Recibido el 1 de noviembre de 2023, aceptado el 2 de octubre de 2024. | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Visualizando la función derivada en un ambiente de geometría dinámica

Visualizing the derivative function in a dynamic Geometry Environment

José David Zaldívar Rojas*
Samantha Analuz Quiroz Rivera

Universidad Autónoma de Coahuila, Coahuila, México

*david.zaldivar@uadec.edu.mx

01

¿CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO?
Zaldívar Rojas, J. D. y Quiroz Rivera, S. A. (2025). Visualizando la función derivada en un ambiente de geometría dinámica. *PädiUAQ, 8*(15), 1-19.

Resumen

Se describe una propuesta para trabajar la función derivada, la cual en los cursos de Cálculo rara vez recibe una reflexión de suficiente profundidad. Esta escasa atención deriva principalmente de la preferencia que se brinda a las habilidades procedimentales sobre los significados conceptuales. La alternativa se plantea a través de una construcción dinámica en GeoGebra, en la cual se conjugan elementos de la visualización y el razonamiento covariacional como argumentos que justifican la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada). El significado que se rescata en la propuesta es que la derivada de una función sobre un punto puede comprenderse bien como la pendiente de la recta tangente en dicho valor. En ese sentido, construir una dupla punto-pendiente de la recta tangente como objeto multiplicativo posibilita la covariación entre dichas relaciones y la significación de la derivada como una función en sí misma. Esto podría comprobar visualmente ciertas relaciones, a saber, en las funciones polinomiales o en las trigonométricas. Se espera que la propuesta conforme una referencia de cómo la integración de tecnologías digitales en el aula puede profundizar los significados de la noción derivada y ser provechosa para la comunidad docente.

Palabras clave: cálculo, derivada, didáctica de las matemáticas, GeoGebra, razonamiento covariacional, visualización matemática.

Abstract

A proposal for the teaching of derivative functions, which in many Calculus courses does not receive a reflection of enough depth, is presented. This lack of attention is usually due to the primordial place that procedural skills occupy over conceptual meanings. An alternative is proposed by means of a GeoGebra dynamic construction, where the elements of visualization and covariational reasoning are combined as arguments that consolidate the relationship between the local (derivative at a point) and the global (derivative function). The essence of the proposal is that the derivative of a function at a given point can be seen as the slope of the tangent line at any given value. In that context, the construction of a duo point-slope of the tangent line as a multiplicative object enables the covariation among these relations and the conception of the derivative as a function in itself. This could visually prove certain relations, specifically in polynomial or trigonometric functions. The proposal is expected to become a point of reference of digital technology integration into the classroom to enhance the meanings of the notion of derivative, and a valuable tool for the teaching community to exploit.

Keywords: calculus, derivative, didactics of mathematics, GeoGebra, covariational reasoning, mathematical visualization.

Introducción

Los obstáculos e inconsistencias dentro del aprendizaje y la enseñanza escolar del cálculo son bien reconocidos por la investigación en educación matemática (Artigue, 1998), de forma específica, las dificultades cognitivas de los alumnos, la pesada carga conceptual de los contenidos, las estrategias pedagógicas limitadas, así como los escasos materiales disponibles. Algunas obras, por su parte, discuten los fundamentos sobre los cuales se debe basar un curso de cálculo (Rasmussen *et al.*, 2014; Tall, 1990; Sánchez Matamoros *et al.*, 2008; Thompson y Harel, 2021).

Las dificultades en el aprendizaje de los alumnos son notorias cuando se enfrentan al concepto de derivada de una función, debido a que la enseñanza de este contenido exige un enfoque que relacione los objetos matemáticos con situaciones dinámicas. Empero, se fomentan prácticas vinculadas al desarrollo procedimental y algorítmico, al seguimiento de reglas; ese acercamiento opaca la comprensión de dicho objeto al no establecer conexiones con otras instancias o disciplinas donde este adquiera significados (Vrancken y Engler, 2014; Berry y Nyman, 2003; Antonio *et al.*, 2019).

Como una forma de encarar la situación, se ha abogado por un enfoque del cálculo y la derivada a través de ejemplos concretos relacionados con contextos que posibiliten ver la aplicación de los conceptos y su interconexión. Es recomendable evitar el formalismo excesivo y dar espacio a la intuición de las ideas fundamentales, así como aplicar representaciones que resalten el lenguaje gráfico, integrar tecnología para visualizar los conceptos e incorporar formas innovadoras para evaluar (Thompson y Harel, 2021; Berry y Nyman, 2003; Larios *et al.*, 2021; Briceño *et al.*, 2018).

Los apartados subsecuentes abordan problemáticas correspondientes a la noción de función derivada. Posteriormente, se sintetizan trabajos que han explorado la necesidad de integrar la visualización y las tecnologías en el diseño de actividades en los cursos de cálculo.

Enseñanza y aprendizaje del cálculo: una breve revisión

El alumnado con frecuencia encuentra dificultades cuando ingresa a un curso de cálculo. Artigue (1998) las agrupa en tres categorías:

- **La complejidad de los objetos matemáticos.** Conceptualmente hablando, los números reales, las funciones y las sucesiones resultan complejas. Como ejemplo, la concepción de número real de los alumnos en ocasiones es inadecuada.

- **La conceptualización del límite.** Esta noción central es dificultosa, tanto conceptual como operativamente.
- **La relevancia de movilizar el pensamiento algebraico y numérico.** Dado que los cursos se organizan alrededor de las ideas de función y procesos variacionales, se requiere promover un tipo de pensamiento funcional.

Por su parte, Thompson y Harel (2021) discuten las ideas esenciales del cálculo y su relación con las dificultades mencionadas. Argumentan que los profesores, al priorizar la algoritmia, las habilidades procedimentales y la memorización, omiten la comprensión en cuanto a los significados de los objetos con que trabajan y limitan las posibles formas de pensar para futuros aprendizajes. Los autores insisten en la importancia de trabajar con las nociones de variable, función, acumulación y razón de cambio. Afirman que la primera determina la comprensión de la variación; en cuanto a la segunda, la declaran un fundamento del cálculo y aseveran que se debe relacionar con la covariación, entendida como el cambio simultáneo de dos variables.

Al respecto, Carlson *et al.* (2002) sostienen que el razonar covariacionalmente las funciones prepara de manera adecuada a los alumnos para enfrentarse a conceptos más complejos. En ese contexto, Thompson y Harel (2021) realzan la razón de cambio (relacionada con el concepto de derivada) como significado que permite atender aplicaciones científicas (por ejemplo, la densidad como una razón de cambio de la masa con respecto al volumen). Aunque esta noción está vinculada al concepto de derivada, la mayoría de los estudiantes no comprende el significado cuantitativo de la misma en términos de razones de cambio promedio e instantánea. Esta dificultad suele originarse en la escasa comprensión del concepto de razón como relación multiplicativa, que debería haberse dominado en niveles previos.

Otros trabajos, como los de Rasmussen *et al.* (2014) y Tall (1990), notan anomalías en el aprendizaje del cálculo: desde las dificultades cognitivas de los alumnos, el rol de las representaciones y el lenguaje, y la relevancia del pensamiento covariacional, hasta la necesidad de estrategias de enseñanza innovadoras. Un aspecto en que la mayoría de los reportes concuerdan es la necesidad de incorporar las conexiones gráficas y diversas representaciones con el propósito de profundizar la comprensión de los conceptos vinculados.

En síntesis, la mayoría de los estudiantes puede lograr un dominio razonable de técnicas y desarrollos algebraicos dentro del cálculo (que ya podría considerarse suficiente debido al número de contenidos a desarrollar). No obstante, aún se enfrentan a obstáculos en cuanto a los significados relacionados con dicha asignatura, en particular con la noción de derivada (Sánchez Matamoros *et al.*, 2008; García y Dolores, 2016; Antonio *et al.*, 2019).

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión del concepto de derivada

La enseñanza de la derivada a menudo se centra en procesos formales de construcción y validación anclados en algoritmos. Como resultado, aunque los estudiantes pueden realizar operaciones ligadas con dicha noción, a menudo son incapaces de atribuirle un significado amplio. Pocas veces el contexto didáctico relacionado con la derivada se corresponde con los problemas que le dieron origen o con la formación de ideas variacionales y de cambio, las cuales tienen una naturaleza visual e intuitiva primordial (Vrancken y Engler, 2014; Cantoral *et al.*, 2018; Antonio *et al.*, 2019; Sánchez Matamoros *et al.*, 2008).

Por ejemplo, Sánchez Matamoros *et al.* (2008) afirman que, a pesar de la correcta aplicación de las reglas de derivación, no se profundiza el significado de la derivada ni como expresión analítica o límite del cociente incremental, ni como la pendiente de la recta tangente en un punto. Los matices de significados se aprecian en relación con las características de los problemas planteados, ya sea desde una perspectiva analítica y gráfica, una local y global, o una ligada con el empleo de derivadas sucesivas y la regla de la cadena. Los autores tipifican las dificultades en torno a la derivada en las siguientes:

- Aquellas que tratan con la razón de cambio y su vínculo con el cociente incremental.
- Los sistemas de representación utilizados.
- Lo local y lo global, es decir, la relación formada entre la derivada en un punto y la función derivada.
- El desarrollo del esquema y las aplicaciones de la derivada.

El presente trabajo se centra en el tercer aspecto: la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$. Esta determinación atiende a la necesidad de aportar a la comprensión de la noción, no solo desde un punto de vista algorítmico, sino uno conceptual. Ponderar dicho tópico permitiría a los estudiantes entender a la derivada en un contexto amplio e intuitivo. Esto podría ser útil en aplicaciones más avanzadas: las derivadas sucesivas o aproximaciones en series de potencias (como polinomios de Taylor). Además, comprender la derivada como función habilitaría a los estudiantes a entablar conexiones profundas entre conceptos para afrontar problemas más desafiantes en campos como la ingeniería y la física (Larios *et al.*, 2021; Berry y Nyman, 2003; Thompson y Harel, 2021).

Aunque se reconoce la importancia de la función derivada en diversas aplicaciones y contextos, así como para entender las relaciones covariacionales entre cantidades y en la acumulación, dicha noción no está exenta de problemáticas. La principal

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

abarca la naturaleza altamente simbólica de los cursos escolarizados, misma que provoca un alineamiento en lo procedimental, relegando el desarrollo de la intuición imprescindible para visualizar conexiones entre una función y su derivada (Thompson y Harel, 2021). Las tareas se limitan a calcular la derivada de una función como objetivo, sin apreciar que el resultado mismo es una función en sí: una que sintetiza la variación de la función original a lo largo de todo su recorrido. Comprender ese hecho permitiría caracterizar cómo los cambios en una función afectan a su derivada y viceversa. Este aspecto angular para el entendimiento de las representaciones gráficas desarrolla una idea holística del cálculo, contraria a la visión utilitaria y de simple memorización que en la actualidad predomina. Por otro lado, Sánchez Matamoros *et al.* (2008) indican que comprender la derivada en un punto no implica necesariamente asimilarla como una función. Como ejemplo, los alumnos tienden a equiparar la expresión simbólica y la gráfica de $f'(x)$ con la ecuación y la gráfica de la recta tangente, respectivamente.

El objetivo en la presente es favorecer la comprensión de la función derivada, a través de una postura basada en la visualización y la construcción de la gráfica de dicha función. El eje determinante es que la gráfica de una función derivada se construya desde la covariación entre la abscisa de un punto y el valor de la pendiente de la recta tangente. A tal fin, se esbozan los elementos a relacionar en un ambiente de geometría dinámica, poniendo énfasis en los elementos constitutivos de la construcción de la función derivada, aspectos en ocasiones relegados en la literatura, pero de relevancia para la comunidad docente que busca propuestas innovadoras para replicar en sus aulas. En las siguientes secciones se discuten los elementos teóricos que sustentan la propuesta y el protocolo de la construcción geométrica realizada en GeoGebra. La intención es que pueda ser utilizada por la comunidad docente cuya intención sea generar una explicación más significativa e intuitiva de la derivada e incluso justificar algunas relaciones y resignificar teoremas importantes.

Marco conceptual: visualización y covariación en la construcción de ideas relacionadas con la derivada

El pensamiento visual es decisivo para el aprendizaje del cálculo (Arcavi, 2003; Hitt, 2003; Zimmermann y Cunningham, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Vinner, 1989; Cantoral y Montiel, 2014). De hecho, es complicado concebir un curso exitoso de esta asignatura que no utilice la visualización de los conceptos que se trabajan, sobre todo si el objetivo es promover la comprensión del contenido.

PädiUAQ

Aunque un enfoque visual resulta importante didácticamente, se presentan dificultades para interpretar, convertir y comprender las representaciones gráficas de la derivada (Briceño *et al.*, 2018; Vrancken y Engler, 2014; Berry y Nyman, 2003). Estas problemáticas se deben a que la visualización relacional en matemáticas le exige más a la cognición que lo procedimental y algorítmico (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Además, en ocasiones se consideran las representaciones visuales como "menos legítimas" dentro de la práctica matemática (Arcavi, 2003).

La importancia de la visualización obedece a que es un proceso del pensamiento matemático (Cantoral y Montiel, 2014) que motiva el descubrimiento y la creatividad. Más que solo apreciar imágenes, se trata de profundizar en los significados, ya que sirve como una guía en la resolución de problemas. Posibilita comprender cómo las ideas pueden representarse simbólica, numérica y gráficamente, y relacionar estas representaciones. Asimismo, ayuda a elegir un enfoque adaptable a ciertos problemas, ilustrar resultados abstractos y recuperar los fundamentos que se omiten en procedimientos que recaen en lo formal (Arcavi, 2003; Zimmermann y Cunningham, 1991; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Acuña, 2012).

La visualización matemática se caracteriza como un campo multifacético que promueve la representación gráfica de las ideas matemáticas: desde dibujar simples figuras asociadas a la resolución de problemas, hasta interpretarlas y usarlas con la intención de comprender (Zimmermann y Cunningham, 1991). Desde su perspectiva, Cantoral y Montiel (2014, p. 14) describen la visualización como una habilidad para representar, transformar y reflejar información visual. En el presente manuscrito se considera la definición de Arcavi (2003):

> La visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, figuras y diagramas en nuestra mente, sobre el papel o a través de recursos tecnológicos, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionando y desarrollando ideas previamente desconocidas avanzando en la comprensión. (p. 217)

La visualización matemática se considera una habilidad, un producto y un proceso (Acuña, 2012) que debe fomentarse en los estudiantes, ya que promueve la comprensión profunda de ideas matemáticas y permite el uso de las gráficas para argumentar. Por otra parte, el razonamiento covariacional es esencial en la comprensión de ideas del cálculo (Martínez Miraval y García Rodríguez, 2022). Carlson *et al.* (2002) lo definen como "las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 354). Así, se refiere a la coordinación conceptual del cambio en una de las variables con los cambios en otra, clave para analizar situaciones dinámicas e interpretar y representar información a través de gráficas de funciones.

De manera general, interpretar la covariación requiere imaginar dos cantidades que varían en simultaneidad: visualizar una imagen sostenida de los valores de las dos cantidades cambiando conjuntamente. Esto implica agruparlas para conformar un objeto multiplicativo que incorpore los atributos de ambas variables. A pesar de su importancia, el razonamiento covariacional enfrenta obstáculos en su desarrollo, enseñanza y aplicación por parte de los estudiantes. Por ejemplo, abundan las dificultades en la formación de imágenes de razones de cambio que varían, así como al representar puntos de inflexión o variaciones incrementales o decrecientes de situaciones dinámicas funcionales (Carlson *et al.*, 2002). La instrucción en estos casos tiene que colocar a los alumnos en situaciones donde sea necesario este razonamiento, por ejemplo, aquellas que involucren la interpretación y la construcción de gráficas de funciones.

La finalidad de incorporar la visualización matemática y la covariación obedece a que ambos elementos permiten la construcción de un esquema de la derivada que ilustre la relación entre lo local (derivada en un punto: $f'(a)$) y lo global (función derivada: $f'(x)$) (Sánchez Matamoros, 2008), en tanto un objeto multiplicativo (Carlson *et al.*, 2002). En suma, la finalidad es visualizar la coordinación entre dos variables: la abscisa de un punto sobre la gráfica de una función y la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto. Comprender cómo estas dos cantidades covarían permite identificar un patrón gráfico de la función derivada.

Para tal efecto, la propuesta planteada en estas líneas toma en consideración la integración de la geometría dinámica a través de GeoGebra. La intención es apoyar a los estudiantes a visualizar y manipular la derivada de una manera concreta y comprensible. El objetivo de incorporar este componente tecnológico es prevenir que se empleen estas herramientas digitales de manera pasiva; por el contrario, se busca que su implementación activa estimule el desarrollo de habilidades de razonamiento (Martínez Miraval *et al.*, 2023).

Aspectos metodológicos: diseño de la propuesta didáctica

En las últimas décadas, con los avances tecnológicos, se ha popularizado entre las propuestas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el aprovechamiento de los recursos digitales. Esta practica permite tratar conceptos abstractos desde

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

un punto de vista intuitivo que promueve la comprensión de las nociones. En este sentido, el desarrollo de las tecnologías digitales y su implementación en el aula han impactado benéficamente en la enseñanza, estableciendo nuevas formas de trabajo y trayectorias de aprendizaje.

Es evidente que la tecnología y su inclusión en la educación matemática moldean el diseño de ambientes didácticos, el trabajo matemático desempeñado por los estudiantes y las prácticas de enseñanza (Hoyles y Lagrange, 2010). A pesar de ello, la integración de las tecnologías en el aula de matemáticas aún presenta ciertos obstáculos; ahí yace la importancia de hacer un uso reflexivo de la misma, ya que su empleo por sí solo no resolverá los problemas en el aprendizaje (Sutherland y Rojano, 2014). Diversos autores mencionan que las dificultades para introducir tecnología en el salón de clases son los prejuicios del profesorado, la ausencia de apoyo, las restricciones curriculares, las limitaciones de infraestructura y acceso a recursos, la renuencia de los estudiantes y la infinidad de opciones disponibles hoy en día (Hoyles y Lagrange, 2010; Sutherland y Rojano, 2014; Thurm y Barzel, 2022; Drijvers, 2015; Hitt, 2003; Dussel y Trujillo, 2018).

Como se aprecia, la integración de la tecnología está matizada entre sus posibilidades y dificultades. En síntesis, la literatura reconoce tanto el potencial benéfico, como los desafíos de dicha combinación. La revisión deja ver que, mientras estos recursos pueden proveer nuevas formas de enseñar y aprender, también plantean obstáculos en términos de promover un pensamiento crítico, garantizar que los alumnos no se limiten a copiar y pegar información de Internet, y prevenir que se encuentren ante "cajas negras". El rol docente es determinante, ya que debe adaptar, crear, significar y evaluar alternativas de enseñanza organizadas alrededor de las nuevas herramientas y formas de construcción.

Resulta imprescindible plantear opciones concretas de recursos didácticos para apoyar la práctica del profesorado. Es por ello que la construcción que se propone en adelante considera la inclusión de GeoGebra, un instrumento didáctico que se espera usar como herramienta de mediación semiótica (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008). Este posicionamiento bajo una perspectiva semiótica exige atención en la producción y transformación de signos durante el trabajo del alumnado con el artefacto. Cabe mencionar que en el presente manuscrito se proponen solamente los fundamentos de una construcción dinámica, y se considera que la propuesta podría implementarse sobre la estructura de una secuencia de enseñanza como una iteración de un ciclo didáctico en el sentido que le dan Mariotti y Maffia (2018).

La investigación se inscribe en un paradigma interpretativo y un enfoque cualitativo. Se empleó una técnica de análisis documental que permitió delimitar la problemática y proponer las categorías teóricas que se utilizaron en el diseño.

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

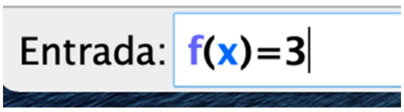
PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Protocolo de construcción de la función derivada en el software GeoGebra

Diversas investigaciones han demostrado el efecto positivo de la incorporación de ambientes de geometría dinámica y de cálculo algebraico en la enseñanza matemática. Un caso concreto de este tipo de recursos es GeoGebra, el cual goza de popularidad como una herramienta de autor para la creación y diseño de recursos educativos digitales e interactivos para el aprendizaje. Entre sus ventajas, promueve la visualización, la articulación dinámica dentro de diversos registros de representación y modelación y, a su vez, brinda experiencias de aprendizaje interactivas y atractivas, además de tener un impacto positivo en la comprensión conceptual de los estudiantes (Del Río, 2020; Fatih, 2017).

La razón de la elección de GeoGebra atiende a que permite visualizar la coordinación de cambios simultáneos entre dos variables, lo cual a su vez genera que la derivada se comprenda dentro de un proceso dinámico (Martínez Miraval *et al.*, 2023). El software también asegura que se integren al menos dos registros de representación y pone énfasis en las variables empleadas, su covariación y el establecimiento de un objeto multiplicativo para construir la gráfica de una función derivada a partir de cualquier otra. En las Tablas 1 y 2 se detalla el protocolo de construcción que se propone incluir en una hoja de trabajo para el alumno:

Tabla 1.
Protocolo de construcción en GeoGebra. Fase 1: creación de la casilla de entrada para la función. Fuente: elaboración propia.

Instrucción	Imagen de referencia
Usar la barra de entrada de GeoGebra y proponer una función cualquiera.	
Del menú, elegir la herramienta de "Casilla de entrada" y dar clic sobre cualquier parte del ambiente gráfico desplegado en pantalla.	

PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

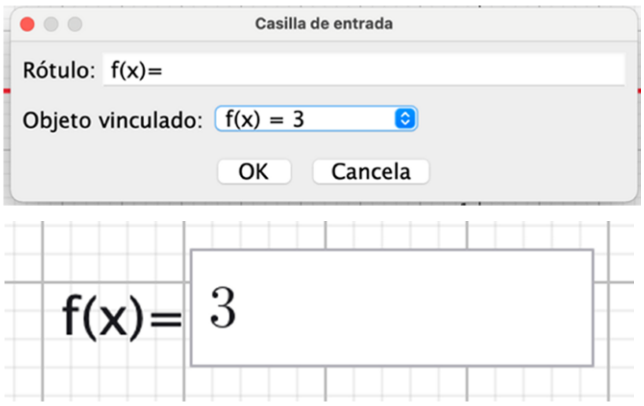
Instrucción	Imagen de referencia

Completar de la siguiente forma:

Rótulo: en este espacio es posible cambiar la regla de correspondencia de la función. Dadas las particularidades de GeoGebra, la construcción mantendrá sus características adecuándose a la nueva regla.

Objeto vinculado: seleccionar la función *f(x)* que se escribió al inicio. GeoGebra solo despliega los objetos válidos, así que no hay confusión en esos términos.

Luego de poner la información, dar clic en el botón “OK”. Se despliega la siguiente información en la pantalla gráfica.



Se puede modificar a conveniencia la entrada de la regla de correspondencia algebraica sin necesidad de escribir en la barra de entrada.

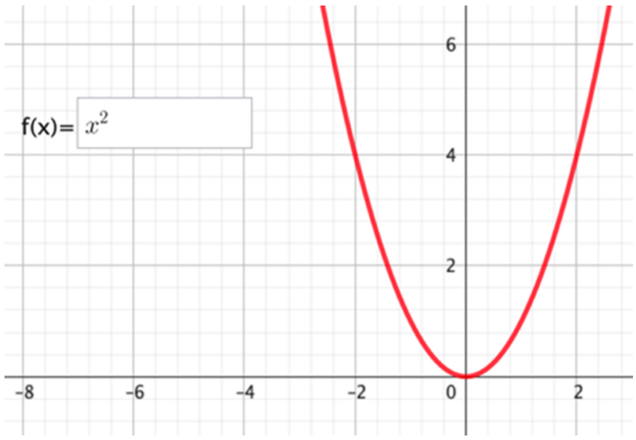


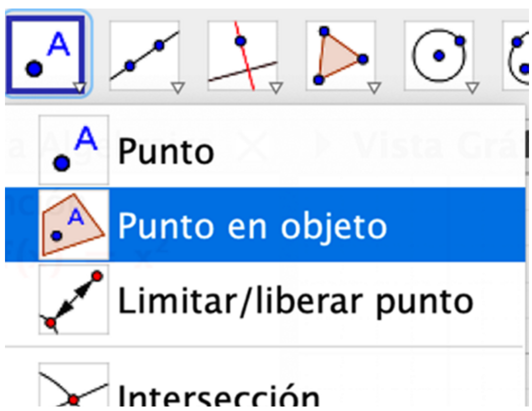
Tabla 2.

Protocolo de construcción en GeoGebra. Fase 2: construcción del objeto multiplicativo. Se explican los pasos para construir el punto que permitirá visualizar la covariación entre la derivada en un punto y la función derivada. Fuente: elaboración propia.

Instrucción	Imagen de referencia

Con la herramienta de “Punto”, seleccionar la opción de “Punto en objeto”.

Dar clic sobre el eje *X* en el ambiente gráfico desplegado en pantalla. Se verá un punto *A* sobre el eje horizontal del plano cartesiano y no se podrá “sacar”.



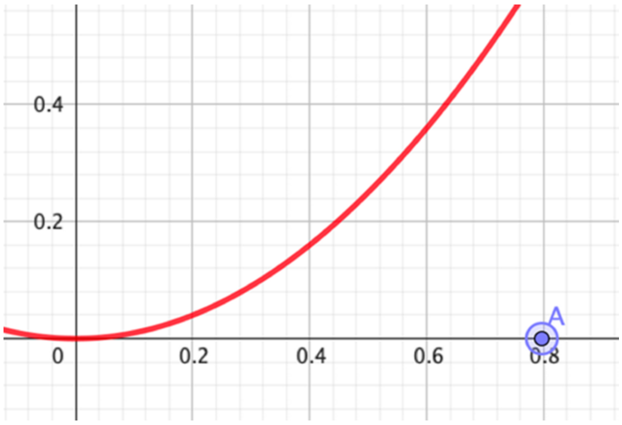
PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

INSTRUCCIÓN	IMAGEN DE REFERENCIA

El punto se puede visualizar, y moverse libremente, sobre el eje *X*, es decir, es un objeto independiente.

A partir del punto, se generan otros objetos dependientes.

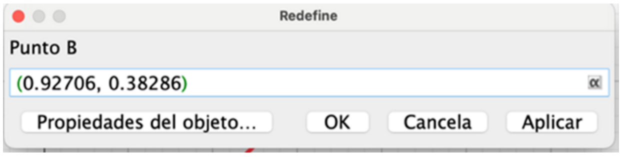


Ahora se dan los pasos para elaborar la imagen de la abscisa del punto *A* con respecto a la función *f* dada en un principio.

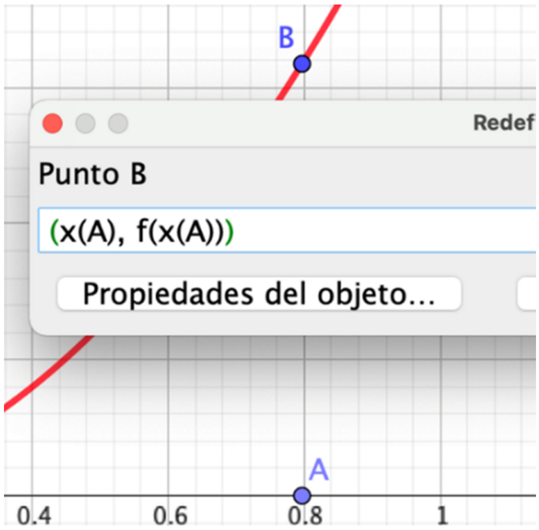
Para ello, se propone un punto *B* que tenga las siguientes características: la abscisa de *B* será igual a la abscisa de *A*, mientras que la ordenada de *B* será la imagen bajo *f* de la abscisa de *A*. Para tal fin, es necesario dar un punto sobre el plano y redefinirlo. Las instrucciones para la redefinición se muestran en la imagen.

Al momento de dar clic a “Aplicar” en dicho recuadro de redefinición de *B*, este se colocará sobre la gráfica de *f*. Además, *B* será dependiente de *A*. Este último se puede mover para visualizar cómo *B* recorre la misma abscisa que *A*, pero sobre la curva *f*.

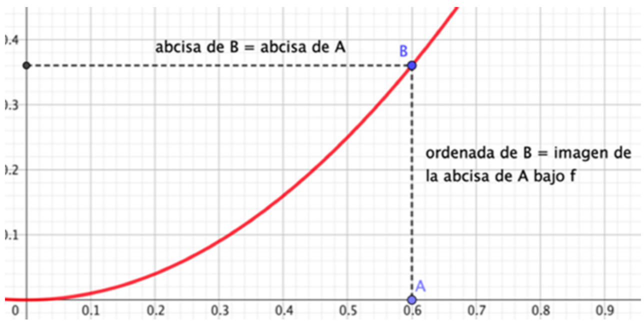
Con la intención de visualizar las componentes verticales y horizontales de esta imagen, se recomienda trazar marcas que permitan determinar la abscisa y la ordenada del punto *B*.



Y se redefine como:

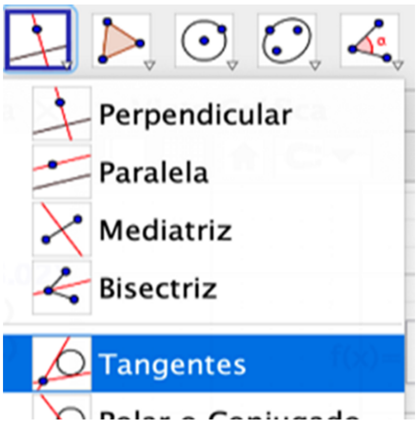


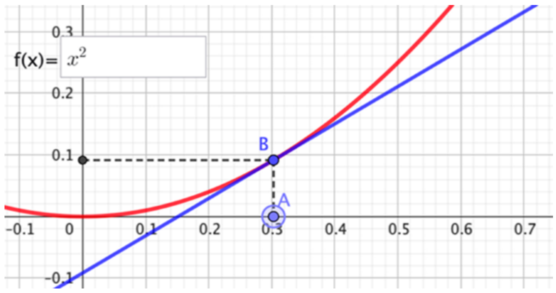
(A) significa “abscisa del punto *A*”.

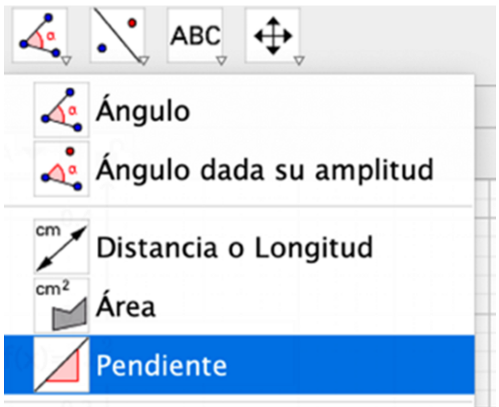
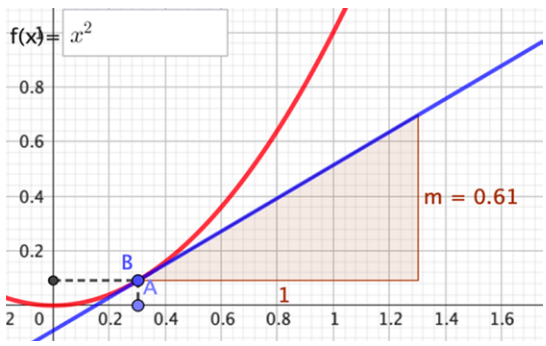


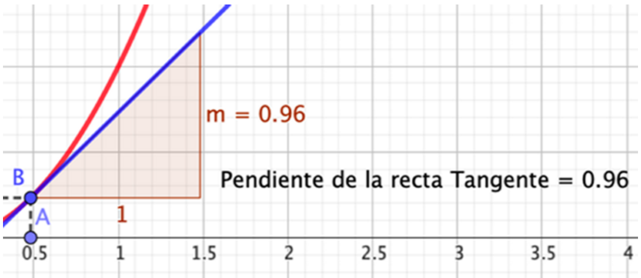
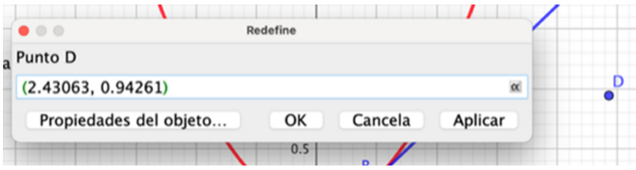
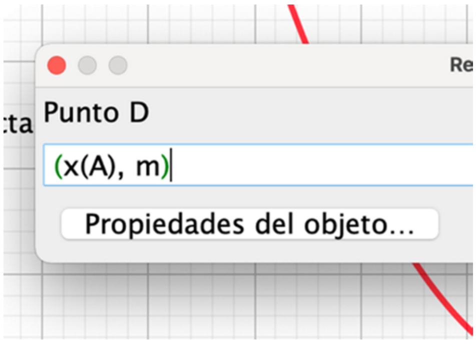
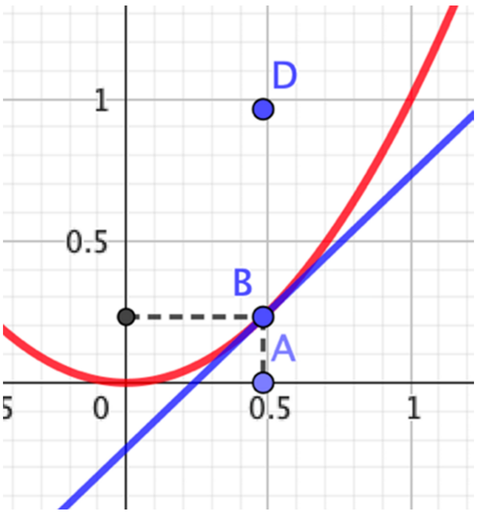
PädiUAQ

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

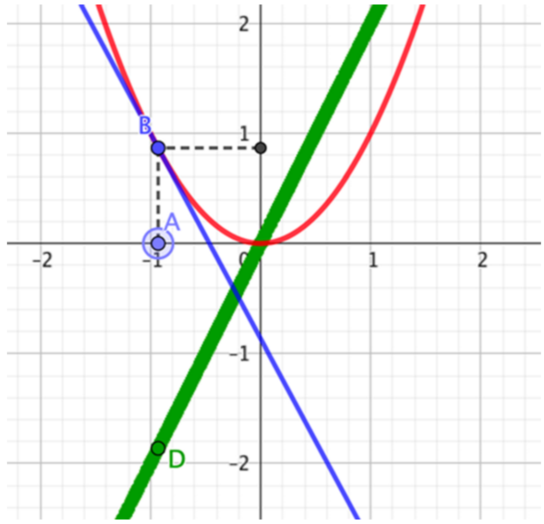
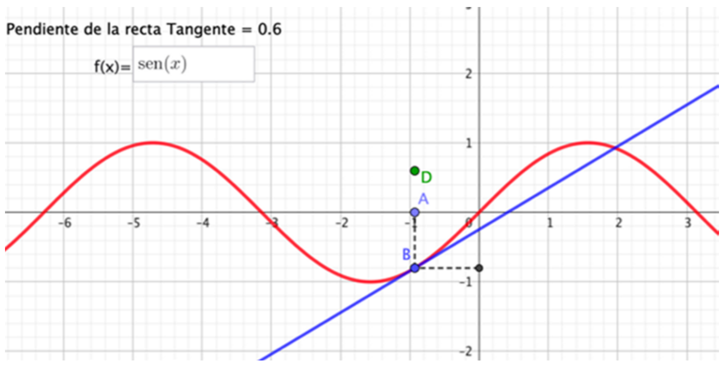
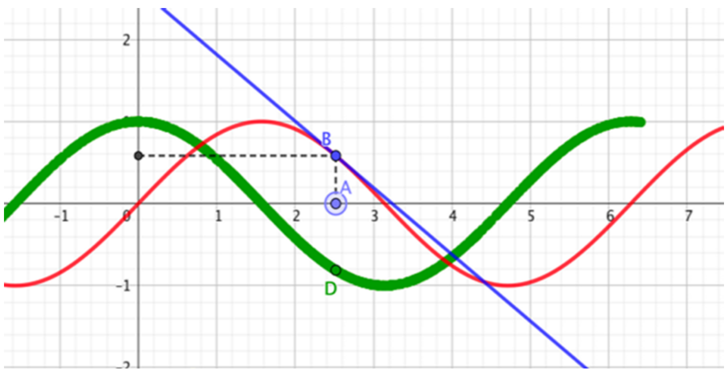
INSTRUCCIÓN	IMAGEN DE REFERENCIA
Con la herramienta "Tangentes", se construye la recta tangente a la curva que pasa por el punto *B*.	

La construcción se muestra en la imagen de referencia de este apartado. En este paso, se espera que el estudiante sea capaz de visualizar la dependencia de toda la construcción respecto a la ubicación del punto *A*. Dicho punto se puede mover sobre el eje *X*, con lo cual la recta tangente se adecua a la gráfica de la función dada y al valor de la abscisa de *A*, siempre y cuando se cumplan las condiciones de derivabilidad.	

Una vez construida la recta tangente, se recurre un significado esencial: la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Para establecer dicha relación se usa el comando de "Pendiente" y se solicita el valor correspondiente de la recta tangente en el punto *B*. Tal como se aprecia en la imagen de referencia, el comando anterior dibuja un triángulo rectángulo, en el cual uno de los catetos vale *1* y el otro *m*, es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto *B*. Es posible explorar las posibilidades del punto *A* para obtener diferentes valores de *m* y establecer conjeturas de en qué condiciones es positiva, negativa o cero, siempre aludiendo al comportamiento de la gráfica de la función dada al inicio.	 

Instrucción	**Imagen de referencia**
Para apoyar la visualización de la pendiente de la recta tangente, se sugiere activar una línea de texto para indicar el valor de *m* (ver imagen de referencia). De igual manera, es recomendable utilizar la herramienta “Ocultar” para realizar lo correspondiente con el triángulo donde aparece *m*, sin perder de vista este valor.	
En este paso se define el objeto multiplicativo que evidencia la covariación entre la abscisa de *A* y el valor de la pendiente de la recta tangente (*m*). Es necesario definir el par ordenado *(abscisa de A, f'(abscisa de A))*. Lo anterior representa, en términos de la revisión de literatura, una relación entre la derivada de un punto y la función derivada. El par ordenado que se construye permite generar una nueva gráfica de la función de las pendientes de las rectas tangentes asociadas a la gráfica de la función de inicio y que depende del valor de la abscisa de *A*. Para dicho punto, se usa una vez más la redefinición de cualquier punto que se ubique en el plano con la instrucción *(x(A, m))*. El valor de *m* es la pendiente que se guarda en el protocolo de construcción de GeoGebra, es decir, *m = f'(x(A))*.	  

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

Instrucción	**Imagen de referencia**
Con la intención de visualizar la covariación entre la abscisa de *A* y el valor de la pendiente, se puede mover el punto *A* y observar el comportamiento de *D*. Con la intención de apreciar patrones, se sugiere solicitar el “rastro” de *D* y observar el comportamiento de este cuando se hace variar *A*. La gráfica de la imagen de referencia corresponde a la función derivada de *f*.	
Dentro de la exploración, se puede modificar la función en la casilla de entrada y observar que la construcción se mantiene y que el punto *D* ahora tendrá otro comportamiento. Es posible explorar diferentes polinomios, e incluso justificar por qué la derivada de una función constante es igual a cero o que una regla de correspondencia de la forma *f(x)* + *c*, con *c* constante, tiene una gráfica derivada igual a la de *f(x)*. La construcción permite justificar las reglas de derivación de funciones trascendentes (ver imagen de referencia).	 El coseno como la derivada de la función seno. 

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

PädiUAQ

Reflexiones finales

A la luz del análisis llevado a cabo, la enseñanza del cálculo a menudo privilegia aspectos lógicos formales y dedica demasiado tiempo al desarrollo de habilidades algorítmicas y algebraicas, dejando de lado la formación de ideas variacionales. De igual forma, se observó que la integración de tecnología, como un software de geometría dinámica, resulta beneficiosa para el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, su uso indiscriminado tiene efectos negativos en las concepciones desarrolladas por los estudiantes. Por tanto, es apremiante que los profesores tengan un conocimiento preciso sobre cómo emplear estas herramientas de forma efectiva.

La alternativa desarrollada en este manuscrito busca contribuir a la discusión de un significado importante: el relacionado con la noción de función derivada. Por esa razón, se propone integrar la visualización y la covariación como fundamentos de la construcción en GeoGebra. El aspecto central de la construcción en dicho software es definir el objeto multiplicativo que emerge de la covariación y visualización del par ordenado *(abscisa de A, f' (abscisa de A))* y significarlo como una nueva función. Saldanha y Thompson (1998), como se citó en Thompson y Carlson (2017), dejan claro este aspecto cuando mencionan:

> Pensar en la covariación como la coordinación de sucesiones encaja bien con el empleo de tablas para presentar estados sucesivos de una variación. Encontramos que es útil extender esta idea y considerar posibles fundamentos para la habilidad de una persona para apreciar la covariación. Con ello, nuestra noción de covariación es la de una persona teniendo en mente una imagen sostenida de los valores (magnitudes) de dos cantidades simultáneamente. Eso implica conjuntar las dos cantidades, de manera que, bajo la comprensión de una persona, un objeto multiplicativo se forma por los dos anteriores. Como objeto multiplicativo, una persona puede rastrear cualquier valor de la cantidad con la consciencia inmediata, explícita y persistente de que, en cualquier instante, la otra cantidad también tiene un valor. (p. 426)

La visualización actúa cuando el alumno es capaz de reconocer que la construcción representa un patrón de ajuste que mantiene relaciones y da soporte a la argumentación respecto a las reglas de derivación, por ejemplo, de las funciones trascendentes. Incluso, con la construcción se puede analizar la noción de que, cuando se trabaja con polinomios, el grado de la función derivada se reduce, es decir, si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{(n-1)}$. De igual modo, es posible reflexionar acerca

PädiUAQ | Vol. 8 Núm. 15 | enero-junio | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro | ISSN: 2954-4025

de por qué la derivada de $f(x) = e^x$ coincide con la misma función, trazando en GeoGebra las imágenes de la abscisa del punto A sobre el eje X y comparando con el valor de la pendiente de la recta tangente (Figura 1).

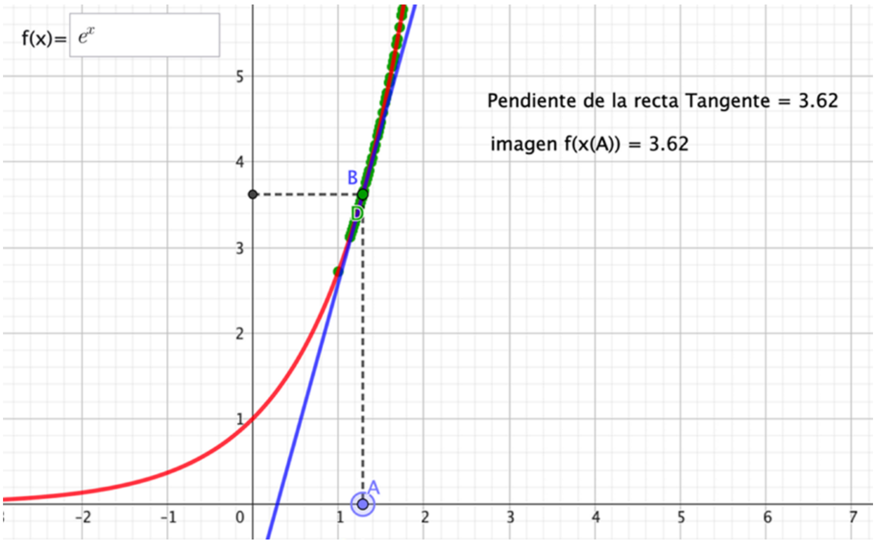


FIGURA 1.
La función exponencial y su función derivada coinciden.

Cabe mencionar que la propuesta se ha trabajado de manera interna con grupos de estudiantes de nivel superior, resaltando como una herramienta que permite la discusión de ejemplos diversos a través de lo visual. No obstante, se plantea la necesidad de llevar a cabo implementaciones sistemáticas con la intención de recabar evidencia empírica al respecto de las técnicas instrumentadas y/o los procesos de mediación semiótica que emplean los alumnos al momento de trabajar con la construcción. Están por definirse también las posibilidades y los alcances en lo que respecta a funciones derivables o no derivables en un punto (Figura 2). Dicha prospectiva da paso a validar la construcción a través de la evolución de los significados personales emergentes relacionados con la compleción de una tarea a la construcción o el desarrollo de signos compartidos asociados tanto al uso del artefacto como al concepto matemático a aprender (Mariotti y Maffia, 2018).

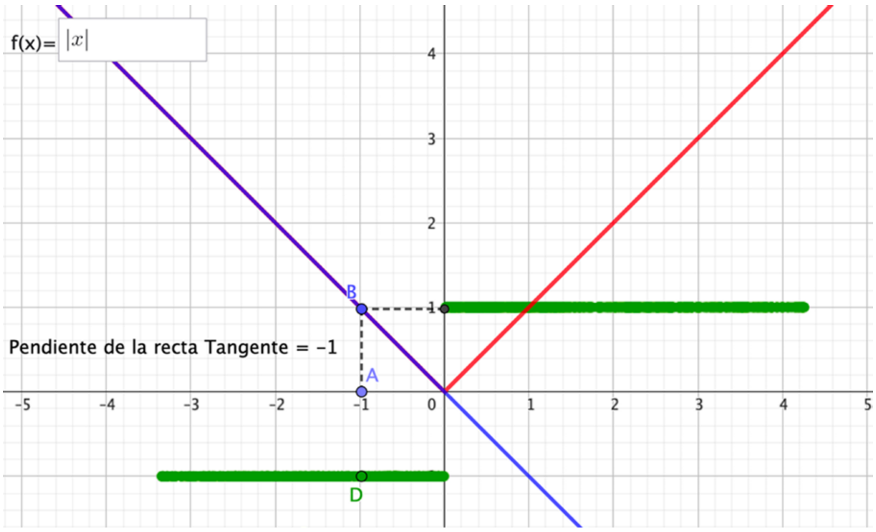


FIGURA 2.
Función derivada de la función valor absoluto.

Por último, la construcción dinámica pretende subsanar ciertas dificultades del aprendizaje y la enseñanza de la noción de derivada debidas a su pesada carga algorítmica y enfoque centrado en la formalidad del límite. La innovación didáctica que se presenta integra dos elementos esenciales del pensamiento matemático: la visualización y el razonamiento covariacional, y representa un aporte a investigaciones que promueven la comprensión de las nociones del cálculo y la variación como fundamento de la derivada (Antonio *et al.*, 2019). De igual forma, apunta a resarcir inconsistencias marcadas por Sánchez Matamoros *et al.* (2008) en cuanto a que se reduce la gráfica de *f'(x)* a la de la recta tangente. Se resalta cuán necesario es entablar un diálogo entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada) para dilucidar el esquema de la derivada a través de una construcción de geométrica dinámica. La evidencia empírica generada con estudiantes de nivel medio superior o superior representa un momento necesario de la propuesta con la intención de verificar las hipótesis realizadas.

Referencias

Acuña, C. M. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. Gedisa.

Antonio, R., Escudero, D. I. y Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258-280. https://doi.org/10.24844/EM3101.10

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. D. English, M. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 746-783. Routledge.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior,* 22(4), 479-495. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Briceño, E. C., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y su Enseñanza. 10*(1), 31-48.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual.* Pearson.

Cantoral, R., Moreno Durazo, A. y Caballero Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 77-89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Del Río, L. S. (2020). Recursos para la enseñanza del Cálculo basados en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1), 120-131. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p120-131

Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). En S.J. Cho (Ed.) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Dussel, I. y Trujillo, B. F. (2018). ¿Nuevas formas de enseñar y aprender? Las posibilidades en conflicto de las tecnologías digitales en la escuela. *Perfiles Educativos*, *40*(Especial), 142-178. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2018.Especial.59182

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America.

Fatih, M. (2017). The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78. https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67

García, M. A. y Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12*(46), 49-70.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 213-223.

Hoyles, C. y Lagrange J.B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Larios, V., Páez, R. E. y Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática,* (20), 105-124.

Mariotti, M. y Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, (4), 50-64. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1

Martínez Miraval, M. A. y García Rodríguez, M. L. (2022). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria*, *15*(4), 105-118. https://doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Martínez Miraval, M. A., García Cuéllar, D. J. y García Rodríguez, M. L. (2023). Covariational Reasoning and Instrumented Techniques in the Resolution of an Optimization Problem Mediated by GeoGebra. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 12*(1), 56-81. https://doi.org/10.17583/redimat.11419

Rasmussen, C., Marrongelle, K. y Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507-515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Sánchez Matamoros, G., García Blanco, M. M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. RELIME-*Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sutherland, R. y Rojano, T. (2014). Technology and Curricula in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 602-604). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_154

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus, 12*(3 y 4), 49-63.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. y Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 507-519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Thurm, D. y Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 41-63. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 149-156.

Vrancken, S. y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 449-468. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization? En. W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). Mathematical Association of America.

PädiUAQ

¿Quieres publicar en esta revista?

Enviar artículo

Síguenos en nuestras redes:

¿Dudas o sugerencias? Escríbenos a:

padiuaq@uaq.mx

REVISTA INCLUIDA EN:

latindex LatinREV

VISITA NUESTRO

FISIÓN PODCAST

Escucha de la voz de los autores, entrevistas y comentarios relacionados a sus artículos.

Disponible en:

MÁS REVISTAS UAQ EN:

revistas.uaq.mx

ingenieria.uaq.mx

Edición cuidada, diseñada y maquetada por

DESPACHO DE PUBLICACIONES

Visítanos y conoce las publicaciones que la FACULTAD DE INGNIERÍA DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERETARO tiene para ti:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA