

CARACTERIZACIÓN Y TIPIFICACIÓN DE ERRORES AL RESOLVER ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE

CHARACTERIZATION AND TYPIFICATION OF ERRORS
WHILE SOLVING LINEAR EQUATIONS OF ONE VARIABLE



Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

Licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial - CompartirIgual 4.0 Internacional (cc by-nc-sa 4.0).



Iván Josafat Teodoro¹
Teresa de Jesús Valerio López²

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

¹ josafatphysical@gmail.com

² valeriotere@uaq.mx



Resumen

En este trabajo se presenta una caracterización y tipificación de los errores más comunes que cometieron los alumnos del CECYTEM al resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática. Para llevar a cabo esta investigación se aplicó a una muestra de treinta alumnos una prueba diagnóstica a través de una hoja impresa el 16 de febrero de 2023 en las instalaciones del plantel Acambay. Algunas dificultades encontradas por parte de la caracterización fueron: buscar al azar el valor de la incógnita y asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor. Asimismo, por parte de la tipificación se halló que los errores se deben a: formación deficiente, inflexibilidad de pensamiento, deducciones lógicamente inválidas, problemas de lenguaje matemático, conceptos distorsionados y falta de comprobación del resultado.

Palabras clave: caracterización de errores, ecuaciones lineales de una variable, tipificación de errores, transformación de expresiones.

Abstract

This paper presents a characterization and typification of the most common errors committed by CECYTEM students when solving linear equations of one variable in physical-mathematical field tasks. To carry out this research, a printed diagnostic test was applied to thirty students on February 16th, 2023, at the Acambay school facilities. Some difficulties found by the characterization were: randomly attempting to determine the value of the unknown, and associating the number that appears next the unknown as its value. Additionally, according to the error typification, it was found that the errors are due to: poor learning, inaccuracy of thought, illogical deductions, math language problems, unintelligible concepts and lack of results verification.

Keywords: characterization of errors, linear equations of one variable, error typification, transformation of expressions.



Introducción



A menudo los profesores piensan que los alumnos siguen de forma puntual la metodología instruida para resolver problemas dentro del aula de clases; sin embargo, esto no siempre pasa debido a que frecuentemente los aprendices emplean su propia técnica para dilucidarlos. Cuando el profesor revisa el medio utilizado para dar solución a estos problemas, casi siempre se percata de que existen procedimientos inadecuados e inconsistentes, y afirma que los estudiantes han presentado errores (Brousseau *et al.*, 1986). Dada esta situación, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las causas de los errores (tipificar) que manifiestan los estudiantes al resolver expresiones de una variable en tareas del área física-matemática?

En este artículo se presenta una caracterización y una tipificación de los errores más comunes que cometen los alumnos del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (CECYTEM) Plantel Acambay, cuando intentan resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática.

Marco teórico

La tipificación de errores que se muestra en este trabajo está basada en las clasificaciones propuestas por Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar *et al.* (1987). Se eligieron estas clasificaciones porque describen las características de los errores que presentaron los alumnos en esta investigación.



En este trabajo se presenta una caracterización y tipificación de los errores más comunes que cometieron los alumnos del CECYTEM al resolver expresiones lineales de una variable en tareas del área físico-matemática.

Por una parte, el primer autor establece la siguiente clasificación:

- Errores causados por inflexibilidad de pensamiento. Se presentan cuando los alumnos intentan resolver problemas nuevos utilizando algoritmos o técnicas que les fueron de utilidad en la solución de ejercicios previos, aquí los estudiantes no permiten el procesamiento de la nueva información.
- Errores provocados por problemas de lenguaje. La ausencia de conocimiento de la sintaxis o semántica que está presente en un escrito matemático es sin duda la raíz de diversos fallos.
- Errores debidos a formación deficiente. Aquí se incluyen los errores causados por la falta de conceptos previos y por una enseñanza incompleta de técnicas, algoritmos o procedimientos para resolver ejercicios matemáticos.

Por otra parte, la clasificación del segundo autor incluye:

- Deducciones lógicamente inválidas. Errores derivados de falacias de razonamiento, ya que el resultado propuesto no tiene relación lógica con el problema planteado.
- Conceptos distorsionados. Errores causados por la alteración de leyes, teoremas o fórmulas que están establecidas universalmente y se reescriben de forma incorrecta para posteriormente hacer uso de ellas.
- Falta de comprobación del resultado. El no verificar la solución encontrada en los ejercicios es un error prevalente cometido por los alumnos.

Es importante mencionar que un error puede ser causado por más de una razón, ya que el alumno puede deducir un resultado incorrecto por formación deficiente o por distorsionar alguna noción.

Metodología

Para obtener la caracterización de errores se abordaron los siguientes pasos:

1. Se diseñó el instrumento para la recolección de datos (prueba diagnóstica), en el que se elicitó la solución de seis ecuaciones lineales de una variable del área de matemáticas, y dos despejes de una ecuación lineal (fórmula para calcular velocidad en función de distancia y tiempo) del área de física. Las ecuaciones que se pidieron resolver se muestran en la Tabla 1.

Nº	ECUACIÓN	VARIABLE POR DESPEJAR
1	$4x - 2 = x + 6$	x
2	$4y - 3 = 1 - y$	y
3	$4x - 9x = 6 - 2$	x
4	$4 = \frac{5}{2x-1}$	x
5	$2 = \frac{3}{x} - 1$	x
6	$3(x + 5) = 8$	x
7	$v = \frac{d}{t}$	d
8	$v = \frac{d}{t}$	t

TABLA 1. Ecuaciones contenidas en la prueba diagnóstica.

2. Se invitó a participar en la investigación a una población de 150 alumnos del CECYTEM, de los cuales se trabajó con una muestra de treinta estudiantes que decidieron participar de manera voluntaria.
3. Se imprimió la prueba diagnóstica y se aplicó de manera individual a los treinta alumnos en las instalaciones del colegio el 16 de febrero del año 2023. Se dio la instrucción específica de que, además del desarrollo matemático necesario para dar solución a los ejercicios, redactaran por escrito cada paso que estaban dando y justificaran por qué lo estaban haciendo; la aplicación tomó un tiempo de dos horas.

Resultados, análisis y discusión

A continuación, se exponen las características de los errores encontrados al aplicar la prueba diagnóstica y una tipificación de los mismos

con base en la clasificación dada por Radatz (1980) y Movshovitz-Hadar et al. (1987).

En la Tabla 2 se muestran errores causados por inflexibilidad de pensamiento. Las características encontradas para esta tipificación son las siguientes: los alumnos buscan tener la incógnita del lado izquierdo de la igualdad o en el numerador, como se muestra en los tres primeros ejemplos; por otro lado, cuando intentan solucionar las Ecuaciones (7) y (8) mencionan que necesitan conocer los valores de v , d y t para poder resolverlas (Ejemplo 4) o solo colocan valores numéricos al azar en la ecuación y afirman que está solucionada (Ejemplo 5). Otro error que manifiestan es asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor (Ejemplo 7) o asignarle un signo a una variable equivocada, como se ilustra en el Ejemplo 8.

EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$4 = \frac{5}{2x-1}$	$x^4 = \frac{5}{2x-1}$
2	$\frac{1}{x}$	x
3	$3 = \frac{3}{x}$	$(-3)(3) = x$
4	$v = \frac{d}{t}, d = ?$	$v = ?, d = ?, t = ?$
5	$v = \frac{d}{t}, t = ?$	$v = \frac{52}{3}$
6	$5x = 2$	$v = \frac{2}{-5}$
7	$x + 6$	$x = 6$
8	$4x = x + 4$ restar x de ambos lados	$x - 4x = x + 4 - x$

TABLA 2.
Errores causados por inflexibilidad de pensamiento.

Por otra parte, en la Tabla 3 se exhiben ejemplos de errores causados por problemas de lenguaje. Las características para esta tipificación son las siguientes: los alumnos manifiestan una interpretación errónea de la semántica en $5x^4$, ya que esta expresión no representa un producto aritmético pero ellos así lo concluyen (Ejemplo 1). También exponen una semántica diferente al afirmar que la v de velocidad representa el símbolo de "variable" (Ejemplo 2), y evidencian lenguaje algebraico incorrecto cuando describen de forma escrita el procedimiento que siguieron para resolver los ejercicios (Ejemplo 3).

EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$5x^4$	20
2	v - velocidad	v - variable
3	Juntar términos semejantes	Factorizar términos semejantes

TABLA 3.
Errores provocados por problemas de lenguaje.

En la Tabla 4 se exhiben errores causados por formación deficiente. Las características encontradas en esta tipificación son las siguientes: los estudiantes manifiestan falta de conocimientos en operaciones con términos semejantes (Ejemplos 1-8) y dificultades al trabajar con operaciones aritméticas básicas (Ejemplos 9-12), con la aplicación correcta de la propiedad distributiva (Ejemplos 13-14) y con el dominio de operaciones algebraicas (Ejemplos 15-25).

EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$-y - 4y$	$3y$
2	$4x + 2$	$4x + 2x$
3	$4y - 3$	$4 - 3$
4	$4x + 2$	$4 + x + 2$
5	$4y - 3$	$1y$
6	$4 - y$	$4y$
7	$4y - 3 = 1 - y$	$5y = 4$
8	$6x$	$6 + x$
9	4	-4
10	$\frac{-3}{-3}$	-1
11	$6 - 2$	-4
12	$3(x + 5) = 8$	$3(x + 5) = 5$
13	$(\frac{1}{2})(4x + 2)$	$4x$
14	$4(4y = 0.5y)$	$y = 2y$
15	$x(\frac{3}{x} - 1)$	$\frac{3x}{x} - 1$
16	$-4x + (4x)$	$-4x(4x)$
17	$4x - 9x$	$9x - 4x$
18	$4 = \frac{5}{2x - 1}$	$(5)(4) = 2x - 1$

TABLA 4.
Errores debidos a formación deficiente.

19	$2 = \frac{3}{x} - 1$	$2x = 3 - 1$
20	$2 = \frac{3}{x} - 1$	$3 + 2 = x - 1$
21	$\frac{3}{x} - 1$	$x - 1$
22	$3(x + 5) = 8$	$x + 5 = 8 - 3$
23	$\frac{5}{2x - 1}$	$\frac{5}{2x} - 1$
24	$(x) \left(4 = \frac{5}{2x - 1} \right)$	$4x = \frac{5}{2 - 1}$
25	$4 = \frac{5}{2x - 1}$	Sustituye la variable x a prueba y error hasta que el resultado sea 4

En la Tabla 5 se muestran errores causados por deducciones inválidas lógicamente. Las características encontradas en esta tipificación son las siguientes: cuando se pidió a los alumnos despejar las Ecuaciones (7) y (8) para las variables d y t respectivamente, ellos colocaron una expresión sin sentido físico ni matemático (Ejemplo 1). Por otra parte, cuando se solicitó resolver la misma ecuación para las mismas variables, los alumnos concluían enunciados sin sentido lógico (Ejemplos 2 y 3); un último error fue pensar que solucionar la ecuación significaba colocar las variables en orden alfabético (Ejemplo 4).

TABLA 5.
Deducciones lógicamente inválidas.

EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$v = \frac{d}{t},$ $t = ?$ o $d = ?$	$d = \frac{v}{t}; t = dv$
2	$v = \frac{d}{t}, t = ?$	Despejamos a d en lugar de t . Despejamos a v en lugar de t . Primero se va a despejar el tiempo para obtener la distancia.
3	$v = \frac{d}{t}, d = ?$	Realizo el despeje de v y de t para obtener el resultado. Despejamos a t que como está dividiendo pasa multiplicando.
4	$v = \frac{d}{t}, t = ?$	$d = tv$

En la Tabla 6 se muestra un error causado por conceptos distorsionados. La característica encontrada en esta tipificación fue la siguiente: cuando se

les indicó a los alumnos resolver la Ecuación (8) para la variable d , sólo realizaron el cambio de lugares entre las variables de la expresión (Ejemplo 1), lo cual es incorrecto porque están distorsionando la ecuación original.

EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$v = \frac{d}{t}$, $d = ?$	$d = \frac{v}{t}$

TABLA 6.
Conceptos distorsionados.

Por último, en la Tabla 7 se muestra un error causado por falta de comprobación del resultado. La característica encontrada en esta tipificación fue la siguiente: los alumnos no realizan la comprobación del resultado que obtuvieron para verificar que el dato encontrado sea correcto; a consecuencia de esto, el valor que presentan como solución de la ecuación no siempre es el adecuado.

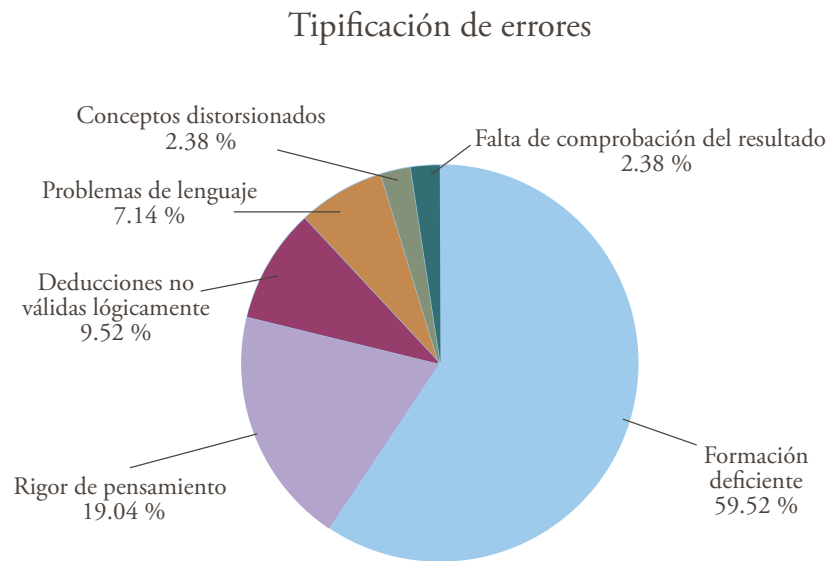
EJEMPLO	A PARTIR DE:	LOS ALUMNOS CONCLUYEN:
1	$4y - 3 = 1 - y$	$y = \frac{5}{4}$

TABLA 7.
Falta de comprobación del resultado.

Análisis global de la tipificación de errores

En la Figura 1 se puede visualizar el porcentaje correspondiente a cada tipificación encontrada en esta investigación. Se halló que el 59.52 % de los errores se deben a una formación deficiente, el 19.04 % a inflexibilidad de pensamiento, el 9.52 % a deducciones lógicamente inválidas, el 7.14 % a problemas de lenguaje, mientras que tantos conceptos distorsionados como falta de comprobación del resultado exhibieron 2.38 % cada una.

FIGURA 1.
Tipificación obtenida
en la presente
investigación.



Como se puede observar en la Figura 1, la mayor parte de los errores que manifiestan los alumnos al resolver ecuaciones lineales de una variable en tareas del área físico-matemático son causados por una formación deficiente; en consecuencia, es importante que en la educación previa a la de nivel medio superior se logre adquirir un aprendizaje significativo en los temas que se abordan para que de esta manera se puedan evitar dichos errores.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una caracterización y tipificación de errores cometidos por treinta alumnos del CECYTEM Plantel Acambay al resolver expresiones de una variable en tareas del área físico-matemática. Por parte de la caracterización, se encontraron las siguientes dificultades:

- buscar al azar el valor de la incógnita,
- desear tener la incógnita siempre del lado izquierdo de la ecuación,
- asociar el número que acompaña a la incógnita como su valor,
- realizar un procedimiento incoherente,
- colocar la suma o resta de una variable y un número como un producto, separar un producto y expresarlo como una suma o resta,

- restar o sumar una variable con un número,
- agregar una variable a una expresión sin justificación,
- eliminar sin argumento una variable de una expresión y no usar un lenguaje algebraico apropiado.

Asimismo, por parte de la tipificación, se halló que el 59.52 % de los errores se deben a una formación deficiente; el 19.04 % a inflexibilidad de pensamiento, el 9.54 % a deducciones lógicamente inválidas, el 7.14 % a problemas de lenguaje mientras que tanto conceptos distorsionados como falta de comprobación del resultado exhibieron 2.38 % cada una.

Los resultados de la presente investigación son la base para diseñar y aplicar un manual didáctico que coadyuve a la comprensión de la transformación de expresiones que se utilizan para resolver ecuaciones lineales de una variable. Este manual hará énfasis en explicaciones que sirvan para evitar los errores que fueron detectados en esta investigación. Por otra parte, es importante mencionar que este producto es fundamental para continuar con el desarrollo del proyecto de tesis del autor que cursa la maestría en Didáctica de las Ciencias en la Universidad Autónoma de Querétaro.

Para culminar, cabe destacar que se proyecta a futuro la implementación del manual en la comunidad estudiantil para disminuir los obstáculos que presentan al resolver y despejar expresiones lineales de una variable.

Agradecimientos

El autor agradece a los treinta alumnos que participaron como muestra para esta investigación, al CECYTEM Plantel Acambay por las instalaciones facilitadas para el desarrollo de la misma y a la M. D. M. Teresa de Jesús Valerio López por el asesoramiento puntual de este trabajo.

Referencias

- Brousseau, G., Davis, R. B. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, G. y Otte M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 205-241). Springer Dordrecht. Doi: [10.1007/978-94-009-4504-3](https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3)
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14. Doi: [10.2307/749532](https://doi.org/10.2307/749532)
- Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1 (1), 16-20. <https://www.jstor.org/stable/40247696>