q sin divisores en común, entonces debe cumplirse que p es un divisor de $a0$ y q es un divisor de a_n.

Ejemplo 5.2. Encuentra las raíces enteras de la ecuación:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0$$

Ejemplo 5.3. Demuestra que la ecuación $b^2 + b + 1 = a^2$ no tiene solución en números enteros positivos.

Ejercicios

Ejercicio 5.1. Dados tres enteros impares a, b, c, probar que la siguiente ecuación no puede tener una raíz racional:

$$a^2 + bx + c = 0$$

Ejercicio 5.2 Encuentra todas las tripletas ordenadas (x, y, x) tales que:

$$x + y + z = 17$$
$$xy + yz + xz = 94$$
$$xyz = 168$$

INICIO