

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y PENSAMIENTO REFLEXIVO

MATHEMATICS EDUCATION AND REFLECTIVE THOUGHT

Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

Licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial - CompartirIgual 4.0 Internacional (cc by-nc-sa 4.0).



Ángel Homero Flores Samaniego

Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad de México, México
ahfs@unam.mx
<https://orcid.org/0000-0001-5615-0049>

Resumen

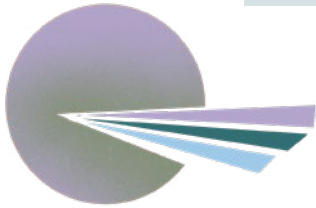
¿Qué somos? ¿docentes, profesores, formadores, educadores, maestros, instructores?, ¿cuál es nuestro ámbito de acción? ¿La educación matemática, la didáctica de la matemática, la enseñanza de la matemática, la matemática educativa, la docencia en matemática?, ¿Qué papel deben jugar la pedagogía y la didáctica en el proceso educativo de los estudiantes, entendido como su inserción en la sociedad como ciudadanos que contribuyen a su desarrollo?, ¿el estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso? En el presente ensayo se buscará respuesta a estas preguntas desde la perspectiva Deweyana sobre pensamiento reflexivo y aprendizaje. La reflexión termina con el planteamiento de las bases de un modelo de intervención didáctica que fomenta el pensamiento reflexivo en un ambiente de tolerancia, respeto y cooperación; un ambiente en el que se contemplan cinco dimensiones importantes: contenido curricular, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, identidad y pertenencia, y retroalimentación formativa. Todo en un afán de simplificar la didáctica y el quehacer en el aula.

Palabras clave: ambiente de aprendizaje, educación matemática, investigación educativa, pensamiento reflexivo.

Abstract

What are we? Teachers, professors, trainers, educators, masters, instructors? What is our scope of action? Mathematics education, mathematics didactics, mathematics teaching, educational mathematics? What role should pedagogy and didactics play in the educational process of students, understood as their insertion into society as citizens who contribute to its development? Can the study of mathematics at school contribute to this process? In this essay we will seek answers to these questions from the Deweyan perspective on reflective thinking and learning. The reflection ends with the approach of the bases of a didactic intervention model in which reflective thinking is encouraged in an environment of tolerance, respect, and cooperation; an environment in which five equally important dimensions are considered: curricular content, cognitive demand, equitable access to content, identity and belonging, and formative feedback. All to simplify didactics and tasks in the classroom.

Keywords: learning environment, mathematics education, educational research, reflective thinking.



Introducción

Tanto por el contenido como por el origen, la actividad y la mente [humanas] son sociales: son actividad social y mente social... Si el hombre es, por naturaleza, un ser social, sólo puede desarrollar su verdadera naturaleza en la sociedad y el poder de su naturaleza no deberá medirse por el poder de los individuos privados sino por el de la sociedad.

Karl Marx



¿Qué somos? ¿Docentes, profesores, formadores, educadores, maestros, instructores? ¿Cuál es nuestro ámbito de acción? ¿La educación matemática, la didáctica de la matemática, la enseñanza de la matemática, la matemática educativa, la docencia en matemática?

En alguna ocasión, en el contexto de un congreso sobre educación matemática, un catedrático-investigador de una universidad mexicana decía que, en el ámbito de la educación escolarizada, un educador atiende a niños de preescolar, un docente a estudiantes de los niveles primario, secundario y medio superior, mientras que un profesor o maestro es el profesional que enseña en el nivel superior. Con respecto a la matemática –decía–, un educador, además de instruir en cuestiones de comportamiento, enseña algunos aspectos básicos de la matemática. Un docente se dedica, básicamente, a enseñar matemática y su papel como educador es mínimo y va disminuyendo conforme se avanza en los niveles escolares. Finalmente, el profesor o maestro (académico o catedrático) dicta cátedra de matemáticas en las universidades y parte



En el presente ensayo se buscará simplificar la didáctica y el quehacer en el aula desde la perspectiva deweyana sobre Pensamiento reflexivo y el aprendizaje. La reflexión termina con el planteamiento de las bases de un modelo de intervención didáctica que fomenta el pensamiento reflexivo.

de sus actividades es hacer investigación, ya sea en el campo de su conocimiento o en educación. Esta visión de la docencia se encuentra no solo en académicos universitarios, sino también en docentes de niveles básicos.

Ahora bien, el término *educación matemática* se utiliza en ciertos casos como sinónimo de *didáctica matemática*, y en otros como sinónimo de *investigación educativa en matemática*. En algunas instituciones de educación superior de México y en algunos países latinoamericanos, se utiliza el término *matemática educativa* (acuñado en el Cinvestav-IPN de México) para referirse a la investigación educativa en matemáticas:

A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar las matemáticas y la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa (Cantoral y Farfán, 2003).

El término *educación matemática* se refiere a lo relativo a la enseñanza-aprendizaje de la matemática (casi siempre en un ambiente escolarizado). Por su parte, España y Francia atribuyen al término un significado parecido al de *educación matemática*:

En los años 70 surge en Francia la acepción de “Didáctica de las Matemáticas” por el investigador Guy Brousseau, quien levanta bajo este nombre una nueva disciplina científica que estudia la comunicación de conocimientos y de sus transformaciones, por medio de una epistemología experimental que intenta teorizar sobre la producción y circulación de los saberes (Vidal, R, 2016, p. 1).

En países como Inglaterra y Estados Unidos, se utiliza el término *mathematics education* para hablar de cuestiones de enseñanza-aprendizaje de la matemática o de la investigación educativa en matemática. Por si fuera poco, hay autores que toman los términos como sinónimos:

La mayoría de las actividades de la ME [matemática educativa] están relacionadas con la problemática que se presenta en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La denominación varía de acuerdo a las diferentes regiones geográficas, ya que en Europa se denomina didáctica de las matemáticas, para los de habla inglesa Mathematics Education y Educación Matemática en varios países de habla hispana (Nieto, Viramontes y López, 2009, p. 16).

Ante este panorama cobran sentido las preguntas con que inicia este texto y se pueden resumir en lo siguiente: ¿qué somos y cuál es nuestro campo de trabajo o de actividad? En el presente ensayo, además de responder a la pregunta anterior, se hace una reflexión sobre el quehacer educativo en el ámbito de la matemática y sobre el papel de la pedagogía y la didáctica en este quehacer; sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático y, por último, sobre el papel de la matemática en el desarrollo educativo del estudiante.

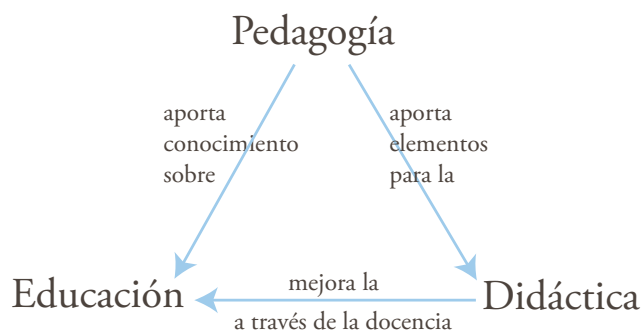
Pedagogía, didáctica y educación

En el presente ensayo se retoma la concepción de pedagogía como la ciencia de la educación que describe y explica el fenómeno educativo en sus vínculos con la praxis social de humanización (Franco, 2012) y se entiende como humanización el proceso de integración de un individuo a una sociedad dada. Es innegable que el ser humano es un animal social, como apuntala Marx; su esencia, aquello que lo caracteriza, se desarrolla y tiene sentido en el seno de una sociedad. En consecuencia, la sociedad es la encargada de educar (humanizar) a sus integrantes, de forma que colaboren en su desarrollo y la enriquezcan. Se considera, señala Engels, que el pensamiento y la consciencia del humano son producto de su cerebro, que a su vez es resultado de la

naturaleza (Antidhüring, 1878, 2003). Entonces, pensamiento y consciencia deben ser parte de la conexión natural: la sociedad en armonía con la naturaleza.

Parte de la pedagogía se encarga del estudio de los fenómenos educativos en el seno de los sistemas escolarizados y tiene influencia en la didáctica, que diseña y estudia las técnicas y las estrategias de aprendizaje en la escuela. En consecuencia, la escuela es fundamental en el proceso de humanización de los integrantes de una sociedad (Figura 1).

FIGURA 1.
Relación entre pedagogía, didáctica y educación.



En el ámbito del aprendizaje escolar de la matemática, la pedagogía se encarga de estudiar los fenómenos educativos dentro de un aula de matemática y aportar estrategias, métodos y técnicas para mejorar la educación matemática de los estudiantes, es decir, enriquecer la didáctica matemática. La educación matemática es tanto el proceso de aprendizaje de la disciplina como el cúmulo de conocimiento matemático del estudiante y su correcta aplicación en múltiples contextos, ya sean escolarizados o no.

Cuando se habla de docencia, se hace referencia al quehacer de un profesor dentro del aula; por tanto, el docente de matemática es el encargado de fomentar el aprendizaje de la disciplina en la escuela (independientemente del nivel educativo en el que se desempeñe). Gracias a su preparación y compromiso con su labor educativa, el docente hará una mejor práctica de la didáctica, incorporando elementos aportados por la pedagogía.

Cuando se habla de didáctica, se dice que su objetivo es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje: la enseñanza como actividad indispensable para lograr el aprendizaje. En este sentido, se generaliza la concepción de didáctica matemática en los términos que expresan Artega y Macías (2016):

La didáctica de las matemáticas centra su interés en aquellos aspectos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (metodologías y teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, etc.) de este campo de conocimiento, facilitando a maestros y profesores herramientas necesarias para impartir la docencia sobre unos cimientos consistentes, orientándole y guiándole en el ejercicio de su profesión en beneficio del aprendizaje de sus alumnos.

La docencia se imparte¹ y los modelos de enseñanza-aprendizaje apuntan a mejorar las técnicas y las estrategias de enseñanza para propiciar o fomentar un mejor aprendizaje (o un "aprendizaje significativo", como suele decirse en el ámbito). Vastos modelos se basan en el llamado *triángulo didáctico* o *triángulo pedagógico*, en el que se muestran las relaciones entre el saber, el profesor y el estudiante. La enseñanza es la relación que existe entre el profesor y el saber (el profesor enseña el saber o conocimiento), el aprendizaje es la relación entre el saber y el estudiante (el estudiante aprende un cierto saber) y la formación es la relación que media entre el profesor y el estudiante (el profesor forma al estudiante). En la Figura 2 se aprecia el triángulo pedagógico diseñado por Houssaye (1988).

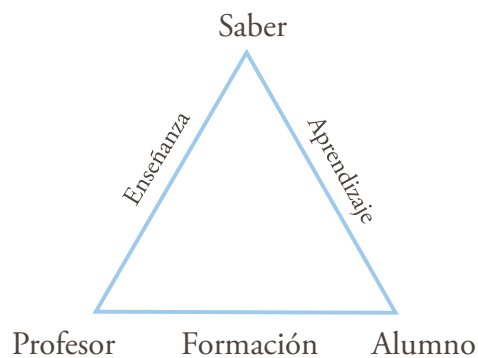


FIGURA 2. Triángulo pedagógico. Reproducido en Ibáñez (2007).

Conceptos como *transposición didáctica* se acuñaron en el seno de teorías destinadas a mejorar la enseñanza del saber:

¹Impartir, dar o distribuir algo, especialmente de carácter no material: <https://dle.rae.es/impartir>

...un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985).

En la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (1977) se transforman situaciones a-didácticas (que no tienen una intención de enseñanza) en situaciones didácticas (con las cuales se enseña un cierto saber), a través de la transposición didáctica. Por lo general, la interpretación de la teoría de Brousseau tiene un sesgo hacia la enseñanza para mejorar el aprendizaje. En una didáctica de este tipo, se parte del supuesto de que el profesor es el experto tanto en la disciplina como en didáctica, y es capaz de hacer la transposición didáctica y enseñar el conocimiento; es decir, el aprendizaje del contenido matemático, o de cualquier materia, dependerá de la experiencia y sapiencia del profesor y de su manejo de la didáctica.

Este modelo de enseñanza-aprendizaje conlleva una carga ideológica enorme: existe un ser superior que posee el conocimiento, los medios y la disposición para enseñarlo a sus estudiantes. Este ser decide si sus estudiantes han aprendido lo que él les enseña y para ello los examina meticulosamente. En caso negativo, él decide si el estudiante tiene derecho a seguir adelante con las materias siguientes y, en muchos casos, su decisión determina si el estudiante sigue o no con sus estudios. Este esquema de enseñanza ha estado vigente en nuestras escuelas (en particular en el sistema superior) desde hace varios siglos, independientemente de teorías constructivistas o socioculturales que dicen cómo aprende el ser humano. El concepto de *evaluación* como sinónimo de *calificación* a través de exámenes es una prueba fehaciente de esto. ¿Podemos imaginar los niveles medio, medio superior y superior mexicanos sin exámenes extraordinarios?

El esquema presentado en el párrafo anterior apunta a una educación elitista en la que pocos alcanzan el éxito en la sociedad; solo llegan aquellos que se apegan a las reglas del juego y hacen lo que se les dice, pues de este modo sus problemas en la escuela serán menos y la probabilidad

de éxito (medido en ingresos monetarios) mayor. En el contexto de una sociedad democrática que vive y se desarrolla en un entorno de degradación ambiental evidenciada principalmente por fenómenos como el calentamiento global y la extinción de especies animales y vegetales, ¿qué papel deben jugar la pedagogía y la didáctica en el proceso de humanización de los estudiantes?, ¿el estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso?

La respuesta a la primera pregunta parte del enfoque que le demos a la didáctica y, tomando en cuenta esto, qué tiene que decir la pedagogía. Se empieza considerando que el binomio enseñanza-aprendizaje no es una unidad indisoluble y que la didáctica puede enfocarse en el aprendizaje y dejar de lado la intermediaria, a menudo negativa, de la enseñanza (o por lo menos negarle protagonismo).

En primer lugar, el profesor dejaría de ser el experto que enseña, que da la luz, para convertirse en un organizador y diseñador de actividades y en un recurso más del estudiante para el aprendizaje propuesto en el currículo. En segundo, el estudiante no sería un objeto susceptible para enseñarle y del cual el profesor debe extraer evidencias del aprendizaje mediante un examen riguroso de su conocimiento. Por el contrario, el estudiante es un aprendiz que, mediante su desempeño y actividad en el grupo, proporciona evidencias de su aprendizaje. Estas evidencias las evalúan los demás integrantes del grupo (profesor y compañeros estudiantes) que conforman una suerte de comunidad de aprendizaje, entendida como un conjunto de personas que conviven armónicamente en busca de un conocimiento común. En tercero, al conformarse en una comunidad de aprendizaje, es posible que el grupo fomente valores como tolerancia, respeto y cooperación en un afán por conseguir el objetivo común: el aprendizaje de la materia.

Por último, si se forman líderes no sería por decreto o por temor, como se da con frecuencia en una didáctica centrada en la enseñanza, sino por su capacidad de aprender y compartir su conocimiento con los demás. Es factible que los estudiantes sean aprendices con un conocimiento aceptable de la materia, con disponibilidad para compartirlo, y que se identifiquen como una parte activa de la comunidad. Se tendría un espacio en que la autoestima y la confianza de los estudiantes serían altas.

La respuesta a la segunda pregunta es positiva: el aprendizaje de la matemática puede contribuir al proceso de humanización del estudiante; es decir, a su formación como ser que se desempeña dentro de una sociedad y trabaja para su desarrollo y avance con la convicción de que de ello dependerá su propio bienestar. Para que dicha humanización sea posible, es necesario hacer una reflexión sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático.

La matemática y el pensamiento matemático

La matemática es el cuerpo de conocimiento relativo a los números y al espacio; en cuanto a los primeros, estudia sus operaciones, interrelaciones, combinaciones, generalizaciones y abstracciones; con respecto al segundo, estudia su estructura, medición y transformaciones. Se trata de una teoría o ciencia aplicada que explica la realidad a través del modelado (o modelaje) matemático. Es una herramienta en la resolución de problemas en ámbitos no matemáticos; constituye una metaciencia en el sentido de que se estudia a sí misma y aborda problemas que surgen de la matemática; además, funge como un lenguaje para comunicar información y aclarar ideas (Merriam Webster's Collegiate, Dictionary, 1993; SUMEM, 2014).

El conocimiento matemático se genera a través de la acción, la experimentación y la reflexión sobre lo actuado y lo experimentado, independientemente del uso de la matemática como teoría aplicada o metaciencia. Se cimienta en la definición de objetos matemáticos, afirmaciones y hechos fundamentales con respecto a la relación entre tales objetos que se dan por verdaderos o válidos (definiciones y axiomas o postulados); surge como una conjetura que debe validarse tomando en cuenta las definiciones y los axiomas: una vez confirmada, adquiere el rango de *teorema*, que a su vez comparte el mismo nivel que un axioma.

La reflexión matemática que lleva al conocimiento está conformada por una serie de razonamientos que constituyen lo que aquí se denomina *pensamiento matemático*; por consiguiente, no es otra cosa que una manifestación del pensamiento reflexivo en el quehacer matemático. Según Dewey (1910), el pensamiento reflexivo es un razonamiento en el que reconsideramos nuestras creencias debido a información nueva; se

manifiesta como una concatenación de ideas en las que una de ellas es consecuencia de la anterior.

Dewey define cinco pasos lógicos del pensamiento reflexivo (Flores, 2017):

1. La sensación de una dificultad o su percepción.
2. Su ubicación y su definición.
3. Sugerencias de posibles soluciones o explicaciones en la forma de hipótesis o conjeturas.
4. El desarrollo, mediante razonamientos lógicos, de las implicaciones de las conjeturas.
5. Observación y experimentación más detalladas que llevan a la aceptación o al rechazo de la conjetura.

Esta secuencia se conoce como *razonamiento abductivo*, caracterizado por Peirce (2014) de la siguiente manera:

Se percibe un cierto hecho (H) que asombra o llama la atención. Se piensa: si c fuera cierto, entonces estaríamos observando el hecho H, y como lo estamos observando, entonces es plausible (posible) que c sea cierto. c es la conjetura que, de ser cierta o válida, explicaría el hecho H, por tanto, el siguiente paso es buscar la validez de la conjetura.

En el desarrollo de la ciencia hay una infinidad de ejemplos de este tipo de razonamiento. La explicación del efecto fotoeléctrico es uno; se observa que, al incidir cierto tipo de luz sobre algunos metales, estos emiten electrones (H); si la luz, en lugar de comportarse como una onda, se comportara como una partícula (c), entonces se observaría el efecto fotoeléctrico. En consecuencia, es factible que la luz se comporte como un haz de partículas. Albert Einstein publicó esta conjetura en un texto de 1905, *Heurística de la generación y la conversión de la luz*, cuya demostración lo llevó a obtener el Premio Nobel en 1921.

El pensamiento reflexivo de una persona será más efectivo cuanta más información y conocimiento tenga. En el ámbito de la matemática, la

aplicación de la teoría y la forma de argumentar y validar conjeturas será mejor en la medida en que el individuo avance y profundice en la disciplina. Por tanto, cuando se habla de un pensamiento matemático avanzado, en realidad se habla de un pensamiento reflexivo ejercido por un individuo cuyo conocimiento matemático es avanzado.

Consideremos el siguiente episodio (que sucedió en una de mis clases): al inicio del estudio de la geometría analítica en un curso de bachillerato, se pide a los estudiantes hallar una de las alturas de un triángulo del cual sólo se tienen las coordenadas de sus vértices. El profesor esperaba que los estudiantes usaran la fórmula para encontrar la distancia de un punto a una recta. Los alumnos trabajaban en parejas. Uno de los equipos obtuvo su altura aplicando la ley de cosenos al triángulo para obtener uno de sus ángulos interiores y con el seno de este hacer el cálculo. El profesor preguntó por qué no habían usado la fórmula de la distancia de un punto a una recta, a lo que los estudiantes respondieron que sí lo habían considerado, pero como no tenían la ecuación de la recta y no estaban seguros de cómo obtenerla, decidieron aplicar lo que sabían de trigonometría.

¿Cuál de los dos procedimientos es más efectivo? ¿De haber sabido cómo encontrar la ecuación de la recta teniendo dos de sus puntos, habrían usado la fórmula? ¿El razonamiento que usaron los estudiantes para resolver el problema es más avanzado o complejo que si hubieran usado la fórmula? La cuestión es que el conocimiento provee recursos para que el pensamiento reflexivo sea más efectivo; no hay escalas en el pensamiento reflexivo (o en el pensamiento matemático).

En este tenor, se suele dividir el pensamiento matemático en varios tipos: numérico, algebraico, geométrico, variacional, probabilístico, etcétera. Si consideramos que, para su estudio, la matemática es un único cuerpo de conocimiento que se divide en ramas, como la geometría, la trigonometría o la topología, entonces no tiene sentido dividir el pensamiento matemático en una mirada de pensamientos que sólo vienen a complicar el panorama de la didáctica y de la educación matemática: el pensamiento matemático es uno y se manifiesta con características diferentes dependiendo de la rama en que se aplica.

Otra cuestión importante es que el conocimiento generado por el pensamiento reflexivo puede ser adoptado socialmente y utilizado en la

medida de su efectividad. Por ejemplo, en una actividad de preescolar (Brizuela, 2013), estudiantes entre 3.5 y 4 años tenían que dividir algunas figuras geométricas en cuatro partes iguales. Una de las estudiantes se dio cuenta de que si trazaba una cruz sobre la superficie que quería dividir, podría obtener cuatro partes iguales. Usó este procedimiento en sus actividades y le explicó a sus compañeros: más adelante, la totalidad de los integrantes del grupo usaban lo que ellos llamaron *la regla de la cruz* para dividir figuras en cuatro partes iguales. Las figuras que usaron fueron círculos, rectángulos y cuadrados, por lo que la regla se podía aplicar sin problemas.

La regla de la cruz no es una regla general, y es fácilmente refutable si usamos figuras asimétricas, pero ese no es el punto a resaltar en este caso, sino que una conjetura (la regla de la cruz o cualquier otra) es válida en la medida que se pueda aplicar para resolver problemas o explicar fenómenos. De hecho, dejó de tener vigencia cuando, al final de la actividad, se partió un pastel que había que repartir proporcionalmente entre 10 personas: 9 estudiantes y la maestra. Una situación similar es la que retoma Lakatos en su ensayo *Pruebas y refutaciones* (1976), el cual es una ilustración del pensamiento reflexivo en el seno de una sociedad matemática a lo largo de varios siglos.

En resumen, el pensamiento matemático juega un papel relevante en la generación y en la validación de conocimiento matemático. El razonamiento abductivo es, en la mayoría de los casos, el detonante del pensamiento reflexivo. Una vez planteada una conjetura como explicación plausible de nuestra observación o nuestro resultado, buscamos validarla mediante procedimientos inductivos y deductivos en lo que llamamos *esquemas de argumentación* (Flores, 2007; 2017). Ahora bien, es hacedero fomentar y desarrollar el pensamiento reflexivo en un ámbito escolar. El estudio de la matemática es uno de los vehículos que conducen a este desarrollo y, a su vez, el uso del pensamiento reflexivo facilita enormemente el aprendizaje de la matemática. Es decir, ambas nociones conforman un círculo virtuoso que se optimizaría si la docencia estuviera fundamentada en una didáctica centrada en el aprendizaje.

Educación matemática y didáctica

Al inicio del presente texto se definió la *educación matemática* como el proceso de aprendizaje de la matemática, el bagaje de conocimiento matemático que posee un individuo y su correcta aplicación.

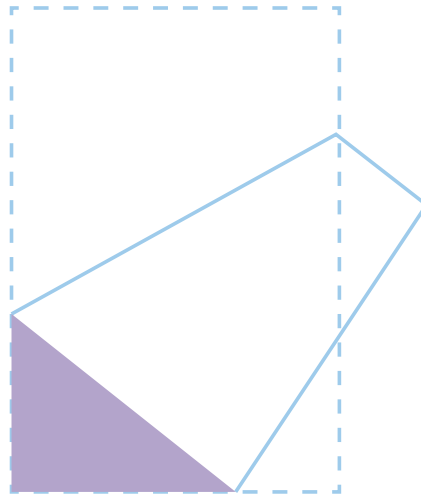
En una didáctica centrada en el aprendizaje se consideran dos aspectos primordiales: las actividades y el ambiente de aprendizaje. Para que, sin importar su nivel educativo, los estudiantes tengan una buena educación (apliquen el conocimiento matemático de manera correcta) se toman en cuenta las cuatro funciones de la matemática en el desarrollo de las actividades de aprendizaje en el aula: herramienta, ciencia o teoría aplicada, metaciencia y lenguaje. Para su estudio y aplicación, se pueden clasificar las actividades de aprendizaje como actividades de exploración y formación de conjeturas, resolución de problemas y modelado.

El primer tipo de actividades, por lo general, se da en el ámbito de la geometría y refuerza el desarrollo del pensamiento reflexivo en cuanto al uso de esquemas de argumentación en la validación de conjeturas. El segundo tipo de actividades fomenta el desarrollo de heurísticas de resolución de problemas y la aplicación de algoritmos. Al final, en las actividades de modelado se pone énfasis en la aplicación de la matemática para la explicación de fenómenos naturales o no, matemáticos o no.

Los elementos de la clasificación no son mutuamente excluyentes; es decir, se pueden tener actividades donde predomina el modelado, pero esto no descarta la formación de conjeturas ni la resolución de problemas de aplicación; la clasificación obedece al énfasis que se pone en alguno de los aspectos sin obviar los otros. A modo de ejemplo, se propone la siguiente actividad diseñada a partir de un problema clásico de optimización en cálculo diferencial.

Se pide a los estudiantes que doblen una hoja rectangular de papel de modo que una de las esquinas superiores quede justo en el borde inferior (Figura 3).

FIGURA 3.
Hoja doblada.



Como se aprecia en la Figura 3, al plegar la hoja se forma el triángulo rectángulo resaltado, cuya área depende de la ubicación de la esquina superior en el borde inferior. La primera pregunta que se puede plantear es: ¿cómo varía el área del triángulo con respecto a la longitud del lado formado por el borde inferior de la hoja?

Quien realice la actividad puede hacer el siguiente razonamiento: el área del triángulo está en dos dimensiones y la longitud del lado inferior es una dimensión; por tanto, el área será una función cuadrática con respecto al lado, y deberá entonces enfocarse a validar su conjetura, para lo cual debe resolver el problema de expresar el área en términos de la longitud del lado. También se podría considerar la actividad como el estudio del fenómeno que aparece cuando se dobla la hoja, en particular, hallar el modelo matemático que exprese la variación del área como función de la longitud de uno de sus lados. Si además se pide la simulación de la hoja doblada con un software de geometría dinámica (GD), la actividad adquiere una dimensión diferente en la que las posibilidades de acción aumentan: por ejemplo, el conocimiento geométrico (y del software) necesario para construir un modelo que resista la prueba del arrastre, o la posibilidad de medir área y lado, graficarlos en un sistema de coordenadas y ajustar la curva que mejor se adapte a los puntos.

La otra pregunta que se plantea es: ¿qué medida debe tener el lado del triángulo para que su área sea máxima? El resultado se puede hallar explorando la función con el software de GD o utilizando el concepto de derivada de una función, si se está en un curso de Cálculo.

En todas las actividades es importante que los estudiantes expliquen y justifiquen sus resultados y estrategias de modo que convengan a sus compañeros y docente. Así, actividades como la anterior ponen a prueba el conocimiento del estudiante y le hacen formar conjeturas, explorar posibles explicaciones y resolver problemas; el conocimiento se optimiza si se tiene el ambiente de aprendizaje propicio.

Ambiente de aprendizaje

La adquisición del conocimiento (o aprendizaje) se da actuando sobre aquellos objetos que se quieren conocer, reflexionando sobre ellos y sus relaciones con otros objetos; este es el principio que llamamos *aprender haciendo*. Para que el principio sea efectivo, debe tener un ambiente de aprendizaje adecuado donde el estudiante se sienta seguro de sí mismo, cómodo y parte de la comunidad que se forma en el aula. Tal comodidad se logra si se fomentan tres valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación (Flores y Gómez, 2009).

Tolerancia. Es la capacidad de aceptar las cosas y a las personas por lo que son. Se asume que la tolerancia es la virtud de considerar y, en su caso, aceptar las ideas de los demás, lo que lleva a una convivencia armónica en la que se eliminan prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.

Respeto. Es el reconocimiento del derecho a ser de las personas, los animales y las cosas; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento, además, de su dignidad. Implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto debe empezar por el propio individuo: respeto a nuestro cuerpo y al entorno. En el aula, entraña que el estudiante se pueda expresar libremente, sin temores y con una confianza absoluta de que será escuchado y sus ideas tomadas en cuenta y debatidas, si es el caso. El respeto y la tolerancia reportan un aumento en la autoestima de los estudiantes.

Cooperación. Es el trabajo conjunto para el logro de metas comunes. El objetivo de la cooperación es el beneficio mutuo; en el estudiante, involucra la capacidad de hacer de lado sus ideas y propuestas, cuando

sea necesario, con el fin de alcanzar los objetivos comunes de aprendizaje propuestos en el currículo.

Un ambiente de aprendizaje en el aula donde haya tolerancia, respeto y cooperación se convierte en una comunidad de aprendizaje en que todos sus integrantes se esfuerzan por lograr un fin común: la adquisición del conocimiento. El ambiente de aprendizaje debe tomar en cuenta las dimensiones que lo componen (Schoenfeld, 2016): contenido curricular, demanda cognitiva, acceso equitativo al contenido, identidad y pertenencia, y retroalimentación formativa.

Contenido Curricular. Se refiere a la temática, los aprendizajes, las estrategias de aprendizaje y los objetivos contemplados en el currículo acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar cualquier situación. En un currículo matemático donde las actividades están muy dirigidas, los estudiantes sólo cumplen con instrucciones y órdenes, y hay poco espacio para la discusión, el análisis, la exploración y la reflexión; un ambiente así no contribuye a un buen aprendizaje.

Demanda Cognitiva. Se refiere al grado de complejidad con que se debe manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje. La demanda cognitiva de las actividades debe ser tal que impliquen un reto para el estudiante sin llegar a imposibles. No es lo mismo solicitar que se despeje la incógnita de la ecuación $1.5x + 300 = 2000$ que preguntar: ¿en cuánto tiempo se llenará un tanque de 2000 litros de agua si se empieza a llenar a razón de 1.5 litros por segundo, tomando en cuenta que tiene 300 litros al comenzar a llenarse? Y pedir una explicación de por qué se cree que la respuesta es correcta. Un buen ambiente de aprendizaje sería aquel donde la demanda cognitiva de las actividades fuera la adecuada respecto al nivel educativo y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para que al ejecutarla permita el avance en su conocimiento.

Acceso equitativo al contenido. Se refiere a las oportunidades que tienen los estudiantes para aprender. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación de todos los estudiantes

en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo ayuda con mucho a establecerlo, así como la supervisión continua del profesor. En un ambiente de aprendizaje equitativo se dejan de lado prejuicios concernientes a género, raza, religión, preferencia sexual o estatus social, y se da voz a todos los integrantes de la comunidad. La tolerancia, el respeto y la cooperación son los mayores valores en la convivencia de sus integrantes.

Identidad y pertenencia. Se refiere al grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje y parte de la comunidad conformada por el grupo. Parte de esta identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los otros estudiantes y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices como él. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz efectivo. Una persona que se identifica con una sociedad y se siente miembro de ella se convierte en un agente de su desarrollo.

Retroalimentación Formativa. Se refiere a las actividades y a la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven para identificar errores y debilidades en el aprendizaje; la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir los errores mediante lo que denominamos *intervenciones de retroalimentación*, y a mediano y largo plazo serviría para mejorar la edición posterior del curso y preponderaría cambios en el currículo (Gómez, 2022).

En un aula de clase fundamentada en una didáctica centrada en el aprendizaje de los estudiantes, uno de los papeles que asumiría el profesor sería como organizador de un ambiente de aprendizaje que tome en cuenta estas cinco dimensiones. El profesor buscará un equilibrio entre ellas: el papel del profesor cambia para convertirse en un organizador, diseñador y evaluador de actividades de aprendizaje.

El papel de la evaluación

La evaluación en una didáctica centrada en el aprendizaje adquiere un papel crucial en la mejora del desempeño del estudiante: se transfor-

ma en el proceso de obtención de evidencias sobre el aprendizaje con el fin de mejorarlo y fomentarlo. Para que sea más efectiva se debe tomar en cuenta cómo el ser humano adquiere su conocimiento en una sociedad, en términos del desarrollo de su pensamiento reflexivo.

Para el profesor, la evaluación debe ser un indicador de la efectividad de las actividades de aprendizaje que propone al grupo, de la pertinencia del currículo que está poniendo en marcha y del desarrollo del aprendizaje del estudiante. La retroalimentación formativa es fundamental en la evaluación del profesor. Para el estudiante, la evaluación será una oportunidad para corregir errores y actitudes, para mostrar el grado de adquisición de su conocimiento y para afianzar su autoestima. El sentido de identidad como un aprendiz efectivo y de pertenencia a la comunidad de aprendizaje en que se conformó el grupo es resultado de una evaluación positiva del estudiante sobre sus propios desarrollo y desempeño.

Un aspecto importante de la evaluación del aprendizaje que hace el profesor tiene que ver con la retroalimentación formativa. Esta labor llega al aula como *intervenciones de retroalimentación*, que son la serie de actividades, presentaciones y ejercicios encaminados a eliminar los errores detectados durante las actividades de aprendizaje. La puesta en práctica de estas intervenciones lleva, a mediano plazo, a mejorar ediciones posteriores del mismo curso y, a largo plazo, a sugerir cambios en el currículo. La retroalimentación formativa se convertiría en la base para realizar las revisiones y los cambios curriculares con propuestas surgidas directamente del aula, en contraposición al proceso actual, en el que las reformas curriculares son hechas a sugerencia de organismos internacionales o por iniciativa de las autoridades gubernamentales. Para que esto sea efectivo, es necesario que la labor docente deje de ser una actividad aislada y se lleve a cabo en colegiados de profesores de la misma materia y de materias de otras áreas.

Como algo secundario, la evaluación dará información para asignar una nota o calificación al estudiante, y la comunidad tendría voz y voto en la asignación de tales notas; no es el profesor quien decide si el estudiante ha aprendido y tiene derecho a seguir en cursos posteriores.

Reflexiones finales

La pedagogía es el cuerpo de conocimiento que se encarga del estudio de los fenómenos educativos; por su parte, la didáctica es el conjunto de métodos, técnicas y estrategias encaminadas a mejorar la educación escolar del estudiante a través de la docencia.

En un afán de simplificación, se considera que un educador, profesor, maestro o docente (prefiero no utilizar el término instructor) es todo profesional dedicado a mejorar la educación en un ámbito escolar, no debe haber distinciones entre ellos. Un buen docente, sin importar el nivel educativo en el que se desempeñe, es aquel que siempre busca mejorar su praxis mediante el estudio, la investigación y el trabajo colegiado. Lo que se ha dado por llamar *Matemática Educativa* no es otra cosa que la investigación educativa en el ámbito del aprendizaje de la matemática (es decir, es parte de la pedagogía, y tal vez sería más correcto llamarla *Pedagogía Matemática*).

En últimas, no deberíamos confundir *educación matemática* con *didáctica de la matemática*, pues la primera se refiere al conocimiento matemático y el uso correcto que le da un individuo, mientras que la segunda trata sobre formas de aprender matemática en un contexto escolar (principalmente el aula). En la actualidad, el sistema educativo alecciona al estudiante y lo prepara para obedecer las reglas sin someterlas al escrutinio del pensamiento reflexivo (ha servido para *instruir* al estudiante). La escuela debería ser el conducto por el cual la sociedad prepare a sus integrantes para servirla y mejorarla; la escuela debe ser el vehículo por el que el ser humano se integre a la sociedad (se humanice). Por tanto, si se quieren fomentar los valores de una verdadera democracia que nos lleve a un régimen social de convivencia pacífica y desarrollo armónico, tanto la pedagogía como la didáctica deberían estar encaminadas al logro de tales objetivos dentro y fuera de la escuela. La escuela debe contribuir a la humanización de los individuos, no instruirlos, adoctrinarlos ni domesticarlos.

Es posible lograr lo anterior si cambiamos el paradigma de didáctica centrada en la enseñanza-aprendizaje por una didáctica centrada en el aprendizaje (hablar de una didáctica centrada en el profesor o en el estudiante no tiene sentido, pues toda didáctica se centra en el estudiante: el aprendizaje del estudiante es el objetivo último de toda didáctica), en la que el grupo escolar se convierte en una comunidad de

aprendizaje con un objetivo común: el aprendizaje del conocimiento propuesto en el currículo.

¿Cómo se traduce esto en el contexto de la educación matemática? Si el ser humano aprende mediante sus acciones y la reflexión sobre tales, entonces, en la escuela el estudiante debe manipular los objetos matemáticos y reflexionar sobre sus acciones y descubrimientos. El profesor es el organizador del ambiente de aprendizaje y el mediador entre el conocimiento y su aprendizaje. Su papel no es enseñar el conocimiento, sino propiciar la reflexión sobre lo que se hace y esta reflexión es la que lleva al conocimiento. La evaluación debe servir para obtener evidencias de lo aprendido con el fin de mejorar los aprendizajes, nunca debe tener un carácter punitivo o ser motivo de chantaje.

El conocimiento es útil en la medida en que se acepta por los demás y ayuda a entender la realidad y a resolver problemas. Por tanto, las acciones y las reflexiones en el aula deben hacerse de manera colectiva, ya sea en equipos pequeños o en sesiones plenarias. De manera individual, cada estudiante decide si el fragmento de conocimiento analizado y discutido es útil o no, o si debe considerarlo en el futuro: el aprendizaje, a fin de cuentas, es un acto privado (Juárez, 2015).

En el ámbito escolar, el análisis y el estudio de los objetos matemáticos y sus relaciones contribuyen, en gran medida, al desarrollo del pensamiento matemático, mismo que es considerado una manifestación del pensamiento reflexivo de argumentación mediante actividades de formación de conjeturas y su validación. En consecuencia, tendrá elementos para realizar demostraciones matemáticas, pero también tendrá elementos para abordar problemas y situaciones fuera del ámbito matemático que le darían mayores recursos para tomar decisiones.

Una comunidad de aprendizaje eficiente se basa en tres principios o valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación, valores esenciales para convivir de manera pacífica, democrática y equitativa. Los estudiantes que trabajan en un ambiente con estas características se sienten seguros y acogidos por su comunidad y, por consiguiente, son elevadas las tasas de su aprendizaje.

Para que toda docencia sea efectiva, y en particular aquella sustentada en una didáctica centrada en el aprendizaje, es necesario tener una planeación didáctica conjunta y hacer trabajo colegiado; de este modo, el quehacer docente dejaría de estar aislado y se trabajaría en el diseño

de estrategias de aprendizaje comunes. Esta labor conjunta se enriquecería más si el trabajo colegiado fuera hecho por profesores de las materias que conforman el currículo, y si el mismo currículo se diseñara tomando en cuenta las necesidades comunes de todas las materias. De este modo, sería posible que todos avancen en la dirección propuesta y no suceda, como es el caso en la mayoría de las escuelas, que cada profesor tire en una dirección distinta y, en vez de avanzar, sólo se camine en círculos sin llegar a ningún lado. En muchas ocasiones, lo que un profesor avanza en un cierto curso lo deshace el profesor del siguiente.

La investigación educativa en el aula, junto con la experiencia del profesor, debería ser el motor (o uno de los motores) que ponga en marcha el aprendizaje de nuestros estudiantes en todos los niveles. La instrumentación de una didáctica centrada en el aprendizaje, vía la evaluación en el aula y la retroalimentación formativa, sería la base para que el propio docente haga la investigación necesaria y deje de ser el técnico que aplica los resultados. Las recomendaciones hechas por terceros muchas veces provienen personas que nunca han pisado un aula de clase del nivel en el que se hacen dichas sugerencias.

La mayoría de las investigaciones educativas se hacen en el contexto de un posgrado en educación y sólo han servido para que se obtenga un grado o para que el asesor del trabajo obtenga créditos que lo posicionen mejor como investigador (un nivel más alto en el Sistema Nacional de Investigadores, si hablamos del contexto mexicano) y obtenga una mejor remuneración y un mayor prestigio; es decir, tiene un valor utilitario.

El principal obstáculo para instrumentar una didáctica centrada en el aprendizaje es la resistencia de la mayoría de los docentes con los que he interactuado: no conciben, o no les convence, un aprendizaje sin la mediación de su enseñanza. Es difícil abandonar nuestra zona de comodidad y adentrarse en los terrenos pantanosos de lo nuevo y lo desconocido. En este sentido, se vuelve imperativo un programa de formación docente que tome en cuenta los principios de la didáctica centrada en el aprendizaje, y que los esfuerzos hechos por unos pocos no se vean opacados por la enseñanza tradicional, disminuyendo sus probabilidades de éxito a casi cero.

Como dijo alguna vez un buen colega uruguayo: *¡Es bárbaro lo que los gurises (muchachos, niños) pueden hacer si vos los dejás, che!*

Referencias

- Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. España: Universidad Internacional de la Rioja.
- Brizuela, P. (2013). *La resolución de problemas de reparto a través del trabajo colaborativo* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Veracruzana].
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Países Bajos Dordrecht, Kluwer.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Estados Unidos de América: D. C. Heath & Co. Publishers.
- Engels, F. (1878). *La revolución de la ciencia de Eugenio Dühring (Antidürring)*. Tomado de la edición en español de 2003, en Marxist Internet Archive. <https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/>; <https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/>.
- Flores, A. H. (2007). Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.
- Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y el Quehacer Científico. *Pädi: Revista de Proyectos y Textos Académicos de Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*, 1(1), 27-39.
- Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21(2), 117-142.
- Franco, M. A. (2012). *Pedagogía e práctica docente*. Brasil: Cortez Editora.
- Gómez, A. (2022). *Retroalimentación Formativa en el Aula de Matemática* [Tesis de doctorado, Instituto Politécnico Nacional].
- Ibáñez, C. (2007). Un análisis crítico del modelo del triángulo pedagógico: una propuesta alternativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(32), 435-456.
- Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje, apuntes para una pedagogía persuasiva*. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Houssaye, J. (1988). *Triangle pédagogique: théorie et prati-*

- ques de l'éducation scolaire. Suiza: Editions Peter Lang.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery*. Reino Unido: Cambridge University Press.
- Merriam-Webster (1993). *Merriam Webster's Collegiate Dictionary*. Estados Unidos de América: Merriam-Webster, Inc.
- Nieto, N., Viramontes, J. de D. y López, F. (2009). ¿Qué es matemática educativa? *Culcyt/ Educación Matemática*, 6(35), 16-21.
- Peirce, C. S. (2014). *Illustrations of the logic of science*. Estados Unidos de América: Open Court.
- Schoenfeld, A. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley: Graduate School of Education. <http://tru.berkeley.edu>.
- SUMEM (2014). *Consideraciones para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM*. México: Secretaría de Desarrollo Institucional-Universidad Nacional Autónoma de México.
- Vidal, R. (2016). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de las Situaciones*. <https://educrea.cl/wp-content/>

uploads/2016/01/DOC-La-Didactica.pdf