Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

ESTRUCTURAS MENTALES PARA MODELAR EL APRENDIZAJE DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS EN R^2. EL CASO DE ENSEÑANZA MEDIA

Marcela Parraguez González, Andrés Yáñez Pérez
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO (CHILE)
marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN

Basados en la teoría APOE como marco teórico y metodológico, investigamos desde una postura cognitiva, las estructuras mentales necesarias para modelar la construcción cognitiva de los valores y vectores propios en R^2 como objeto. Con el propósito de analizar la forma en que estudiantes de enseñanza media lo aprenden, se diseñó una descomposición genética (DG) para este fin. La puesta a prueba de esta DG en estudiantes de enseñanzamedia a través de un cuestionario(conjuntamente con los comentarios que ellos hicieron de sus respuestas), mostró que los elementos desde el ámbito geométrico –la Rotación en 180° con centro en el origen y la homotecia– son conceptos matemáticos relevantes para la construcción del concepto valor/vector propio como objeto en R^2.

Palabras clave: Valor propio, Vector propio, Rotación, Homotecia, Teoría APOE.

ABSTRACT

Based on the APOS theory as a theoretical and methodological framework, we investigate from a cognitive stance, mental structures needed to model the cognitive construction of eigenvalues and eigenvectors in R^2 as an object. In order to analyze how middle school students learn it, a genetic decomposition (DG) was designed for this purpose. The testing of this DG in high school students through a questionnaire (together with the comments they made their answers) showed that elements from the geometric field –the rotation 180° with center at the origin and the homothecy– are relevant mathematical concepts to build the concept value/eigenvector as an object in R^2.

Keywords: Eigenvalue, Eigenvector, Rotation, Homothecy, APOS Theory.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería, Pedagogía y/o de licenciatura en Matemáticas, Física y Química, precisan en general, de elementos de las teorías de espacios vectoriales, de coordenadas, de transformaciones lineales y de valores/vectores propios. Dorier y Sierpinska (2001) plantean que el problema central en esta materia consiste en que el estudiante tiene que trabajar con conceptos matemáticos de naturaleza muy general, pero tratados con elementos particulares. Específicamente, los conceptos de valor y vector propio representan un obstáculo mayor, porque precisan de una construcción previa y fuerte de espacio vectorial y transformación lineal, y como los aprendices no entienden su naturaleza general, se inclinan fuertemente por procedimientos calculatorios específicos que sabe manejar, pero no necesariamente los comprende (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016).

Salgado y Trigueros (2014), reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los valores y vectores propios, de los estudiantes en un curso en el que estos conceptos se han enseñado, usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Sin embargo, aún no se ha reportado un modelo cognitivo y su validación propiamente tal, plasmado en una descomposición genética, para el caso particular de valores y vectores propios enR^2, dirección que toma la presente investigación, cuya finalidad es develar elementos del ámbito geométrico, que permiten la construcción de este objeto matemático en R^2.

De acuerdo a varios textos de estudio (Por ejemplo: Poole, 2011; Lay, 2007) los valores/vectores propios se definen de la siguiente forma:

Si A es cualquier matriz numérica cuadrada, de tamaño nxn, entonces:

(1) Un valor propio, denominado λ, es un escalar, que para un vector v distinto al nulo, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.
(2) El vector v se llama vector propio de λ, si: $Av = \lambda v$.

RELEVANCIA DE LOS VALORES/VECTORES PROPIOS

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del álgebra lineal. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado. Por ejemplo, se usan en áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, economía, etc., entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz. También hay muchas aplicaciones prácticas, entre las que destacamos: *El orden en que los resultados de la búsqueda aparecen en Google se determina mediate el cálculo de un vector propio* (ver https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank).

PREGUNTA Y OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas de investigación que surgen de la presentación en los apartados anteriores, son por un lado desde la matemática: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores/vectores propios? y por otro, desde la cognición y la didáctica ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción delos conceptos valores/vectores propios? Para responder estas preguntas se posesionó esta investigación desde estudiantes de enseñanza media utilizando como marco teórico la teoría APOE. Consideramos que esa teoría es pertinente para este estudio dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de instrumentos y el análisis de los datos de forma congruente con la propuesta teórica.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros & Weller, 2014) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) es una teoría reconocida en la comunidad de investigación en Didáctica de la Matemática. En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget (Dubinsky, 1991) para describir la construcción de objetos mentales, relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación y reversión, como se explicita a continuación.

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción acción de dicho concepto si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él ha interiorizado la acción en un proceso si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos. Por otra parte, dos o más procesos pueden coordinarse para construir un nuevo proceso y un proceso puede revertirse o generalizarse. Si el estudiante considera un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se afirma que ha encapsulado el proceso en un objeto. Además, si necesita volver desde el objeto al proceso que le dio origen, se dice que ha desencapsulado el objeto.

En general puede decirse, a la luz de esta teoría, que las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados. Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un esquema y puede destematizarlo para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellos, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Para operacionalizar la teoría como marco de investigación se requiere del diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG), que es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta investigación interesa el diseño de una descomposición genética que describa la construcción del conocimiento incluido en los valores/vectores propios, en el contexto de un concepto del álgebra lineal.

MÉTODO

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción de los valores/vectores propios en estudiantes de enseñanza media, se diseñó una descomposición genética que se describe más adelante y se crearon instrumentos y registros de observación, basados en la descomposición genética, para llevar a cabo el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, en particular de sus estrategias de solución de los ítems de dichos registros. Para analizar dichos procedimientos, consideramos que una aproximación adecuada es el estudio de casos (Stake, 2010), ya que es apropiada para estudiar una situación a profundidad en un periodo de tiempo acotado.

PARTICIPANTES

Los participantes de esta investigación fueron nueve estudiantes chilenos de dos instituciones distintas. Los dos casos de estudio propuestos se sustentan y justifican en la necesidad de delimitar con precisión las construcciones que los participantes ponen en juego cuando trabajan con problemas relacionados con los valores/vectores propios. Los casos de estudio permiten explicitar y describir las estructuras y los mecanismos mentales que se presentan en las situaciones de los instrumentos aplicados. Además, la heterogeneidad en la formación de los estudiantes de distintas niveles de formación permite explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que son comunes en la construcción de los valores y vectores

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

propios.

El procedimiento seguido en la selección de los casos se basó en la consideración de las siguientes categorías:

Caso 1: Corresponden a cinco estudiantes de primero medio (etiquetados como E1, E2, E3, E4 y E5), donde las transformaciones isométricas, especialmente la rotación en 180° grados, han formado parte de sus contenidos curriculares en la instittición escolar 1.

Caso 2: Corresponden a cuatroestudiantes de segundo medio (etiquetados como E6, E7, E8 y E9), donde la Homotecia ha formado parte de sus contenidos curriculares en la institución escolar 2.

ANÁLISIS TEÓRICO

El análisis teórico consistió en el estudio profundo, por parte de los investigadores, de los conceptos matemáticos incluidos en la construcción del objeto valores/vectores propios. A partir de este análisis, se diseñó una DG preliminar de los valores/vectores propios con la intención de contar con un modelo epistemológico y cognitivo de la construcción de del concepto en estudio.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LOS VALORES/VECTORES PROPIOS EN R^2

La construcción hipotética del objeto valores/vectores propios, en estudiantes de enseñanza media se inicia con acciones (Acción 2) sobre el objeto rotación en 180° con centro en el origen, especificamente rotando casos particulares de vectores dados. La Acción 2, es interiorizada, por el uso de una relación de correspondencia, que dado un vector se le asigna su inverso, este proceso obtenido (Proceso 2) se puede describir mediante la fórmula $\vec{v} \to -1 \cdot \vec{v}$. Lo anterior plasmado en la Figura 1, conformará un aspecto de la DG.

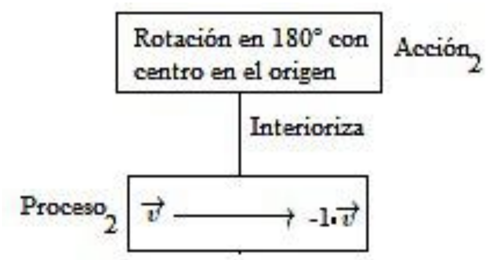

Figura 1. Interiorización de la rotación en un proceso.

Al realizar acciones (Acción 1) sobre el objeto ponderación escalar, por ejemplo, dibujando la ponderaciónde forma geométrica en casos particulares de vectores de R^2, permite ser interiorizadas por la forma algebraica de la ponderación por escalar para vectores en R^2, originando el proceso que se describe a continuación, para λ en R y v en R^2:

$$\lambda v = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Lo anterior se sintetiza en la Figura 2, y conformará otro aspecto de la DG.

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

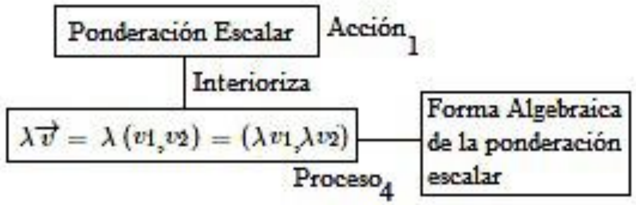

Figura 2. Acción Ponderación por Escalar interiorizada en un proceso.

Al coordinar el proceso 2 y proceso 4, por separado con la idea de función (proceso 1), como relación, se generan nuevos procesos, el Proceso 5 y Proceso rotulado, como una fórmula, lo que se muestra en la Figura 3, y conformará otro aspecto de la DG.

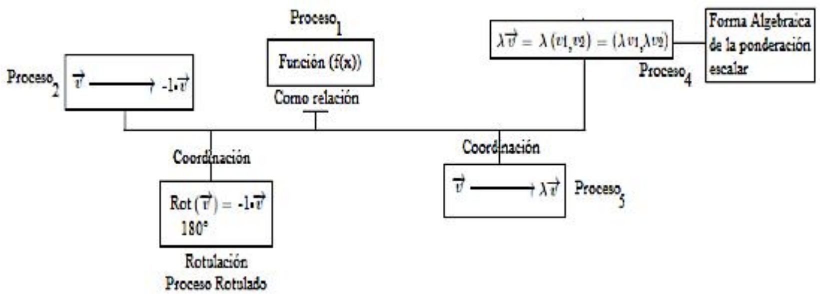

Figura 3. Coordinaciones de procesos que dan origen a otros procesos.

Un estudiante que logre encapsular el proceso 5, es decir, que tenga como objeto la ponderación escalar, utilizando como medio la idea de función, obtiene el objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante una relación algebraica, como lo muestra la Figura 4.

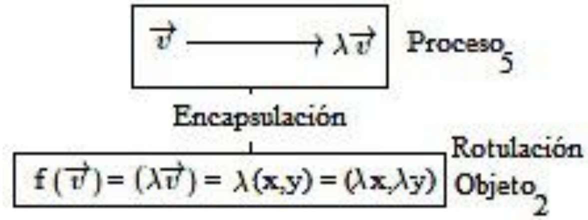

Figura 4. Encapsulación de un proceso en un objeto.

El objeto 2 al ser rotulado de esa forma, muestra la construcción objeto de los valores y vectores propios en R^2. Dicho objeto 2 al ser desencapsulado en dos procesos como casos particulares: por un lado, la rotación en 180° (Proceso rotulado), donde el elemento matemático que la propicia es la ponderación por el escalar $\lambda = -1$; y por otro lado, se puede desencapsular en un proceso geométricoa través de la variación (múltiplo) de la magnitud del vector, (Proceso 6), lo que se sintetiza en la Figura 5.

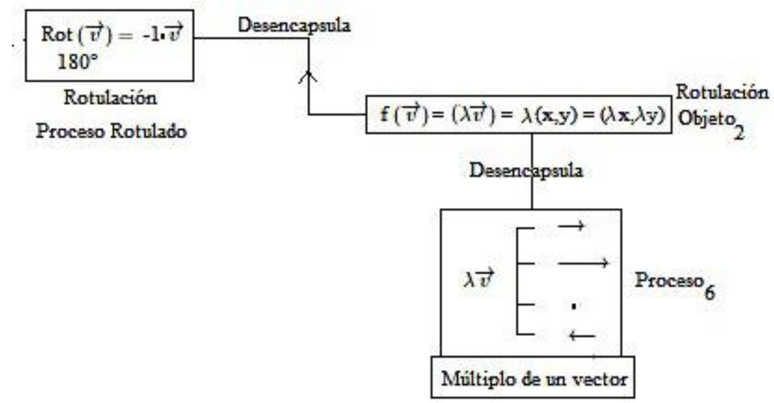

Figura 5. Desencapsulación del objeto valores/vectores propios en R^2.

La versión de DG hipotética, para ensenanza media en R^2, que se presenta en la Figura 6, emerge del análisis anterior, donde se ha puesto de manifiesto que un agente que permite la coordinación de procesos, es de la ponderación escalar –un caso particular es la rotación en 180◦ con centro en el origen–. También la construcción mental objeto de la rotación en 180°, en si mismo como objeto se puede desencapsular en el proceso que a un vector se le asigna su inverso aditivo, que a su vez este proceso es una desencapsulación del objeto $f: R^2 \rightarrow R^2, f(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

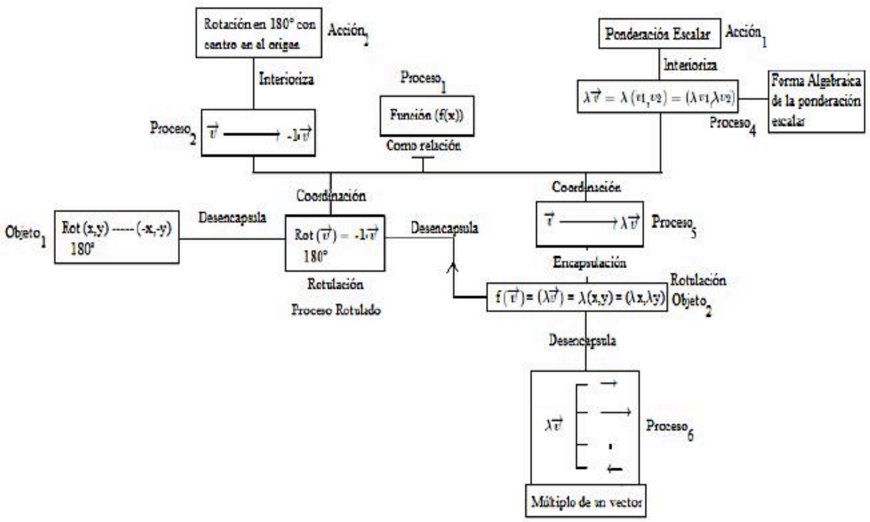

Figura 6. DG hipotética para el aprendizaje en enseñanza media de los valores/ vectores propios en R^2 .

INSTRUMENTOS

Una vez diseñada la DG preliminar (Figura 6), fue necesario validarla, es decir, tener alguna certeza de su viabilidad como modelo de construcción de los valores/vectores propios en R^2. Para ello se diseñó un cuestionario con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Para cada una de las preguntas del cuestionario se realizó un análisis a priori y otro a posteriori. Ambos análisis fueron profusamente discutidos entre los investigadores y las discrepancias se negociaron hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante como el análisis a priori de las preguntas del cuestionario, y posteriormente como el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

Las preguntas de la medición que resultaron clave y que permitió la obtención de resultados fueron las preguntas que a continuación se describen como pregunta 1 y pregunta 2.

Pregunta 1

Describa que es lo que hace una rotación en 180°, con centro en el origen sobre un grupo de vectores.

Al solicitar al estudiante que describa esta transformación, se pretende evidenciar el estado objeto (objeto 1) de este concepto, debido a que la descricpión puede ser desde lo geométrico, lo funcional y lo artimético (propiedades), por lo tanto si logra esta descripción, bajo estas tres miradas diremos que tiene una construcción de objeto para la rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo geométrico:

Cuando el estudiante no argumenta desde

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

la ponderación por escalar, sino que inmediatamente muestra que la rotación en 180° se relaciona con el vector opuesto al dado (Figura 7), diremos que él muestra una construcción geométrica de una rotación en 180° con centro en el origen.

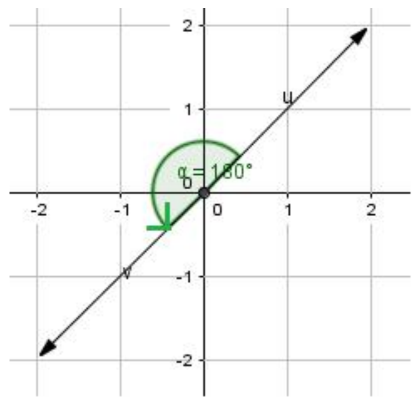

Figura 7. Concepción geométrica de la Rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo funcional: Si el estudiante es capaz de rotular la rotación en 180°, con centro en el origen como una relación funcional, esto es, $T(v) = R_{ot, 180°}(v) = -1 \cdot v$, diremos que él muestra una construcción funcional de una rotación en 180° con centro en el origen.

Desde lo aritmético (propiedades): Cuando el estudiante describe la rotación en términos de propiedades de una estructura algebraica, por ejemplo por medio del inverso aditivo de un vector (al mirar como un número y recordando la propiedad definida para números reales del inverso aditivo), diremos que él muestra una construcción aritmética de una rotación en 180° con centro en el origen.

Pregunta 2

A continuación se presenta una función T que tiene el siguiente efecto al aplicarla a un vector v de R^2, $T(v) = \lambda v$ donde λ es un número real.

a) ¿Qué efecto geométrico tine T? Explique.

b) Si λ toma los valores 2 y –2, ¿Qué forma toma T(v)? Exlique.

c) Suponga que tiene los siguientes vectores: $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,-2)$, $v_3 = (-2,4)$ y $v_4 = (3,-1)$. Si λ es igual a 2, ¿Qué sucede con cada uno de los vectores anteriores? Y ¿Si λ es igual a –2 que sucede con ellos? Explique.

d) Explique que sucede si los valores de λ son positivos y negativos, grafique su explicación. ¿Qué relación tienen con cada uno de los vectores iniciales?

La intensión investigativa para esta pregunta 2, es mostrar que la transformación *T*, entrega un múltiplo del vector, es decir es una función que asocia a cada vector evaluado un múltiplo de este. Como resultado geométrico, está subyacente la idea múltiplo, que es observable con casos particulares como la contracción si el valor de λ está entre $0 < \lambda < 1$, y dilatación de vectores si el valor de λ es $1 < \lambda$, y más aún los mismos efectos pero en sentido opuesto si $\lambda < -1$ y si $-1 < \lambda < 0$. Un caso donde se puede observar un aspecto geométrico conocido, es para

$\lambda = -1$, pues este corresponde a la rotación en 180° con centro en el origen para vectores en R^2. Estos efectos geométricos se pueden observar en la Figura 8.

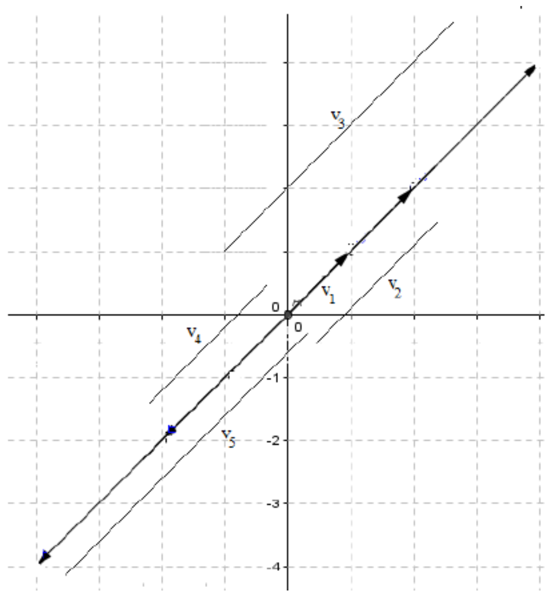

Figura 8. Efecto geométrico sobre los vectores : v_1, v_2, v_3y v_4.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de las respuestas de los estudiantes, conjuntamente con los comentarios que hicieron en estas respuestas, permitió, por un lado, identificar las construcciones mencionadas en dicha DG y, por otro, analizar las construcciones y mecanismos mentales mediante las cuales los estudiantes pueden construir los valores/vectores propios.

Se analizaron los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento por los investigadores, quienes los negociaron en términos de la DG preliminar. En general, el análisis fue hecho con nitidez, es decir, se prestó atención a estudiantes que parecen comprender los valores/vectores propios y a otros que parecen no haberlo entendido. Posteriormente se discutieron las diferencias detectadas en términos de la presencia o ausencia de cada una de las construcciones o mecanismos mentales que aparecen en la DG preliminar de la Figura 6. Así, se detectaron los datos que apoyan las construcciones o mecanismos mentales previstos en la DG o que puedan aportar información para refinarla.

RESULTADOS

Se presenta el análisis de algunas respuestas seleccionadas al cuestionario. Es importante mencionar que esta selección se basa en el interés de este estudio consistente en explorar la posibilidad de validar las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG a partir de los razonamientos que los estudiantes evidencian en sus respuestas. En relación a lo obtenido por la aplicación de la medición se obtuvieron los siguientes elementos.

La rotación en 180°, con centro en el origen es una función, que dado un vector *v* entrega por resultado –*v* (Proceso rotulado)

Pädi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería. Año 1. Núm. 001, abril de 2017, ISSN en trámite.

Aquí en la Figura 9, se muestra cómo el E6 rotula la rotación, por medio de una descripción funcional, utilizando un lenguaje algebraico de lo obtenido geométricamente, asociando la rotación a un cierto tipo de función.

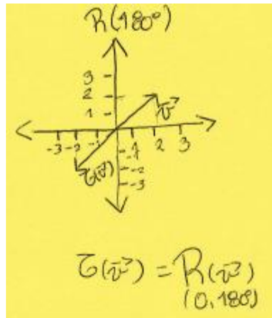

Figura 9. Fragmento de respuesta de E6 a Pregunta 1.

La rotación en 180° como un proceso rotulado permite obtener el inverso aditivo de un vector

Otro elemento que se reporta es el carácter estructural que esta mostrando el estudiante E6, pues reconoce que la estructura algebraica tiene efectos geométricos sobre los vectores y permite obtener aspectos de propiedades de los vectores, como si los estuviese viendo o trabajando desde números reales, dando cuenta de una mirada más profunda de lo que involucra la aplicación de este tipo de transformaciones, como lo ilustra la Figura 10, que muestra el inverso aditivo del vector.

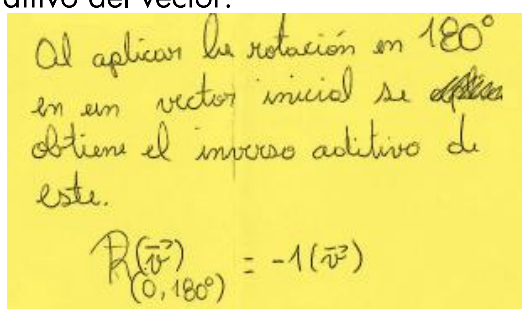

Figura 10. Fragmento de respuesta de E6 a Pregunta 1

Construcción Acción 2 para la rotación en 180°, con centro en el origen para vectores en R²

El estudiante E2 da cuenta de acciones (tipo 2) sobre el objeto rotación en 180°, con centro en el origen para ciertos vectores dados, como casos particulares desde lo geométrico, develando el estado acción para la rotación, como se muestra la Figura 11.

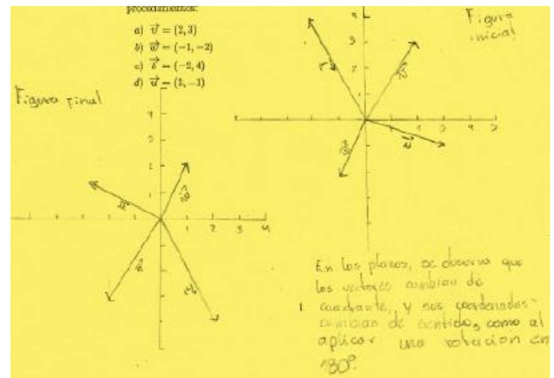

Figura 11. Fragmento de respuesta de E2 a Pregunta 2.

Proceso 5 se muestra en la transformación T que genera una recta a partir del vector *v*

Otro elemento geométrico que se distingue en las resoluciones dadas por los estudiantes, es el Proceso 5 de la DG, a través de la idea de generador, en el sentido que para distintos valores de λ, a partir de un cierto vector *v* se genera una recta en ambos sentidos de este vector, siendo para los casos en que el parámetro λ, es positivo y la rotación de estos valores en 180°, cuando este es negativo, como se puede apreciar en la Figura 12.

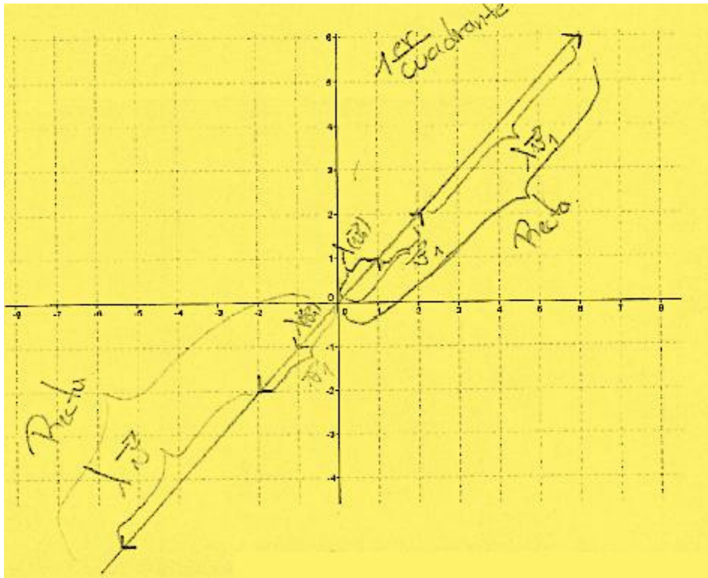

Figura 12. Respuesta a pregunta 2d de E6.

La ponderación escalar y su efecto geométrico como proceso 4

En el escrito del estudiante E7, la operatoria de ponderación escalar no solo es interpretada desde una mirada algebraica, sino también establecen relaciones (procesos tipo 4) con lo geométrico de forma directa, relacionando la magnitud y el sentido de los vectores (en el caso de que $\lambda < 0$), como se muestra en la Figura 13.

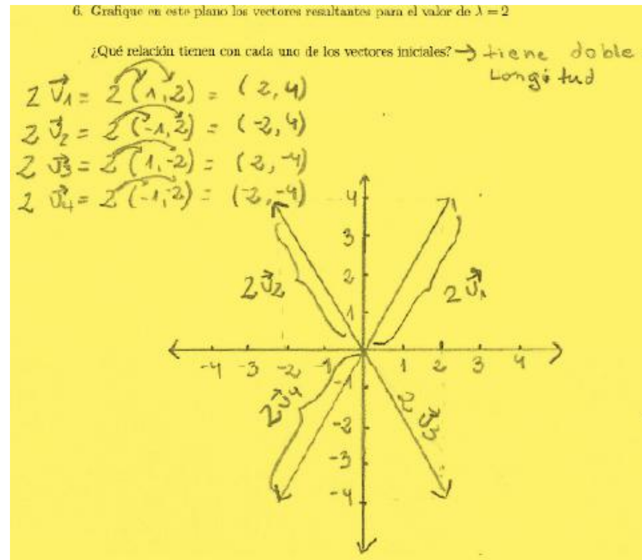

Figura 13. Respuesta a pregunta 2d de E7.

Por lo tanto el valor de parámetro λ determina orientación y magnitud de los vectores que se evalúan, es decir, la ponderación escalar determina este efecto geométrico, como se muestra el estudiante E2 en la Figura 14.

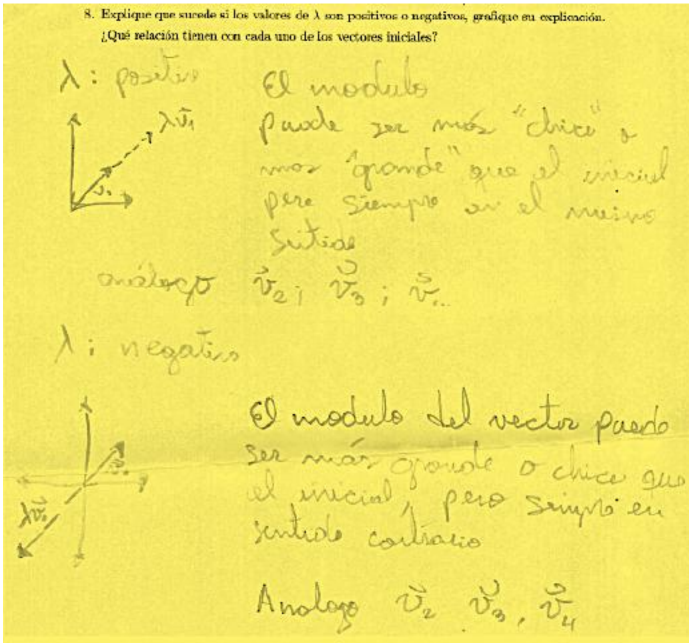

Figura 14. Respuesta a pregunta 2d de E2.

Para el caso de la ponderación escalar se pesquiso con el estudiante de segundo medio E7, que la ponderación escalar tenía una relación con una correspondencia, por lo cual se volvió a él y se le planteó la siguiente interrogante.

Dejando de lado la rotación, ¿Qué otro efecto geométrico le asocia a este tipo de transformación T?

Para esta pregunta se le dejó al estudiante que dibujara, y explicará a que se refería con esta función, a lo cual reportó que ésta era en realidad la homotecia como se muestra en la Figura 15.

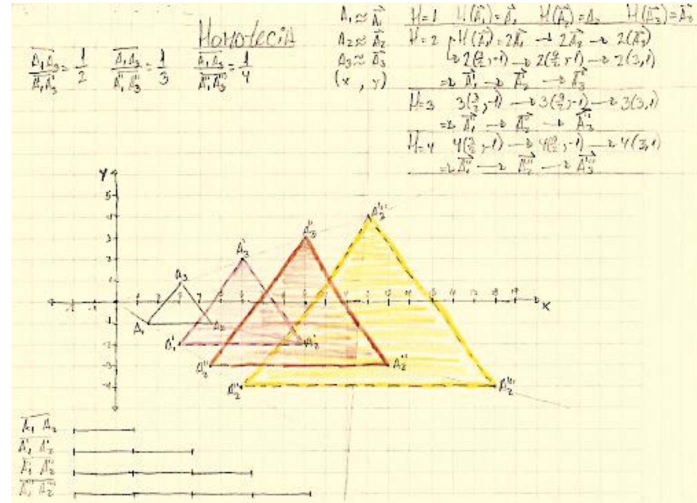

Figura 15. Respuesta de E7 en relación a la ponderación escalar.

Después de obtenido esto, otro elemento geométrico considerado fue la Homotecia, pues se reportó esta como una transformación sobre los vectores desde el punto de vista de una función, describiendo una relación de carácter geométrico pero con una descripción funcional.

Objeto (Objeto 2) valor/vector propio en R^2a través de la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función

El estudiante E2, no da cuenta del proceso ponderación por escalar de forma explícita, sino que más bien realiza directamente una encapsulación de este concepto, originado en Objeto 2 de valor/vector propio de la DG, con base en la coordinación del proceso función como correspondencia y del proceso de ponderación por escalar como se muestra en la Figura 16.

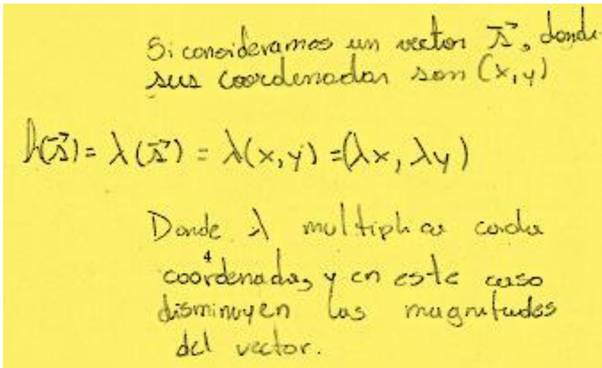

Figura 16. Fragmento de respuesta de E2 a la pregunta 2 del cuestionario.

Desencapsulación del objeto rotación en 180° con centro en el origen

E2 da cuenta de una desencapsulación de este objeto rotación, ya que lo describe como el proceso, a un cierto vector *v* lo hace corresponder con $-1 \cdot v$ ó $-1 \cdot (x,y)$, este objeto lo rotula de tal forma que describe una relación funcional para este objeto geométrico. Este proceso de forma implícita esta coordinado con el proceso de función, a través de la idea de correspondencia, (ver la Figura 17).

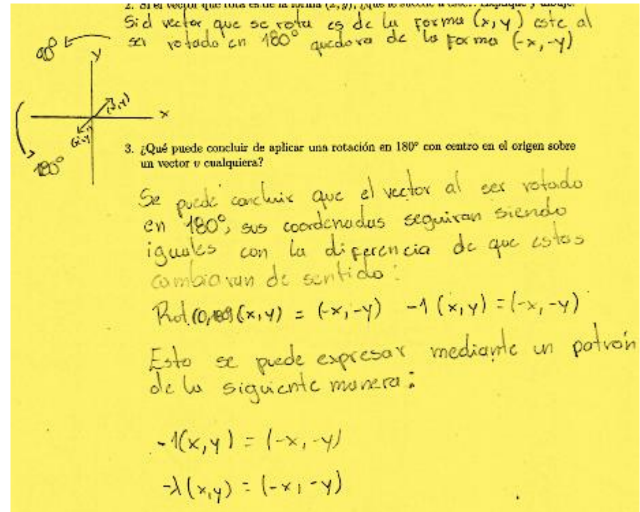

Figura 17. Respuesta de E2, mostrando la desencapsulación del objeto Rotación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2. Entre ellos se destacó la rotación en 180° como proceso que permite obtener el inverso aditivo de un vector y la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función.

En cuanto a la construcción de los valores/vectores propios en R^2, el análisis de los resultados obtenidos da cuenta que los estudiantes que logran construirlo, mostraron evidencias de haber construido las siguientes construcciones y desarrollado los mecanismos mentales asociados a ellas:

- La rotación en 180°, con centro en el origen es una función, que dado un vector *v* entrega por resultado –*v*(que de acuerdo a la DG equivale al Proceso rotulado).
- La rotación en 180° como un proceso rotulado permite obtener el inverso aditivo de un vector.
- La construcción Acción 2 (según la DG) para la rotación en 180°, con centro en el origen para vectores en R^2, es la que se interioriza en el Proceso 2 (según la DG).
- El Proceso 5 (según la DG) se muestra en la transformación *T* (pregunta 2) a través de la generación de una recta vectorial.
- La ponderación escalar y su efecto geométrico muestran la construcción del proceso 4 (según la DG).
- La construcción Objeto (Objeto 2 según la DG) valor/vector propio en R^2 se evidenció a través de la encapsulación del proceso ponderación escalar como una función.

Las evidencias obtenidas dan cuenta de las dificultades en la construcción del objeto valor/vectores propios en R^2. Claramente, el análisis de los resultados muestra que la no construcción del concepto rotación en 180° como un proceso rotulado,imposibilita la construcción del objeto valor/vectores propios en R^2. Esta dificultad implica que no se ha construido la encapsulación del proceso 5, es decir, el objeto de la ponderación escalar, utilizando como medio la idea de función, obtienida a través del objeto 2, que al ser rotulado se puede expresar mediante la relación algebraica $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

En general podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son, fundamentalmente, la construcción del concepto de rotación en 180° con centro en el origen y también el de homotecia en la construcción de los valores/vectores propios como un objeto en R^2, y la importancia del reconocimiento de *T* (en la pregunta 2) como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada parece dar cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2.

Con este estudio se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada acerca de las construcciones y mecanismos mentales asociados a la construcción de valores/vectores propios en R^2, al mismo tiempo, a la pregunta sobre las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje de ellos.

Se propone, así, esta DG a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza y aprendizaje de los valores/vectores propios en R^2 y como diseño de investigación que permita validarla. Los resultados de este estudio, sin embargo, van más allá de la validación de la DG. Entre las contribuciones que la investigación hace a la literatura se pueden señalar el estudio de valores/vectores propios en R^2 desde la rotación en 180° y la homotecia (Ponderación por escalar); las construcciones que parecen ser indispensables en la comprensión de este importante tópico; la construcción de la rotación en 180° con centro en el origen como una función (que dado un vector *v* entrega por resultado –*v*), la importancia de la ponderación escalar y su efecto geométrico muestran la construcción del proceso 4, el papel de *T* (pegunta 2) como función y su rol en la construcción objeto de valores/vectores propios en R^2, como paso fundamental para la comprensión real del mismo. Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a sus estrategias.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Dorier, J. L. y Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* 255-273 ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (3ª Ed.). México: Pearson educación.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Revista enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.
Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3° Ed.). México: Thomson.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Stiidies in Mathematics*, 17, 359-386.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Stake, R. E (2010). *Investigación con estudio de casos.* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.