DANIEL A. GARCÍA PACHECO
LUISA RAMÍREZ GRANADOS
VÍCTOR A. AGUILAR ARTEAGA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

DANIEL_A_GP@HOTMAIL.COM
LUISA.RAMIREZ@UAQ.MX
VICTTOR.AGUILAR@GMAIL.COM

04

IDENTIFICACIÓN DE ERRORES EN EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

ERROR IDENTIFICATION IN THE POLYNOMIAL DIVISION ALGORITHM

RESUMEN

En este artículo se muestra una recopilación de errores identificados en la resolución de una actividad piloto llevada a cabo con una adaptación de la metodología ACODESA, sobre el algoritmo de la división de polinomios de grado tres con una sola variable. Además se muestra el respectivo análisis, con apoyo del marco teórico "Enfoque Lógico Semiótico" para determinar un posible origen. Los resultados muestran de manera prominente la presencia de errores durante el manejo de las operaciones básicas con polinomios por parte de estudiantes que ya han concluido las materias de álgebra de preparatoria, éstos se deben probablemente a la didáctica con la que recibieron el contenido algebraico y a una deficiencia en el contenido aritmético.

Palabras clave: ACODESA, división, poli-nomios, enfoque lógico semiótico, álgebra.

ABSTRACT

This paper presents a compilation of errors identified in the resolution of a test activity, executed with an adaptation of the ACODESA methodology, on the division algorithm of third degree polynomials with one variable. The analysis was performed under the theorical framework of "Semiotic Logical Approach", in order to determine a possible origin of the errors. The results show prominently the presence of errors during the basic operations with polynomials by students who have already completed high school algebra subjects, these are probably due to the didactics with which they received the algebraic content and to a deficiency in arithmetic content.

Keywords: ACODESA, division, polynomials, semiotic logical approach, algebra.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se parte de la problemática en el aula referente al manejo de la división de polinomios, cuyo algoritmo sigue mostrándose difícil de ejecutar para los alumnos, incluso en niveles educativos pre-universitarios y universitarios. Dado que dicho algoritmo requiere sólidas bases de álgebra y un buen manejo de conocimientos aritméticos, es sencillo apreciar una secuencia en la que los errores cometidos en etapas tempranas continúan siendo arrastrados e impiden una compresión adecuada del tema en cuestión. Se vuelve relevante entonces identificar los errores y determinar su origen con el fin de aspirar a una corrección.

Para comenzar, los polinomios son parte de un contenido convencional en instituciones de nivel medio-superior y superior. Las operaciones con ellos se encuentran dentro de una rama que se desarrolla en una amplia y rica sección del álgebra; sin embargo, éstas han sido consideradas por los estudiantes como uno de los tópicos menos aplicables a otros campos del conocimiento, de escasa utilidad y excesiva abstracción. Es por estas razones que se dificulta apropiarse de ese conocimiento a pesar de que se les plantea cuáles fueron las ideas y problemas que le dieron origen y significado [4] y Santiesteban, 2015).

Aunado a esto se observan, de acuerdo a [7], dificultades en cuestiones algebraicas como el manejo de fracciones, cálculos aritméticos y, por supuesto, manejo de los signos, las cuales persisten en los estudiantes pese a que el tema de polinomios se considera tradicional en la educación básica. Esta situación termina por afectar de forma negativa el acercamiento a la división entre dos polinomios.

Aguiriano [1] concluye que, en lo que respecta al algoritmo de la división en los enteros, su grupo de estudio, estudiantes de ingreso a ingeniería agronómica, tuvo un desempeño no satisfactorio, mostrando lo que él llama "errores de nivel secundaria", como no agregar ceros al cociente, no identificar residuos mayores que el divisor, leve empleo analítico de la igualdad

$$a = bq + r \qquad (1)$$

(El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo) para comprobar el resultado, olvidar el planteamiento de restas como paso intermedio y no cambiar el signo de algunos términos.

Según Socas [11], es posible que un estudiante muestre errores operacionales, estructurales y procesuales, aunque no tenga dificultad aparente con las matemáticas. Estos errores de los objetos matemáticos dificultarán el aprendizaje de un contenido posterior, por lo que hacer un diagnóstico y tratamiento puede permitir a los profesores idear dinámicas y procedimientos que ayuden en su corrección. Lo anterior queda reafirmado en la investigación de [5], donde se encontraron errores con un origen en la formación matemática previa al nivel educativo actual de los estudiantes universitarios. En tal trabajo se plantea la obtención de logros en el aprendizaje si los errores pueden ser reconocidos y superados. Es interesante mencionar, en este mismo tema, la aportación de Rico [9], sobre las características generales de los errores presentados en su grupo de estudio y su conclusión de la contribución positiva a la enseñanza proveniente de los errores. "El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, y es una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos" [2].

En resumen, existe evidencia que los alumnos siguen mostrando problemas con el algoritmo de la división de polinomios, mientras que las investigaciones de Socas [11], Rico [9] y [2] muestran que tratar adecuadamente las propiedades algebraicas permite acceder a un nuevo contenido matemático; de ahí la importancia de identificar los errores y trabajar en una corrección posterior.

Se pretende entonces dar respuesta a la pregunta: ¿Qué errores emergen durante el algoritmo de la división de polinomios? con el objetivo de identificar y clasificar errores cometidos por los alumnos. Para esto se aplicó una serie de actividades a dos estudiantes voluntarios de manera individual y por equipo a lo largo de varias etapas, cada una de las actividades consistía en un ejercicio de división de polinomios con una sola variable. El procedimiento utilizado por los alumnos y los resultados obtenidos fueron analizados con un marco teórico para clasificar los errores identificados y determinar su origen. Finalmente, se establecen conclusiones a partir de las evidencias recabadas y analizadas.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: En la próxima sección se describe la metodología que fue adaptada para la aplicación de las actividades: el Enfoque Lógico Semiótico como teoría utilizada para analizar los resultados y la forma en que permite clasificar y estudiar los errores identificados. Más adelante se detalla la intervención realizada a los estudiantes voluntarios desde un repaso del contenido necesario para abordar las actividades hasta su aplicación. Y por último se presenta el análisis y discusión de los resultados y las conclusiones de esta investigación.

Metodología ACODESA

Para este trabajo de investigación de carácter cualitativo se utilizó la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión, ACODESA [6] por su acrónimo en francés, la cual surge de un sistema semiótico expandido que considera representaciones funcionales e institucionales y su evolución en un escenario cultural al que se refiere como "Sistema Cultural Semiótico". La microsociedad de un salón de clases puede favorecer la evolución de este sistema partiendo de las dos representaciones mencionadas: la institucional es generada por la enseñanza convencional, usualmente el docente y los medios de los que dispone para impartir la clase, y la funcional es una representación que emerge espontáneamente del alumno para entender y resolver tareas matemáticas no rutinarias previo a la representación institucional.

Durante la resolución de las tareas, el profesor no debe proveer una solución o pistas que permitan llegar a una; su papel es más bien el de observar el trabajo individual de los estudiantes, dar apoyo para un buen intercambio de ideas dentro del proceso sociocultural de comunicación y animar la auto-reflexión antes de la institucionalización, integrando los entornos individual y sociocultural. La metodología permite introducir un conocimiento matemático a lo largo de cinco etapas.

- Trabajo individual: cada estudiante resuelve la tarea por cuenta propia, desarrollando representaciones funcionales.
- Trabajo en equipo: se trabaja la misma tarea en equipo y, gracias a la argumentación y validación de los integrantes, se puede mejorar lo desarrollado en la fase anterior.
- Debate: se mejora nuevamente lo obtenido en la fase anterior con toda la clase participando y ofreciendo su forma de resolver la tarea.
- Auto-reflexión: el estudiante trabaja la tarea por su cuenta, reconstruyendo el conocimiento.
- Proceso de institucionalización: las represen-taciones institucionales son presentadas por el profesor, basándose en los resultados de las fases anteriores.

La metodología ACODESA permitirá aplicar una serie de tareas en cada una de sus etapas y, al recolectar los resultados, se procederá a un análisis para identificar los errores cometidos por los estudiantes del grupo de estudio y cuáles de ellos persisten. Estos errores podrán ser clasificados según su origen con el Enfoque Lógico Semiótico.

Enfoque Lógico Semiótico

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) es un marco teórico en construcción desarrollado por el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de la Laguna, en España, y centra su atención en las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Este marco "pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias" [12]. "Se caracteriza por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias para el estudio de errores: el formal y el cognitivo" [3].

El microsistema educativo puede ser descrito como el lugar o ambiente donde se enseña el conocimiento matemático, está compuesto de tres elementos básicos: estudiante, docentes y la disciplina en cuestión (en este caso matemáticas); y de tres componentes que determinan el contexto: el Social, el Cultural y la Institución Escolar.

En esencia, toma los elementos del triángulo didáctico y establece relaciones entre ellos, como se muestra en la Fig. 1 obtenida del trabajo de Socas, "El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular en didáctica de la matemática" [12].

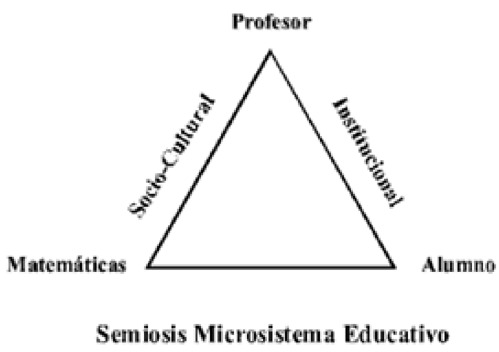

Figura 1. Relaciones del triángulo didáctico en el ELOS [12].

Sobre los modelos por competencias, el de competencia formal parte de la organización funcional, fenomenológica y conceptual de los objetos algebraicos.

En palabras de Delgado [3]: "explica la relación que hay entre los objetos matemáticos y el lenguaje algebraico".

Por su parte, el modelo de competencia cognitivo se organiza según:

- Las representaciones semióticas
- Los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra
- Dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra

Es importante profundizar en cada una de ellas para dar paso a la clasificación y estudio del error. La representación semiótica en este enfoque parte de entender la semiosis como el triple proceso de generar signos, de acciones del signo y de inferencia. El proceso de ésta última corresponde a la designación de un objeto matemático mediante un signo, esta representación genera una interpretación mental en el receptor, de modo que el significado de un objeto matemático puede ser observado a través del signo y está de cierta forma ligado a un interpretante.

La segunda componente se refiere a los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en álgebra. Para hablar de ellos primero es necesario mencionar los sistemas de representación semiótica; estos consisten en un sistema de signos a través de los cuales pueden comunicarse los objetos matemáticos.

Socas [11] menciona que los sistemas de representación semiótica más formales permiten que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, contrario a los sistemas más visuales o más intuitivos, y es en el dominio de estos sistemas formales donde aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivos que permiten generar una competencia. Se tienen entonces tres estadios de desarrollo: el semiótico, el estructural y el autónomo.

En el estadio semiótico el objeto y los signos nuevos emergen y son caracterizados por objetos y signos antiguos ya conocidos; es decir, el individuo aprende y emplea signos nuevos con los significados de los signos pertenecientes al sistema antiguo que ya sabe manipular.

En el estadio estructural se recurre a comportamientos y patrones del sistema antiguo para dotar de significado a los símbolos y objetos que aparecen en el nuevo sistema. Mediante estructuras ya conocidas se puede asignar un significado a la aparición de símbolos que no se habían visto antes.

Finalmente, en el estadio autónomo se tiene a los signos y objetos cuyo significado no puede ser obtenido con el manejo de un sistema antiguo —ya sea de signos, procedimientos o estructuras—, sino que es propio del nuevo sistema.

La tercera y última componente del modelo de competencia cognitivo engloba a las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra. Las dificultades, de acuerdo a Socas [10] tienen su origen en el ya mencionado microsistema educativo, conectadas en complejas redes que terminan por concretarse en forma de obstáculos, que a su vez generan errores en los estudiantes, y están asociadas a la disciplina de las matemáticas y complejidad de los objetos, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y a las actitudes afectivas y emocionales que tienen hacia las matemáticas.

En resumen, las dificultades pueden abordarse desde tres elementos: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemáticas y los procesos de enseñanza.

Clasificación y estudio del error

Para Socas [11], los errores aparecen cuando los estudiantes abordan un conocimiento nuevo que los lleva a reestructurar lo visto anteriormente, y es esta adaptación del conocimiento lo que dará al error distintas procedencias. Con este marco teórico se sitúan los errores cometidos por los alumnos en tres ejes que se organizan en semiosis distintas: el error puede tener origen en un obstáculo epistemológico, didáctico o cognitivo. Otro origen posible es la ausencia de sentido semiótico, estructural o autónomo, y también puede tener origen en la afectividad, emociones, actitudes y creencias de los alumnos hacia el contenido matemático. Los errores con origen en un obstáculo y en las actitudes hacia las matemáticas proceden directamente de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, mientras que los errores con origen en una ausencia de sentido parten de los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación vistos anteriormente.

Cuando hablamos de un obstáculo epistemológico nos referimos a un contenido matemático que experimentó de forma natural una gran resistencia a ser adquirido a lo largo de la historia de la humanidad, por lo que no debería sorprender que los estudiantes tengan dificultades para abordarlo. El obstáculo didáctico es, junto con el cognitivo, referente al currículo de matemáticas, el primero genera errores debido a la forma en que las clases y el material son presentados por el docente a sus alumnos; mientras que los errores generados por el segundo están relacionados con la manera en que el alumno construye por sí mismo el conocimiento. Los errores con origen en actitudes afectivas y emocionales parten de los sentimientos, generalmente negativos, hacia el contenido matemático, tales como la incertidumbre, ansiedad o estrés, por mencionar algunos. Kieran y Filloy [8] mencionan que la sociedad considera el álgebra como una parte compleja de las matemáticas, a tal grado de que simplemente escuchar la palabra “álgebra” es suficiente para provocar miedo e indisposición en los estudiantes.

Y los errores con origen en una ausencia de sentido pueden diferenciarse en tres etapas: errores con origen en la aritmética, errores de procedimiento y errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Los errores con origen en la aritmética parten de una ausencia de sentido semiótico; se refieren a objetos y símbolos que fueron presentados en el lenguaje aritmético y cuya comprensión y asimilación permite emplearlos en álgebra con un significado diferente, o dotar de significado a nuevos símbolos y objetos. Los errores de procedimiento yacen en una ausencia de sentido estructural; se manifiestan cuando los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento. Por último, los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico surgen en el manejo de signos cuyo significado no puede atribuirse al de un signo del lenguaje antiguo, en otras palabras, son autónomos.

A continuación, la Fig. 2 describe los componentes anteriores del modelo de competencia cognitivo.

Figura 2. Componentes del modelo de competencia cognitivo [11].

La investigación de Socas [11] entrega un listado y descripción de los errores encontrados durante el análisis de las actividades aplicadas a sus estudiantes participantes. A continuación se describen dichos errores.

Errores relativos al uso del paréntesis: Se refieren al mal uso del paréntesis, o al hecho de no utilizarlos aunque se identifique en el contexto. Por la forma en que se enseña este contenido matemático puede tener origen en un obstáculo didáctico, o bien puede deberse a una ausencia de sentido semiótico; para este último en particular nos remontamos a orígenes aritméticos.

Errores debidos a la concatenación: Ya los mencionan Kieran y Filloy [8] como una fuente de confusión para el alumno, puesto que en aritmética la yuxtaposición de dos símbolos indica una adición, y en algebra indica una multiplicación. Por ejemplo, en aritmética los símbolos 3 y 7 colocados juntos forman el número 37 es decir $30 + 7$, mientras que en álgebra los símbolos 4 y b colocados juntos forman $4b$, que significa 4 por b.

Necesidad de particularización: Es un error con origen en una ausencia de sentido, pues dependiendo el contexto el alumno no puede hallar sentido al uso del lenguaje algebraico y retro-

cede entonces al lenguaje numérico que sí sabe utilizar.
Necesidad de clausura: Error con origen en un obstáculo didáctico que se presenta cuando el alumno desea "concluir" una operación que él considera incompleta, por ejemplo, $5x+3$ resulta en $8x$.

Tabla 1. Origen de los errores descritos anteriormente [11].

ERROR IDENTIFICADO	ORIGEN DEL ERROR
Mal uso del paréntesis	Obstáculo didáctico
	Ausencia de sentido semiótico (origen en la aritmética)
Concatenación	Obstáculo cognitivo
Necesidad de clausura	Obstáculo didáctico
	Ausencia de sentido estructural (errores de procedimiento)
Necesidad de particularización	Ausencia de sentido

Ya que el algoritmo de la división de polinomios involucra todas las operaciones básicas (suma, resta y multiplicación) es en estas operaciones donde se espera identificar errores cuyo origen pueda ser determinado con el ELOS. Previo a la intervención, el diseño de la actividad permitió predecir ciertos tipos de errores que podrían aparecer, el listado de ellos se presenta a continuación.

Error con origen en la ausencia de sentido semiótico: Llega a presentarse durante la división de monomios que permite determinar los elementos del cociente, pues se requiere usar leyes de los exponentes —tema visto en aritmética—. También puede presentarse en la resta de polinomios cuando sólo un término del sustraendo cambia de signo, pues esto indica que el paréntesis fue omitido debido a una mala aplicación de las propiedades aritméticas.

Error con origen en la ausencia de sentido estructural: Se manifiesta un error de procedimiento cuando el manejo de una estructura conocida es inapropiado; por ejemplo, si bien la omisión deliberada del paréntesis tiene origen en la ausencia de sentido semiótico, este mismo error puede manifestarse con un origen distinto cuando se considera la suma de monomios dentro de un paréntesis como un solo término, y al multiplicarlo por un término exterior la estructura es confundida.

$$2x \cdot (4x + 3) = 8x^2 + 6x \qquad (2)$$

La estructura puede ser trasladada de manera errónea a:

$$2x \cdot (4x \cdot 3) = 8x^2 \cdot 6x \qquad (3)$$

Lo mismo podría aparecer en esta investigación de manera inversa, es decir

$$2x \cdot (4x \cdot 3) = 2x \cdot 4x \cdot 3 \qquad (4)$$

La estructura puede ser mal trasladada a:

$$2x \cdot (4x + 3)= 2x \cdot 4x + 3 \qquad (5)$$

Error con origen en un obstáculo didáctico: Puede presentarse en la "simplificación" de dos términos, cuando uno de ellos es un número y el otro una letra, mostrando que la expresión se percibe como una operación incompleta que debe ser concluida antes de proceder (necesidad de clausura).

Pueden también presentarse errores que no son analizados con el ELOS para determinar su origen, pero que sí han sido identificados en otros estudios enfocados al algoritmo de la división [1] por ejemplo:

- Una mala elección de los elementos del cociente
- No comprobar el resultado
- Olvidar plantear una resta
- No ubicar residuos mayores que el divisor

En la actividad realizada para este artículo no se espera ver errores con origen en la ausencia de sentido autónomo, puesto que lo que se trabajará en el algoritmo de la división de polinomios está fuertemente ligado a operaciones previas y a conocimiento aritmético. No se verán signos cuyo significado sea exclusivo del lenguaje algebraico; por ejemplo, el uso del signo "=" en el estudio en el manejo de ecuaciones, a menos claro que los estudiantes utilicen la propiedad Ec. (1) (el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo) para comprobar el resultado. Si bien, se hará las observaciones puntuales de la experiencia de los estudiantes en distintas etapas del estudio, no se buscará analizar los errores con posible origen en actitudes emocionales y afectivas hacia el contenido matemático.

Intervención
Repaso de contenido pertinente

Las actividades aplicadas consistieron cada una en un ejercicio diseñado por el investigador, el ejercicio en cuestión consiste en una división de polinomios en la que el dividendo es un polinomio de grado tres y el divisor es un binomio de grado 1. Se diseñó así para que los participantes pudieran plantearlo desde un enunciado y concluirlo en no más de 20 minutos, pero que en ese tiempo y en los pasos que implica su resolución se trabajara con números negativos, leyes de los exponentes, leyes de los signos, división de monomios y operaciones básicas con polinomios. Todo con el propósito de predecir algunos de los errores que podrían aparecer, tener en claro dónde se utilizaría el Enfoque Lógico Semiótico para determinar el origen y asegurar que la actividad estuviera al nivel de los participantes.

La actividad piloto se aplicó de manera presencial a dos estudiantes identificados como "Estudiante1" y "Estudiante2", siendo el primero de nivel licenciatura perteneciente a la Universidad Autónoma de Querétaro y el segundo un estudiante de nivel preparatoria perteneciente al Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro. La metodología ACODESA, descrita en la sección 2, fue adaptada para este singular escenario en el que los estudiantes ya han llevado el tema de división de polinomios con anterioridad, pero aun así se muestran incapaces de abordarlo y de realizar la etapa de debate. Se contó con el espacio adecuado para desarrollar la actividad, un escritorio para los estudiantes y un pizarrón como apoyo.

Además, ambos estudiantes permitieron que se grabara toda la intervención, la cual duró aproximadamente 80 minutos, de los cuales 30 minutos fueron destinados a describir las características de la investigación, la dinámica y el repaso de contenido.

Lo primero, una vez procurado lo anterior y teniendo listo el material para la actividad, fue presentar ante los estudiantes el título de esta investigación, su objetivo, sus características, las etapas a realizar, y después se les preguntó sobre qué tan preparados se sentían para realizar un ejercicio de división de polinomios.

Dado que para ambos ha pasado un tiempo considerable desde su último contacto con el álgebra, fue necesario comenzar con un repaso de operaciones con polinomios, donde se vio lo siguiente:

- Término algebraico
- Clasificación en monomios, binomios, trinomios y polinomios
- Suma, resta y multiplicación de polinomios
- División de monomios y algoritmo de la división aritmética

Durante el repaso los estudiantes mencionan características que hacen ver que recuerdan la ley de los exponentes aplicada al producto de dos términos con la misma base y a la división de monomios

$$(x^m \cdot x^n = x^{(m+n)}) \tag{6}$$

$$(x^m / x^n = x^{(m-n)}) \tag{7}$$

pero no recordaban la manera de realizar el algoritmo de la división de polinomios, por lo que se presentaron ejemplos previos a la aplicación de la actividad.

Antes de aplicar la actividad, se desarrolló en el pizarrón un ejemplo "sencillo" de división de polinomios en el que se utilizó todo lo visto anteriormente. El ejemplo fue borrado una vez concluido para que no pudiera ser utilizado como una guía para resolver la actividad.

Aplicación de la actividad

La actividad 1 consistió en plantear una división de polinomios desde un enunciado y, de acuerdo a la metodología ACODESA, cada estudiante recibió una hoja con dicha actividad para trabajarla de manera individual. El estudiante debía identificar los componentes de la división (dividendo y divisor), colocarlos en su respectivo lugar en la casilla de división y realizar el algoritmo hasta obtener un residuo de grado menor al grado del divisor. Durante la aplicación de la actividad no obtuvieron ningún tipo de ayuda por parte del investigador y se les dio 15 minutos para resolver el ejercicio. Aunque el "Estudiante1" lo finalizó en menor tiempo, los estudiantes al entregar la actividad desconocen si su resultado es correcto o no.

Siguiendo la metodología, para la actividad 2 cada estudiante recibió una hoja con la misma actividad que en la etapa anterior, sólo que ahora las instrucciones cambiaron a trabajar en equipo, haciéndoles énfasis en la importancia de discutir, aportar su punto de vista y corregir al otro en caso de creerlo necesario. El procedimiento se muestra en las hojas de trabajo de ambos estudiantes y tuvo una duración de 11 minutos.

Dado el número de estudiantes y el hecho de que se trataba de una prueba piloto, no se consideró necesario realizar la etapa de debate, puesto que en ella el investigador aún no debe intervenir ni darles pistas para resolver la actividad; además, ambos estudiantes ya han intercambiado argumentos y llegado a una conclusión.

La actividad 3 fue entonces para la etapa de auto-reflexión. A cada estudiante se le dio nuevamente la misma hoja de trabajo inicial para que fuera resuelta de manera individual, pues se espera que, si en alguna etapa anterior se presentaron errores, en esta sean resueltos. La duración de esta etapa fue de 5 minutos.

La actividad 4 consistió en aplicar una segunda hoja de trabajo para la misma etapa de auto-reflexión. Ahora el ejercicio sería distinto al inicial para ver si se familiarizaron con el tema o si aún se presentan errores. Con la actividad 4, la cual les tomó 10 minutos, concluye la intervención y la recolección de evidencias.

Finalmente, a petición de los participantes y después de que ambos entregaron su actividad, se procedió a una etapa de institucionalización en la que el ejercicio de la actividad 4 fue explicado con más detalle, tanto en los elementos de la división como en los pasos del algoritmo para llegar al resultado correcto, con una duración de aproximadamente 10 minutos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la actividad 1, ambos participantes manejaron el algoritmo haciendo cada paso fuera de la casilla de división para después colocar los polinomios pertinentes en su lugar. Sin embargo, el "Estudiante2" cambió esto a partir de la actividad 2, y en ninguna de las actividades los participantes intentaron comprobar su resultado.

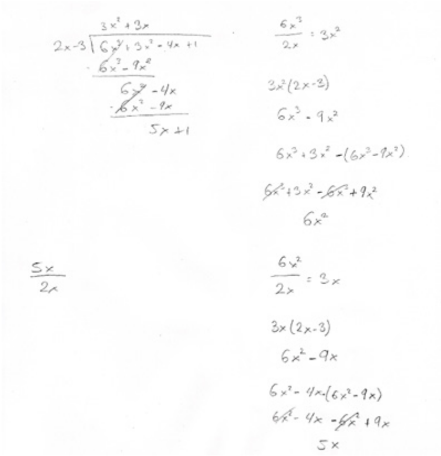

Figura 3. El procedimiento a la derecha hecho fuera de la casilla de división por el "Estudiante1".

En esta etapa aparece sólo un tipo de error que se esperaba en un inicio: el "Estudiante1" se equivocó en una suma de polinomios; en un término cambió de signo en un paso anterior y, a pesar de ejecutar correctamente ese cambio de signo y dejar evidencia de ello, hizo la reducción de términos semejantes en la suma de polinomios conservando el signo del paso anterior.

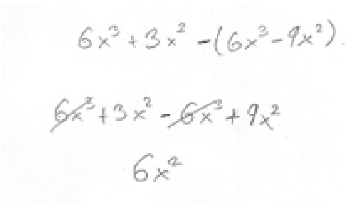

Figura 4. Suma de polinomios incorrecta

El error se acarreó en el resto del algoritmo y, naturalmente, no se obtuvo el resultado correcto. Cabe resaltar que en un paso posterior similar, la reducción de términos semejantes sí se hizo correctamente, por lo que el error tal vez se debió a un descuido, ya que el mismo "Estudiante1" durante la actividad pidió que "no lo presionasen" cuando el investigador sugirió un tiempo límite.

Además, no identificó un residuo de grado igual al del divisor, por lo que dio por finalizada la actividad, aunque el algoritmo aún continuaba hasta obtener un residuo de grado menor.

Si bien dicho error podría tener origen en una ausencia de sentido o en un obstáculo didáctico, lo cierto es que el "Estudiante1" expresó que "ya no sabía qué hacer" porque "ya no podía dividir", refiriéndose a dividir $5x$ por $2x$ para determinar el siguiente término del cociente.

De lo anterior se puede concluir que ese error, por la forma en que ocurrió, tiene origen en la aritmética (ausencia de sentido) debido a la incapacidad de manejar fracciones o decimales.

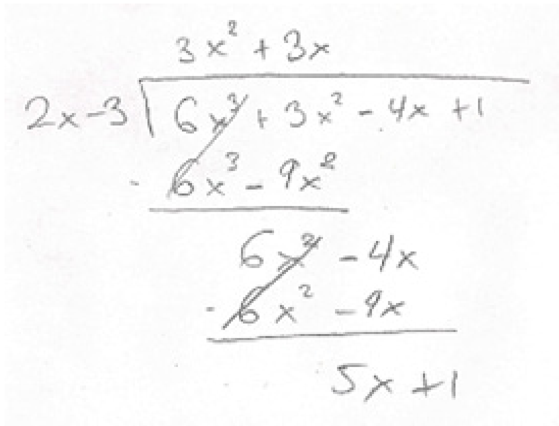

Figura 5. Residuo del mismo grado que el divisor.

En cambio, el"Estudiante2" comete un error al hacer la operación $(2x - 3)(3x^2)$ y obtener $6x^3 - 6x^2$. Dado que el error se presenta por un contenido aritmético deficiente al manejar las tablas de multiplicar se puede determinar su origen en una ausencia de sentido.

Analizando el resto de su procedimiento no se encontraron más errores, claro que debido al error inicial no se llegó al resultado correcto.

Es importante mencionar que el "Estudiante2" sí decidió trabajar con números decimales y continuar el algoritmo, pero no se planteó la posibilidad de estar equivocado y usar la comprobación aritmética que conoce para verificar esto.

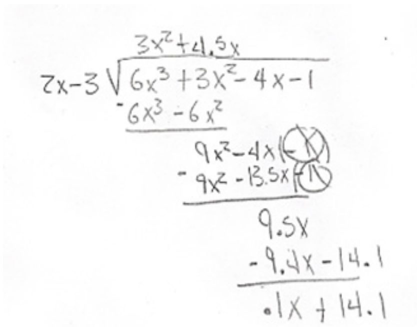

Figura 6. Manejo de decimales.

La actividad 2 corresponde a la etapa de trabajo en equipo, a los 3 minutos de haberla iniciado ambos expresaron haberse dado cuenta de que se equivocaron en la primera parte del algoritmo en la actividad 1.

Aunque entregaron sus hojas anteriores, ambos recordaron el residuo que obtuvieron e inmediatamente lo contrastaron durante el procedimiento, y aunque no comprobaron su resultado, se mostraron convencidos de que esta vez era el correcto.

Una discusión puntual entre ambos es el manejo de cierto número de términos del dividendo durante el algoritmo; el "Estudiante1" trabajó sólo con los términos que eran semejantes a los que obtuvo de multiplicar el término correspondiente del cociente por el divisor para hacer la resta, y argumentó que era la forma correcta debido a la similitud con el algoritmo en aritmética.

Mientras tanto, el "Estudiante2" trabajó siempre con todos los términos del dividendo, argumentando que se debía tomar "toda la ecuación".

Eventualmente concluyeron que ambas formas son correctas para este ejercicio, aunque es posible que en un caso distinto en el que los términos del dividendo no sean de grado consecutivo el "Estudiante1" podría tener problemas al determinar con que términos trabajar y con cuáles no.

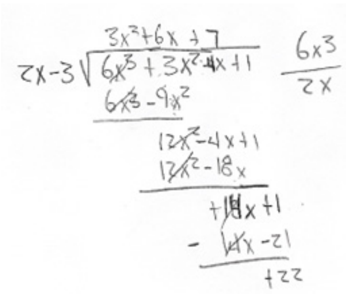

Figura 7. El "Estudiante2" "baja" el 1 del dividendo después de la primera resta.

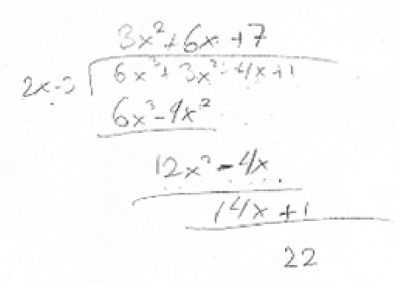

Figura 8. El "Estudiante1" "baja" el 1 hasta que le parece pertinente.

La actividad 3 es la etapa de auto-reflexión, en ella se les dio una hoja de trabajo con la misma actividad y, como era de esperarse, cada uno de manera individual concluyó el algoritmo y llegó al resultado correcto.

La actividad 4 presentó una extensión de la etapa anterior en la forma de un nuevo ejercicio para ver si la experiencia anterior permitía que en esta ocasión tampoco se presentaran errores, premisa que no fue cumplida.

El "Estudiante1" falló desde el inicio en escribir correctamente el dividendo en la casilla de división, ya que un término fue escrito con signo contrario al que solicitaba la actividad, por lo que es imposible que el algoritmo concluya llegando al resultado correcto. A pesar de este error la actividad fue analizada, y de la forma como el estudiante planteó el ejercicio no se presentaron más errores en el algoritmo.

De igual manera, sorprendentemente, el "Estudiante2" también falló en escribir un término del dividendo. El análisis de esta actividad partió de considerar el planteamiento del "Estudiante2" como correcto y, revisando el resto del algoritmo, se encontró un error más, el cual ocurrió al dividir dos monomios, pues se omitió el signo "-" en el resultado.

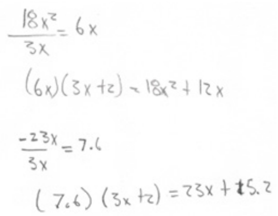

Figura 9. Omisión del signo "-" en la división de monomios.

Este error, cuyo origen yace en una ausencia de sentido o en un obstáculo didáctico, nuevamente lleva al estudiante a trabajar con números decimales. Este hecho, al igual que en la actividad 1, no parece alertarlo de que ha cometido un error o de que sería prudente revisar su procedimiento hasta ahora; en vez de eso, continua con el algoritmo hasta que el manejo de decimales es tan grande que decide entregar la actividad.

Tabla 2. Errores encontrados

ERRORES ENCONTRADOS	DESCRIPCIÓN DEL ERROR	POSIBLE ORIGEN
$6x^3 + 3x^2 - (6x^3 - 9x^2)$ $6x^3 + 3x^2 - 6x^3 + 9x^2 = 6x^2$	Falla al reducir términos semejantes por confusión de un signo previo.	Sentimiento de presión que pudo llevar al descuido.
Grado de $(5x + 1)$ = Grado de $(2x - 3)$	No se identificó un residuo de grado igual al del divisor, de modo que el algoritmo fue concluido prematuramente.	Ausencia de sentido al no trabajar con números decimales en un contexto algebraico (origen en la aritmética)
$(2x - 3)(3x^2) = 6x^3 - 6x^2$	Mal uso de las tablas de multiplicar	Ausencia de sentido por mal manejo de contenido aritmético
Mal planteamiento del ejercicio	Ambos estudiantes copiaron mal un término del dividendo	Descuido al plantear la división
$\frac{-23x}{3x} = 7.6$	Se omitió el signo "-" en la división de monomios	Probablemente un obstáculo didáctico al ver el tema de leyes de los signos aplicado a división
Ausencia de comprobación	No se utilizó la propiedad Ec. (1) (el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el	Probablemente un obstáculo didáctico, pues se aprecia que no saben

CONCLUSIONES

El ELOS usado para analizar este algoritmo matemático permitió determinar el origen de algunos errores encontrados en los pasos que involucran operaciones con polinomios, concretamente en la división de monomios, suma, resta y multiplicación de polinomios. El análisis apunta a que los participantes del estudio manejan adecuadamente las estructuras algebraicas. No obstante, es en la parte aritmética donde se presentan problemas debido a un contenido tan básico como las tablas de multiplicar, y al manejo de números decimales, que si bien no hubieran conducido al resultado correcto en esta actividad, sí marcaron un impedimento para continuar con un algoritmo que quedó incompleto.

En el caso del error número dos de la tabla nos encontramos ante una ausencia de sentido, semiótico, pues no tiene relación con la identificación del grado de los polinomios en el algoritmo, sino más bien con el empleo de un contenido aritmético. Puede verse cómo los objetos y símbolos propios de los números racionales (decimales o fraccionarios) no pudieron ser dotados de significado en el sistema algebraico, y aunque el error podría ser atribuido a un obstáculo debido a la dificultad del contenido, esto no puede apreciarse ya que no hubo empleo ni manipulación del mismo.

Otros errores pueden deberse a la didáctica con la que se les enseñó álgebra. Por ejemplo, el modo de enseñanza del tema de leyes de los signos, pues tal vez no les quedó claro que también se aplica a la división de monomios y no solo a la multiplicación, donde no parecen tener problemas. Puede además deberse a las dificultades asociadas a los objetos matemáticos, en este caso el manejo de cantidades negativas cuya dificultad es inherente a dicho contenido matemático (obstáculo epistemológico).

El otro error es acerca de la ausencia de una comprobación, que si bien podría considerarse su origen en un obstáculo si saben aplicarla en un contexto aritmético pero no es trasladada al algebraico, es posible que se relacione con el hecho de que tampoco realizan una revisión de su procedimiento, ni cuando están seguros de su resultado para verificarlo ni cuando tienen dudas de lo que llevan resuelto.

Los errores restantes parecen encontrarse en un simple descuido o falta de atención, pues pudieron evitarse fácilmente e incluso ser corregidos también con mucha facilidad con tan solo revisar su procedimiento, y pueden catalogarse como descuidos debido a que no ocurren por un mal manejo del lenguaje aritmético o algebraico como los errores anteriores.

La aplicación de la prueba piloto terminó mostrando que, efectivamente, la presencia de errores continúa incluso en estudiantes que han aprobado las materias de álgebra y dichos errores seguirán afectándolos en futuros cursos de matemáticas, por lo que es pertinente el estudio posterior para atender esta problemática desde su origen, sea cual sea éste.

También, resulta de gran importancia resaltar la gran utilidad que tuvo la etapa de trabajo en equipo de ACODESA, pues les permitió a los estudiantes darse cuenta de sus errores previos rápidamente y, trabajando juntos, quedaron convencidos del resultado obtenido en la actividad, mostrándose entonces como una dinámica efectiva para resolver ejercicios y corregir errores.

REFERENCIAS

[1] S. Aguiriano, "Estudio sobre el uso del algoritmo de la división y su vínculo en la transición de la aritmética al álgebra, el caso de los anillos Euclideos con alumnos de primer ingreso de la carrera de ingeniería agronómica de la UNAG", Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras, 2015.

[2] S. M. Del Puerto, C. L. Minnaard & S. A. Seminara, "Análisis de los errores : una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje". *Revista Iberoamericana de Educación*, 1922, 13, 2004.

[3] Delgado, A. "Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios". Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, 2011 https://www.mendeley.com/viewer/?fileId=-5fd8f8bd-bf42-6bab-5168-e38b92a59c03&-documentId=0aac0c72-1e16-3d0a-a09a-afc-52ca36a91

[4] M. E. Gamboa Graus, D. Santiesteban Feria, "Alternativa didáctica para la división entera de polinomios". *Boletín Redipe*, Vol. 4, No. 8, pp. 54-58, 2015.

[5] J. García Suárez, I. Segovia & J. L. Lupiáñez, "Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas" *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 145–155, 2011.

[6] F. Hitt & A. S. González-Martín, "Covariation between variables in a modelling process: The

ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method." *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201–219, 2015. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7

[7] A. Jiménez Marín & V. García Salmerón, "La división sintética vinculada al algoritmo de la división de polinomios una propuesta para bachillerato", *Investigación e innovación en matemática educativa, Volumen 2*, (pp. 297–299) 2017. http://www.revistaiime.org/index.php/IIME/article/viewFile/79/27#page=299

[8] C. Kieran, & E. Filloy Yagüe, "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica". *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 7* (December), 229–240, 1989.

[9] L. Rico, "Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas". *Educación Matemática: Errores y Dificultades de Los Estudiantes, Resolución de Problemas, Evaluación e Historia*, pp. 69–108, 1995. http://funes.uniandes.edu.co/486/

[10] M. Socas, "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", In *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). Universidad de la Laguna, 1997. https://doi.org/10.31819/9783964565464-004

[11] M. Socas, "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico", In *Investigación en Educación Matemática* XI (pp. 19–52). Universidad de la Laguna, 2007. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

[12] M. Socas, "El Análisis Del Contenido Matemático En El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a La Investigación Y Al Desarrollo Curricular En Didáctica de la Matemática", *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* – 2012, pp. 1–22, 2012.