ANA VICTORIA VAZQUEZ

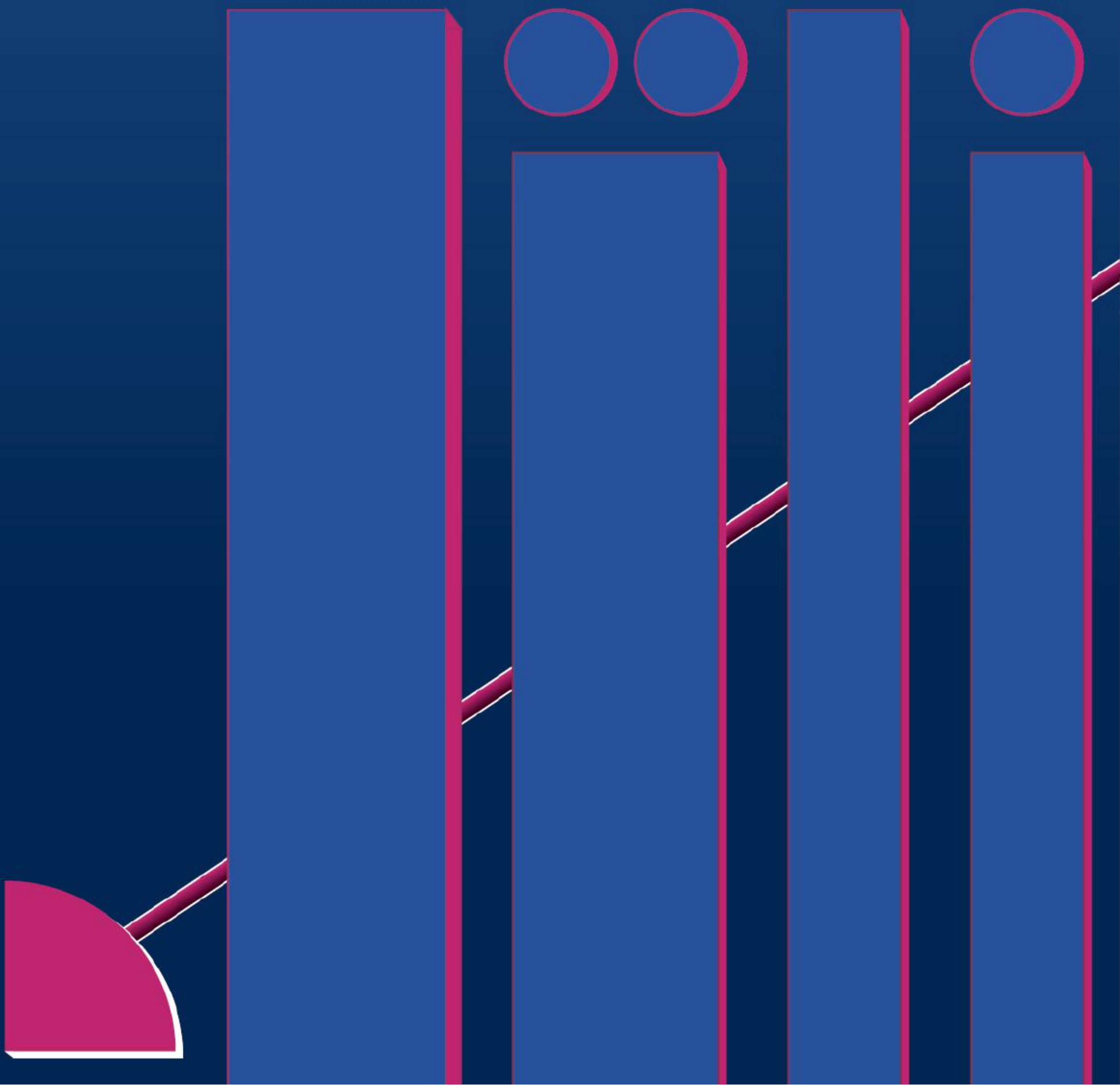
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

ANA VICTORIA.VAZLOZ@GMAIL.COM

01

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO ABSTRACTO DE ESPACIOS VECTORIALES

A PROPOSAL FOR TEACHING THE ABSTRACT CONCEPT OF VECTOR SPACES



RESUMEN

Debido a su conocida dificultad conceptual entre los estudiantes, existen diversas investigaciones que estudian el álgebra lineal en la disciplina de la didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, los trabajos desde la perspectiva de la enseñanza que se enfocan en el tema específico del concepto de espacio vectorial son muy pocos y es un campo de investigación reciente. Como parte de una investigación más amplia, que considera los fundamentos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en este artículo se presenta una propuesta de actividades que permite estudiar cómo los estudiantes se enfrentarán inicialmente al concepto de espacio vectorial.

Esta propuesta también posibilita que los estudiantes exploren las propiedades de los espacios vectoriales, de tal manera que las estructuras algebraicas presentadas les resulten similares a las que han trabajado en otras asignaturas y así la introducción a los conceptos abstractos del álgebra lineal no sea tan repentina como suele ser en la enseñanza tradicional.

ABSTRACT

Due to its known conceptual difficulty among students, there are many investigations that study linear algebra in the discipline of mathematics education. However, researches that focus on the specific concept of vector space from the perspective of teaching are not abundant and it is a recent research field. As a part of a broader investigation that considers the fundamentals of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), in this article a proposal of activities that allows to study how students will initially face the concept of vector space is presented. This proposal also allows students to explore the properties of vector spaces, so that the algebraic structures presented are similar to those that have worked in other courses. Thus, the introduction to the abstract concepts of linear algebra may not be as sudden as it usually is in traditional teaching.

Keywords: vector space, anthropological theory of the Didactic, difficulties, linear algebra, properties.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza tradicional del álgebra lineal, para el concepto de espacios vectoriales, la metodología se basa en la mecanización y la memorización de los axiomas que definen este concepto. Es muy importante mencionar que esta estructura algebraica es de naturaleza abstracta y es presentada a los estudiantes de manera súbita en su primer curso de álgebra lineal, lo cual provoca que su comprensión sea difícil para la mayoría de los estudiantes. Para Dorier y Sierpinska [1] existen dos razones a las dificultades de los estudiantes: la naturaleza misma del álgebra lineal y el tipo de pensamiento que se requiere para entender esta asignatura.

Entre las investigaciones que se han enfocado en el concepto de espacio vectorial, podemos resaltar el trabajo de Moreno [2], que realizó una analogía para ayudar a los estudiantes a comprender y memorizar los conceptos relacionados con los espacios vectoriales; la investigación de Kú, Trigueros y Oktac [3], que presentaron una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial e indagaron las posibles construcciones mentales que los estudiantes realizaron; en el trabajo de Parraguez [4] se estudió la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y el papel que juegan otras nociones del álgebra lineal para su comprensión.

Con la contribución de estas investigaciones, se han identificado y analizado los principales errores y las dificultades de los estudiantes al aprender sobre espacios vectoriales. Maracci [5] observó que los estudiantes, generalmente, suelen orientarse hacia los procesos, dando menor importancia a las estructuras de los espacios vectoriales. Estos aportes han ayudado al diseño de actividades para la enseñanza, de tal manera que se busca evitar dichos errores, y trabajar en las dificultades conocidas.

Es importante indagar sobre los procesos cognitivos del estudiante para conocer sus concepciones, sus dificultades en el aprendizaje y los errores que cometen en el proceso. Esto constituye un punto de apoyo esencial para la construcción de propuestas de enseñanza productoras de aprendizajes significativos. Por ello, el objetivo de este trabajo es proponer un recurso didáctico dirigido a estudiantes de un primer curso de álgebra lineal a los que sólo se les ha presentado la definición teórica de espacio vectorial, con la que se busca estudiar y responder la pregunta de investigación "¿Cómo se enfrentan los estudiantes de licenciatura inicialmente al concepto de espacio vectorial, a través de su definición?" y que, a su vez, los dirija a explorar sus propiedades de tal manera que logren comprobarlas en las estructuras algebraicas presentadas y puedan llevarlas posteriormente a estructuras más complejas.

Es necesario que, para la organización de la enseñanza y el aprendizaje, se preste especial atención al tipo de actividades que se utilizarán para presentar y estudiar los espacios vectoriales.

Los estudiantes están muy acostumbrados a trabajar con conceptos que pueden imaginar o representar de alguna forma gráfica [7]; por lo tanto, se les dificulta trabajar con espacios vectoriales cuya estructura algebraica no les permite concretar sus elementos. Sumando este argumento a los mencionados anteriormente, se recalca la importancia de presentar una propuesta de actividades didácticas que permitan a los estudiantes trabajar con espacios vectoriales de estructuras algebraicas que ya han trabajado con anterioridad para que, una vez que sean comprendidas, puedan desarrollarlas posteriormente en su razonamiento abstracto.

REFERENTES TEÓRICOS

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard, se toma el objeto de estudio junto con el proceso completo de la enseñanza y el aprendizaje, en este caso, del saber matemático, particularmente el concepto de los espacios vectoriales. Esta teoría postula que toda actividad humana puede explicarse con praxeologías [6], es decir, con la vinculación del saber-hacer (praxis) y el saber (logos). Se utiliza la noción de praxeología como herramienta para la organización de la enseñanza y el aprendizaje de la actividad matemática.

El modelo praxeológico de Chevallard se representa de la siguiente manera:

Tabla 1. Modelo Praxeológico

Praxeología=$[T,\tau,\theta,\Theta]$	
Praxis- Saber hacer	T Tipos de tareas τ Técnica
Logos- Saber	θ Tecnología Θ Teoría

El “saber hacer” o nivel de la praxis, que incluye un tipo de problemas o tareas y las técnicas para resolverlos.

El “saber” o nivel del logos, que incluye la tecnología, es decir, el discurso que describe y justifica las técnicas. Este nivel también incluye a la teoría, que se denomina como la tecnología de la tecnología, es decir, la teoría justifica a la tecnología. Para este trabajo no se profundizará en las teorías, pues se ha identificado que los estudiantes de alto desempeño responden hasta las tecnologías en las actividades escolares que les solicitan alguna justificación.

La praxeología matemática es el resultado del proceso de construcción matemática. A este proceso de construcción matemática se le conoce como proceso de estudio [8], el cual está estructurado por seis momentos didácticos que no son lineales, incluso pueden repetirse o aparecer de manera simultánea:

1. Momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas.
2. Momento de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica relativa.
3. Momento de la constitución de un entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica y que permita la construcción de nuevas técnicas.
4. Momento del trabajo de la técnica, que busca mejorar las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas.
5. Momento de la institucionalización, cuando se precisa la organización matemática construida con los elementos que la delimitan.
6. Momento de la evaluación, junto con el momento de institucionalización se reflexiona la praxeología construida.

Estos momentos y la relación entre ellos son importantes para realizar adecuadamente el proceso de estudio. De esta manera, el modelo praxeológico es la base para la organización y el diseño de la propuesta realizada en esta investigación.

MÉTODOS

Para este trabajo se realizó un estudio de tipo cualitativo y analítico [9]. Se inició con un análisis de la enseñanza tradicional, considerando los ejercicios y actividades propuestas por algunos libros de texto de álgebra lineal. Posteriormente, se realizó el análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de las técnicas y tecnologías que se utilizan para resolver las actividades tradicionales. Finalmente, se realizó el diseño y adecuación de las actividades que, desde la perspectiva de la

TAD, permitan estudiar el desarrollo de los estudiantes acerca de las propiedades de los espacios vectoriales.

ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL

En este trabajo no se profundizó en el análisis de libros de texto, solo se tomaron como referencia de análisis los ejercicios y actividades planteados en el tema de espacios vectoriales en los siguientes libros de álgebra lineal:

- Grossman, S. Matemáticas 4 Álgebra lineal, 6a edición. Editorial: Mc Graw-Hill, 2011.
- Anton, H. Introducción al álgebra lineal, 3ª edición. Editorial: Limusa, 1994.
- Grossman, S. & Flores, J. Álgebra lineal, 7a edición. Editorial: Mc Graw-Hill, 2012.
- Larson, R. & Edwards B. Introducción al Álgebra Lineal. Editorial: Limusa, 2004.

Los ejercicios y actividades identificadas en los libros de texto se vincularon con los errores y dificultades conocidas por los estudiantes para dar paso al diseño de la propuesta didáctica, objeto de este estudio.

PRAXEOLOGÍAS DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Las praxeologías de los espacios vectoriales que permiten el desarrollo de la propuesta didáctica sugerida son las de la Tabla 2.

En los tipos de tareas podemos encontrar:

T1: Realizar y comprobar: solicita al estudiante llevar a cabo alguna operación indicada y comprobar su resultado a través de una pregunta guiada.
T2: Comprobar que se cumpla: en este tipo de tarea se solicita al estudiante realizar las igualdades indicadas y verificarlas.
T3: Construir vector y analizarlo: se solicita al estudiante construir un vector que cumpla cierta propiedad o propiedades y analizarlo con una pregunta guiada.

En cuanto a las tecnologías, de acuerdo a la actividad propuesta, se irán presentando o construyendo sobre las tareas. A pesar de que algunos de los axiomas son intuitivos, otros pueden generar conflictos en las estructuras algebraicas más complejas, es por esto que la propuesta es reforzar las propiedades de un espacio vectorial,

Tabla 2. Praxeologías de los espacios vectoriales

Tipo de tarea	Técnica	Tecnología (propiedades)
T_1: Realizar y comprobar	τ_1 : Sumar dos vectores y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	θ_1 : Cerradura bajo la suma : Si $u \in V$ y $v \in V$, entonces $u + v \in V$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_2 : Sumar los vectores de ambos lados de la igualdad y verificar que se cumplan la igualdad	θ_2 : Ley asociativa de la suma de vectores: Para todo u, v, w en V, $(u + v) + w = u + (v + w)$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_3 : Sumar dos vectores y verificar que no importa el orden de suma, el resultado será el mismo	θ_3 : Ley conmutativa de la suma de vectores: Si u y v están en V, entonces $u + v = v + u$
T_3: Construir vector y analizarlo	τ_4 : Sumar un vector dado u con un vector desconocido e igualarlo al vector u, igualar y despejar los elementos correspondientes para obtener los elementos del vector desconocido	θ_4 : Vector cero o neutro aditivo: Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $u \in V$, $u + 0 = 0 + u = u$
T_3: Construir vector y analizarlo	τ_5 : Sumar un vector dado u con un vector desconocido e igualarlo al vector resultante del ejercicio anterior, igualar y despejar los elementos correspondientes, comparar el vector dado con el vector resultante	θ_5 : Inverso aditivo: Si $u \in V$, existe un vector $-u$ en V tal que $u + (-u) = 0$
T_1: Realizar y comprobar	τ_6 : Multiplicar un escalar por un vector y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	θ_6 : Cerradura bajo la multiplicación por un escalar : Si $u \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha u \in V$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_7 : Realizar las multiplicaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que el resultado sea el mismo	θ_7 : Ley asociativa de la multiplicación por escalares : Si $u \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_8 : Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	θ_8 : Primera ley distributiva (respecto de los vectores): Si u y v están en V y α es un escalar , entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_9 : Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	θ_9 : Segunda ley distributiva (respecto de los escalares): Si $u \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

poniéndolas en práctica en las estructuras más familiares para los estudiantes e incluso en las que se puede ver una representación gráfica; de tal manera que, con la práctica, se pueda extender este conocimiento a cualquier estructura abstracta más compleja de espacio vectorial.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se presentan a continuación las actividades diseñadas para el estudio del enfrentamiento inicial de los estudiantes con el concepto espacios vectoriales:

1. Dados los vectores $u=(2,\ 3)$, $v=(3,\ -5)$, $w=(-1{,}4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}2$. Y los escalares $\alpha=3$ y $\beta=-2$.

a) Realizar $u+v$ ¿El resultado de la suma pertenece a $\mathbb{R}2$?
b) ¿Se cumple $(u+v)+w = u+(v+w)$?
c) ¿Se cumple $u+v = v+u$?
d) Construir un vector $n \in \mathbb{R}2$, tal que $u+n=u$
¿Se puede concluir cómo sería un vector m tal que $x+m=x$ en $\mathbb{R}4$?
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior:
Construir un vector p, tal que $u+p=n$
Construir un vector q, tal que $v+q=n$
Construir un vector r, tal que $w+r=n$
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores u, v, w contra los p, q, r respectivamente?
f) Realizar αu ¿El resultado de la multiplicación pertenece a $\mathbb{R}2$?
g) ¿Se cumple $(\beta u)=(\alpha\beta)$?
h) ¿Se cumple $(u+v)=\alpha u+\alpha v$?
i) ¿Se cumple $(\alpha+\beta)=\alpha u+\beta u$?
j) ¿Es $\mathbb{R}2$ un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

2. Sean $(x)=3x+5$, $(x)=2x+4$, $h(x)=x-2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0{,}1]$. Y sean $\alpha=3$ y $\beta=-2$.

a) Realizar $f+g$ ¿El resultado de la suma pertenece a F?
b) ¿Se cumple $(f+g)+h = f+(g+h)$?
c) ¿Se cumple $f+g=g+f$?
d) Construir un vector $n \in F$, tal que $f+n=f$ ¿Puede existir otro vector diferente de n, llamado z, tal que $f+z=f$?
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector q, tal que $g+q=n$ ¿Qué se puede observar sobre su construcción al comparar los vectores g y q respectivamente?
f) Realizar αf ¿El resultado de la multiplicación pertenece a F?
g) ¿Se cumple $(\beta f)=(\alpha\beta)$?
h) ¿Se cumple $(f+g)=\alpha f+\alpha g$?
i) ¿Se cumple $(\alpha+\beta)=\alpha f+\beta f$?
j) ¿Es F un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

3. Sean $(x)=5x+4$, $(x)=x2$, $(x)=2x2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha=3$ y $\beta=-2$.

a) Realizar $p+q$ ¿El resultado de la suma pertenece a P? ¿Por qué?
b) ¿Se cumple $(p+q)+r=p+(q+r)$? ¿Por qué?
c) ¿Se cumple $p+q=q+p$? ¿Por qué?
d) Construir un vector $n \in P$, tal que $p+n=p$. ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido n?
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p+m=n$ ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido m?
f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a P? ¿Por qué?
g) ¿Se cumple $(\beta p)=(\alpha\beta)$?
h) ¿Se cumple $(p+q)=\alpha p+\alpha q$? ¿Por qué?
i) ¿Se cumple $(\alpha+\beta)=\alpha p+\beta p$?
j) ¿Es P un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

4. Sean $(x)=x3+1$, $(x)=-x3$, $(x)=x3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha=3$ y $\beta=-2$.

a) Realizar $p+q$ ¿El resultado de la suma pertenece a W? ¿Por qué?
b) ¿Se cumple $(p+q)+r=p+(q+r)$?
c) ¿Se cumple $p+q=q+p$?
d) Construir un vector $n \in W$, tal que $p+n=p$. ¿El vector n pertenece a W? ¿Por qué?
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p+m=n$
¿El vector m pertenece a W? ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector m?
f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a W? ¿Por qué?
g) ¿Se cumple $(\beta p)=(\alpha\beta)$?
h) ¿Se cumple $(p+q)=\alpha p+\alpha q$?
i) ¿Se cumple $(\alpha+\beta)=\alpha p+\beta p$?

j) ¿Es W un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Como se puede apreciar, cada inciso de cada actividad corresponde a una tecnología respectivamente, es decir, a cada una de las propiedades que definen a un espacio vectorial. Además de que las actividades se resolverán bajo ciertas técnicas, también se les solicita dar una justificación sobre la lógica bajo la que se determinó la solución dada. Del mismo modo, se hace uso de la repetición para diferentes estructuras algebraicas, con la intención de conseguir la construcción y comprensión de las propiedades de forma general utilizando estos casos particulares.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el diseño de esta propuesta se busca motivar a los estudiantes a los que se les está presentando por primera vez la definición de espacios vectoriales. Debido a esto, la importancia de las estructuras algebraicas seleccionadas, en las que, según el análisis a priori, se demuestra que se requieren estrategias conocidas por los estudiantes de licenciatura que están en un curso de álgebra lineal para su realización. Por ejemplo, presentamos a continuación una posible respuesta esperada de la actividad 1:

1. Dados los vectores $u = (2, 3)$, $v = (3, -5)$, $w = (-1, 4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}2$. Y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.
a) Realizar $u + v$; ¿El resultado de la suma pertenece a $\mathbb{R}2$?
$u + v = (2, 3) + (3, -5) = (5, -2) \in \mathbb{R}2$
b) ¿Se cumple $(u+v)+w=u+(v+w)$?
$((2, 3) + (3, -5)) + (-1, 4) = (2, 3) + ((3, -5) + (-1, 4))(5, -2) + (-1, 4) = (2, 3) + (2, -1)$
$(4, 2) = (4, 2)$; Sí se cumple.
c) ¿Se cumple $u + v = v + u$?
$(2, 3) + (3, -5) = (3, -5) + (2, 3)$
$(5, -2) = (5, -2)$; Sí se cumple.
d) Construir un vector $n \in \mathbb{R}2$, tal que $u+n=u$
$(2, 3) + (n1, n2) = (2, 3)$
$(2 + n1, 3 + n2) = (2, 3)$
$2 + n1 = 2$ $\quad n1=0$
$3 + n2 = 3$ $\quad n2=0$
$n = (0, 0) \in \mathbb{R}2$
¿Se puede concluir cómo sería un vector m tal que $x + m = x$ en $\mathbb{R}4$?
Sea $x = (x1, x2, x3, x4) \in \mathbb{R}4$ y $m = (m1, m2, m3, m4) \in \mathbb{R}4$, tal que $x + m = x$; $m=(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}4$
Para cumplir esta propiedad el vector a buscar siempre debe ser neutro en la adición.
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior.
Construir un vector p, tal que $u+p=n$
$(2, 3) + (p1, p2) = (0, 0)$
$(2 + p1, 3 + p2) = (0, 0)$
$2 + p1 = 0$ $\quad p1=-2$
$3 + p2 = 0$ $\quad p2=-3$
$p = (-2, -3)$
Construir un vector q, tal que $v+q=n$
$(3, -5) + (q1, q2) = (0, 0)$
$(3 + q1, -5 + q2) = (0, 0)$
$3 + q1 = 0$ $\quad q1=-3$
$-5 + q2 = 0$ $\quad q2=5$
$q = (-3, 5)$
Construir un vector r, tal que $w + r = n$
$(-1, 4) + (r1, r2) = (0, 0)$
$(-1 + r1, 4 + r2) = (0, 0)$
$-1 + r1 = 0$ $\quad r1=1$
$4 + r2 = 0$ $\quad r2=-4$
$r = (1, -4)$
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores u, v, w contra los p, q, r respectivamente?
Podemos observar que existe un vector inverso para cada vector que hará que obtengamos el vector neutro al sumarlos.
f) Realizar αu ¿El resultado de la multiplicación pertenece a $\mathbb{R}2$?
$\alpha u = 3\ (2, 3) = (6, 9) \in \mathbb{R}2$
g) ¿Se cumple $(\beta u) = (\alpha\beta)$?
$(\beta u) = 3(-2(2, 3)) = 3(-4, -6) = (-12, -18)$
$(\alpha\beta)u = [(3)(-2)](2, 3) = -6(2, 3) = (-12, -18)$
h) ¿Se cumple $(u + v) = \alpha u + \alpha v$?
$3[(2, 3) + (3, -5)] = 3(2, 3) + 3(3, -5)$
$3(5, -2) = (6, 9) + (9, -15)$
$(15, -6) = (15, -6)$
i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta) = \alpha u + \beta u$?
$(3 - 2)(2, 3) = 3(2, 3) - 2(2, 3)$
$(1)(2, 3) = (6, 9) - (4, 6)$
$(2, 3) = (2, 3)$
j) ¿$\mathbb{R}2$ es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Podemos observar que es un espacio vectorial ya que cumple con las propiedades de:

Cerradura bajo la suma
Ley asociativa de la suma de vectores
Ley conmutativa de la suma de vectores
Neutro aditivo
Inverso aditivo

Cerradura bajo la multiplicación por un escalar
Ley asociativa de la multiplicación por escalares
Primera ley distributiva (respecto de los vectores)
Segunda ley distributiva (respecto de los escalares)
Neutro multiplicativo

De forma análoga, podemos observar las posibles técnicas a ser utilizadas en las demás actividades, ya que los tipos de tareas serán los mismos, pero con una estructura algebraica diferente. Se espera que las tecnologías sean observadas en la justificación de las respuestas dadas.

Otro aspecto importante que no podemos olvidar son los errores esperados de acuerdo a los ya identificados por otras investigaciones [5]. En el caso del tipo de tarea T1, comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado puede ser difícil para algunos estudiantes que no estén familiarizados con las estructuras algebraicas abstractas más complejas, así como las tareas T3, que solicitan la construcción de un vector que cumpla ciertas propiedades. Por esto, es de importancia lograr que los estudiantes manejen inicialmente los axiomas que definen a un espacio vectorial en casos que puedan visualizar o incluso que puedan modelar, y puedan posteriormente generalizarlos a cualquier caso de espacio vectorial.

CONCLUSIONES

El álgebra lineal es una asignatura común para la mayoría de las licenciaturas pertenecientes a las facultades de ingeniería, y sus contenidos son de gran importancia para distintas áreas de las Matemáticas, Ciencias e Ingenierías. Los espacios vectoriales son solo una pequeña porción de los contenidos abstractos de estas áreas. Respecto a esto, se busca favorecer la motivación y el interés de los estudiantes y darle mayor importancia a las actividades que se presentan dentro y fuera del aula, ya que es a través de éstas y con la dirección del profesor, que los estudiantes van a explorar y, eventualmente, aprender los contenidos matemáticos.

Por estos argumentos se proponen las actividades didácticas mencionadas, con las que se le permitirá al estudiante trabajar cada propiedad que define a un espacio vectorial, dando oportunidad a que incluso pueda construirlas en su razonamiento. Atendiendo así las dificultades identificadas acerca de la estructura de este contenido matemático.

Por otra parte, la puesta en práctica de las actividades propuestas, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, permite que el profesor o el investigador estudien como se enfrentan inicialmente los estudiantes a las propiedades que definen un espacio vectorial. Esto puede ayudar en la planeación de las siguientes sesiones y actividades, una vez que se observa dónde está la mayor problemática, y así continuar exitosamente a los espacios vectoriales de estructuras algebraicas más complejas.

Con la misma intención, se invita a que se haga uso de otros apoyos para la enseñanza inicial de este contenido matemático, como software con el que se pueda hacer el modelado de las actividades propuestas, ya que son casos en los que los estudiantes podrán ver gráficamente los vectores.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido mediante una beca para realizar estudios en el programa de maestría en Didáctica de las Matemáticas.

REFERENCIAS

[1] J. L. Dorier, and A. Sierpinska, "Research into the teaching and learning of linear algebra", in The teaching and learning of mathematics at university level, New ICMI Study Series, vol. 7, Springer, Dordrecht, 2001, pp. 255-273.
[2] M. Moreno, "Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul", SUMA, vol. 37, pp. 75-82, 2001.
[3] K. Kú, M. Trigueros y A. Oktac, "Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE", Educación Matemática, vol. 20, no. 2, pp. 65-89, ago. 2008.
[4] M. Parraguez, "Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial", tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional, México, 2009.
[5] M. Maracci, "Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory", Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, vol. 40, no. 2, pp. 265-276, 2008.
[6] Y. Chevallard, "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", Recherches en Didactique des

Mathématiques, vol. 19, no. 2, pp. 221-266, 1999.

[7] P. Ortega Pulido, "La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico", tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España, 2002.

[8] M. Bosch, F. García, J. Gascón y L. Ruiz Higueras, "La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico", Educación matemática, vol. 18, no. 2, pp. 37-74, 2006.

[9] O. León y I. Montero, Métodos de investigación en psicología y educación. España: Mc Graw Hill, 2003.