JESÚS JERÓNIMO CASTRO
HERIBERTO DÍAZ PEÑA
GABRIELA SILVA OLVERA

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

JERONIMO@CIMAT.MX,
JESUSJERO@HOTMAIL.COM

03

USANDO ÁREAS PARA DEMOSTRAR TEOREMAS

INTRODUCCIÓN

En muchos problemas de Geometría, especialmente aquéllos que tratan de razones de segmentos, conviene encontrar una equivalencia entre la razón de las longitudes de los segmentos y la razón de áreas de figuras asociadas a estos segmentos, usualmente triángulos y cuadriláteros. Al hacer el cambio a una razón de áreas, es más sencillo visualizar hechos y propiedades que pueden cumplirse en nuestro problema en cuestión.

En otras ocasiones, el problema mismo trata de áreas de figuras, sin embargo, a veces conviene considerar otras figuras (usualmente triángulos) que tengan área igual. En cierto sentido, esto es como trasladar la figura sin mantener su forma pero si conservando su área. La idea central en muchos de los problemas que tratan sobre áreas de figuras es la siguiente: dos triángulos con bases de la misma longitud y alturas de la misma longitud, tienen áreas iguales.

Por otro lado, algunos problemas sobre lugares geométricos de puntos están relacionados con áreas de algunas figuras, por lo que en muchas ocasiones es útil analizar cuando algunas figuras tienen la misma área o cuando la suma de las áreas de éstas es un valor constante. Recordemos el concepto de lugar geométrico de puntos: un lugar geométrico de puntos es el conjunto de puntos que cumplen cierta propiedad. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que siempre están a la misma distancia de un punto fijo es una circunferencia con centro en ese punto fijo.

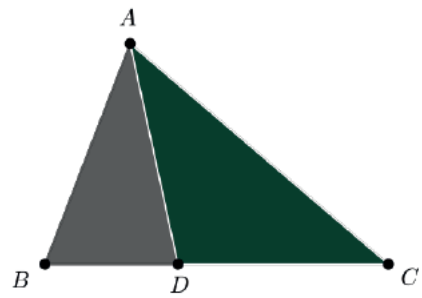
EL MÉTODO DE ÁREAS

Un ejemplo de un lugar geométrico de puntos que se relaciona con áreas de triángulos es la definición de mediana de un triángulo: la mediana hacia un lado de un triángulo, es el lugar geométrico de los puntos en el triángulo que forman con los otros dos lados del triángulo, un par de triángulos de la misma área.

Veremos ahora que la mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Para esto, probaremos un par de hechos geométricos que forman parte de un método para resolver problemas geométricos, conocido como el método de áreas. Tal método consiste precisamente en cambiar razones de longitudes de segmentos por razones de áreas de figuras.

Lema 2.1

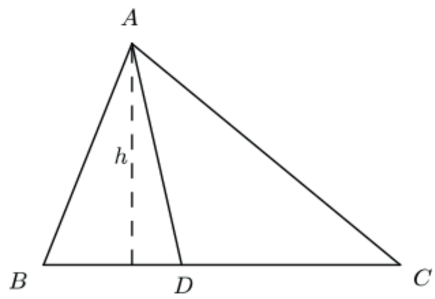
Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$, entonces se cumple que $BD/DC = |ABD/ADC|$



Demostración. Notemos que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ADC$ comparten la altura desde el vértice. Digamos que la medida de su altura es h. Como $|ABD|={BD\cdot h}/2$ y $|ADC|={DC\cdot h}/2$, tenemos que:

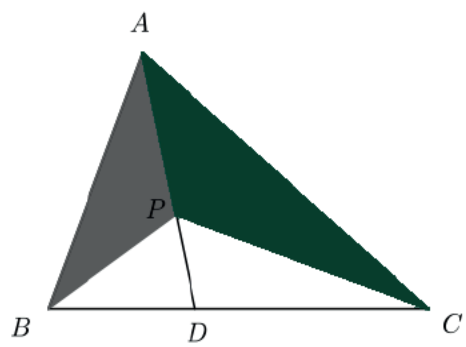
$$\frac{|ABD|}{|ABC|}=\frac{\frac{|BD\cdot h|}{2}}{\frac{|DC\cdot h|}{2}}$$

es decir, $|ABD|/|ADC|=BD/DC$



Lema 2.2

Sea D un punto sobre el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$ y sea P un punto en el segmento AD, entonces se cumple que $BD/DC=|ABP|/|APC|$



Demostración. De acuerdo al Lema 2.1, tenemos que $BD/DC = |ABD|/|ADC|$. Notemos que BD y DC también son las bases de los triángulos △BPD y △PDC, respectivamente, por lo que $BD/DC = |BPD|/|PDC|$.

Ahora observemos lo siguiente: si para los números x, y, z,w se cumple que $x/y=z/w= \lambda$, entonces también se cumple $x\text{-}z/y\text{-}w =\lambda$

Esto último puede verse simplemente sustituyendo $x=\lambda y$ y $z=\lambda w$ en la expresión anterior. Utilizando este hecho tenemos que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{|ABD| - |BPD|}{|ADC| - |PDC|} = \frac{|ABP|}{|APC|}.$$

Volviendo a nuestra discusión sobre las medianas de un triángulo, supongamos que P es un punto en el interior de un triángulo △ABC tal que |ABP|=|APC|. Prolongamos AP hasta cortar a BC en un punto D; dado que $BD/DC=|ABP|/|APC|=1$, tenemos que D es el punto medio del segmento BC. Concluimos entonces que la mediana correspondiente al vértice A es el segmento de lınea que une A con el punto medio del lado BC.

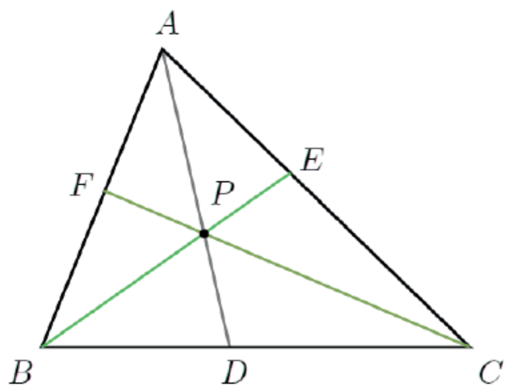
Ahora veremos otro ejemplo donde se usa el Lema 2.2 (ver por ejemplo [1, 3, 4, 6]).

Teorema 2.1 Teorema de Ceva. Dado un triángulo △ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si las líneas AD, BE y CF concurren entonces

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Demostración. Por el Lema 2.2 sabemos que $|ABP|/|APC|=BD/DC$, $|CBP|/|ABP|=CE/EA$ y $|APC|/|CBP|=AF/FB$. De aquí se obtiene que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{|APC|}{|CBP|} \cdot \frac{|ABP|}{|APC|} \cdot \frac{|CBP|}{|ABP|} = 1.$$



Ejemplo 2.1 Tomando en cuenta la figura del ejemplo anterior, probar que se cumple que

$$\frac{DP}{DA} + \frac{EP}{EB} + \frac{FP}{FC} = 1.$$

Demostración. Notemos que $DP/DA = |BPD|/|BAD|= |CPD|/|CAD|$, entonces, utilizando el hecho mencionado en la demostración del Lema 2.2, tenemos que

$$\frac{DP}{DA} = \frac{|BPC|}{|ABC|}. \tag{1}$$

De manera análoga se obtiene que

$$\frac{EP}{EB} = \frac{|APC|}{|ABC|}, \tag{2}$$

$$\frac{FP}{FC} = \frac{|APB|}{|ABC|}. \tag{3}$$

Sumando las igualdades (1), (2), (3), obtenemos que

$$\frac{DP}{DA} + \frac{EP}{EB} + \frac{FP}{FC} = \frac{|BPC| + |APC| + |APB|}{|ABC|} = \frac{|ABC|}{|ABC|} = 1.$$

CONSIDERANDO FIGURAS DE ÁREAS EQUIVALENTES

Como mencionamos en la introducción, en muchas ocasiones conviene cambiar una o más figuras por otras que tengan la misma área. El siguiente es un buen ejemplo de esto (ver [2]).

Ejemplo 3.1 Sean DE y FG segmentos sobre los lados AB y AC de un triángulo △ABC y sea P0 un punto en el interior del triángulo. Entonces el lugar geométrico de los puntos P en el triángulo △ABC, tales que

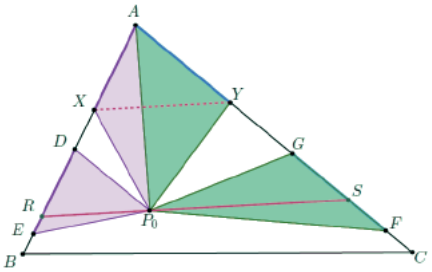
$$|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|,$$

es un segmento.

Demostración. Consideremos los puntos X en AB e Y en AC de manera que AX = DE y AY = FG. Como $|AXP_0| = |DEP_0|$ y $|AY P_0| = |FGP_0|$ entonces |AXP0Y | = $|DEP_0|$+|FGP0|, además, como |AXP0Y | = |AXY |+ $|XP_0Y|$ y el triángulo △AXY es fijo, tenemos que

$$|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|$$

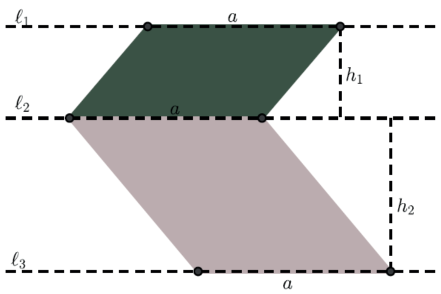
si y sólo si $|XPY| = |XP_0Y|$. Esto último se cumple si y sólo si los puntos P están sobre la lınea paralela a XY a través de P_0. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos P tales que $|DEP| + |FGP| = |DEP_0| + |FGP_0|$ es el segmento RS paralelo a XY.



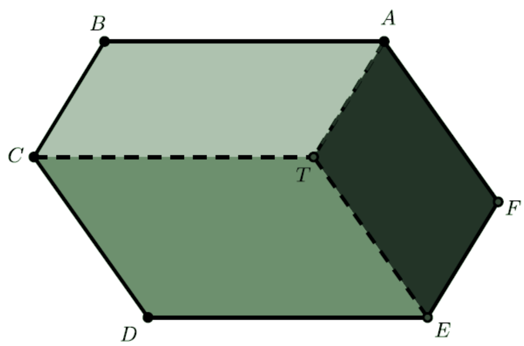
Ejemplo 3.2 Sea H un hexágono en cual cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Prueba que existe un paralelogramo Q cuyos vértices son vértices de H y el cual cumple que

$$\frac{|Q|}{|H|} \geq \frac{2}{3}.$$

Demostración. Primero, observemos que el área de un paralelogramo depende de la longitud de cualquiera de sus lados y la altura (distancia hacia el lado opuesto) hacia ese lado. Si consideramos entonces tres segmentos de la misma longitud, digamos a, sobre tres lıneas paralelas ℓ1, ℓ2 y ℓ3, separadas a distancias h1 y h2 (como se muestra en la siguiente figura), entonces la suma de las áreas de los paralelogramos es constante e igual a a(h1 + h2), independientemente de la posición de los tres segmentos.



Dividimos el hexágono en tres paralelogramos, como se muestra en la siguiente figura.



Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del hexágono es 1. Entonces la suma de las áreas de los dos paralelogramos más grandes (ABCT y CDET) es mayor o igual que 2/3. Si lo anterior no fuera cierto, entonces tendrıamos que el área del hexágono es menor que 1, lo cual es una contradicción.

Ahora aplicamos la observación hecha al principio de la demostración y obtenemos que

$$|BPQA| + |PEDQ| = |ABCT| + |CDET| \geq 2/3$$

en otras palabras $|ABDE| \geq 2/3$.

USANDO ÁREAS COMO IDEA AUXILIAR

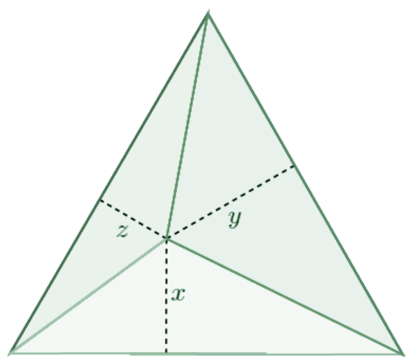
Hay problemas en los que no parece haber una conexión directa con el área de triángulos, sin embargo, calcular el área de ciertos triángulos puede ser una estrategia muy útil para lograr encontrar una solución. Un ejemplo muy conocido de aplicación de esta idea es el Teorema de Viviani (ver [1, 5, 6]).

Teorema 4.1 Teorema de Viviani. La suma de las distancias hacia los lados, desde un punto en el interior de un triángulo equilátero, es constante.

Demostración. Sean a y h las longitudes del lado del triángulo equilátero y de su altura. Sean x, y, z, las distancias desde el punto hacia los lados del triángulo. Sabemos que el área del triángulo se calcula como $^{ah}/_{2}$, por otro lado, si descomponemos el triángulo en los tres triángulos mostrados, el área también se calcula como $^{ax}/_{2}+^{ay}/_{2}+^{az}/_{2}$. Tenemos que

$$\frac{ah}{2} = \frac{(x+y+z)h}{2},$$

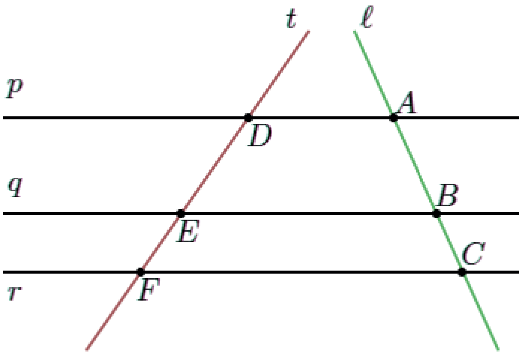
de donde se obtiene que x+y+z=h, es decir, la suma es igual a la altura del triángulo.



Otro ejemplo de aplicación del área de triángulos como una idea auxiliar, es la demostración del Teorema de Tales de Mileto (ver [1, 6]). Lo que este teorema establece, es útil entre otras cosas, para justificar los criterios de semejanza y congruencia de triángulos. El teorema es el siguiente:

Teorema 4.2 Si una linea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón m:n, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón m:n.

Por ejemplo, sean p, q, r, tres rectas paralelas. Si una línea ℓ corta a las rectas en los puntos A, B y C, de manera tal que AB:BC=2:1, y otra línea t corta a las rectas paralelas en D, E y F, también se cumple que DE:EF=2:1.



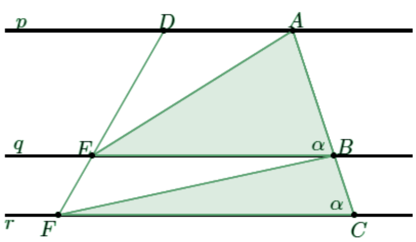
Demostración. Tomando en cuenta la figura anterior, debemos demostrar que

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

Para esto utilizaremos que el área de un triángulo se puede obtener mediante el semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre éstos, lo cual es fácil de demostrar. Tenemos entonces que

$$\frac{|ABE|}{|BCF|}=\frac{\frac{BE\cdot AB\cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}}{\frac{CF\cdot BC\cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}},$$

donde α=∡ABE=∡BCF.



Análogamente tenemos que

$$\frac{|DEB|}{|EFC|}=\frac{\frac{BE\cdot DE\cdot \operatorname{sen}\beta}{2}}{\frac{FC\cdot EF\cdot \operatorname{sen}\beta}{2}},$$

donde β=∡DEB=∡EFC. Como |ABE| = |DEB| y |BCF| = |EFC| tenemos que $|ABE|/|BCF|=|DEB|/|EFC|$ lo cual implica que $BE\cdot AB/CF\cdot BC=BE\cdot ED/CF\cdot EF$. Se sigue que

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

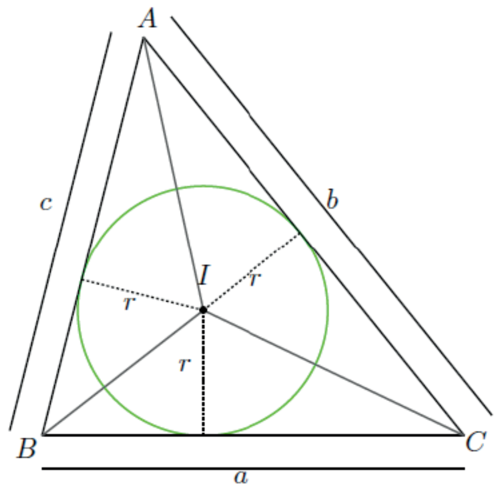
El siguiente teorema también se demuestra de manera muy sencilla si usamos áreas (ver [4, 6]).

Teorema 4.3 El área de un triángulo se obtiene como rs, donde r es el inradio del triángulo y s es su semiperímetro.

Demostración. Sea △ABC el triángulo dado y sean a, b y c las longitudes de sus lados. Sea I el centro de la circunferencia inscrita. Descomponemos el triángulo en los tres triángulos △AIB, △BIC, △CIA; entonces tenemos que |ABC| = |AIB| + |BIC| + |CIA|, es decir,

$$|ABC|=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{(a+b+c)r}{2}.$$

En otras palabras, |ABC| = sr.



Ejemplo 4.1 Sean h_A, h_B, h_C las alturas desde los vértices de un triángulo △ABC hacia los lados BC, CA y AB, respectivamente, y sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que se cumple que

$$\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.3 sabemos que $a+b+c={}^{2|ABC|}/_{r}$. Como $2|ABC| = ah_A = bh_B = ch_C$, tenemos que ${}^{2|ABC|}/_{hA}= a$, ${}^{2|ABC|}/_{hB}= b$, ${}^{2|ABC|}/_{hC}= c$, por lo que

$$\frac{2|ABC|}{h_A}+\frac{2|ABC|}{h_B}+\frac{2|ABC|}{h_C}=\frac{2|ABC|}{r},$$

es decir,

$$\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}.$$

CONCLUSIONES

A lo largo de los ejemplos desarrollados en este trabajo, pudimos notar que la idea de usar áreas para cambiar razones de segmentos, o usar áreas de triángulos como elemento auxiliar, nos ayuda a desarrollar soluciones elegantes para ciertos tipos de problemas geométricos.

REFERENCIAS

Eves, H. (1985). Estudio de las geometrías, UTEHA.

Goloviná, L.I, Yaglóm I.M (1981). Inducción en la geometría, MirMoscú.

Honsberger, R. (1995). Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry, The Mathematical Association of America.

Martin Isaacs, I. (2002). Geometría universitaria, Thomson Learning.

Shariguin, I. (1989). Problemas de geometría, Planimetrıa, Colección Ciencia Popular, MIR-Moscú.

Shively, L. S. (1984). Introducción a la geometría moderna, CECSA.