**SANDRA G. HERNÁNDEZ-LEYVA,
LUISA RAMÍREZ-GRANADOS,
VÍCTOR A. AGUILAR-ARTEAGA**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

SANDRA G. HERNÁNDEZ-LEYVA. CORREO ELECTRÓNICO: SANDRAHLEYVA@GMAIL.COM
LUISA RAMÍREZ-GRANADOS. CORREO ELECTRÓNICO: LUISA.RAMIREZ.GRANADOS@GMAIL.COM
VÍCTOR A. AGUILAR-ARTEAGA. CORREO ELECTRÓNICO: VICTTOR.AGUILAR@GMAIL.COM

03

ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS DE RAZÓN DE CAMBIO DE LA DERIVADA EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

PRAXEOLOGICAL ANALYSIS OF DERIVATIVE AS RATE OF CHANGE IN CALCULUS TEXTBOOKS

RESUMEN

Las dificultades de aprendizaje del cálculo diferencial se agravan cuando los libros de texto usados como material de apoyo en la asignatura carecen de sustento teórico; se enuncian las definiciones o teoremas, pero no se demuestran, lo que genera un conflicto entre las ideas intuitivas de los estudiantes y las definiciones formales de los conceptos matemáticos. El objetivo del presente artículo es mostrar un análisis comparativo de tres libros de texto que actualmente forman parte de los programas de enseñanza media superior, respecto a la manera en la que se aborda la razón de cambio de la derivada. Se considera como sustento teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard [1], cuyo principio fundamental radica en que toda actividad humana puede describirse como un modelo único llamado praxeología, basándose en el "saber hacer" y el "saber", analizando el tipo de problemas y técnicas que se construyen para resolverlos, así como las justificaciones utilizadas.

Palabras clave: Praxeologías, Cálculo, libros de texto, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

ABSTRACT

Most difficulties of calculus learning arise when textbooks used as reference in the course lack of theoretical support, insomuch as definitions or theorems are enunciated without being demonstrated, which generates a conflict between the students' intuitive ideas and the formal definitions of mathematical concepts. The objective of this paper is to show a comparative analysis of three textbooks, which are consulted at high school programs, regarding the way derivative rate of change is approached. We consider as theoretical support the Anthropological Theory of Didactics by Yves Chevallard [1], whose fundamental principle is that every human activity could be described as a unique model, called praxeology, based on "know-how" and "knowledge", analyzing the type of problems and techniques that are used to solve them as well as the used justifications.

Keywords: Praxeologies, Calculus, textbooks, Anthropological Theory of Didactics.

INTRODUCCIÓN

Históricamente el concepto de la derivada ha estado ligado al estudio de problemas de variación, lo cual implica cuantificarla en un intervalo y en un instante, establecer diferencias en intervalos y conjeturar sobre las variaciones. Como menciona Ramírez [2]:

"Desde los griegos, se plantearon cuatro problemas fundamentales que al ser resueltos en el siglo XVI – XVII, dieron vida a la función derivada, fueron ellos: El de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos."

Por otro lado, Boyer [3] menciona: "La función derivada como objeto del cálculo infinitesimal logra su reconocimiento social, científico y matemático en el siglo XX, cristalizando el trabajo de muchas personas durante 20 siglos". Actualmente, estos métodos y procedimientos están presentes en los programas de estudio a nivel medio superior, donde se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la apropiación y manipulación del concepto de la derivada, tal como lo muestran diversas investigaciones realizadas en didáctica de la matemática [4], [5], [6], las cuales aportan diferentes formas de mirar el desarrollo de la comprensión de la razón de cambio de la derivada por parte de los estudiantes.

Caballero y Cantoral [7] consideran importante entender qué es, en qué consiste y cómo se desarrolla el pensamiento variacional, ya que éste se caracteriza por estudiar fenómenos propios de la matemática y de las ciencias naturales, sociales y humanas que involucren cambios que sea necesario cuantificar y analizar para predecir estados futuros. Esta situación ubica los conocimientos matemáticos propios del cálculo más allá de la sola manipulación algebraica.

Estas investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, ponen de manifiesto las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para comprender de la noción de razón de cambio. Dificultades que se hacen más notorias cuando los libros de texto abordan la actividad matemática a través de tareas que carecen de sustento tecnológico y teórico; es decir, no incluyen descripciones y explicaciones que permitan entender la técnica utilizada y tienden a centrarse en los aspectos algorítmicos y algebraicos, sin que esto signifique que los estudiantes han alcanzado una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento matemáticos.

Dichas tareas, técnicas, tecnologías y teorías que encontramos en los libros de texto sitúan a la actividad matemática en un conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales que puede describirse con un modelo único llamado "praxeología". Esta noción constituye una herramienta fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las instituciones.

El análisis comparativo de los libros de texto en cuanto a cómo abordan el tema de razón de cambio de la derivada pretende darle herramientas al docente que le permitan elegir el libro de texto más adecuado según el enfoque que cada institución quiera darle a la enseñanza-aprendizaje.

El proceso de análisis del contenido de los libros de texto de la razón de cambio de la derivada está escrito de la siguiente manera: en la siguiente sección se muestra evidencia de las definiciones y ejemplos de cada uno de los libros mencionados y se hace el análisis con la Teoría Antropológica de lo Didáctico, por último, se establecen algunas conclusiones.

METODOLOGÍA

En este trabajo se revisaron y analizaron los libros de texto *Cálculo Diferencial e Integral* de William A. Granville [10], Cálculo de Schaum (5ª edición) [11] y *Matemáticas 1 Cálculo Diferencial* de Dennis Zill [12], respecto a la manera en la que se aborda el tema de razón de cambio de la derivada.

El enfoque metodológico utilizado en el análisis comparativo de los libros de texto es cualitativo de tipo documental, ya que se realizó una revisión e interpretación de la manera en la que se aborda la razón de cambio de la derivada bajo el marco teórico de la TAD.

Según Morales [8], la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) admite que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se denomina con la palabra de praxeología" (*praxis* + *logos*), en la cual se distinguen dos niveles [9]:

El nivel de la *praxis* o del "saber hacer", que abarca los tipos de problemas o tareas que se estudian, y las técnicas que se construyen para resolverlos.

Dado un tipo de tarea, se requiere una manera de realizarlas, a la que se conoce como técnica (τ); por lo tanto, una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene una técnica τ, la cual no necesariamente es algorítmica y la elección de ésta depende en ocasiones de las técnicas institucionalmente reconocidas [1].

El segundo nivel, del logos o del "saber", incluye las descripciones y explicaciones que permiten entender las técnicas que se utilizan, las cuales reciben el nombre de tecnología; dentro del saber existe un segundo subnivel de descripción y explicación que se denomina teoría.

Por lo tanto, alrededor de un tipo de tareas T, se encuentra una tripleta formada por (al menos) una técnica τ, una tecnología θ y una teoría Θ; dicho conjunto [T, τ, θ, Θ] constituye una praxeología formada por un bloque práctico-técnico y por un bloque tecnológico-teórico [1].

El primer texto considerado, Granville [10], aborda el tema de la derivada a partir del análisis del cambio del valor de una función al modificarse la variable independiente. La medida de esta variación, llamada razón del incremento de la función $y = f(x)$, se denota por Δy; el incremento de la variable independiente x, está dado por Δx. Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada en $x = x_0$, utilizando para ello la siguiente simbología:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x) \tag{1}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

Una vez definidas las Ecs. (1) y (2), el texto establece cuatro pasos a seguir como procedimiento para derivar una función:

Paso 1: Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, para calcular el nuevo valor de la función $y + \Delta y$

Paso 2: Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y y se obtiene Δy (incremento de la función)

Paso 3: Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable dependiente)

Paso 4: Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable dependiente) tiende a cero.

El límite así hallado es la derivada buscada. Después se realiza una interpretación geométrica de la derivada, que en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.Ec. (3)

$$\frac{dy}{dx}: \text{pendiente de la recta tangente en el punto } P(x, y) \tag{3}$$

Si bien es cierto que el estudiante puede familiarizarse con este método, también lo es que el aprendizaje de la derivada se convierte en una mecanización, generando con esto una comprensión parcial del concepto de derivada.

Posteriormente, introduce la derivada como rapidez de variación, llamada también razón de cambio, retomando la razón de los incrementos Δx, Δy. Además define la rapidez media de variación de y con respecto a x como la pendiente de la recta tangente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y la rapidez instantánea de la variación de y con respecto a x para un valor definido en x como $\frac{dy}{dx}$.

Cuando la variable independiente es el tiempo, a la rapidez de variación con respecto a esa variable se le llama velocidad media, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, donde s representa la distancia y t el tiempo. Asimismo, se define la velocidad instantánea, Ec. (4), como el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$; es decir, la velocidad en un instante cualquiera es la derivada del espacio con respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4}$$

En muchos de los problemas de aplicación existen variables que son funciones del tiempo, por lo que el libro de texto establece una guía de cinco pasos para la resolución de este tipo de problemas. Si las condiciones del problema lo permiten, se pueden establecer relaciones entre las variables, y hallar mediante la derivación una relación entre la rapidez de cambio de las variables.

Los cinco pasos para la resolución de problemas que establece son:

Paso 1: Construir una figura que sea una interpretación del enunciado del problema, y representar por medio de variables necesarias las cantidades que cambian con el tiempo.
Paso 2: Obtener una relación entre las variables implicadas que se verifique en un instante cualquiera.
Paso 3: Derivar con respecto al tiempo.
Paso 4: Hacer una lista de las cantidades dadas y de las buscadas.
Paso 5: Sustituir en el resultado de la derivación (paso 3) las cantidades dadas, y resolver con respecto a las que se buscan.

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de $x^3 - 2x + 7$.

Resolución. Hagamos $y = x^3 - 2x + 7$.

Primer paso. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7$
$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7.$

Segundo paso.
$$\begin{array}{l} y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 7 \\ y \qquad\; = x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2x \qquad\quad + 7 \\ \hline \Delta y = \qquad 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \qquad - 2 \cdot \Delta x \end{array}$$

Tercer paso. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2.$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2.$$

O bien, $y' = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x + 7) = 3x^2 - 2.$

Figura 1: Praxeología 1. Derivada de una función (Granville, 2009, página 31).

La primera **tarea** planteada (Fig. 1), en el libro de texto Granville [10], se centra en la parte algorítmica y algebraica, y consiste en calcular la derivada de una función cúbica. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cuatro pasos que define previamente el libro. La **tecnología** se sustenta en la definición de derivada de una función como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero. Por último, los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la razón de cambio; así como los que definen a la derivada de una función en el marco del análisis matemático.

1. Un hombre camina $7\frac{1}{2}$ Km por hora hacia la base de una torre que tiene 18 m de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia de la base es 24 m?

Solución. Aplicando la regla, tendremos:

Primer paso. Construyamos la figura 33. Sea x la distancia entre el hombre y la base de la torre, y y su distancia de la cima, en un instante cualquiera.

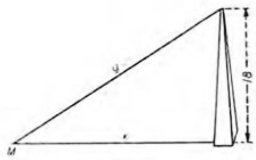


Fig. 33

Segundo paso. En el triángulo rectángulo de la figura se verifica:

$$y^2 = x^2 + 324.$$

Tercer paso. Derivando, obtenemos

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}, \quad \text{o sea,}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Esto significa que en un instante cualquiera se verifica la igualdad:

rapidez de variación de $y = \left(\frac{x}{y}\right)$ *veces (rapidez de variación de* x*)*.

Cuarto paso. $x = 24$ $\qquad \frac{dx}{dt} = -7\frac{1}{2}$ Km por hora $= -7\,500$ m por hora.

$y = \sqrt{x^2 + 324} = 30.$ $\qquad \frac{dy}{dt} = ?$

Quinto paso. Sustituyendo en (1).

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{24}{30} \times 7\,500 \text{ m por hora} = -6 \text{ Km por hora.}$$

Figura 2: Praxeología 2. Rapidez de variación (Granville, 2009, páginas 82 y 83).

La segunda tarea planteada (Fig. 2) en el libro de texto Granville [10] consiste en interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana, el cual implica calcular la razón de cambio de una variable respecto a otra. La técnica utilizada para resolverla es el método de los cinco pasos para la resolución de problemas que sugiere el libro. La tecnología se sustenta en las reglas para derivar funciones algebraicas, y los elementos teóricos que sustentan la tecnología son aquellos de la derivación de funciones algebraicas.

El segundo libro de texto considerado, Schaum (5ª edición) [11], aborda el tema de derivada definiendo la notación delta, para lo cual considera un número cualquiera x_0 en el dominio de la función f. Define Δx como un pequeño cambio de x a x_0, y Δy como el cambio correspondiente en el valor de $y = f(x)$, obteniendo de esta manera la razón de cambio promedio de la función f en el intervalo que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, Ec. (5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{5}$$

Y define la tasa de cambio instantánea de f en x_0 como el límite de la tasa promedio de cambio entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ cuando Δx se aproxima a cero, siempre que el límite exista. A éste le llama derivada de f en x_0, denotada como Ec. 6:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6}$$

El libro introduce el movimiento rectilíneo de un objeto cuya coordenada en cualquier instante t está dada por la función posición $s = f(t)$, y define: Velocidad media, Ec. (7)

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{7}$$

Velocidad instantánea, Ec. (8)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = f'(t) \tag{8}$$

Si una cantidad y es una función del tiempo t, la razón de cambio de y respecto al tiempo está dada por $\frac{dy}{dt}$. Cuando dos o más cantidades, todas funciones del tiempo t, están relacionadas por una ecuación, la relación de sus razones de cambio puede hallarse derivando ambos lados de la ecuación.

2. Las leyes de la física indican que si un cuerpo (es decir, un objeto material) cae libremente a una distancia de s pies en t segundos, entonces $s = 16t^2$. Halle $\Delta s/\Delta t$ cuando t cambia de t_0 a $t_0 + \Delta t$. Utilice el resultado para encontrar $\Delta s/\Delta t$ cuando t cambia: *a*) de 3 a 3.5, *b*) de 3 a 3.2, y *c*) de 3 a 3.1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{16(t_0+\Delta t)^2 - 16t_0^2}{\Delta t} = \frac{32t_0\Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = 32t_0 + 16\,\Delta t$$

a) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.5$ y $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.5) = 104$ pies/segundo

b) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.2$ y $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.2) = 99.2$ pies/segundo

c) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.1$, y $\Delta s/\Delta t = 97.6$ pies/segundo

Como Δs es el desplazamiento del cuerpo del tiempo $t = t_0$ hasta $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad promedio del cuerpo en el intervalo de tiempo}$$

Figura 3. Praxeología 1. Derivada de una función (Schaum, 5ª edición, página 73).

EJEMPLO 20.1. Una escalera de 25 pies reposa sobre una pared vertical (fig. 20.1). Si la base de la escalera resbala y se aleja de la base de la pared a 3 pies/s, ¿cuán rápido baja la parte superior de la escalera cuando la base de la misma está a 7 pies de la pared?

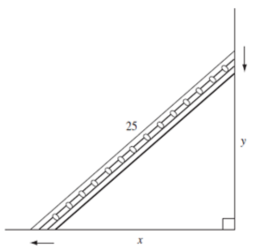


Fig. 20.1

Sea x la distancia de la base de la escalera a la base de la pared, y sea y la distancia de la parte superior de la escalera a la base de la pared. Como la base de la escalera se aleja de la base de la pared a una razón de 3 pies/s, $dx/dt = 3$, hay que hallar dy/dt cuando $x = 7$. Por el teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = (25)^2 = 625 \tag{1}$$

Ésta es la relación entre x y y. Al derivar ambos miembros respecto a t se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Como $dx/dt = 3$, $6x + 2y\,dy/dt = 0$, donde

$$3x + y\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2}$$

Ésta es la ecuación deseada para dy/dt. Ahora, para este problema en particular, $x = 7$. Al sustituir x por 7 en la ecuación (1) se tiene $49 + y^2 = 625$, $y^2 = 576$, $y = 24$. En la ecuación (2), al remplazar x y y por 7 y 24 se obtiene $21 + 24\,dy/dt = 0$. Por tanto, $dy/dt = -\frac{7}{8}$. Como $dy/dt < 0$, se concluye que la parte superior de la escalera resbala por la pared a una razón de $\frac{7}{8}$ pies/s, cuando la base de la escalera está a 7 pies de la base de la pared.

Figura 4. Praxeología 2. Rapidez de cambio (Schaum, 5ª edición, página 166).modelos ajustados.

La primera **tarea** planteada, (Fig. 3) en el libro de texto Schaum (5ª edición) se centra en la parte algorítmica y algebraica y consiste en calcular la derivada de una función dada en términos de la distancia y tiempo de un cuerpo que cae libremente. La **técnica** utilizada para resolverla es a través de la razón de cambio promedio de la función definida, y a partir del resultado obtenido evalúa diferentes valores de t cuando cambia de t_0 a $t_0 + \Delta t$. En cuanto a la **tecnología y teoría**, se considera que carece de sustento debido a que únicamente se enuncian las definiciones y teoremas sin que éstos sean demostrados, lo que deviene en un procedimiento meramente algebraico, sin que el estudiante logre alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada.

La segunda **tarea** planteada (Fig. 4) en el libro de texto Schaum (5ª edición) consiste en interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana que implica calcular la rapidez de cambio de una variable con respecto a otra. La técnica utilizada para resolverla es realizar primero un dibujo que permita interpretar el enunciado del problema, representar con variables las cantidades dadas, establecer la relación entre ellas a través de una expresión algebraica y finalmente derivar la expresión para llegar al resultado. Se considera que carece de sustento tecnológico-teórico ya que, si bien es cierto que utiliza reglas para derivar funciones y el Teorema de Pitágoras para establecer la relación entre las variables, no se evidencia una descripción que permita entender la técnica utilizada; lo que genera un procedimiento meramente algebraico; una vez más, el estudiante no puede alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada.

El tercer libro de texto considerado, Zill [12], aborda el tema de la derivada a partir de la definición de recta tangente, recta secante, cociente diferencial y pendiente de la recta tangente, y establece un proceso de cuatro pasos para obtenerla, tres de los cuales implican sólo pre-cálculo matemático: álgebra y trigonometría, y el cuarto paso, llamado paso de cálculo.

Paso 1. Evaluar $f(a)$ y $f(a+h)$.

Paso 2. Evaluar la diferencia entre $f(a+h) - f(a)$. Simplificar.

Paso 3. Simplificar el cociente diferencial $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Paso 4. Calcular el límite del cociente diferencial $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Posteriormente resuelve una serie de problemas que van dosificados respecto a su dificultad y permiten la práctica de los cuatro pasos mencionados. Introduce la definición de razón de cambio media y razón de cambio instantánea utilizando el diferencial de x (Δx) y el diferencial de y (Δy). Ecs. (9) y (10)

$$\text{razón de cambio media} = \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (9)$$

$$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (10)$$

Define la velocidad media o rapidez media de un objeto en movimiento como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto tiempo. Ec. (11).

$$v_{pro} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}} \qquad (11)$$

Dada una función $s(t)$ que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta, define la velocidad instantánea en el instante $t = t_0$, siempre que el límite exista, como:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (12)$$

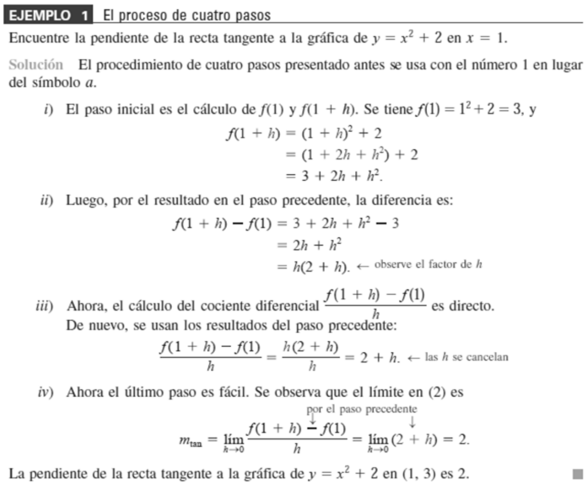
Cuando una función $s(t)$ describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo $\frac{ds}{dt}$ se interpreta como la velocidad del objeto.

En general, una razón de cambio con el tiempo es una respuesta a la pregunta, "¿cuán rápido cambia la cantidad?"

Para resolver los ejercicios de aplicación propuestos, Zill [12] presenta algunas sugerencias:

- Leer varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trazar un esquema.
- Identificar con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
- Escribir todas las razones que se proporcionan. Usar notación de derivadas para escribir la razón que desea encontrar.
- Escribir una ecuación o una función que relacione todas las variables introducidas.
- Diferenciar con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el paso anterior. Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable.

La primera **tarea** planteada (Fig. 5) en el libro de texto Zill [12] se centra en la parte algorítmica y algebraica y consiste en calcular la pendiente de recta tangente de una función de segundo grado. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cuatro pasos, tres de los cuales implican el uso de herramientas de pre-cálculo matemático, principalmente álgebra, y el cuarto paso implica el cálculo del límite de la expresión obtenida en el paso 3. La **tecnología** se sustenta en la definición de recta tangente, recta secante y recta tangente con pendiente previamente definidas en el libro y los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la recta tangente y recta secante en el marco del análisis matemático.



EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo a.

i) El paso inicial es el cálculo de $f(1)$ y $f(1+h)$. Se tiene $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, y

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

ii) Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2+h). \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Ahora, el cálculo del cociente diferencial $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

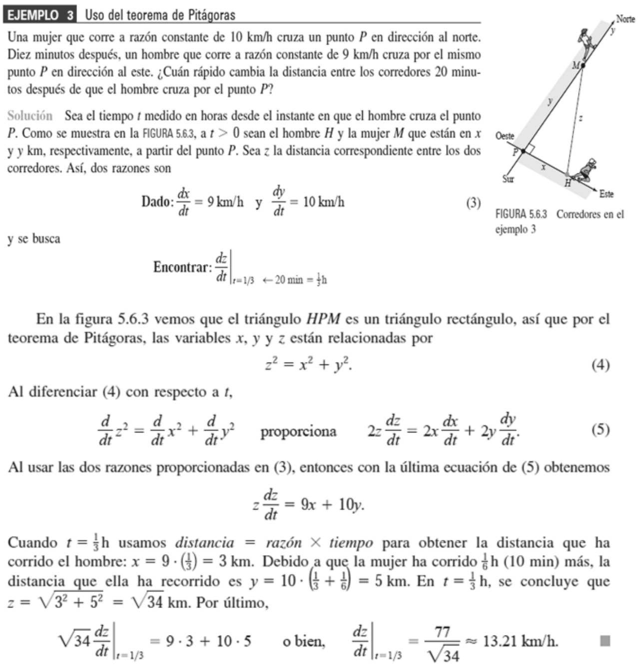
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h. \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{\text{por el paso precedente}}{=} \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en (1, 3) es 2.

Figura 5. Praxeología 1. Pendiente de la recta tangente (Zill, 2011, página 135).



EJEMPLO 3 Uso del teorema de Pitágoras

Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P?

Solución Sea el tiempo t medido en horas desde el instante en que el hombre cruza el punto P. Como se muestra en la FIGURA 5.6.3, a $t > 0$ sean el hombre H y la mujer M que están en x y y km, respectivamente, a partir del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. Así, dos razones son

$$\text{Dado: } \frac{dx}{dt} = 9 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h} \qquad (3)$$

y se busca

$$\text{Encontrar: } \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} \leftarrow 20 \text{ min} = \tfrac{1}{3}\text{h}$$

FIGURA 5.6.3 Corredores en el ejemplo 3

En la figura 5.6.3 vemos que el triángulo HPM es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \qquad (4)$$

Al diferenciar (4) con respecto a t,

$$\frac{d}{dt}z^2 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 \quad \text{proporciona} \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \qquad (5)$$

Al usar las dos razones proporcionadas en (3), entonces con la última ecuación de (5) obtenemos

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$h usamos *distancia* = *razón* × *tiempo* para obtener la distancia que ha corrido el hombre: $x = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$ km. Debido a que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$h (10 min) más, la distancia que ella ha recorrido es $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 5$ km. En $t = \frac{1}{3}$h, se concluye que $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Por último,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \quad \text{o bien,} \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21 \text{ km/h}.$$

Figura 6. Praxeología 2. Razón de cambio (Zill, 2011, página 241)

La segunda **tarea** planteada (Fig. 6) en el libro de texto Zill [12] consiste interpretar y resolver un problema de la vida cotidiana que implica calcular la razón de cambio de una variable con respecto a otra. La **técnica** utilizada para resolverla es el método de los cinco pasos para la resolución de problemas que sugiere el libro. Respecto a la tecnología, ésta se sustenta a través de las reglas para derivar funciones algebraicas y el Teorema de Pitágoras; finalmente, los elementos **teóricos** que sustentan la tecnología son aquellos de la derivación de funciones algebraicas y del Teorema de Pitágoras en el marco del análisis matemático.

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Sabemos que alrededor de un tipo de tareas T, se encuentra una tripleta formada por una técnica τ,una tecnología θ y una teoría Θ; dicho conjunto constituye una praxeología formada por un bloque práctico-técnico y un bloque tecnológico-teórico.

La elección de los tipos de tareas en cada libro se hizo de manera que en la tarea 1 se evidenciaran actividades centradas en la parte algorítmica y algebraica, y que en la tarea 2 se realizaran una interpretación y resolución de un problema de la vida cotidiana enfocado a calcular la razón de cambio de la derivada, para posteriormente analizar las técnicas y tecnologías sobre las que se sustentan.

Los tipos de tareas propuestos en el libro de texto Granville [10] están enfocados principalmente en determinar un valor de acuerdo al problema planteado, esto implica llevar a cabo ciertos procedimientos basados en reglas que son consideradas verdaderas para obtener un resultado.

Conforme se va avanzando en el contenido temático, se proporcionan algunas definiciones, proposiciones y teoremas que forman el sustento teórico, sin embargo, en ocasiones éstos carecen del entorno tecnológico, lo que hace que se convierta en un procedimiento meramente algebraico, sin que el estudiante logre alcanzar un nivel de comprensión del significado de la razón de cambio de la derivada

Los tipos de tareas propuestos en el libro de texto Schaum (5ª edición) obedecen más a una práctica de reglas y definiciones dadas, lo que genera que los estudiantes trabajen más la parte algebraica y mecánica sin que ello implique una comprensión del significado de razón de cambio de la derivada.

Si bien es cierto que el manejo y dominio algebraico es importante en la asignatura de Cálculo, la enseñanza-aprendizaje bajo esta dinámica puede llegar a generar ciertas dificultades a los estudiantes que no tienen un dominio algebraico pleno, afectando con ello su desempeño académico.

En general, el libro proporciona una breve explicación del tema, resuelve un ejemplo y proporciona al estudiante una serie de problemas resueltos y de problemas complementarios enfocados más a una mecanización de las expresiones algebraicas anteriores que a la comprensión misma de su significado.

La serie de ejercicios propuestos por el libro de texto Zill [12] permite al estudiante consolidar poco a poco las propiedades y características de las definiciones proporcionadas, debido a que éstos van dosificados en cuanto a dificultad se refiere, permitiendo al estudiante una mejor comprensión del tema.

Además de los ejercicios que implican el uso de algoritmos, al abordar el tema de razón de cambio se enfoca en la resolución de problemas de la vida cotidiana y sugiere ciertas directrices para traducir del lenguaje coloquial al lenguaje matemático cada problema que le ayuden al estudiante a resolver la situación planteada. En caso de que se requiera algún conocimiento previo, lo menciona dentro de la solución del ejercicio como recordatorio para el estudiante.

Derivado del análisis de los libros de texto en torno a los tipos de tareas específicos, se observaron ciertas similitudes y diferencias; por ejemplo, el libro de texto Granville [10] y el libro de texto Zill [12] están enfocados principalmente en determinar o calcular un valor de acuerdo al problema planteado a través de ciertos procedimientos que implican el uso de algoritmos. Aunque en ambos libros se evidencia sustento tecnológico-teórico, solamente en el libro de texto Zill [12] se detallan explicaciones de conocimientos previos requeridos que sirven de apoyo para el estudiante en la resolución de la tarea planteada. Respecto al libro de texto Schaum (5ª edición), las tareas propuestas obedecen a una práctica de reglas y definiciones dadas, enfocadas más a una mecanización que a la comprensión misma de los significados.

El presente trabajo es meramente un análisis bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico a las praxeologías de los libros ya mencionados, la elección de cada uno de ellos dependerá del enfoque que cada institución quiera darle a la enseñanza-aprendizaje de la actividad matemática; sin embargo, es importante mencionar que la ausencia de sustento tecnológico en los libros de texto genera que el aprendizaje de la razón de cambio de la derivada se traduzca en la aplicación de ciertas reglas consideradas como verdaderas, sin que ello implique que el estudiante ha alcanzado una comprensión del significado.

CONCLUSIONES

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha permitido analizar las praxeologías propuestas en los libros de texto de Cálculo Diferencial de Granville [10], Schaum (5ª edición) [11] y Zill [12], al hacer una revisión sobre las tareas, técnicas, tecnologías y teorías utilizadas. Se observó que la mayoría de las tareas planteadas están enfocadas en calcular algún valor a través de un procedimiento algebraico mediante la aplicación directa de las definiciones planteadas, sin que esto garantice que los estudiantes logren comprender el significado de la razón de cambio de la derivada.

Es verdad que los libros de texto Granville [10] y Zill [12] proporcionan ciertos pasos a seguir en la resolución de problemas de aplicación, los cuales pueden servir de apoyo al estudiante; sin embargo, también es cierto que en la resolución de problemas existe una gran área de oportunidad para trabajar con los estudiantes en el aula. Se trata de una actividad que implica práctica constante a fin de desarrollar ciertas habilidades que les permitan enfrentar y resolver cualquier situación planteada.

Los resultados muestran que las praxeologías propuestas por los libros de texto, las cuales constituyen una herramienta fundamental en la enseñanza-aprendizaje, carecen de simetría entre los bloques práctico-técnico y el tecnológico-teórico, ya que en su mayoría enuncian las definiciones o teoremas pero no las demuestran, por lo que recomendamos añadir por lo menos una idea de la demostración para presentar un marco general acorde a la teoría utilizada en el análisis de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Y. Chevallard, "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico." *Recherches En Didactique Des Mathéematicques*, vol. 19, pag. 221-266. 1999.

[2] E. Ramírez Rincón, "Historia y epistemología de la función derivada", *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, No. Extraordinario, 2009. https://doi.org/10.17227/01203916.261

[3] C. Boyer, *Historia de la matemática*, versión española de Mariano Martínez Pérez, Madrid, España: Alianza Universidad Textos, 1992.

[4] N. Londoño, A. Kakes & V. Decena, "Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas," *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 26, 2013.

[5] L. G. Mendoza, M. R. B. Alemán & L. M. A. Nieves, "Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica". *Revista Científica"General José María Córdova"*, 15(20), 137-153, 2017.

[6] G. Sánchez-Matamoros, M. García, & S. Llinares, "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296, 2008.

[7] M. Caballero & R. Cantoral, "Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 26 (pp. 1197-1205), 2013

[8] H. Morales, "La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción", *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 4518-4525, 2013.

[9] M. Bosch, F. J. García, J. Gascón, L. R. & Higueras, "La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico". *Educación matemática*, 18(2), 38, 2006.

[10] W. Granville, *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa, 2009.

[11] F. Ayres, E. Mendelson, *Cálculo Schaum*, 5ª. Edición, México: McGraw- Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2010.

[12] D. Zill & W. Wright, *Matemáticas 1 Cálculo diferencial*, 4ª. Ed., México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2011.