CLAUDIA AYALA GIRÓN
JESÚS JERÓNIMO CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO,
FACULTAD DE INGENIERÍA.

04

USO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA FACILITAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA GEOMETRÍA SINTETICA

Use of analytical geometry to facilitate the resolution of synthetic geometry problems

RESUMEN

El presente trabajo pretende mostrar la importancia del estudio de la geometría analítica para poder aplicar sus técnicas conocidas a la resolución de problemas que pareciera que por métodos sintéticos (uso de técnicas euclidianas) es poco intuitiva. Es por ello que se exponen tres ejemplos que ponen en evidencia tal hecho, detallando paso a paso la resolución de cada uno mediante ambos enfoques.

Palabras clave: geometría, analítica, sintética, problemas, técnicas

ABSTRACT

The present work pretends to show the importance of the study of the analytical geometry so that the techniques known in this area can be applied to the resolution of problems, which does not seem to be intuitive by synthetic methods (use of Euclidean techniques) . Three examples that are believed to highlight this fact are exposed, detailing step by step the solution of each one through both approaches.

Keywords: geometry, analytical, synthetic, problems, techniques

INTRODUCCIÓN

La geometría analítica, introducida por Descartes en 1637, proporcionó técnicas que permitieron no sólo abordar muchos de los problemas geométricos no resueltos hasta ese momento, sino también plantear problemas geométricos más profundos (Gascón, 2002). Con esta idea se puede observar que la geometría euclidiana, en ese momento, no había logrado dar respuesta o interpretación a todos los problemas geométricos conocidos, ya que se debe tener en cuenta que cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética y se introducen variaciones en ellos, se generan nuevos problemas que quedan limitados dentro de este campo, por lo tanto, surge la necesidad de investigar otro medio con el fin de dar solución a estos nuevos problemas. Esta necesidad puede llevar entonces a buscar la solución bajo técnicas que la geometría analítica provee.

En cuanto a esto, Gamboa y Ballestero, en su trabajo sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría, afirman que la geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo que permite resolver problemas de diversa índole y comprender el mundo en cada uno de los escenarios que lo conforman (Gamboa y Ballestero, 2010). Cuando se les presenta un nuevo tema matemático a los estudiantes, en varias ocasiones, es inevitable que recurra a la intuición geométrica, el conocimiento y a su experiencia previa. En el nivel medio superior se busca como competencia disciplinar que los estudiantes, una vez que han cursado materias en las que se estudia geometría euclidiana y geometría analítica, logren proponer, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques, concretamente con el programa de estudios PRE09 (Universidad Autónoma de Querétaro, 2010).

Si se desea lograr esta competencia disciplinar en los estudiantes dentro del curso de geometría analítica y más allá de éste, es importante que se estudie no sólo la construcción de ecuaciones y la representación gráfica de las propiedades de la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, situación común a la que se limita.

Es así que el presente trabajo pretende hacer evidente una de las razones para justificar el por qué es importante estudiar geometría analítica y tener presente el uso de sus técnicas al tratar de dar respuesta a un problema geométrico, el cual bajo un enfoque de geometría euclidiana no se puede resolver de forma sencilla. Por ello en la tercera sección de este trabajo se presentan tres problemas que dejan vislumbrar que si bien se puede dar una solución sintética, ésta puede no resultar tan fácil de conseguirse en primera instancia si no se tienen las nociones elementales de la geometría euclidiana bien cimentadas y un amplio bagaje de problemas resueltos por medio de estas técnicas. Pero al llevar estos problemas al plano cartesiano, es decir, al asignarle coordenadas a lo que plantea el problema, y al hacer uso de técnicas básicas de la geometría analítica, con un grado considerable de dominio, queda en evidencia una solución más alcanzable del problema.

METODOLOGÍA

Para fines de este artículo se ha optado por trabajar con problemas, ya que es común, en la práctica docente, que el profesor los emplee para que sus alumnos apliquen las competencias e, incluso, con el objetivo de medir el nivel de apropiación. Ante esto, se eligieron problemas que permitieran encontrar una solución a partir de técnicas euclidianas, así como analíticas. En cada problema se trató de desarrollar paso a paso su solución para dejar en evidencia que la solución euclidiana no resulta tan intuitiva, debido a que basta con pensar en llevar el problema a un plano cartesiano y trabajar con coordenadas. En el apartado de resultados y discusión se describe lo antes mencionado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan tres problemas resueltos mediante técnicas de la geometría sintética y geometría analítica. En las soluciones de estos se muestra cómo ambos enfoques pueden resolver un mismo problema, sin contraponerse en la resolución, con base en sus técnicas y conceptos elementales, respectivamente. Así dejando en evidencia que, al emplear las ideas intuitivas de la geometría sintética, no se puede llegar tan sencillamente a lo que se pide en cada uno de los problemas, sin embargo, al plantearlas en un plano cartesiano, con coordenadas, y al usar elementos de álgebra, es decir, al emplear las técnicas de la geometría analítica, resulta más sencillo obtener la respuesta solicitada en cada problema. A continuación, se enuncian los problemas y se muestran ambas soluciones paso a paso para que sea más claro lo anterior.

Problema 1

Sea ABC un triángulo, tal que AB=AC y sea D el pie de altura desde A. Sea E la proyección de D sobre AC y sea M el punto medio de DE. Entonces se cumple que AM es perpendicular a BE (véase Figura 1).

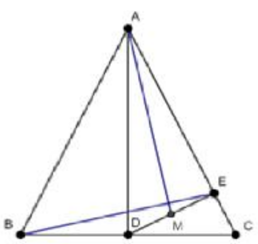

Figura 1. Representación gráfica del problema 1

Demostración (solución sintética)

Al ser N el punto medio de BD, se traza las líneas MN y AN, de acuerdo con el teorema de Tales se tiene que MN∥BE. También se puede observar que $\triangle ABD$ es semejante al $\triangle ADE$, ya que ambos son triángulos rectángulos, y que ∡BAD=∡DAE= α (véase después Figura 2).

Como N y M son puntos medios de los catetos correspondientes BD y DE (véase más tarde Figura 3), se tiene que:

$$\measuredangle NAD = \measuredangle MAD = \theta \qquad (1)$$

Al respecto, se sigue que ∡NAM=α, además, $ANAM=ABAD$ y nótese que ∡BAD=α, entonces se tiene por el criterio lal, que △ABD es semejante al △ANM.
Por lo que se consigue lo que se quería probar:

$$\measuredangle AMN = \measuredangle ADB = 90° \qquad (2)$$

Observación

Aunque la solución es aparentemente sencilla, involucrar el punto medio del segmento BD es una idea geométrica que no se le ocurre usualmente a un estudiante con poca experiencia en la solución de problemas relacionados con la geometría euclidiana. El involucrar el punto N puede ser considerado una idea realmente ingeniosa, la cual facilita de gran manera la solución del problema.

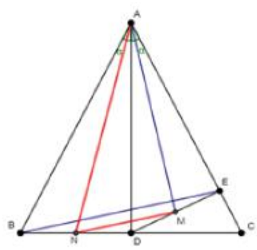

Figura 2. Aplicando teorema de Tales

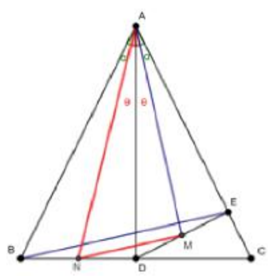

Figura 3. Triángulos semejantes △ABD y △ANM

Demostración (solución analítica)

Se introduce el sistema de coordenadas de modo que el origen está en D, el eje x coincide con el segmento BC y el eje y coincide con el segmento AD (Figura 4).

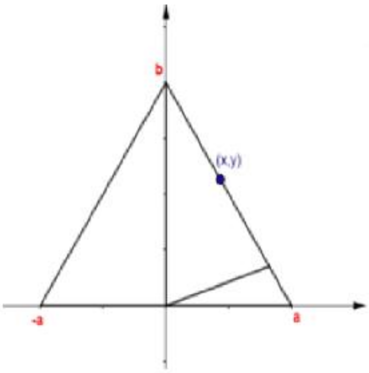

Figura 4. Representación gráfica del problema 1 en el plano cartesiano

Se puede suponer que las coordenadas de C son (a,0), de B son (-a,0) y de A son (0,b).

La pendiente de la línea AC es m_1=b/-a, entonces su ecuación es:

$$\frac{b}{-a} = \frac{y-b}{x-0} \tag{3}$$

De donde sigue:

$$bx = -a(y-b) \tag{4}$$

Y se obtiene:

$$bx + ay - ab = 0 \tag{5}$$

Ahora, como la pendiente de DE es $m^2=-{}^1/{}_{m_1}$, por ser perpendicular a AC y considerar dos puntos sobre DE (0,0) y (x,y), (véase Figura 5).

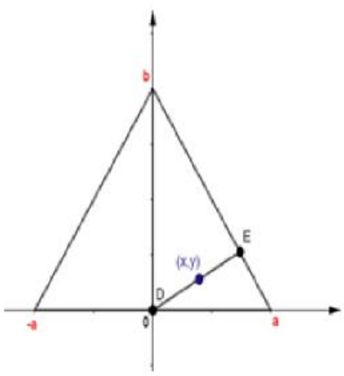

Figura 5. Punto (x,y) sobre la recta DE

Es así que se tiene que $m_2={}^a/{}_b$, por lo que la ecuación de DE queda defina por:

$$\frac{a}{b} = \frac{y-0}{x-0} \tag{6}$$

De donde se obtiene:

$$ax - by = 0 \tag{7}$$

Como las coordenadas del punto E (x0,y0) deben satisfacer las ecuaciones 5 y 7, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} bx + ay = ab \\ ax - by = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Por el método de sustitución se obtiene:

$$x = \frac{by}{a} \tag{9}$$

$$b\left(\frac{by}{a}\right) + ay = ab \tag{10}$$

$$y\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = ab \tag{11}$$

Entonces se visualiza claramente que:

$$y = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \tag{12}$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \tag{13}$$

De aquí se tiene que

$$E(x_0, y_0) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) \tag{14}$$

Ahora se obtienen las coordenadas del punto medio (M) de ED, definido por:

$$M = \left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right) \tag{15}$$

Como lo que se quiere es probar que AM y BE son ortogonales, se debe probar que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, es decir, si m_3 es la pendiente de AM y m_4 es la pendiente de BE, se debe probar que $m_3=-{}^1/{}_{m_4}$. Para obtener dichas pendientes m_3 y m_4, se toman los puntos A y E, y B y E, respectivamente (véase Figura 6).

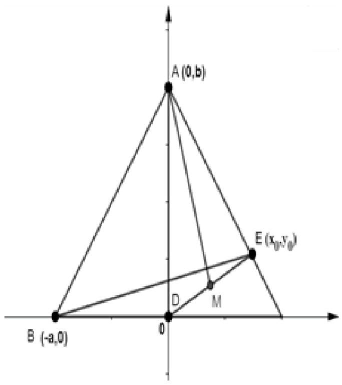

Figura 6. Coordenadas de los puntos A, B y E

Entonces se tiene que:

$$m_3 = \frac{\frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)} - b}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}} = \frac{-(a^2+2b^2)}{ab} \tag{16}$$

$$m_4 = \frac{\frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)}}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)} + a} = \frac{ab}{a^2+2b^2} \tag{17}$$

Por lo tanto, se llega a lo que se quería demostrar:

$$m_3 = -\frac{1}{m_4} \tag{18}$$

Observación

Aunque la solución es más larga y con muchas operaciones algebraicas, cada uno de los pasos se deriva de manera sencilla siguiendo los procedimientos normalmente empleados en geometría analítica.

Problema 2

Un grupo de piratas roba el tesoro de un barco y se dirige a una isla desierta a enterrar el tesoro. En la isla había dos palmeras y un roble R (véase Figura 7). Para enterrar el tesoro, los piratas hicieron lo siguiente: contaron los pasos del roble hasta la palmera P_1, giraron 90° en contra de las manecillas del reloj y caminaron la misma cantidad de pasos que habían recorrido entre el roble y la palmera. Ahí pusieron una marca (el punto A). Después hicieron lo mismo con la palmera P_2 pero ahora la rotación fue en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo marcaron una segunda posición (el punto B). El tesoro lo enterraron a la mitad del camino entre las dos marcas (punto X). Después de cierto tiempo, el paso de un huracán se llevó el roble, pero las palmeras siguieron en su lugar. Cuando los piratas llegan de nuevo a la isla para recuperar el tesoro se encuentran con la sorpresa de que sólo existen las palmeras. ¿Cómo localizaron el lugar dónde estaba enterrado el tesoro?

Demostración (solución sintética)

Por alguna razón, entre los piratas había un aficionado a la geometría y fue este pirata quien resolvió el problema. La solución es la siguiente:

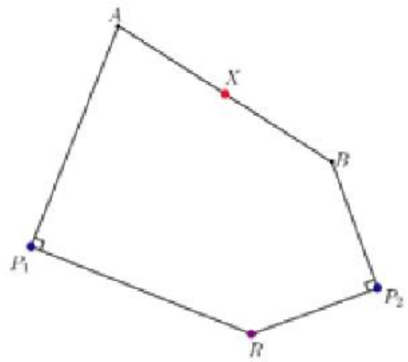

Figura 7. Representación gráfica del problema 2

Se trazan perpendiculares a P_1P_2 desde los puntos A, X, R y B, las cuales cortan al segmento en los puntos P, S, T y Q, respectivamente. Se observan las igualdades de ángulos.

$$\measuredangle P_1AP = \measuredangle RP_1T \tag{1}$$

$$\measuredangle P_1BQ = \measuredangle RP_2T \tag{2}$$

Además, de las igualdades de longitudes $AP_1 = P_1R$ y $BP_2 = P_2R$. Se tiene que $\triangle AP_1P$ es congruente a $\triangle P_1RT$ y que $\triangle BP_2Q$ es congruente a $\triangle P_2RT$. De estas congruencias (véase Figura 8), se tiene que:

$$P_1P = RT \tag{3}$$

$$QP_2 = RT \tag{4}$$

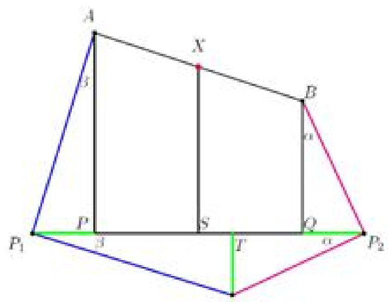

Figura 8. Congruencia de triángulos

Entonces se cumple que S es el punto medio de los segmentos PQ y P_1P_2. También de estas congruencias de triángulos se visualiza que:

$$AP = P_1T \tag{5}$$

$$BQ = TP_2 \tag{6}$$

Entonces se tiene que

$$AP + BQ = P_1T + P_2T = P_1P_2 \tag{7}$$

Por otro lado, se sabe que

$$XS = \frac{AP+BQ}{2} \tag{8}$$

Lo que implica que

$$XS = \frac{P_1P_2}{2} \tag{9}$$

La solución para el problema es la siguiente: se cuentan los pasos entre las palmeras, se recorre la mitad de esa distancia empezando en la palmera P_1 y, con dirección de la palmera P_2, se gira 90° en contra de las manecillas del reloj y se camina esa misma cantidad de pasos. El punto al que se llega es donde está enterrado el tesoro.

Observación

En la solución de este problema se han trazado varias líneas auxiliares, las líneas paralelas al segmento que unen a los puntos y representan a las palmeras. Al realizar estos trazos, aparecen congruencias de triángulos que sirven en la solución. Sin embargo, realizar este tipo de trazos es usualmente una habilidad de quienes tienen experiencia resolviendo problemas geométricos. Aunque la solución usa conceptos básicos de geometría, de nuevo está el inconveniente del ingrediente de ingenio que requiere una persona para obtener esta solución.

Demostración (solución analítica)

Se introduce el sistema cartesiano de manera que el eje x coincide con la línea por P_1 y P_2 cuyo origen está en el punto medio del segmento P_1P_2 (Figura 9).

Supongamos que las coordenadas de las palmeras y el roble son: $P_1=(-a, 0)$, $P_2=(a, 0)$, $R=(b, c)$.

Las coordenadas de los puntos A y B se pueden obtener trasladando el segmento P_2R paralelamente de manera que el extremo P_2 coincide con el origen. Las coordenadas del otro extremo de este segmento paralelo son $(b - a, c)$, ya que sólo se trasladan en la dirección del eje x una cantidad -a. Se rota este segmento un ángulo de 90° en sentido de las manecillas del reloj, tomando como centro de rotación al origen.

.

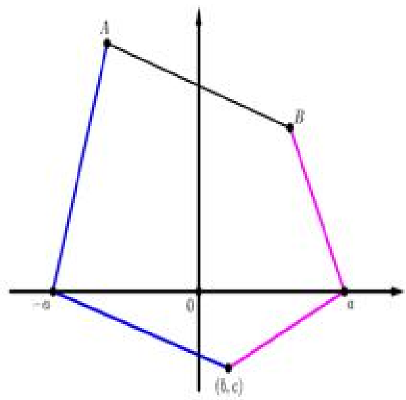

Figura 9. Representación gráfica del problema 2 en el plano cartesiano

Dado un punto (x, y), el punto que, se obtiene rotando 90° en sentido de las manecillas del reloj, tiene coordenadas $(y,-x)$, además, el punto que se consigue al rotar 90° en sentido contrario a las manecillas tiene coordenadas $(-y, x)$.

De lo anterior se sigue que el punto rotado tiene coordenadas $(c,\ a - b)$, ahora, se traslada de nuevo una distancia a en dirección horizontal (Figura 10) y se vislumbra que:

$$B = (c + a,\ a - b) \tag{10}$$

De manera análoga se obtiene:

$$A = (-c - a, a + b) \tag{11}$$

Al seguir el punto

$$X = \left(\frac{-c-a+c+a}{2}, \frac{a+b+a-b}{2}\right) = (0, a) \tag{12}$$

Es decir, el tesoro se encuentra sobre la línea perpendicular a P_1P_2 a través de su punto medio, y la cantidad de pasos entre el tesoro y el punto medio de P_1P_2 es la mitad de los pasos entre P_1 y P_2. De nuevo, podemos ver que la posición del tesoro no depende de la posición del roble.

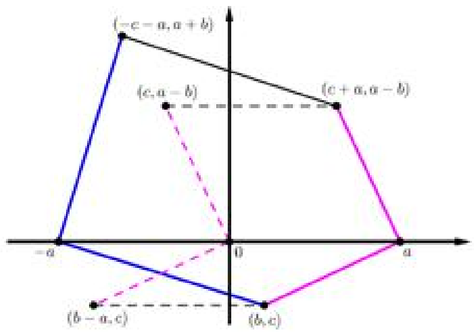

Figura 10. Coordenadas de los puntos a considerar

Observación

La solución algebraica de este problema solamente sigue las ideas y técnicas comunes de la geometría analítica, razón por la cual es más probable que una persona con los conocimientos básicos de geometría analítica puede llegar a tal solución.

Problema 3

Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso ¿qué curva describe la posición del gato? (véase Figura 11).

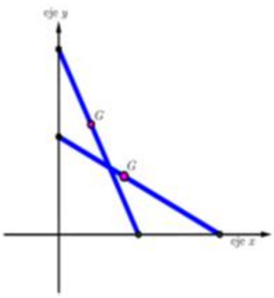

Figura 11. Representación gráfica del problema 3

Demostración (solución sintética)

El caso, cuando el gato se encuentra parado sobre el peldaño exactamente a la mitad de la escalera, se puede resolver de manera sencilla usando ideas de geometría euclidiana. Como G es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo △OAB, el centro de su circunferencia circunscrita es G, entonces se cumple:

$$GA = GB = GO \tag{1}$$

Es decir, los triángulos △AOG y △BOG son isósceles. De esto se obtiene que:

$$OG = \frac{1}{2}AB \tag{2}$$

Es decir, la distancia desde G hasta O es siempre una constante y, por lo tanto, G describe un arco de circunferencia (véase Figura 12).

Observación

El caso general es muy difícil de resolver utilizando sólo ideas de geometría euclidiana. En este caso, la solución es muy simple si se introduce el sistema cartesiano y se resuelve el problema en forma paramétrica.

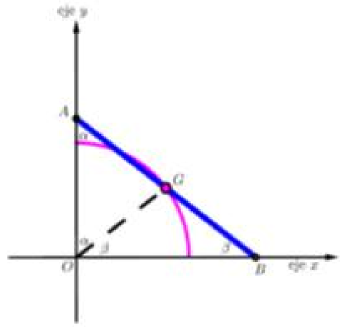

Figura 12. Arco de circunferencia descrita por el gato

Demostración (solución analítica)

A partir de que sea α el ángulo que forma la escalera con la pared se puede suponer que el origen es el punto donde se encuentra la línea de la pared y la línea del piso y que los ejes de coordenadas coinciden con esas líneas. Así se denota que las coordenadas del punto G como x(α) y y(α) y las longitudes constantes AG y GB con a y b, respectivamente (véase Figura 13).

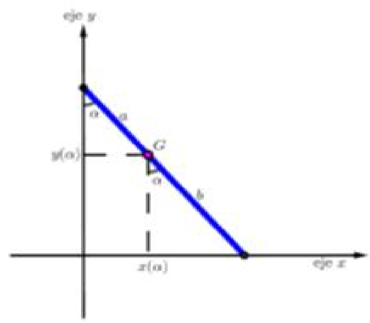

Figura 13. Representación gráfica del problema 3 en el plano cartesiano

Es fácil ver que:

$$\frac{x(\alpha)}{2} = sen\ \alpha \qquad (3)$$

$$\frac{y(\alpha)}{2} = cos\ \alpha \qquad (4)$$

Por la identidad Pitagórica se tiene que:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad (5)$$

De donde se sigue que:

$$\frac{x(\alpha)^2}{a^2} + \frac{y(\alpha)^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Esto es la ecuación de una elipse centrada en el origen y con semiejes de longitudes a y b, por lo tanto, el lugar geométrico descrito por el gato es un arco de elipse.

Observación

En este problema mediante sólo métodos sintéticos no es sencillo obtener solución. Sin embargo, al utilizar técnicas de geometría analítica sí fue posible desarrollar una solución.

Hasta aquí se ha mostrado la solución detallada de cada uno de los tres problemas, a través de herramientas sintéticas y analíticas.

CONCLUSIONES

Después de haber resuelto cada uno de los problemas empleando ambas técnicas, se puede apreciar que, mediante ideas de geometría euclidiana, es necesario poseer cierta experiencia y habilidad en la introducción de trazos auxiliares. De otro modo, la demostración de dichos problemas puede resultar extremadamente complicada. Cabe destacar, sin embargo, que las ideas de geometría euclidiana para la solución de problemas, normalmente son consideradas ideas más elegantes y creativas desde el punto de vista de la comunidad matemática. En el caso de los concursos tipo Olimpiada de Matemáticas, una solución en la se utilizan elementos de la geometría analítica se penaliza severamente si no se completa, mientras que, si se usan ideas de geometría euclidiana es común que se valoren y califiquen como puntos parciales, aunque la solución no esté completa. Saliendo del contexto de las competencias de Matemáticas, se puede decir que realmente la cuestión más importante es lograr resolver un problema, más allá de si la solución es considerada elegante o no, por tal motivo las técnicas de geometría analítica resultan una opción viable para intentar la resolución de problemas geométricos. Sin embargo, usar tales técnicas de manera adecuada requiere de práctica y el conocimiento de los conceptos básicos y sus representaciones algebraicas.

AGRADECIMIENTO

El primer autor listado en este trabajo agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo recibido mediante la beca para realizar los estudios en el programa de maestría en Didáctica de las Matemáticas.

REFERENCIAS

Gascón, J. (Febrero 2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, pp. 12-25.

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare. Vol. XIV*(2), pp. 125-142.

Universidad Autónoma de Querétaro. (2010). Programa de matemáticas IV. *Plan de estudios PRE09.*