

ALBA ESTRELLA VÁZQUEZ MONTAÑO  
CECILIA HERNÁNDEZ GARCADIEGO  
LUISA RAMÍREZ GRANADOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

VA.MONT@HOTMAIL.COM

$a + b$

**02**

**DESARROLLO DE SENTIDO  
ESTRUCTURAL ALGEBRAICO EN  
ALUMNOS DE BACHILLERATO**

DEVELOPMENT OF ALGEBRAIC STRUCTURAL SENSE IN HIGH SCHOOL STUDENTS

## RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados de una propuesta para desarrollar el sentido estructural algebraico, referido en adelante como "sentido estructural", en estudiantes de preparatoria en el manejo de diferencias de cuadrados y binomios al cuadrado. Los alumnos que presentan sentido estructural realizan actividades algebraicas de formas más eficientes y presentan menos tendencia a cometer errores; por tanto, fortalecer y promover el desarrollo de esta capacidad es una cuestión relevante en la didáctica del álgebra. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, tomando como referente teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y el sentido estructural algebraico. Las actividades fueron realizadas por 5 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para el desarrollo del sentido estructural.

**Palabras clave:** Sentido estructural algebraico, errores algebraicos, bachillerato.

## ABSTRACT

This paper presents the results of a proposal to develop algebraic structural sense, abbreviated as structural sense, in high school students in the handling of difference of squares and square of a binomial. Students who have a structural sense perform algebraic tasks in more efficient ways and with fewer errors, therefore, strengthening and promoting the development of structural sense is a relevant issue in the didactics of algebra. The methodology was based on didactic engineering with the Theory of Didactical Situations as a theoretical reference. The activities were carried out by 5 students. The preliminary study suggests the pertinence of this content for the development of the structural sense.

**Keywords:** Algebraic structural sense, algebraic errors, high school.

## INTRODUCCIÓN

La información y resultados mostrados en este artículo fueron obtenidos de una prueba piloto, y forman parte de una investigación más amplia que busca proponer una alternativa para generar un desarrollo de sentido estructural algebraico. Uno que sea aplicable en el aula, al concebir situacio-

nes que favorezcan y fortalezcan el aprendizaje de los productos notables y factorización.

Se dice que un estudiante presenta sentido estructural si aborda tareas algebraicas de las formas más eficientes gracias a un manejo conceptual profundo, lo que permite una disminución de errores. Las dificultades que presentan los alumnos con el sentido estructural matemático en el álgebra han sido estudiadas desde antes que existiera el término; entre éstas, se encuentran los problemas para reconocer y generar expresiones algebraicas equivalentes y comprender su significado [13].

El sentido estructural en los alumnos es considerado importante por los profesores [12], sin embargo, son pocos los estudios centrados en su desarrollo. En la investigación "Desarrollo del sentido estructural de Katy", de Hoch y Dreyfus [9] se da seguimiento a una estudiante por una secuencia de tareas y entrevistas desarrolladas para mejorar el sentido estructural en la estudiante; aunque los resultados fueron positivos y se concluyó que existía evidencia de que el aprendizaje había tomado lugar, la investigación tiene como limitante que no es posible realizar entrevistas personalizadas en un salón de clases. En otro estudio realizado por las profesoras Ascencio y Eccius-Wellmann [1], se buscó el desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios y se comprobó que es posible fomentarlo al incluir contrastes en las actividades que realizan.

Visto que en los últimos años la enseñanza tradicional y los textos de estudio favorecen el registro de nociones algebraicas estudiadas como reglas, sin generar un aprendizaje significativo [16], queda claro que se debe seguir buscando alternativas para el desarrollo de sentido estructural en los estudiantes.

En lo que respecta a los temas de productos notables y factorización, es conveniente tener en cuenta la relación que existe entre ambos al trabajar en un aula de clases [7]. Los productos notables son multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas y cuyo resultado se puede obtener por inspección. Por otro lado, la factorización es la transformación de una expresión en productos de factores. A cada producto notable corresponde un caso de factorización.

La investigación de Martos [15] habla sobre la importancia del conocimiento adecuado de los productos notables para utilizarlos como técnica para la resolución de distintos tipos de tareas matemáticas, además de detectar dos valores epis-

temológicos: el primero es que ayudan a los estudiantes a entender la factorización, y el segundo es un valor motivacional, ya que un buen manejo de productos notables da confianza al alumno y favorece su aprendizaje.

En diversos estudios [19], [2], [6], [17], se ha trabajado en la búsqueda de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la factorización y productos notables, y se ha indicado la existencia de una tendencia de enseñanza tradicional donde estos temas se trabajan de forma operacional. Entre las estrategias más utilizadas, se encuentra el uso de tecnología, adaptación de juegos y el empleo de la geometría como referencia visual.

Queda clara la importancia de la búsqueda de alternativas que contribuyan a la enseñanza de los productos notables y factorización, ya que un dominio deficiente en estos temas afecta el desempeño del estudiante en diversos tópicos matemáticos. Es así que el objetivo de este trabajo es propiciar y analizar el desarrollo del sentido estructural de los productos notables y la factorización en los estudiantes, específicamente en diferencia de cuadrados y binomios al cuadrado, los cuales se describen en la Tabla 1.

**Tabla.1 Relación entre productos notables y factorización.**

PRODUCTO NOTABLE	FACTORIZACIÓN		
Cuadrado de la suma o diferencia de un binomio	$(a + b)^2$ $(a - b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - 2ab + b^2$	Trinomio cuadrado perfecto
Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades	$(a + b)(a - b)$	$a^2 - b^2$	Diferencia de cuadrados perfectos

Un binomio al cuadrado es una suma o diferencia algebraica que se multiplica por sí misma, al ser operada se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, mientras que un producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos.

Para la prueba descrita en el artículo se decidió utilizar el binomio al cuadrado porque es uno de los productos notables más importantes por su aplicación común en distintas ramas de las matemáticas. Por su parte, el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades fue seleccionada debido a que Cantoral [5] sugiere la diferencia de cuadrados como un articulador de saberes matemáticos; es decir, proponen esta expresión algebraica como mecanismo para propiciar un acercamiento coherente del saber matemático que sea atractivo para el estudiante.

## Fundamentación teórica

Esta investigación tiene su fundamento en dos marcos teóricos: el Sentido Estructural Algebraico y la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau [4] los cuales se describen a continuación:

### Sentido estructural

La introducción del término sentido estructural fue dada en 1999 por Linchevski y Livneh [14], quienes hacen alusión al conocimiento estructural de las expresiones y la capacidad de elegir entre las formas pertinentes de realizar una tarea.

Más adelante Hoch y Dreyfus [10] puntualizaron que las formas más eficientes de abordar una tarea implican un manejo conceptual más profundo y significativo, lo que se ve reflejado en procedimientos más cortos y menos propensos al error.

El sentido estructural es una forma de enfatizar la posesión del conocimiento, que se puede manifestar con el reconocimiento de expresiones equivalentes sin necesidad de operar [18]. Es por eso que el razonamiento estructural puede tener diferentes manifestaciones en la práctica matemática [8].

Vega-Castro [18] define sentido estructural como "una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas" (p.83). Simplificando, el sentido estructural permite que los alumnos hagan un mejor uso de las técnicas algebraicas.

En los últimos años, diversos autores han contribuido al estudio del sentido estructural y su caracterización, formulando sus propios descriptores para el sentido de estructura [18], [11].

Los descriptores del sentido estructural y la ponderación utilizados en este estudio se tomaron de lo sugerido por [1], seleccionando los primeros tres descriptores que ponderan el sentido estructural, según la complejidad de las estructuras y subestructuras, por ser adecuados a esta investigación.

A continuación, se enlistan y explican los descriptores acompañados de la ponderación asignada, expresada en puntos:

- SE1 Identifica una estructura familiar. SE1a en su forma más simple (1 punto).

- SE2 Trata con un término compuesto como una entidad única y reconoce una estructura familiar en una forma más compleja.

SE2a donde el término compuesto contiene un producto, pero no una suma o resta (2 puntos).

SE2b donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (3 puntos).

- SE3 Elige manipulaciones adecuadas para hacer mejor uso de una estructura.

SE3a en su forma más simple (4 puntos).

SE3b donde el término compuesto contiene un producto, pero no una suma o resta (5 puntos).

SE3c donde el término compuesto contiene una suma o resta y posiblemente también un producto (6 puntos).

### Teoría de situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas tuvo sus orígenes en Francia y fue establecida por Guy Brousseau [4] aproximadamente a fines de la década de mil novecientos sesenta. Esta teoría propone un modelo para abordar la enseñanza de las matemáticas centrándose en los procesos de producción de los conocimientos.

En la actualidad, la Teoría de Situaciones Didácticas se considera un instrumento científico que integra los aportes de distintas disciplinas, lo cual propicia una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento en la enseñanza de las matemáticas [4].

La idea en la que se basa la Teoría de Situaciones Didácticas consiste en que el estudiante se encuentre en una situación que evolucione hacia la construcción del saber dependiendo de la interacción con el medio, donde intervienen tres elementos fundamentales: alumno, profesor y saber.

Estos tres elementos componen el sistema didáctico y dejan de lado modelos de enseñanza donde el profesor se encuentra en una posición privilegiada de enseñanza con respecto al alumno; ya que al final del proceso, el estudiante debe ser capaz de mantener una relación adecuada con el saber, prescindiendo del profesor.

En la Fig. 1 se muestra el esquema del triángulo del sistema didáctico entre profesor, alumno y saber, propuesto por Brousseau [4], contemplando la intervención del profesor al crear otro "medio" donde el alumno actúa de forma autónoma.

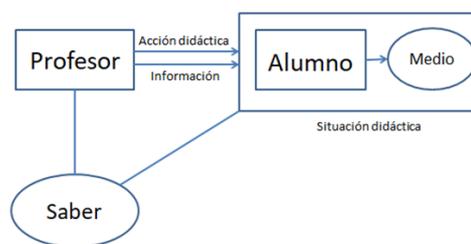


Figura 1. Triángulo del sistema didáctico.

Según Brousseau [4], una situación es una interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado.

Así, podemos decir que una situación didáctica es aquella que se desarrolla habitualmente dentro del contexto escolar, donde se produce la interacción entre el profesor y uno o varios estudiantes, en torno a un saber que se pretende que el alumno adquiera.

Entonces, se trata de situaciones que se diseñan y desarrollan con la clara intención de que el estudiante construya y adquiera, al mismo tiempo, un determinado conocimiento de manera significativa a través de la aparición del concepto como solución óptima del problema al que se enfrenta.

Para Brousseau, no todas las situaciones didácticas son iguales y por ello establece la siguiente clasificación:

- Situación a-didáctica: Designa a una situación que no puede ser denominada de forma conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos, se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema de forma autónoma.
- Situación de acción: El alumno actúa sobre el medio.
- Situaciones de formulación: Ocurre cuando el alumno se comunica con uno o varios interlocutores para intercambiar información sobre lo que ha descubierto o encontrado.
- Situaciones de validación: En esta situación el alumno debe someter a juicio a su interlocutor o a la formulación y los resultados obtenidos.
- Situación de institucionalización: Una vez finalizada la situación a-didáctica, cuando el estudiante aplica una estrategia óptima que le permita encontrar la solución al problema, el profesor debe continuar con el proceso de institucionalización, explicando las relaciones entre el conocimiento construido por el propio estudiante.

Brousseau [3] establece unas pautas para diseñar situaciones didácticas:

1. Plantear un problema cuya solución requiera al alumno ese único conocimiento.
2. Propiciar la aparición de variables de esta situación cuyo cambio provoque modificaciones cualitativas de las estrategias empleadas por los alumnos para resolver el problema.
3. Asegurarse que la situación diseñada abarca todos los problemas conocidos en los que interviene el conocimiento que se desea generar en el alumno.

En la Teoría de Situaciones Didácticas, el diseño de las situaciones para enseñar conceptos a estudiantes recibe el nombre de ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica permite que los alumnos construyan un determinado concepto matemático de acuerdo a una serie de pautas didácticas.

El término ingeniería didáctica se usa con una doble función: como metodología de investigación, y como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Este término designa un conjunto de secuencias de clase para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático que evoluciona con las interacciones entre el profesor y los alumnos. Es por eso que la ingeniería didáctica es el producto resultante de un análisis a priori y un proceso de la aplicación de un producto o secuencia didáctica acorde a las condiciones de una clase.

## Metodología

Para el diseño y selección de la estructura de las actividades de enseñanza-aprendizaje que se aplicaron a los alumnos se utilizó la ingeniería didáctica como metodología en el aula. Ésta se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas"; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, por el registro de los estudios de caso y la validación basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Se siguieron las cuatro fases de la ingeniería didáctica para la estructuración de actividades que se describen a continuación:

## Análisis preliminares

Se realizó un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo del tema a tratar. Tanto los antecedentes de sentido estructural como la importancia y difi-

cultades de los productos notables y factorización ya han sido descritos en la introducción.

Para la formulación de actividades se tuvo en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas, además de considerar que la población a la que fue dirigida la enseñanza eran alumnos de preparatoria. Por ello fueron consideradas las competencias matemáticas que, según el programa de la Dirección General del Bachillerato (DGB) vigente, deben tener los alumnos de preparatoria: interpretar modelos matemáticos algebraicos, así como formular y resolver problemas aplicando diferentes enfoques. En el programa de la DGB, también se especifica como aprendizaje esperado que el alumno sea capaz de proponer un proceso de solución óptimo e identificar errores posibles a cometer; dicho de otra manera, se espera que el alumno presente un sentido estructural. A pesar de encontrar estos aprendizajes esperados en el programa de estudios, como ya se ha mencionado, diversas investigaciones apuntan a que el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos temas tiende a ser puramente operacional.

## Análisis a priori

En esta fase se realizó el diseño de la secuencia, y se decidió cómo actuar sobre las variables en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En líneas generales, la experiencia consistió en tres sesiones, donde se buscó que los alumnos reconocieran estructuras familiares, para subsecuentemente ser capaces de reconocer términos como una entidad singular y seleccionar manipulaciones apropiadas para hacer uso de esa estructura.

En la primera sesión se aplicó un pre-test, con el fin de identificar el nivel de sentido estructural que presentaban los estudiantes. Esta primera actividad se dividió en dos secciones, en la primera parte se solicitó simplificar una expresión algebraica compuesta por una diferencia de cuadrados y binomios al cuadrado, ver Ec. (1). En la segunda parte se pedía encontrar un método de solución alternativo a la misma expresión. La forma alternativa de solución se solicitó considerando la posibilidad de que los estudiantes mostraran mayor atención a la estructura algebraica, ya que en la primera estrategia de solución se suelen utilizar estrategias estándar [12].

$$(x-3)(x-3)-(x+3)(x+3) \quad (1)$$

En la segunda sesión se diseñó una secuencia con ayuda de hojas de trabajo para generar los distintos tipos de situaciones según Brousseau y se consideraron las características de los descriptores de sentido estructural propuestas por Ascencio y Eccius-Wellmann [1]. Como el objetivo central de esta investigación era que el alumno desarrollara un sentido estructural, la secuencia se planeó con la intención de que el alumno alcanzara a reconocer una misma estructura en distintas expresiones y tratara un término compuesto como entidad singular.

Se empezó con una situación de acción pidiendo a los alumnos que trabajaran de forma individual, identificando en un par de listas de expresiones algebraicas, aquellas que tuvieran características en común y describieran las particularidades observadas para identificarlas como un mismo tipo de expresión algebraica. En la siguiente fase, la situación de formulación, se pidió que los alumnos se reunieran y discutieran sobre sus descubrimientos, dando paso a una elaboración en conjunto de las listas y descripciones de expresiones algebraicas finales en la fase de validación. Se pidió que dieran sus conclusiones finales y, para terminar, se dio la fase de institucionalización a partir de las conclusiones obtenidas por los alumnos. En la Tabla 2 se muestra las listas de expresiones algebraicas utilizadas:

**Tabla 2. Relación entre productos notables y factorización.**

EXPRESSIONES ALGEBRAICAS SELECCIONADAS PARA IDENTIFICAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS	EXPRESSIONES ALGEBRAICAS SELECCIONADAS PARA IDENTIFICAR UN BINOMIO AL CUADRADO
$x^2 - 16$	$(x + 2)^2$
$w^2 - 100$	$(x + 2)(x + 2)$
$y^2 - 25$	$(x + a)(x - a)$
$x^2 + 16$	$(x - 5)^2$
$(x - 4)(x + 4)$	$x^2 + 4x + 4$
$a^2 - 9$	$(x - 4)(x - 4)$
$(y + 3)(y - 1)$	$x^2 - y^2$
$(a + 5)(a - 5)$	$x^2 - 10x + 25$
$49 - y^2$	$x^2 - 2x - 30$
$(x + 2)(x + 2)$	$(x + a)^2$
$(a + 2)^2 - b^2$	$x^2 + 2ax + a^2$
$x - 9$	
$(x - 3)^2 - (x + 3)^2$	
$x^2 - 30$	
$(n + 4)^2 - (m - 3)^2$	

Las listas propuestas para la actividad 2 fueron elaboradas con expresiones que permitieran a los alumnos identificar la estructura de un binomio al cuadrado y una diferencia de cuadrados. Por último, en la tercera sesión se aplicó un test final que emulaba la primera prueba.

En esta ocasión se pidió simplificar una expresión algebraica distinta, Ec. (2), solicitando nuevamente una resolución alternativa.

$$(a+2)(a+2) - (a-2)(a-2) \quad (2)$$

Las expresiones algebraicas seleccionadas en el test inicial y final fueron seleccionadas por ser sencillas de operar y útiles para medir diferentes niveles de sentido estructural.

### Metodología

En esta fase se dio el contacto investigador/profesor/observador con la población de estudiantes objeto de la investigación. Se aplicó la ingeniería en los estudiantes durante las tres sesiones con la ayuda de hojas de trabajo y presentaciones electrónicas, los alumnos mostraron una buena disposición de trabajo y cooperación en las actividades.

### Análisis a posteriori

Los análisis a posteriori se basaron en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación. A continuación, se presentan las observaciones realizadas de las actividades de enseñanza y las producciones de los estudiantes.

Los resultados obtenidos en la primera sesión fueron los esperados, se contemplaba como posible resultado que los estudiantes operaran la expresión sin mostrar sentido estructural.

Cabe resaltar que, aunque tres de los cinco alumnos mostraran indicios de un sentido estructural en el reconocimiento de expresiones, ninguno logró una manipulación apropiada.

Primera parte	Segunda parte
Simplifica la siguiente expresión algebraica.	
$(x - 3)(x - 3) - (x + 3)(x + 3)$	$(x - 3)(x - 3) - (x + 3)(x + 3)$
$(x^2 + 9) - (x^2 + 9)$	$(x^2 + 9) - x - 3(x + 3)$
$(x^2 + 9) - x^2 - 9$	$x^2 + 9 - x - 3x - 9$
$x^2 + 9 - x^2 - 9$	$x^2 - 4x - 0$
$0$	

**Figura 2. Ejemplo de solución de la actividad 1.**

Los resultados en la primera parte de la actividad, a pesar de no llegar a una respuesta adecuada, se expresaron lógicos; sin embargo, en la segunda parte las operaciones mostraron menor sentido matemático, manifestando incluso operaciones carentes de noción estructural.

Durante la segunda actividad los participantes empezaron buscando de forma individual características compartidas entre las expresiones algebraicas dadas en las hojas de trabajo para relacionarlas en una sola categoría. Las características encontradas por los alumnos en las expresiones donde se pretendía que identificaran una diferencia de cuadrados incluyen:

- “Me basé en que las incógnitas están elevadas al cuadrado y se suma o resta algún número”.
- “Que son restas entre números al cuadrado”.
- “Son operaciones de multiplicaciones”.
- “Una de sus variantes está al cuadrado”.

Por otra parte, las características encontradas por los alumnos en la lista pensada para la identificación de binomios al cuadrado incluyen:

- “Suma o resta de unidades al cuadrado”.
- “En algunas expresiones se les da el mismo valor a las incógnitas (positivo o negativo), además están elevados al cuadrado”.
- “Que las variantes están al cuadrado”.
- “Son operaciones de trinomio cuadrado”.

Se puede identificar que desde la fase individual los alumnos reflexionaron en la estructura de la expresión algebraica.

En la reflexión grupal se solicitó que compartieran su selección individual y sus opiniones de clasificación, después se les pidió que realizaran una lista final con consenso grupal. Así los participantes anotaron las ideas o acuerdos a los que iban llegando; se pudieron observar opiniones que se complementaban entre sí y participantes que trataban de convencer a los demás de que sus conclusiones eran las correctas. Sus anotaciones se muestran en la Fig. 3

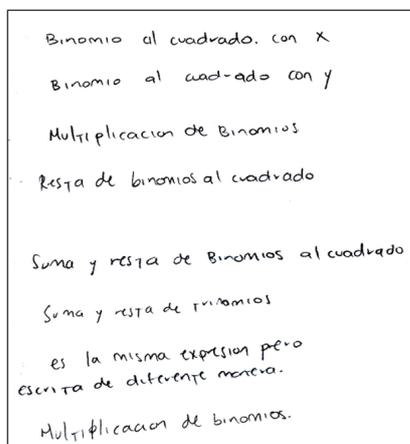


Figura 3. Anotaciones del intercambio de información grupal.

Como primer paso de la institucionalización, se solicitó a los alumnos que mencionaran las expresiones agrupadas, las características en común encontradas y se preguntó por el nombre de los tipos de expresión, incluso exhortando a conjeturar alguno. Se prosiguió con una presentación electrónica, donde se daba la información de los temas tratados en la prueba a partir de las conjeturas a las que llegaron los estudiantes para complementar sus descubrimientos.

Para la tercera actividad, los estudiantes mostraron una mayor labor matemática en las hojas de trabajo, reflejando una mejora en las respuestas de la segunda parte de la actividad en comparación con la aplicación de la actividad 1.

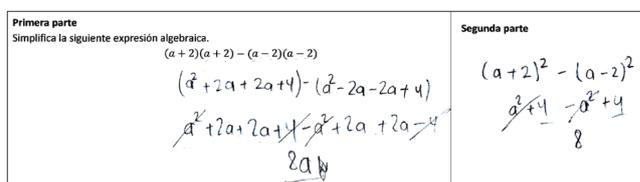


Figura 4. Ejemplo de solución de la actividad 3.

Al finalizar la intervención se preguntó a los estudiantes acerca de su experiencia en la secuencia de actividades, buscando áreas de oportunidad para futuras pruebas. Entre las opiniones resalta la falta de habilidad de manipulación adecuada de la expresión algebraica propuesta; por ejemplo, se encontraron comentarios como: “al principio de este test desconocía la manera en que se debía resolver las actividades” y “no comprendía mucho al principio”. En segunda instancia, mencionaron que no tuvieron dudas respecto al procedimiento a seguir una vez explicadas las instrucciones y, por último, hubo alumnos que señalaron haber obtenido un aumento de confianza y reconocieron su falta de práctica con estructuras algebraicas de este tipo, con comentarios como “me siento capaz de seguir mejorando entre más practique, ahora puedo comprender de qué manera puedo resolver un problema”, y “al final me di cuenta que eran problemas matemáticos que podía resolver fácilmente”.

### Resultados y discusión

El trabajo de los alumnos en la primera sesión apunta a confusión entre expresión y ecuación, dificultades para reconocer una misma expresión en distintas estructuras y reconocer un término compuesto como entidad. La Tabla 3 muestra los descriptores de estructura obtenidos por los partici-

pantes en la primera actividad, según lo propuesto por Ascencio y Eccius-Wellmann [1].

**Tabla 3. Descriptores del sentido estructural obtenidos en la actividad 1.**

ESTUDIANTE	DESCRIPTOR PARA EL SENTIDO DE ESTRUCTURA
1	SE1a
2	-
3	-
4	SE1a
5	SE1a

En la segunda sesión se pudo observar cómo los estudiantes iban desarrollando un sentido estructural desde la fase individual, por el trabajo de reflexión y búsqueda de características en común, que les permitió mejorar su reconocimiento de estructuras. Los registros de las expresiones seleccionadas de forma individual indican que los participantes mostraron características distintas de sentido estructural, algunos no tenían problema en identificar un término compuesto como entidad, pero se les dificultaba reconocer diferentes estructuras para una sola expresión, mientras que otros participantes presentaban la situación contraria.

Durante la intervención grupal los participantes sugirieron las expresiones algebraicas correctas como alternativas para la selección final, sin embargo, no todas llegaron a las listas finales.

La lista final correspondiente a la diferencia de cuadrados careció de una identificación de términos compuestos como una sola identidad; ya que aunque se seleccionó la Ec. (3), las expresiones algebraicas correspondientes a las Ecs. (4) y (5) no fueron incluidas a pesar de que dos de los participantes sí las habían considerado.

$$(a + 2)^2 - b^2 \tag{3}$$

$$(x - 3)^2 - (x + 3)^2 \tag{4}$$

$$(n + 4)^2 - (m - 3)^2 \tag{5}$$

Probablemente los estudiantes presentaron un conflicto al seleccionar expresiones con dos términos compuestos; en su lugar, las expresiones

seleccionadas fueron las Ecs. (6) y (7), lo que sugiere que los participantes contaban con noción de qué tipo de estructura debían buscar.

$$x^2 - 30 \tag{6}$$

$$x^2 + 16 \tag{7}$$

Para la identificación de la segunda lista, los alumnos operaron las expresiones, así se percataron que varios incisos eran la misma expresión en una estructura distinta, permitiéndoles identificar las características que debían buscar para la clasificación de binomios al cuadrado.

Al término de la actividad 2 se vio reflejada una mejoría en el reconocimiento de estructuras en distintas formas, y se alcanzó un mejor desempeño en ese nivel de caracterización estructural. El tratar un término compuesto como una entidad singular casi se dejó de lado al momento del consenso grupal, esto podría deberse a las concepciones de los estudiantes por el tipo de enseñanza que se les ha brindado. Otra dificultad que se encontró fue la de verbalizar sus conjeturas: a pesar de encontrar un patrón entre las estructuras, expresarlo con palabras les supuso una dificultad.

La Tabla 4 muestra los descriptores de estructura obtenidos por los participantes en la tercera actividad, según lo propuesto en [1].

**Tabla 4. Descriptores del sentido estructural obtenidos en la actividad 3.**

ESTUDIANTE	DESCRIPTOR PARA EL SENTIDO DE ESTRUCTURA
1	SE1a, SE2a, SE3b
2	SE1a
3	SE1a, SE2a
4	SE1a, SE2a, SE3a
5	SE1a, SE2a, SE3b

Los resultados de la actividad 3 mostraron un incremento en el manejo operacional y estructural de las expresiones en comparación con los resultados de la prueba inicial. En la Tabla 5 se puede apreciar la diferencia entre los resultados de la actividad 1 y 3 de cada estudiante.

## CONCLUSIONES

Con respecto a la caracterización de sentido estructural y ponderación propuesta por Ascencio y Eccius-Wellmann [1], la secuencia cumplió satisfactoriamente con el desarrollo del primer descriptor de estructura, pues todos los alumnos mostraron tener el descriptor SE1a al término de la intervención. En lo que respecta al segundo y al tercer descriptor, se observó mejoría, pues se presentaron mejores usos de la estructura y mejor ponderación en la actividad final, lo que demuestra la pertinencia de la ingeniería didáctica como metodología para una secuencia que busque desarrollar el sentido estructural algebraico.

La intervención da indicios de una mejoría en el sentido estructural presentado por los estudiantes, especialmente en el reconocimiento de estructuras familiares en distintas formas. En lo que se refiere a tratar un término compuesto como una entidad única, se pudo observar una mejoría significativa en el reconocimiento de un término compuesto por un producto (SE2a), y aunque la expectativa inicial era que los estudiantes llegaran al descriptor SE2b, presentaron dificultades para manejar un término compuesto que contuviera una suma o resta, probablemente por sus concepciones previas y la falta de familiaridad con el tipo de actividad propuesta. Respecto al tercer descriptor, se obtuvo mejoría en tres estudiantes, uno de los cuales alcanzó el nivel SE3a, que es la manipulación apropiada de una estructura en su forma más simple. Los otros dos llegaron al nivel SE3b, que hace referencia a la manipulación apropiada de estructuras compuestas de productos.

Aunque el sentido estructural como tal se ha estudiado desde fines del siglo pasado, e incluso investigaciones que hacían alusión a él ya se habían realizado con mayor anterioridad, en el contexto actual aún queda mucho camino por recorrer en lo que respecta a su desarrollo en los alumnos, cuestión que debería tomar mayor importancia a nivel práctico escolar.

Con los resultados obtenidos, se evidencia que es posible y necesaria la creación de una secuencia que pueda aplicarse en un aula de clases para generar el desarrollo de sentido estructural en alumnos de forma grupal.

Como se mencionó en un inicio, este artículo abarca los resultados de una prueba piloto, se continuará la investigación teniendo en claro la importancia de trabajar con una muestra más grande para un posterior análisis.

## REFERENCIAS

- [1] R. Ascencio Gonzalez & C. Eccius-Wellmann, "Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales", *Educación Matemática*, 31(2), 161–194, 2019. <https://doi.org/10.24844/em3102.07>
- [2] L. Avalos, "Adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior". Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México, México, 2014.
- [3] G. Brousseau, "Fundamentos y métodos de la Didáctica de la matemática", Univerisdad Nacional de Córdoba, Serie "B", *Trabajos de Enseñanza*, N° 5/2015. 1986
- [4] G. Brousseau, *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, 1st ed.; Buenos Aires, Argentina: D. Fregona, Ed., Libros del Zorzal, 2007.
- [5] R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezema, & A. Romo, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 2nd ed., Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos, 2008.
- [6] V. Cisternas, "Una propuesta de innovación para el tratamiento de productos notables según la teoría de situaciones didácticas", Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Santiago de Chile, Chile, 2017.
- [7] Cruz-Mendoza, E. "Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática". Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, 2008.
- [8] G. Harel, & O. Soto, "Structural Reasoning". *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 225–242, 2016. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0041-2>
- [9] M. Hoch, & T. Dreyfus, "Developing Katy's Algebraic Structure Sense". *CERME*, 6, 529–538, 2010.
- [10] M. Hoch & T. Dreyfus, "Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets". *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 49–56, 2004.
- [11] M. Hoch & T. Dreyfus, "Recognising an algebraic structure". *CERME*, 5, 436–445, 2007.
- [12] A. Jupri & R. Sispiyati, "Expert Strategies in Solving Algebraic Structure Sense Problems:

- The Case of Quadratic Equations". *Journal of Physics: Conference Series*, 812, 2017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/755/1/011001>
- [13] C. Kieran, "Learning and teaching algebra at the middle school through college levels". *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 707-762, 2007.
- [14] L. Linchevski & D. Livneh, "Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts". *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173–196, 1999. <https://doi.org/10.1023/A:1003606308064>
- [15] E. M. Martos Michaca, "Valores prácticos y epistemológicos de los productos notables en profesores de matemáticas". Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, 2008.
- [16] T. Méndez & L. Cruz, "Dificultades en la práctica de productos notables y factorización". *Revista Del Instituto de Matemática y Física*, 15, 59–69, 2008.
- [17] D. Serna, "Implementación de una estrategia didáctica mediada por las TIC para el fortalecimiento del concepto de productos notables en estudiantes del grado octavo de la institución educativa Gabriela Gómez Carvajal". Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Colombia, 2017
- [18] D. Vega-Castro, Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España, 2013.
- [19] G. Wagner Osorio, A. Marina Vásquez Giraldo, E. A. Hoyos Salcedo & H. Gutiérrez Zuluaiga, "El Álgebra Geométrica como mediadora en la Enseñanza de la Factorización y los Productos Notables". *Revista de Investigaciones - Universidad Del Quindío*, 26(1), 137–142, 2014.