SUGEY TATIANA SOTOMAYOR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

DOCENTESUGEYSOTOMAYOR@GMAIL.COM

02

UNA PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA EN LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

A PROPOSAL FOR ACTIVITIES TO ACHIEVE THE UNDERSTANDING OF THE DERIVATIVE IN OPTIMIZATION PROBLEMS

RESUMEN

El presente trabajo pretende que, a través de los problemas de optimización, el estudiante pueda acercarse a la comprensión de la noción de derivada. Para tal fin, se propone una actividad que consiste en que el alumno resuelva un problema de optimización desde diferentes registros de representación y justifique cada uno de sus procedimientos, lo cual le permitirá evidenciar la implicación de la derivada en la resolución del problema planteado. El uso de los distintos registros de representación para la resolución del problema planteado corresponde con las diversas maneras de realizar una tarea, las cuales están definidas como técnicas en una praxeología matemática. De esta forma, el análisis a priori del presente trabajo se hace considerando la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la Teoría Antropológica de la Didáctica.

Palabras Clave: 000, Teoría Antropológico de Lo Didáctico, problema de optimización, derivada, registros de representación., actividad.

ABSTRACT

This paper intends that, through optimization problems, the student will be able to reach an understanding of the notion of derivative. For this purpose, an activity is proposed, which consists in the student solving an optimization problem from different representation registers and justifying each one of his or her procedures, this will allow him or her to show the implication of the derivative in the resolution of the proposed problem. The use of the different representation registers for the solution of the proposed problem agrees with the different ways of solving an assignment, which are defined as techniques in a mathematical praxeology. In this way, the a priori analysis of this work is done considering the Theory of Registers of Semiotic Representation and the Anthropological Theory of Didactics.

Keywords: 000, Anthropological Theory of the Didactic, optimization problem, derivative, semiotic representation registers, activity.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los estudiantes resuelven ejercicios donde se les pide calcular la derivada de una determinada función real, casi siempre de forma automática, aplicando las reglas usuales de derivación sin realmente concientizarse de las implicaciones de este concepto matemático. Por tanto, se puede decir que una de las razones por las cuales ocurre esta sistematización continua, se debe a que prevalece la visión sistemática algebraica de la derivada, tanto en el cálculo de funciones en escenarios descontextualizados, como en escenarios de problemas de optimización.

Con respecto a estos últimos, a los estudiantes se les dificulta traducirlos del lenguaje natural al algebraico, lo cual les impide realizar la formulación adecuada de un modelo matemático, que les permita encontrar una solución óptima al problema. Cabe mencionar que la mayoría de los docentes enseñan este contenido matemático haciendo uso solamente de procesos algorítmicos y algebraicos, y no utilizan otro tipo de representaciones. Por tal motivo, los alumnos resuelven los problemas de optimización utilizando los criterios de máximos y mínimos de una función (representación algebraica), sin analizar ni justificar sus procedimientos.

Dentro de las investigaciones centradas en los problemas de optimización, se destaca el estudio realizado por Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto [1], quienes mencionan que las dificultades presentadas por los estudiantes están asociadas al planteamiento, análisis y resolución de estos problemas. Estos obstáculos se evidenciaron en el análisis que realizaron al momento de observar la manera en cómo estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina) resolvían problemas de este tipo.

En este mismo orden de ideas, se presenta la investigación realizada por Aldana [2], quien menciona que el conocimiento alcanzado por los estudiantes sobre el concepto de optimización es de tipo intuitivo, ya que está asociado a la gráfica de la función; es decir, que entienden la optimización como el punto más bajo o más alto de la gráfica, para lo cual aplican el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos o mínimos.

Por otra parte, Rojas, Báez y Corona [3] presentan una propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyada con Excel y Geogebra para estudiantes de bachillerato. Los autores consideran que, si desde el inicio del curso de cálculo diferencial se planteara un problema contextualizado sobre optimización, el avance cotidiano de conocimientos capacitaría al estudiante para entenderlo y resolverlo.

En este contexto, Navarro [4] propone una secuencia didáctica para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización; la actividad se desarrolló con estudiantes que ya habían tomado un curso de cálculo diferencial y, a través del uso de un manipulable físico y uno digital como el software de Geogebra, los estudiantes lograron una noción intuitiva de la derivada de una función al tener una aplicación en problemas de optimización de contexto extra-matemático que resolvieron sin conocer la algoritmia ni la palabra "derivada".

Por otro lado, Cruzado [5] presenta una investigación que tiene como finalidad analizar de qué manera estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería coordinan registros de representación semiótica al resolver problemas de optimización movilizando el concepto de derivada de funciones reales de variable real. Este estudio toma como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Para la parte experimental de la investigación se elaboraron dos problemas de optimización mediados por el Geogebra, los cuales fueron aplicados a estudiantes de Ingeniería Mecánica de una universidad nacional peruana. El análisis de los resultados logrados por los estudiantes evidenció que hay dificultades al momento de coordinar el registro figural, algebraico, gráfico y en lengua natural. Se concluyó que los problemas de optimización propuestos favorecen para que se dé dicha coordinación.

Las investigaciones previas pretenden poner de manifiesto las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver problemas de optimización. Pero, sobre todo, la persistencia de éstas debido a la implicación del concepto de derivada. De esta manera, con la intención de que los estudiantes alcancen una comprensión de la derivada, se hace el presente trabajo, el cual consiste en el diseño de una secuencia de actividades cuya finalidad es que los alumnos puedan establecer una conexión entre los diferentes registros de representación.

MARCO TEÓRICO

La presente propuesta se fundamenta en dos marcos teóricos: la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) y la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD).

Teoría de Registros de Representación Semiótica

Según Duval [6], aprender matemáticas involucra una secuencia de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; es por ello que, para aprender y enseñar matemáticas, se requiere la utilización de distintos registros de representación y de expresión: el lenguaje natural, la representación mediante imágenes, símbolos, etc. Por tal motivo, la enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada por medio de los problemas de optimización no se debe trabajar solo haciendo uso de un único registro, sino que se debe incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra.

De igual forma, el autor afirma que los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción o la experiencia intuitiva inmediata, ya que no son objetos reales o concretos, por tal razón, se hace necesario disponer de las diferentes representaciones semióticas de un objeto; sin embargo, no se debe confundir el objeto con su representación, distinción que es fundamental para su comprensión.

Con base en lo anterior, Duval [6] indica que un registro es un campo de variación de representación semiótica en función de los factores cognitivos que le son propios. Es necesario señalar que las representaciones semióticas son producciones que hace un sujeto a partir de sus representaciones mentales para representar un objeto matemático mediante signos que tienen su propia significación y funcionamiento dentro de un sistema de representación. En otras palabras, las representaciones se pueden considerar como un medio para exteriorizar las concepciones mentales con la intención que se dé una comunicación con otros sujetos.

En la teoría de registros de representación semiótica, a la actividad ligada a la producción de una representación se le llama semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se denota como noesis. Un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La primera de estas se refiere a la expresión mental, es decir a la expresión de un objeto en un determinado registro semiótico, lo cual implica que se debe seleccionar un conjunto de caracteres, además de las relaciones y datos que permiten constituir lo que representamos. La siguiente es la transformación, la cual se refiere a una transformación interna, es decir es la transformación de la representación en el mismo registro en el que está dada. La tercera y última es la conversión, la cual hace alusión a una transformación externa, o sea, la representación en un registro distinto al registro en el que fue dada. Por tanto, se puede decir que estas dos últimas actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones Duval [6].

La Teoría Antropológica de la Didáctica

La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard [8] parte del principio que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo así como el resultado de un proceso de estudio. Dicho proceso, en cuanto actividad que conduce a la construcción de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática.

La TAD identifica lo didáctico con todo lo relativo al estudio, tomando la palabra "estudio" en un sentido muy amplio, que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica, y se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a las cuestiones o para llevar a cabo las tareas problemáticas que se plantean.

Dentro del punto de vista general del conocimiento matemático, se propone la noción de organización praxeológica matemática o praxeología matemática (o simplemente organización matemática) como modelo básico para describir el conocimiento matemático. Dicho saber está organizado en dos niveles:

- El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la praxis o saber-hacer, es decir, a los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen y utilizan para abordarlos.
- El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos logos o simplemente saber. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso tecnológico (la razón, logos, de la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la teoría que da sentido a los problemas planteados; este nivel permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones o demostraciones tecnológicas.

Para fines de este trabajo nos centraremos en el primer nivel de la praxeología matemática y en las tecnologías. Los tipos de tareas son: interpretar, representar, trazar, completar y determinar; las técnicas están relacionadas con el uso de los diferentes registros de representación mientras el alumno resuelve el problema de optimización; y en cuanto a las tecnologías, de acuerdo a la actividad propuesta, se irán presentando o construyendo sobre las tareas.

A continuación, se presenta un esquema que muestra la interacción de los registros de Representación y las praxeologías matemáticas en la resolución de un problema de optimización.

Tabla 1. Relación de los Registros y las Praxeologías en las actividades

Registros	Tipo de tarea	Técnica	Tecnología
Lengua natural	T_1: Interpretar	t_1: leer el problema propuesto e interpretarlo.	
Figural	T_2: Representar	t_2: Dibujar un rectángulo dividido por la mitad. t_3: Señalar las dimensiones del rectángulo en el dibujo.	
Algebraico	T_1:Interpretar T_4:Determinar	t_4: Reconocer cómo se calcula el perímetro y el área de un rectángulo. t_5: Establecer la relación de la cantidad de malla necesaria, la cual es el perímetro del rectángulo y la división del centro. Es decir, 2 bases y 3 alturas $corral = 2b + 3h$. t_6: Expresar una relación matemática con la información del problema, la cual es el perímetro de 300m. $300 = 2b + 3h$. t_7: Despejar cualquiera de las dos variables de la ecuación anterior y sustituir dicha variable en la ecuación del área del corral. t_8: Derivar la función del área e igualar a cero para determinar el valor máximo. t_9: Sustituir este valor en una de las variables que se despejó, ya sea base o altura. t_{10}: Encontrar la otra medida. t_{11}: Determinar las dimensiones del terreno.	θ_1: $perímetro = 2(a + b)$ siendo a y b, los dos lados diferentes del rectángulo θ_2: $Área\ del\ rectángulo = bh$ θ_3 ::Si n es un entero positivo y $f(x) = xn$, entonces $f'(x) = nxn^{-1}$ θ_4 :Si $F(x) = f(x) - g(x)$ entonces$F'(x) = f'(x) - g'(x)$ θ_5 : sean f y f' derivables en a. Entonces a es máximo relativo de f si: $f(a) = 0$ y $f''(a) < 0$
Gráfico	T_2: Representar T_1: Interpretar T_4: Determinar T_5:Trazar	t_{12}: Construir una tabla de valores de x y y. t_{13}: Representar gráficamente los valores de la tabla en un plano cartesiano. t_{14}: Realizar una interpretación de la gráfica. t_{15}: Determinar cuál es el intervalo en el que x puede tomar valores para que el área alcance el valor más alto. t_{16}:ubicar el punto máximo en la gráfica. t_{17}: Trazar rectas tangentes a la gráfica de la función, dos antes del valor máximo encontrado y dos después del mismo. t_{18}: Trazar una recta tangente en el valor máximo hallado.	θ_6 : Una recta L que pase por P $(a, f(a))$, se denomina recta tangente a la gráfica de f en P, si L es la mejor aproximación lineal de f cerca de P. θ_7 : La derivada en un punto x=c es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, f (c)). θ_8 : Sea $f: X \rightarrow Y$, con $X, Y \subset$ R. El conjunto $G(f) = (x, y): x \in X$ $y = f(x) \subset R \times R = R2$ se llama gráfica de la función .
Numérico	T_6: Completar T_1: Interpretar T_4: Determinar	t_{19}: Completar la tabla propuesta. t_{20}: Realizar una interpretación de la tabla, una vez haya sido completada. t_{21}: Determinar los valores de las dimensiones, para los cuáles el área es máxima.	

Fuente: Elaboración propia

METODOLOGÍA

En este apartado se muestra el diseño de la actividad, la cual consiste en la presentación de un problema de optimización, luego, a través de una serie de indicaciones se orienta al estudiante hacia la resolución del problema.

Problema: Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos; es decir, comparten un lado de la recta. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.

Sección 1: En esta sección se plantea la necesidad de realizar una interpretación del problema. De esta manera, al estudiante se le solicita lo siguiente: Realice una representación geométrica del problema de acuerdo con las condiciones dadas.

Esta sección tiene como finalidad que el estudiante pase del registro natural al registro figural, es decir, el estudiante debe hacer una transición entre dichos registros y, para esto, se espera que el alumno interprete geométricamente el problema planteado. El alumno deberá realizar una representación como la figura1. Asimismo, en términos de la TAD se puede decir que esta sección promueve la técnica geométrica.

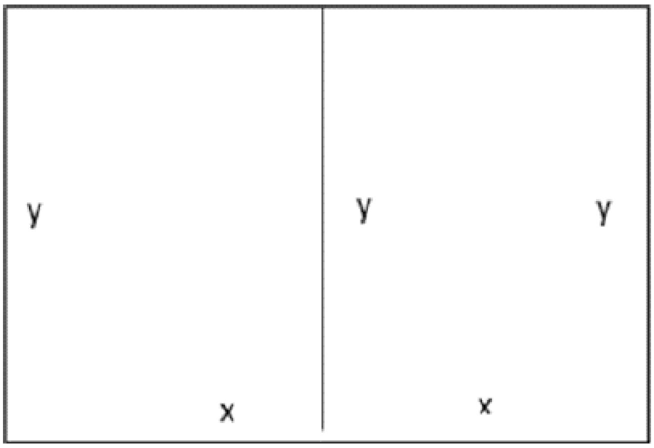

Figura 1. Representación figural del problema propuesto
Fuente: Elaboración propia

Sección 2: En esta sección se plantea la necesidad de una interpretación algebraica. De este modo, se solicita al estudiante lo siguiente: Determine la expresión matemática que modela el área cercada por los dos corrales en función de una sola variable.

La finalidad de esta sección es que el estudiante haga la transición del registro figural al algebraico. Para ello, al igual que en la sección anterior, el estudiante debe hacer una adecuada interpretación geométrica del problema planteado, ya que sin dicha interpretación le será difícil determinar la expresión matemática que modela el área de los corrales, la cual sería la representación algebraica del problema de optimización. Esta sección promueve la técnica algebraica.

Una posible representación algebraica sería:

$$Área = f(x) = 2x\left(\frac{300-4x}{3}\right) = 200x - \frac{8}{3}x^2 \qquad (1)$$

Sección 3: En esta sección se plantea la necesidad de una interpretación gráfica. De este modo, se le solicita al estudiante lo siguiente: Represente gráficamente la expresión definida para la Ec. (1) y diga cuál es el intervalo en el que x puede tomar valores para que el área alcance los valores más altos. Justifique su respuesta.

El objetivo de esta sección es que el estudiante pase del registro algebraico al registro gráfico y después al registro natural. Para ello, el estudiante debe tener claro qué significa la coordenada de un punto en la gráfica de la Ec (1). Si el estudiante responde que la ordenada del punto representa el área de los corrales para determinado valor de la dimensión del corral, entonces se puede decir que el estudiante realiza la transición entre dichos registros. Esta sección promueve la técnica gráfica.

Sección 4: En esta sección se plantea la necesidad de una interpretación numérica. De este modo, se le pide al estudiante lo siguiente: Complete la siguiente tabla y determine los valores de las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima. Argumente su respuesta.

Tabla 2. Área de los corrales en función de una sola variable

x	$y = (300 - 4x)/3$	$A = f(x) = 2x\left(\frac{300-4x}{3}\right)$
	100	0
10		
15		2400
	60	
	0	0

La finalidad de esta sección es que el estudiante transite del registro algebraico al registro numérico y luego al registro natural. Para tal objetivo el estudiante debe determinar los valores de las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima. Esta sección promueve la técnica numérica.

Sección 5: En esta sección se plantea la necesidad de una interpretación gráfica. De este modo, se le solicita al estudiante lo siguiente: Ubique en la gráfica el valor máximo del área.

La finalidad de esta sección es que el alumno coordine el registro numérico con el registro gráfico. Para tal fin, el estudiante debe hacer una interpretación adecuada de la tabla 1, al igual que de la gráfica de la Ec (1). Si el estudiante es capaz de determinar el valor máximo del área, se puede decir que comprende el significado del valor óptimo pedido. Esta sección promueve la técnica gráfica.

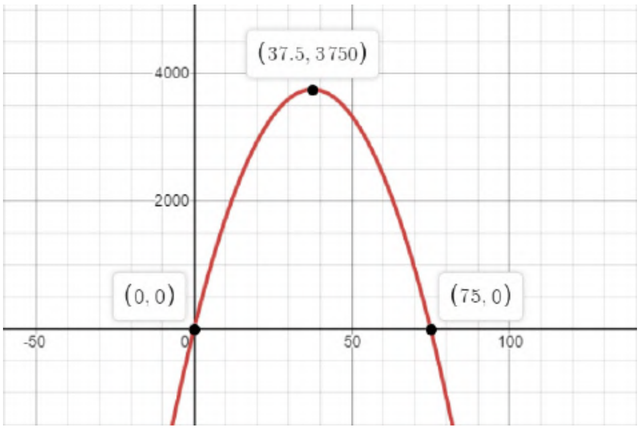

Figura 2. Representación gráfica del problema propuesto
Fuente: Elaboración propia

Sección 6: Esta sección plantea la necesidad de una interpretación grafica de la función. De esta manera, se le solicita al estudiante lo siguiente: Trace tangentes a la gráfica, dos antes del valor máximo encontrado y dos después del mismo. ¿Qué puedes decir acerca de sus grados de inclinación? Explique.

Esta sección tiene como finalidad que el estudiante pase del registro gráfico al registro natural. Si el estudiante proporciona un argumento válido con relación a las tangentes trazadas a la función del área, la transición entre dichos registros será la adecuada. Esta sección promueve la técnica natural.

Sección 7: Esta sección plantea la necesidad de una interpretación gráfica. De este modo, se le propone al estudiante que conteste a una serie de cuestiones asociadas a la gráfica.

a) Trace una tangente a la gráfica en el valor máximo hallado. ¿Qué puedes decir acerca de su grado de inclinación?

b) Explique qué relación tienen las rectas tangentes trazadas con el valor óptimo del área.

c) Derive la función hallada en la sección 2 y diga para qué valores se anula. Compare el valor con el del hallado en la sección 5. Justifique su respuesta.

d) Evalúe la derivada en un punto antes del hallado anteriormente y en uno después ¿Qué puede decir del signo de las derivadas?

e) Finalmente, explique qué relación tienen las tangentes a la gráfica de la función con la derivada de la misma.

Al igual que en las secciones anteriores, esta última sección tiene como finalidad que los estudiantes transiten en los registros de representación y utilicen diversas técnicas para resolverlos; pero a diferencia de las otras, le permitirá al estudiante acercarse a una noción más amplia de la derivada en comparación con la que emplea usualmente, la cual es vista solo desde un registro algebraico.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con base en las secciones que orientan al estudiante para resolver el problema, se espera que los alumnos encuentren dificultad al momento de determinar la expresión matemática que modela el área de los corrales en función de una sola variable, esto se debe a que, en muchas ocasiones, al estudiante se le facilita la función a optimizar y no se trabaja para que sean ellos los que la construyan. Además, puede presentarse el caso de que no tenga claro el significado de "perímetro de la superficie", y se equivoque al momento de expresarlo en función de las dos dimensiones.

Por otro lado, si el alumno no realiza una interpretación adecuada de la gráfica que representa el área de los corrales, puede errar al momento de completar la tabla que corresponde a la sección 4 y, por consiguiente, en la argumentación de su respuesta.

Finalmente, se espera que el estudiante evidencie que la noción que tiene de la derivada está asociada a un registro algebraico y no a otro. Con relación a esto, es probable que muestre falencia al contestar preguntas de la sección 7.

CONCLUSIONES

La enseñanza del Cálculo centrado en el dominio de algoritmia genera en los estudiantes una pobre comprensión del significado de los conceptos y de su aplicación al momento de resolver un problema que no se les presente sintetizado algebraicamente. En el caso que nos ocupa, el estudiante está acostumbrado a que el docente le proporcione ejercicios o problemas sobre derivadas, los cuales, probablemente resolverán de manera mecánica, guiándose de los ejemplos explicados en clases y en los que solo cambiarán algunos datos, pero la forma de darle solución no será distinta de la que ya conocen.

Respecto a esta problemática, se hizo el presente trabajo para promover la comprensión de la derivada a través de los problemas de optimización. La manera como está estructurada la actividad le permitirá al estudiante transitar de un registro de representación a otro, y de esta forma visualizar distintas formas de realizar el problema de optimización planteado, logrando así una comprensión más profunda de la noción de la derivada; es decir. el estudiante no solo podrá contemplarla en su registro algebraico, sino que además podrá comprender su interpretación geométrica y, de esta manera, visualizar la implicación que tiene en la resolución de problemas de optimización.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido mediante la beca para realizar estudios en el programa de maestría en didáctica de las Matemáticas.

REFERENCIAS

[1] S. Baccelli, S. Anchorena, S. Figueroa, and G. Prieto, "Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados" in *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 2014, p. 12.

[2] L. Gallego and E. Aldana, "Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica" *Educ. científica y técnológica*, vol 216 pp. 225–228, 2013.

[3] L. Rojas, J. Báez, and M. Corona, "Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato" *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza las Ciencias y la Matemática*, vol. 9, pp. 52–63, 2017.

[4] L. Navarro, "Secuencia didáctica para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización" Instituto Tecnológico de Sonora, 2014.

[5] E. Cruzado, "Problemas de optimización mediados por el Geogebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de ingeniería" Pontificia Universidad Católica del Perú, 2018.

[6] R. Duval, "*Semiosis y pensamiento humano*" (M. Vega, Trad.) Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Cali, Colombia 2004.

[7] Y. Chevallard, "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico" *Rec. en Didact. des Mathéematicques*, vol. 19, no. 2, pp. 221–266, 1999.