JESÚS JERÓNIMO CASTRO
CARMEN SOSA GARZA
PATRICIA ISABEL SPÍNDOLA YÁÑEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

04

ALGUNOS PROBLEMAS TÍPICOS DE OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

EL RINCÓN OLÍMPICO

¿QUÉ SON LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS?

La Olimpiada Internacional de Matemáticas es una competencia donde participan estudiantes jóvenes provenientes de más de 100 países de alrededor de todo el mundo. Los alumnos participantes en un certamen de esta naturaleza, no deben estar inscritos en el nivel universitario en el momento de la realización del concurso. Usualmente participan estudiantes desde nivel primaria hasta nivel bachillerato y, sin temor a equivocarnos, podemos afirmar que éste es el evento académico de más tradición a nivel preuniversitario.

Las primeras Olimpiadas se llevaron a cabo en Hungría hace más de 100 años, contando con la participación de 4 países de la región de Europa del Este. Desde hace casi 60 años, la Olimpiada Internacional de Matemáticas se ha celebrado anualmente y se cuenta con la participación de un poco más de 100 países. Cada país, realiza su propia Olimpiada y organiza entrenamientos para sus estudiantes, de manera que puedan conformar un equipo con a lo más seis estudiantes que los representen en el evento internacional. México no es la excepción y, además de organizar el evento nacional, cada estado realiza un concurso estatal para seleccionar un equipo de seis estudiantes que los representen en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el mes de noviembre.

Los concursos y entrenamientos tipo Olimpiada tienen dos objetivos principales:

- Elegir y entrenar las selecciones que representen al estado (o país) en los diversos eventos tipo Olimpiada.
- Difundir la belleza del pensamiento matemático y promover el intercambio académico y cultural entre los maestros y alumnos participantes.

Podemos decir que el primer punto se lleva a cabo de manera satisfactoria en la mayoría de las regiones de México, sin embargo, falta mucho trabajo que realizar con respecto al segundo punto. En este trabajo se pretende contribuir (al menos un poco) a la difusión de la belleza de las ideas que se manejan en la solución de los problemas tipo Olimpiada, las cuales debemos decir, requieren de una gran dosis de esfuerzo, ingenio y creatividad.

¿CÓMO SON LOS PROBLEMAS TIPO OLIMPIADA?

Los problemas que se abordan en los entrenamientos y concursos tipo Olimpiada, no son ejercicios rutinarios. Para lograr resolverlos se requiere de mucho esfuerzo, tenacidad, perseverancia y una buena dosis de ingenio y creatividad. Podríamos decir que los problemas son de tres tipos principales: "de fuerza bruta ", "de técnica", "de ingenio".

Los problemas de fuerza bruta son aquéllos que no requieren de casi ningún conocimiento especial para ser resueltos, sin embargo, usualmente se requiere realizar muchos cálculos y analizar una buena cantidad de casos.

Los problemas de técnica son aquéllos que requieren del uso de algún teorema o técnica especial. Usualmente un alumno que ha recibido un entrenamiento adecuado puede resolver este tipo de problemas que son aquéllos que la estrategia de solución, por parte de un alumno bien entrenado, es casi inmediata. Sin embargo, puede tener detalles que en ocasiones dificultan su solución.

Los problemas de ingenio son aquéllos que tanto un alumno con mucho entrenamiento como un alumno novato, pueden llegar a resolver. Las soluciones de este tipo de problemas usualmente son cortas pero requieren de una idea poco usual y difícil de encontrar. Es común escuchar que un alumno que logra resolver uno de estos problemas exprese comentarios como el problema estaba muy fácil, sin embargo, son muy pocos alumnos los que logran resolver este tipo de problemas durante el tiempo que se les aplica el examen.

Pero no debemos sentirnos desanimados, existe una *luz de esperanza* en esto de resolver problemas olímpicos: en la opinión de los grandes ganadores de medallas a nivel mundial, el único consejo útil que pueden dar es resuelve muchos pero muchos problemas, y cuando creas que ya has resuelto demasiados, entonces resuelve más. Estas palabras esconden la clave: todo se reduce a trabajar y disfrutar mucho la resolución de problemas y la ganancia se notará cuando menos lo pienses.

En las siguientes secciones de este trabajo, mostraremos algunos ejemplos de problemas típicos de una Olimpiada de Matemáticas y algunas de las estrategias más utilizadas para la resolución de problemas. Al final de cada sección, proponemos pequeñas listas de problemas para aquél lector interesado en intentar la resolución de este tipo de problemas o para aquélla persona interesada en impartir entrenamiento a estudiantes para este tipo de competencias.

Como consejo al intentar este tipo de problemas podemos decir lo siguiente:

1. Lee bien el enunciado, ya que es muy común que estudiantes pierdan horas intentando un problema incorrecto por leer sin cuidado el enunciado.
2. Una vez entendido el problema, escribe todas las ideas que se te vengan a la mente y que crees podrían ayudar en la solución.
3. Los problemas no se resuelven en una sola dirección, a veces hay que ir del principio al fin, a veces del final hacia atrás, a veces una parte es en una dirección y otra parte es en otra dirección. La idea central es lograr llegar a nociones sea equivalentes, es decir, debemos ir cambiando el problema por problemas equivalentes que sean más sencillos.
4. No te rindas. Si no logras resolver un problema en poco tiempo, sigue pensando, tarde o temprano aparece una idea que te da luz, y si ésto no pasa, abandona por un rato el problema y después lo vuelves a intentar.
5. Aunque no logres resolver un problema, si dedicaste mucho esfuerzo y tiempo, tu cerebro se va entrenando y con el tiempo empezarón a salir soluciones. Nada es tiempo perdido.

INGENIO Y CREATIVIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Del latín *ingenium*, el ingenio es la facultad de una persona para inventar con prontitud o solucionar algo con facilidad. Por creatividad se entiende a la facultad que alguien tiene para crear y a la capacidad creativa de un individuo. Es así que consiste en encontrar procedimientos o elementos para desarrollar labores de manera distinta a la tradicional, con la intención de satisfacer un determinado propósito.

No encontramos una mejor manera de explicitar estas características, que poseen algunas soluciones a problemas matemáticos, que presentando algunos ejemplos de problemas con soluciones ingeniosas.

Ejemplo 3.1 Encuentra la solución en forma cerrada para la suma

$1+2+3+...+n$,

Donde n es un número natural.

Demostración. Este problema es famoso ya que fue resuelto por un niño alemán cuando tenía 10 años, cuyo nombre era Carl Friedrich Gauss quien es uno de los más grandes genios que han existido en Matemáticas. La solución es la siguiente:

Denotemos a suma como S=1+2+...+(n-1)+n, ahora advertimos el orden de los términos y los sumamos con los de la igualdad anterior.

$S=1+2+\ldots+(n-1)+n$
$S=n+(n-1)+\ldots+2+1$

De donde obtenemos que

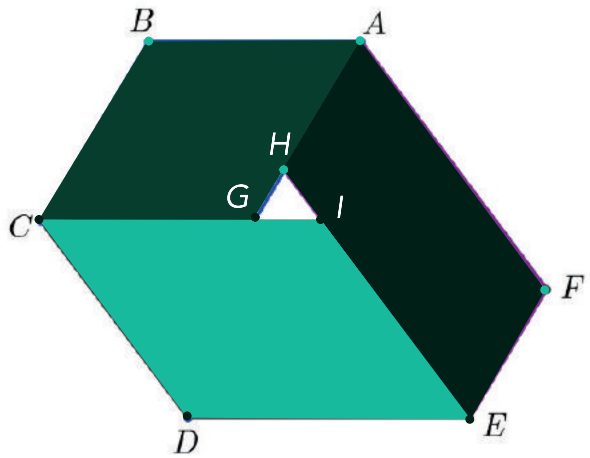
$2S=(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)=n(n+1)$.

se sigue que

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo 3.2 Cada par de lados opuestos de un hexágono ABCDEF son paralelos. Demuestra que

$$|AEC|\geq\frac{1}{2}|ABCDEF|.$$

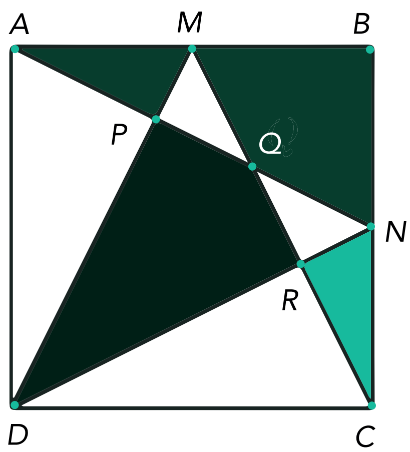


Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que AB≤DE. Trazamos el segmento CI paralelo y de la misma longitud que DE y consideremos el punto G en CI tal que AG es paralelo a EF. Observemos que también existe un punto H en el segmento AG tal que EH es paralelo y de la misma longitud que AF. El hexágono ABCDEF se descompone entonces en los paralelogramos ABCG, DEIC, EF AH y el triángulo △GIH. De aquí es fácil observar que el área del triángulo △ACE se compone de la mitad de las áreas de los paralelogramos más el área del triángulo △GIH, es decir, su área es mayor o igual que la mitad del área del hexágono.

Observación 3.1 Notemos que |AEC|=½|ABCDEF| exactamente cuando G, H e I son el mismo punto, es decir, cuando los lados opuestos del hexágono tienen la misma longitud.

Ejemplo 3.3 Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC de un cuadrado ABCD. Sean P el punto donde AN interseca a DM, Q el punto donde AN interseca a CM y R el punto donde CM interseca a DN. Prueba que

|AMP|+|BMQN|+|CNR|=|DPQR|.



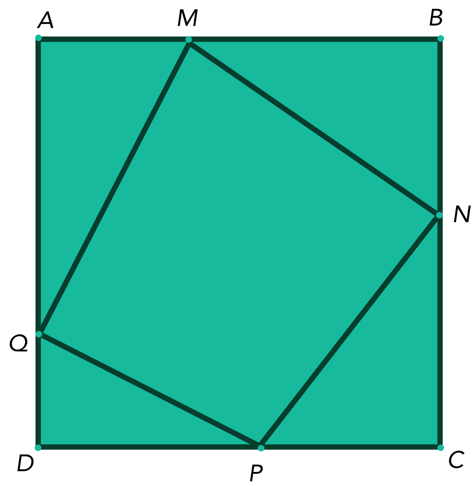
Demostración. La solución a este problema es muy sencilla si consideramos el siguiente resultado conocido como el Teorema de los Tapetes:

Si dos tapetes de áreas S_1 y S_2 se colocan en una región de área $S=S_1+S_2$, entonces el área doblemente cubierta es igual al área sin cubrir.

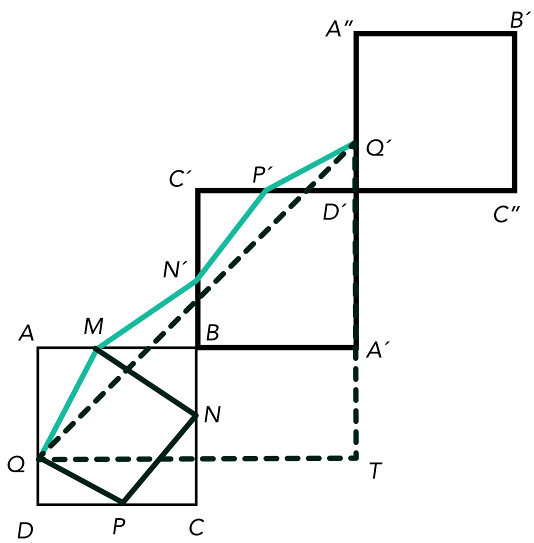
Para el problema que estamos analizando en particular, se cumple que la suma de las áreas de los dos triángulos es igual al área del cuadrado. La solución es evidente aplicando el Teorema de los Tapetes.

Observación 3.2 Notemos que no es importante que los puntos M y N sean puntos medios de los lados AB y BC.

Ejemplo 3.4 Sea ABCD un cuadrado con lado de longitud 1 y sean M, N, P y Q, puntos sobre sus lados como se muestra en la figura. Entonces el perímetro de MNPQ es mayor o igual que $2\sqrt{2}$.

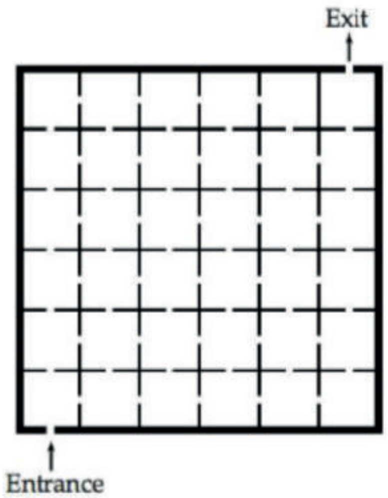


Demostración. Dibujamos cuadrados congruetes a ABCD de manera que el recorrido formado por los segmentos QM, MN, NP, PQ, ahora se obtiene con los segmentos QM, MN′, N′P′, P′Q′, donde MN′=MN, N′P′=NP y P′Q′=PQ (como se observa en la siguiente figura). Como tenemos la igualdad Q′D′=QD, se sigue que TQ′=TQ=2, donde T está sobre la línea Q′A′ y TQ es paralelo a AB. Del triángulo rectángulo isósceles △Q′TQ tenemos que $QQ'=2\sqrt{2}$, se sigue entonces que $QM+MN'+N'P'+P'Q'\geq 2\sqrt{2}$, es decir, el perímetro del cuadrilátero MNPQ es mayor o igual que $2\sqrt{2}$.

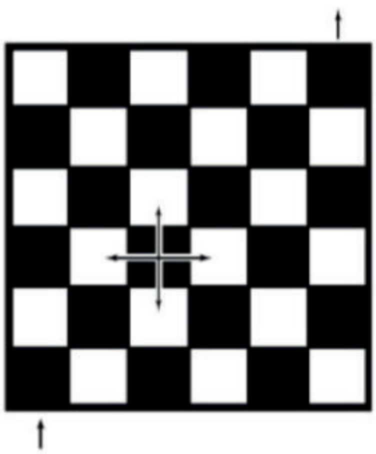


Ejemplo 3.5 Una oficina burocrática tiene exactamente una entrada y una salida. En la mitad de cada pared interior de cada sala hay una puerta (como se muestra en la figura).

Para obtener un certificado, uno debe entrar al edificio, visitar cada sala exactamente una vez y salir del edificio. ¿Es posible o no obtener un certificado en esa oficina?



Demostración. Coloreamos el tablero que representa al edificio como el tablero del ajedrez. Notemos que para pasar de una oficina a otra siempre vamos de un color al otro, entonces, para recorrer cada oficina una sola vez y salir del edificio, necesitamos hacer 38 movimientos (incluyendo el movimiento de entrada y el de salida). Como empezamos en un cuadro negro y realizamos 36 movimientos en el interior (que corresponden a las 36 oficinas), la última oficina visitada debe estar representada por un cuadro blanco. Sin embargo, la puerta de salida está en una oficina representada con cuadro negro, por lo tanto, no es posible hacer trámites en esa oficina.

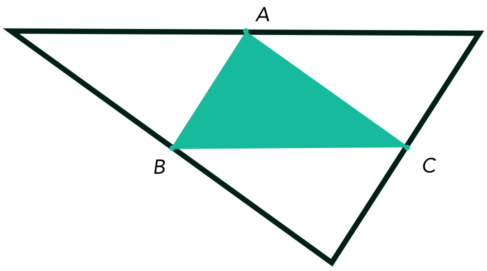


PRINCIPIO DEL EXTREMO

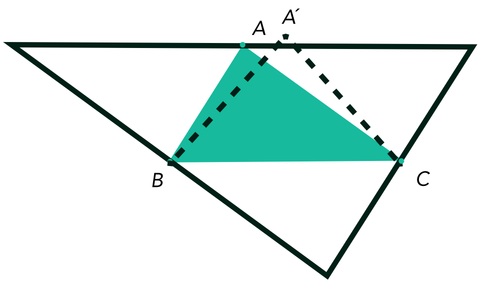
Cuando en un problema tenemos una cantidad finita de objetos (puntos, líneas, números, etcétera), en ocasiones una idea muy útil es considerar el máximo o el mínimo de alguna característica de los objetos. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 4.1 Sea P un conjunto finito de puntos tal que todo triángulo con vértices en los puntos de P tiene área menor o igual a 1. Entonces existe un triángulo de área menor o igual a 4 que cubre a P.

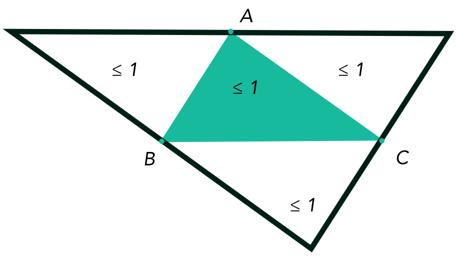
Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo de área máxima, de entre todos los triángulos que se pueden formar con vértices en el conjunto de puntos P. Tracemos paralelas a los lados del triángulo por cada uno de los vértices.



No puede haber puntos de P fuera del triángulo grande.



El triángulo grande tiene área ≤ 4 y cubre a P.



El siguiente ejemplo se resuelve aplicando la versión más simple de un famoso Teorema de Geometría Discreta.

Ejemplo 4.2 En una clase de Matemáticas cada uno de los estudiantes se duerme exactamente una vez. Sabemos que para cada dos estudiantes hay un lapso de tiempo en el que ambos están dormidos simultáneamente. Prueba que en algún momento de la clase, todos los estudiantes están dormidos simultáneamente.

En un principio, este problema puede parecer algo informal, alejado del mundo de las Matem áticas. Sin embargo, después de meditarlo un instante, nos damos cuenta que podemos representar los lapsos de tiempo que duran los estudiantes dormidos mediante segmentos sobre una línea. Lo que deseamos probar es la existencia de al menos un punto en común para todos estos segmentos. La solución se obtiene mediante una aplicación directa del Teorema de Helly:

Teorema de Helly (en dimensión 1). Sea *F* una familia finita de segmentos sobre una línea recta. Si cualesquiera dos segmentos de *F* tienen punto en común, entonces existe un punto en común para todos los segmentos de *F*.

Demostración. Sea $F=\{S_1, S_2,\ldots,S_n\}$ nuestra familia de segmentos. Para cada segmento S_j, j=1, 2,...,n, denotemos por I_j y D_j sus extremos izquierdo y derecho, respectivamente. De entre todos los extremos derechos, consideremos aquél que está más a la izquierda, es decir, el menor de los extremos derechos si éste es considerado como un número real. Denotemos tal extremo derecho como $D_{min.}$

D_{min}

Claramente, todos los demás extremos derechos deben estar a la derecha de D_{min}, además, como cualesquiera dos segmentos de *F* se intersecan, tenemos que todo segmento contiene al punto D_{min}.

D_{min}

Observación 4.1 Notemos que la prueba también funciona si en lugar de considerar el extremo derecho más a la izquierda, se toma en cuenta el extremo izquierdo más a la derecha.

PROBLEMAS

Problema 4.1 Prueba que todo poliedro convexo tiene al menos dos caras con el mismo número de lados.

Problema 4.2 Cada punto de una retícula en el plano es etiquetado con un entero positivo. Cada uno de los números es la media aritmética de sus cuatro vecinos. Muestra que todas las etiquetas son iguales.

Problema 4.3 Sea Ω un conjunto de puntos en el plano. Cada punto de Ω es el punto medio de dos puntos en Ω. Prueba que Ω es un conjunto infinito.

Problema 4.4 2n+1 personas están colocadas en el plano de tal manera que sus distancias mutuas son distintas. Al mismo tiempo, cada uno dispara a su vecino más cercano. Prueba que

a) Al menos una persona sobrevive
b) Ninguna persona recibe más de 5 balas
c) Las trayectorias de las balas no se cruzan
d) El conjunto de segmentos formado por las trayectorias de las balas no contiene un polígono cerrado

Problema 4.5 Prueba que en cualquier pentágono convexo es posible escoger tres diagonales con las cuales se puede construir un triángulo.

Problema 4.6 Veinticinco puntos están dados en el plano. Entre cualesquiera tres de ellos se pueden escoger dos a una distancia menor que 1 cm. Prueba que existen 13 puntos los cuales pueden ser encerrados por un círculo de radio 1 cm.

Problema 4.7 Prueba que todo polígono convexo de área 1 está contenido en un rectángulo de área 2.

Problema 4.8 Se tienen 2n+3 puntos en el plano, no hay tres de ellos colineales ni cuatro sobre una misma circunferencia. Prueba que se pueden escoger tres de los puntos y dibujar un círculo a través de estos puntos de tal manera que exactamente *n* de los restantes 2*n* puntos están en el interior del círculo y *n* están fuera de él.

Problema 4.9 Sea *M* la mayor de las distancias entre 4 puntos en plano, y sea *m* la menor de las distancias. Demuestra que

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{2}.$$

Problema 4.10 Sea M la mayor de las distancias entre 6 puntos en plano, y sea m la menor de las distancias. Demuestra que

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{3}.$$

Problema 4.11 Se escoge un punto P en el interior de un polígono convexo M. Se construyen las proyecciones ortogonales desde P hacia todas las líneas que contienen los lados de M. Demuestra que al menos una de esas proyecciones está sobre un lado de M.

PRINCIPIO DE LAS CASILLAS O DE LOS PALOMARES

En muchas ocasiones, la idea o principio que se enuncia de manera muy evidente, puede resultar muy útil para descubrir estrategias de solución de problemas. Un ejemplo de ésto, es el principio de las casillas o principio de Dirichlet, que afirma lo siguiente:

Si colocamos n+1 objetos en *n* cajas entonces una de las cajas deber contener al menos dos objetos. Este principio puede generalizarse de la siguiente manera:

Si colocamos nk+1 objetos en *n* cajas entonces una de las cajas deberá contener al menos k+1 objetos.

Resolvamos algunos ejemplos utilizando este principio.

Ejemplo 5.1 En un grupo con al menos 13 personas, siempre hay dos que cumplen años el mismo mes.

Demostración. Consideremos 12 casillas, cada una de ellas representa un mes del año. Después, le asignamos a cada persona la casilla que corresponde al mes de su cumpleaños. Como tenemos 13 personas (los objetos) y 12 meses (las casillas), por el principio de las casillas podemos asegurar que hay una casilla con al menos dos personas. Esas dos personas festejan su cumpleaños el mismo mes del año.

Ejemplo 5.2 Probar que en toda reunión, siempre hay dos personas que conocen al mismo número de personas de entre las presentes.

Demostración. Supongamos que asistieron *n* personas a la reunión. El máximo número de personas que puede conocer una persona dada es n−1. En este problema las casillas o cajas serán las posibles cantidades de personas que una persona conoce, los objetos serán las *n* personas. Tenemos entonces las casillas con las etiquetas 0, 1, 2,..., n−1, sin embargo, observemos que no pueden existir al mismo tiempo las casillas con el número 0 y el número n−1, ya que si una persona conoce a todas las demás, entonces no existe una que no conozca a nadie y viceversa. En cualquiera de los dos casos tenemos n−1 casillas posibles en la cuales se distribuirán *n* personas. Por el principio de las casillas tenemos que alguna de las casillas contiene al menos a dos personas. Esas dos personas son las que conocen al mismo número de personas de entre las presentes.

Ejemplo 5.3 Se tienen los números enteros del 1 al 2n escritos en un pizarrón. Se tachan n−1 de ellos. Probar que entre los números que quedaron sin tachar en el pizarrón, hay al menos 2 de ellos que son consecutivos.

Demostración. En esta ocasión hay que tener cuidado, pues los números que deseamos que cumplan la propiedad de ser consecutivos, deben estar entre los números que quedaron sin tachar. Es decir, nuestros objetos serán los números sin tachar, que son 2n−(n−1) = n+1. Como son n+1 números y queremos que al menos dos de ellos sean consecutivos nos conviene crear *n* casilleros de tal forma que si dos números pertenecen al mismo casillero entonces son consecutivos. La idea es dividir el conjunto total de trabajo en casilleros, en este caso el conjunto total de 2n números originales. Como son 2n podemos dividirlos de la siguiente manera:

1, 2	3, 4	...	2n-1, 2n

En el casillero 1 ubicamos los números 1 y 2; en el casillero 2, los números 3 y 4, y así sucesivamente, hasta que en el casillero *n* ubicamos los números 2n−1 y 2n. De este modo si dos números están en el mismo casillero, entonces serán consecutivos. Como los números sin tachar son n+1, y cada uno de ellos pertenece a alguno de los n casilleros indicados previamente, entonces por el principio de las casillas podemos asegurar que habrá un casillero que contenga 2 de los números sin tachar.

Problemas

Problema 5.1 Una línea ℓ en el plano no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo △ABC. Demuestra que ℓ no puede cortar los tres lados del triángulo (en el interior de los lados).

Problema 5.2 Cada cuadrito de una cuadrícula de 3×3 es llenado con uno de los números −1, 0, 1. Prueba que de las ocho posibles sumas sobre los renglones, las columnas, las diagonales, dos deben ser iguales.

Problema 5.3 Sean a1, a2, ..., an *n* enteros no necesariamente distintos. Demuestra que siempre existe un subconjunto de esos números con suma de sus elementos divisible por *n*.

Problema 5.4 Están dados 5 puntos de coordenadas enteras en el plano. Demuestra que existen dos de estos puntos tales que el punto medio del segmento que determinan también tiene coordenadas enteras.

Problema 5.5 Sean P_1, P_2, ..., P_9 nueve puntos de coordenadas enteras en el espacio, no tres de ellos colineales. Demuestra que existe un punto de coordenadas enteras L sobre algún segmento P_iP_k, i≠k.

Problema 5.6 Demuestra que entre 6 personas siempre hay tres que se conocen entre sí o hay tres que son completamente extraños.

Problema 5.7 Una línea se colorea con 11 colores. Demuestra que podemos encontrar dos puntos del mismo color a una distancia entera en centímetros.

Problema 5.8 Supongamos que se dibujan varias cuerdas en un círculo de radio 1. Demuestra que si cada diámetro del círculo corta a lo más *k* cuerdas, entonces la suma de las longitudes de todas las cuerdas es menor que kπ.

Problema 5.9 Están dibujados varios círculos dentro de un cuadrado de lado 1. Sabemos que la suma de los perímetros de los círculos es 10. Demuestra que existe una línea recta, la cual interseca por lo menos a cuatro de los círculos.

Problema 5.10 Un jugador de ajedrez tiene 77 días para prepararse para un torneo. Él quiere jugar al menos un juego por día, pero no más de 132 juegos en total. Demuestra que existe un lapso de días sucesivos en los cuales él juega exactamente 21 juegos.

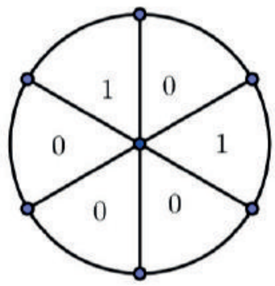
PRINCIPIO DEL INVARIANTE

Este principio puede ser resumido de la siguiente manera: Si hay repetición, busca lo que no cambia.

En los algoritmos, hay un estado inicial y una sucesión de pasos permitidos. Debemos buscar respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Puede un estado final dado ser alcanzado?
2. Encuentra todos los estados finales alcanzables.
3 ¿Hay convergencia a un estado final?
4. Encuentra todos los periodos, si los hay.

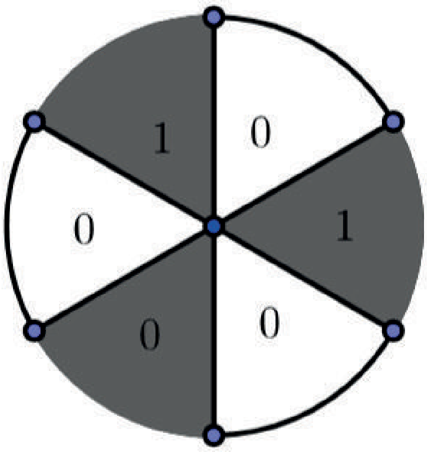
Ejemplo 6.1 Un círculo es dividido en 6 sectores. Los números 1, 0, 1, 0, 0, 0 son escritos dentro de los sectores. Se pueden incrementar dos números vecinos en 1. ¿Es posible que todos los números puedan llegar a ser iguales realizando una secuencia de tales pasos?



Demostración. Coloreamos los sectores de manera alternada como se muestra en la figura. Observemos que la suma de los números en los sectores sombreados es 2 y la suma de los números en los no sombreados es 0. La diferencia entre las sumas sombreadas y no sombreadas es

$$S-NS=2$$

Si escogemos un par de sectores vecinos y los incrementamos en 1, tenemos que incrementaremos un sector sombreado y uno no sombreado, no importa como los hayamos escogido. Entonces la nueva suma sombreada será S+1 y la nueva suma no sombreada será NS+1. Su diferencia sigue siendo S+1−(NS+1)=2, es decir, la diferencia es invariante a la operación de incrementar en 1 cualesquiera dos sectores vecinos. Si todos los números de los sectores fueran iguales, la diferencia sería 0, pero ésto no puede pasar. Por lo tanto, no se puede llegar a tener números iguales en todos los sectores.



Problemas

Problema 6.1 En la siguiente figura, dos cuadros son vecinos si comparten un segmento. Consideremos la siguiente operación: se escogen dos cuadros vecinos y se le agrega el mismo entero a los números en ambos cuadros. ¿Se puede transformar la tabla de la izquierda en la de la derecha mediante una sucesión de tales pasos?

1	*2*	*3*
4	*5*	*6*
7	*8*	*9*

7	*8*	*9*
6	*2*	*4*
3	*5*	*1*

Problema 6.2 Sean a1, a2, ..., *an* una permutación de los números 1, 2,..., *n*. Si *n* es impar, prueba que el producto $(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$ es par.

Problema 6.3 Un tablero de ajedrez está coloreado de la manera usual. Se pueden intercambiar los colores de los cuadrados de

a) todo un renglón o toda una columna,
b) de un cuadrado de 2×2.

La meta es obtener exactamente un cuadrado negro. ¿Es posible esto?

Problema 6.4 Hay un entero positivo en cada cuadro de una tabla rectangular. En cada movimiento se puede doblar cada número en un renglón o restar 1 de cada número de una columna. Prueba que se puede obtener una tabla de ceros por una secuencia de tales movimientos.

Problema 6.5 Un dragón tiene 100 cabezas. Un caballero puede cortar 15, 17, 21 o 5 cabezas, respectivamente, con un golpe de su espada. En cada uno de esos casos, 24, 2, 15 o 17 nuevas cabezas salen sobre sus hombros. Si todos las cabezas son cortadas, el dragón muere. ¿Puede el dragón llegar a morir?

Problema 6.6 Hay signos + y − escritos en un pizarrón. Se pueden borrar dos signos y escribir, inmediatamente, + si son iguales y − si son diferentes. Demuestra que el último signo sobre el pizarrón no depende del orden de borrado.

Problema 6.7 Cada uno de los números a_1, a_2,..., an es 1 o −1, y tenemos que

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots$$

Prueba que 4 divide a *n*.

Problema 6.8 A cada vértice de un cubo se le asigna el valor +1 o −1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valor puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

REFERENCIAS

Courant, R. y Robbins, H. (1996). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods.* Oxford University Press.

Engel, A. (1998). *Problem-solving strategies.* Springer-Verlag New York.

Larson, L. C. (1983). *Problem-Solving through problems.* Springer-Verlag New York.

Zeitz, P. (2007). *The art and craft of problem solving.* John Wiley and Sons.