

CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN

QUESTIONNAIRE ON THE MATHEMATICAL KNOWLEDGE
FOR TEACHING OF MATHEMATICS TEACHER. A PROPOSAL
FOR TEACHING OF FUNCTION

Luis Jesús Alcalá-Tejada¹
Lilia Patricia Aké Tec²

¹ Universidad Autónoma de Querétaro (México)
luis_alcala002@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-5250-5890>

² Universidad Autónoma de Querétaro (México)
lake86@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4303-4895>

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo presentar un cuestionario para valorar el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de matemáticas enfocado al concepto de función polinomial. Se utiliza una metodología cualitativa basada en el diseño que tiene como fundamento tres elementos: el conocimiento del profesor de matemáticas, los registros de representación y los significados de la función. El estudio se enmarca en el contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato, ya que según las investigaciones existe una falta de formación profesional homogénea, así como un corpus de conocimiento específico definido. Como resultado, se presenta el diseño de un cuestionario integrado por 6 tareas que entrelazan el conocimiento docente, los registros de representación y los significados de la función. Se concluye que este tipo de propuestas resultan una herramienta que permite caracterizar y delimitar los conocimientos necesarios y suficientes para la enseñanza del concepto de función. Además, sirven como referente para proponer y fortalecer actividades formativas que orienten a los docentes a la mejora de sus prácticas educativas.

Palabras clave: bachillerato, conocimiento del profesor, función.

Abstract

The present study is about a questionnaire to assess mathematical knowledge for teaching of mathematics teachers about the concept of polynomial function. A qualitative methodology based on design is used, based on three elements: the mathematical knowledge for teaching, the semiotic representation registers and function meanings. This study is situated in the context of high school mathematics teachers because, according to research, there isn't a homogeneous professional training, as well as insufficient specific knowledge for the teaching profession at this educational level. In this way, the design of a questionnaire is presented, which is composed of six task that unify teaching knowledge, representation registers and function meanings. Finally, this type of proposal becomes a tool that characterizes the necessary knowledge for the function concept teaching. In addition, this proposal serves as a reference to strengthen teacher training activities to improve their educational practices.

keywords: teacher's knowledge, function, high school.

El estudio apunta al contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato y tiene por objetivo presentar un cuestionario que valore su cátedra para la enseñanza. El trabajo se enfocará al concepto de función polinomial.

Introducción

Una de las interrogantes que continúan estudiándose desde la Matemática Educativa es sobre cuál es la naturaleza y características del conocimiento del profesor de matemáticas (Scheiner *et al.*, 2019). Durante décadas se pensó que para ejercer la enseñanza de las matemáticas era suficiente y necesario tener un conocimiento matemático. Después de diversas investigaciones realizadas sobre el profesor (Shulman, 1986; Sánchez, 2011; Scheiner *et al.*, 2019), se coincide en que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente.

La importancia del estudio del conocimiento docente radica en la práctica del profesor dentro del aula. Misma que se ve influenciada por su conocimiento profesional y le permite actuar frente a las respuestas de los estudiantes, incorporar recursos en el aula, proponer tareas, etc. (Scheiner *et al.*, 2019). De esta manera, estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas manifestado en la acción de enseñar, apoya en la determinación de los elementos que caracteriza su condición.

En el marco de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor, se advierten estudios desde diferentes marcos teóricos hasta diferentes contenidos matemáticos. Por ejemplo, en el trabajo de Sánchez Santiesteban *et al.* (2022) se aplicó un cuestionario a 15 profesores de matemáticas con experiencia en educación superior y diversas nacionalidades, para indagar en los significados del concepto de pendiente, evidenciando la prominencia del significado geométrico sobre los demás. La investigación mediante la aplicación de un cuestionario a profesores en formación para el nivel bachillerato de Graciano Barragán y Aké (2021)

indaga sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los productos notables, observando dificultades en los conocimientos de futuros docentes. En Gavilán (2006) se presentan los hallazgos de una investigación que pretende explicar, mediante un estudio de casos, la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza del concepto de derivada, destacando la estrecha relación entre la práctica del profesor y sus concepciones acerca del proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos en el ámbito escolar. En los estudios anteriores, la delimitación y especificación del estudio del contenido matemático se justifica debido a la complejidad no sólo de la práctica docente sino también del conocimiento matemático en sí mismo.

Particularmente, este estudio se interesa por el aprendizaje del concepto de función, el cual requiere conocimientos sólidos y específicos por parte de los profesores; primordial para aquellos que ejercen en el nivel educativo medio superior, ya que se aborda formalmente dicho concepto y su estudio se extiende a lo largo de los niveles escolares siguientes. La comprensión del concepto de función es considerada base para el entendimiento de conceptos más avanzados en matemáticas, principalmente en el ámbito del cálculo. Respecto a este concepto, surge el interés de investigar los procesos de aprendizaje desde la parte en la que emana el conocimiento en el aula, es decir, del profesor. De acuerdo con lo anterior, los estudios que tratan sobre los docentes, sus concepciones y representaciones, así como de sus conocimientos y competencias, se han multiplicado en las últimas décadas (Artigue, 2004).

Sobre la noción de función, abundan investigaciones que abordan sus aspectos históricos y epistemológicos. Roque (2012) presenta un enfoque que busca desmitificar ideas erróneas sobre la historia de las matemáticas y su concepción, en cuanto a diversos constructos matemáticos, entre ellos el concepto de función. Existen investigaciones que abordan las problemáticas en el aprendizaje de las funciones, como Jones (2006), quien aborda las dificultades históricas y pedagógicas que los estudiantes y profesores enfrentan al aprender y enseñar el concepto de función; estas dificultades pueden incluir conceptos erróneos comunes, problemas de representación gráfica, comprensión de la relación entre variables y la función, y aplicación de funciones en diferentes contextos. También, existen otras investigaciones que



La importancia del estudio del conocimiento docente radica en la práctica del profesor dentro del aula.

estudian las diversas formas de comprender el concepto de función (Sfard, 1991) y sus significados (Ribeiro y Curly, 2018); dichas investigaciones aportan significativamente a la Matemática Educativa al describir las concepciones y significados que emergen durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Otras investigaciones estudian las formas de comprensión del concepto de función que tiene el profesor. Evoquemos a De la Rosa (2003), quien presenta los resultados de una investigación con cinco profesores en servicio, respecto a la enseñanza de la función. El estudio empleó como marco teórico el Modelo del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza de Shulman (1986) y recogió los datos mediante un cuestionario. Plantea, entre sus conclusiones, que los profesores arraigan la concepción de función como una expresión algebraica. Por otro lado, en el trabajo de Rodríguez Flores et al. (2018) se aborda el conocimiento del profesor con relación a algunos conceptos de la función; asimismo, se consiguió identificar diferentes conocimientos desde la perspectiva teórica del Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Este trabajo es una investigación del tipo cualitativa, basada en el estudio de casos, seleccionando a un profesor experto. Los resultados muestran una riqueza en la estructura conceptual presente en el proceso de la enseñanza, además de utilizar un sólido lenguaje numérico por parte del profesor.

Amaya de Armas et al. (2021) analizaron las competencias de futuros profesores al ejecutar transformaciones de las representaciones de una función. Los autores sugieren implementar procesos formativos que lleven a los futuros docentes a realizar análisis más integrales del concepto de función y faciliten hacer uso operativo de sus conocimientos. Por otro lado, Tasdan y Koyunkaya (2017) realizaron una investigación de los conocimientos del concepto de función en profesores de matemáticas en formación; tomaron como referente teórico el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Los autores señalan dificultades que los futuros docentes afrontarán para explicar matemáticamente el concepto de función, así como el uso inadecuado del lenguaje formal y una desarticulación entre las propiedades de las funciones.

En México los estudios sobre el conocimiento del profesor no son tan numerosos en comparación con las investigaciones internacionales. De acuerdo con Ávila (2016), la investigación en Matemática Educativa en

México ha ido evolucionando y diversificándose en cuanto a los enfoques teóricos y metodológicos utilizados; sin embargo, esto no implica que existan investigaciones mexicanas que coloquen al profesor de matemáticas en el centro del estudio con el objetivo de conocer, interpretar y caracterizar las competencias que ostenta y manifiesta a la hora de enseñar un contenido. De este modo, realizar este tipo de estudios sobre el profesor respecto a un contenido matemático es relevante debido a que no hay un programa de formación homogéneo para los docentes. Los profesores de secundaria y primaria no cuentan con una formación matemática fortalecida (Santibañez, 2007). En el caso de los profesores de bachillerato o media superior, por tradición, sus puestos han sido ocupados por profesionistas de diversas áreas disciplinares. En el caso de matemáticas, por ejemplo, en su mayoría son ingenieros (Martínez Sierra *et al.*, 2019). Esto implica que los docentes de bachillerato, durante su formación profesional, no cursaron asignaturas que les aportaran recursos sobre pedagogía o didáctica (Ibarrola y Martínez, 2018).

Las connotaciones previas hacen apremiante atender las necesidades de formación de los profesores de matemáticas. En este sentido, el informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012) pone de manifiesto que “el profesorado es la pieza elemental para un desarrollo positivo de los sistemas de educación, conformando el principal desafío para una educación matemática de calidad” (p. 25). En este marco el profesor de matemáticas es una pieza clave en la actividad generada en el aula, es un gestor del conocimiento. Esto ha motivado a los investigadores a enfocarse en la comprensión que tienen los profesores del contenido que enseñan, indagando sobre los conocimientos con los que cuentan.

Debido a la problemática evidenciada, el presente estudio pretende aportar un entendimiento sobre las formas de conocimiento que requiere desarrollar un docente de matemáticas para ejercer su labor. Esto debido a que sus estudios referentes al conocimiento generan información sobre aspectos parciales iniciales respecto a dicho conocimiento. En este sentido, el presente trabajo se suma a esta línea de investigaciones que tienen el interés de caracterizar los conocimientos necesarios que requiere el docente para ejercer su labor educativa, lo cual no se alcanza con estudios generales, sino con investigaciones sobre tópicos matemáticos específicos (Vásquez y Alsina, 2017; Burgos *et al.*, 2018).

De esta manera, el objetivo es exponer un cuestionario que permita valorar el conocimiento de los profesores de matemáticas en ejercicio sobre la noción de función, en específico la función polinomial lineal y cuadrática. El estudio también se enmarca en el contexto de los profesores de matemáticas de bachillerato para atender la falta de una formación profesional homogénea, así como la falta de un corpus de conocimiento específico definido para la profesión docente en este nivel educativo.

Marco teórico

Aunque existen varios modelos de conocimiento, como el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en el inglés) (Aguilar *et al.*, 2014), o el Conocimiento Didáctico–Matemático (CDM) (Pino Fan y Godino, 2015), este estudio toma como referente el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball *et al.*, 2008). El modelo MKT está conformado por 6 subdominios (Figura 1) presentes en la siguiente clasificación:

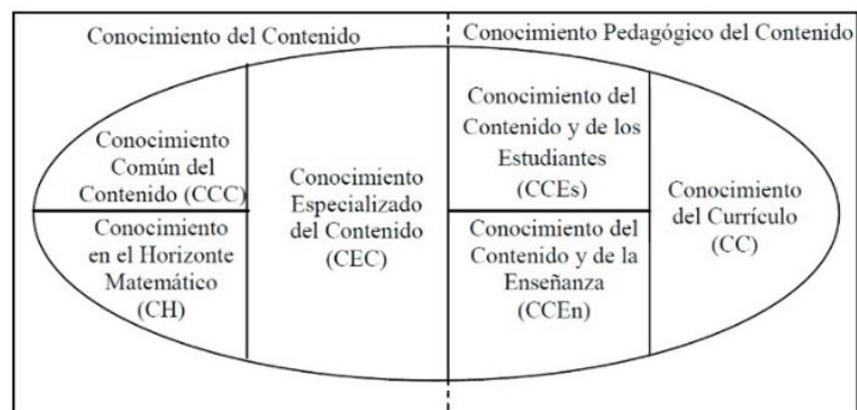


FIGURA 1.

Modelo MKT.
Ball *et al.* (2008).

- Conocimiento Común del Contenido (CCC): es descrito como el conocimiento matemático utilizado en cualquier ámbito profesional y no solo en situaciones de enseñanza.
- Conocimiento en el Horizonte Matemático (CH): es definido como el conocimiento de las relaciones entre los diversos temas incluidos en el currículo. Estas relaciones pueden ser tanto verticales, aludiendo a los temas de diferentes niveles

educativos, como horizontales al contemplar los temas en un mismo nivel educativo entre diferentes asignaturas.

- Conocimiento Especializado del Contenido (CEC): descrito como el conocimiento que transforma un contenido matemático en un contenido enseñable. Este conocimiento es exclusivo para la enseñanza.
- Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CCEs): definido como el conocimiento de los estudiantes al pensar, saber y aprender un contenido matemático, incluyendo sus errores y dificultades.
- Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CCEn): descrito como el conocimiento que entrelaza la enseñanza y el contenido disciplinar al contemplar los razonamientos de los estudiantes y las estrategias didácticas pertinentes para el aprendizaje.
- Conocimiento del Currículo (CC): definido como el conocimiento de los objetivos, contenidos y fines educativos contemplados en el plan curricular institucional.

Asimismo, como segundo elemento considerado en el diseño del cuestionario están *los registros de representación*. La teoría de registros de representación semiótica fue propuesta por Duval (1993) y establece que el uso de representaciones para el pensamiento matemático es esencial para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Duval (2004) distingue cuatro tipos de representaciones semióticas fundamentales y generales en los objetos matemáticos: lenguaje natural o verbal, algebraico, gráfico y numérico, los cuales se describen a continuación:

- Registro en lenguaje natural (RLN): descripción del fenómeno a analizar de manera oral o escrita.
- Registro algebraico (RA): representación del objeto al usar expresiones algebraicas.
- Registro gráfico (RG): representación del objeto al usar coordenadas cartesianas.

- Registro tabular o numérico (RN): representación del análisis de los aspectos numéricos.

Adicionalmente, de Amaya *et al.*, (2021) se anexa el siguiente registro:

- Registro cartesiano (RC): es el conjunto de pares ordenados, siendo el primer componente los valores de la variable independiente, y el segundo los de la variable dependiente.

Al considerar la postura de Duval y Amaya se contempla que la enseñanza y aprendizaje de las funciones no se debe limitar al trabajo en uno solo de estos registros, sino que se debe incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra (Duval, 2006).

El tercer elemento contemplado para el diseño del cuestionario fueron los diferentes significados del concepto de función, los cuales fueron retomados del estudio realizado por Pino Fan *et al.*, (2019) y se expresan a continuación:

- La función como correspondencia (FCO): refiere a la asociación de elementos entre dos conjuntos.
- La función como relación entre magnitudes variables (FMV): refiere al estudio de fenómenos que incluyen un cambio, por ejemplo: el calor, la distancia, la velocidad, etc.
- La función como representación gráfica (FRG): refiere a un conjunto de puntos que representan visualmente una relación entre los ejes coordenados.
- La función como expresión analítica (FEA): se refiere a la expresión algebraica de una función que se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, potencias, raíces, etc.
- La función como correspondencia arbitraria (FCA): se refiere a la relación abstracta entre dos conjuntos, sin conocer la forma explícita en la que se lleva a cabo la asignación entre sus elementos.
- La función a partir de la teoría de conjuntos (FTC): se refiere a la relación de una variable que cumple las propiedades de los conjuntos.

Metodología

Se utiliza una metodología cualitativa basada en el diseño de un cuestionario que tiene como fundamento tres elementos: el conocimiento del profesor de matemáticas, los registros de representación, y los significados de la función. En el diseño se consideró la triangulación de investigadores expertos en la temática (Aguilar y Barroso, 2015), quienes realizaron un análisis del cuestionario propuesto.

Tabla 1.

Ejemplos de consignas en el MKT e indicadores para los registros de representación y significados de la función.

En la Tabla 1, de creación propia, se muestran algunas consignas que fueron un referente para diseñar cada una de las seis tareas que conformaron el cuestionario de esta investigación y también, se incluyen indicadores para detectar la movilización de los registros de representación de las funciones, así como la comprensión de sus significados:

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA	
Subdominio	
CCC	Resuelve la tarea
	Identifica si el procedimiento empleado es correcto
	Determina si el resultado es correcto
CEC	Indica qué contenidos matemáticos necesitan poner en práctica los estudiantes para dar solución a la tarea
	Indica qué propiedades del contenido matemático se pueden abordar mediante el estudio de la tarea
	Resuelve la tarea de diferentes formas usando distintos contenidos matemáticos
CH	Indica con cuáles contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar tiene relación esta tarea
	Determina cuál es la importancia a futuro de abordar el contenido en este momento
	Indica cuál es la aplicación cotidiana que tiene el contenido matemático
CCEn	Sugiere una manera en que podría enseñar el contenido
	Indica algunas estrategias o recursos didácticos que utilizaría para enseñar el contenido
	Propone algunos argumentos que utilizaría para convencer a los estudiantes
CCEs	Determina cuáles son los principales errores que podrían cometer los estudiantes a la hora de aprender el contenido
	Explica el razonamiento que siguieron los estudiantes
	Indica las principales deficiencias que tienen los estudiantes, previo a abordar un contenido matemático
CC	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea
	Especifica con cuáles asignaturas tiene relación el contenido matemático propuesto
	Determina cuál es el objetivo de la tarea de acuerdo con el currículo escolar

Registros de representación de las funciones	
Registro	Indicador
RLN	Comprende la relación funcional descrita en el texto
	Describe la función en palabras orales o escritas
RA	Utiliza $f(x)$ para referirse a la variable dependiente de la variable x
	Incorpora diferentes operaciones aritméticas para expresar la relación funcional entre las variables
RG	Especifica o interpreta qué variable se posiciona en el eje de las abscisas y cuál en el de las ordenadas
	El gráfico está formado por una serie de pares ordenados donde cada valor x tiene un único valor y
RN	Expresa la relación funcional en una tabla de valores
	Sustituye los valores de la variable independiente y opera aritméticamente para obtener los de la dependiente
RC	Comprende la relación funcional descrita en los pares ordenados (x, y)
	En las estructuras (x, y) no duplica ningún valor para y
Significados de la función	
Significado	Indicador
FCO	Concibe a la función como una correspondencia entre dos conjuntos
FMV	Concibe a la función como una correspondencia entre dos magnitudes variables
FEA	Concibe a la función $f(x)$ como una serie de operaciones algebraicas
FRG	Concibe a la función como un gráfico conformado por pares ordenados en donde ningún valor en y se repite para cada valor de x
FTC	Concibe a la función como una serie de pares ordenados que involucran propiedades de conjuntos
FCA	Concibe a la función como una correspondencia entre dos conjuntos, en donde no necesariamente debe de saberse la naturaleza de dicha relación

El cuestionario tomó como referente un primer elemento para su diseño que se sustentó en *el conocimiento matemático para la enseñanza*. Se pensaron distintas preguntas que podrían profundizar en los subdominios de conocimientos que propone el modelo y de esta manera se crearon tareas con distintos contextos procurando que cada una abordara un significado particular del concepto de función. En las tareas

poco a poco se fueron involucrando cada uno de los registros de representación de las funciones.

La estructura global del cuestionario se muestra, en la Tabla 2, que es creación propia de la presente investigación:

Resultados

Como resultado de este estudio se tiene un cuestionario que integra 6 tareas y enlaza el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor, los registros de representación y los significados de la función.

A continuación, evidenciamos en la Figura 2, la tarea 1, cuyo objetivo es establecer una relación entre el número de saludos dado el número de personas que hay en una reunión. En esta tarea se pone de manifiesto el conocimiento común del contenido (CCC) y el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs), en los ítems 1a y 1b, respectivamente. En el caso del ítem 1a, solicita encontrar una fórmula matemática para representar la situación dada y el ítem 1b solicita describir las posibles dificultades a las que los estudiantes podrían verse enfrentados al resolver la tarea. Los registros de representación que se pretende movilizar son los siguientes: lenguaje natural, algebraico y numérico. El significado de la función de esta tarea es la función como correspondencia.

TABLA 2.

Estructura del cuestionario.

TAREA	SIGNIFICADO DE LA FUNCIÓN	REGISTRO DE REPRESENTACIÓN	DOMINIO DEL CONOCIMIENTO
1	FCO	RLN, RN y RA	CCC y CCEs
2	FMV	RA, RN y RG	CCC y CC
3	FRG	RG y RC	CCEn y CEC
4	FTC	RA y RC	CH y CEC
5	FEA	RLN, RA y RN	CCEs y CC
6	FCA	RG	CCEn y CH

FIGURA 2.

Tarea 1
del cuestionario.
Adaptado de
Azcarate y Deu-
lofeu (1996).

Tarea 1. Al acabar una reunión a la que asisten un cierto número de personas, todos se despiden con un apretón de mano. En la siguiente tabla se puede interpretar que si hay dos personas solo se puede tener un apretón de manos; si hay tres personas se tendría 3 apretones de manos; si hay cuatro personas habría 6 apretones de manos. Asimismo, en la tabla no se especifica cuántos apretones de manos habría si se tuvieran 5 personas, y tampoco cuántas personas hubo en la reunión si se dieron 105 apretones de manos.

Personas	2	3	4	5	
Apretos de mano	1	3	6		105

- Llamando n al número de personas, escriba una expresión que permite calcular el número de apretos de manos dado cualquier número de personas. Enseguida, complete la tabla.
- Describa la o las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta la tarea.

La tarea 2, que se muestra en la Figura 3 es referente a la variación de la temperatura de un cuerpo respecto al tiempo. Los ítems a y b indagan por el conocimiento común del contenido (CCC) y por el conocimiento del currículo (CC), respectivamente. En ese sentido, el ítem 2a solicita encontrar la representación gráfica de la relación funcional descrita en la tarea, así como el punto máximo de dicha relación, mientras que el ítem 2b consiste en reflexionar si la situación planteada tiene una relación transversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas. Los registros de representación que se pretende movilizar son el algebraico, numérico y gráfico. El significado de la función de esta tarea es la función como relación entre magnitudes variables.

En la Figura 4 se muestra la tarea 3, referente a la interpretación de los pares ordenados de una gráfica. Indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y en el especializado del contenido (CEC). La tarea plantea la situación en que un estudiante pregunta a su profesor si los pares ordenados visibles en la gráfica mostrada son los únicos con los que cuenta la función. Entonces, el ítem 3a solicita reflexionar en una explicación o estrategia para poder responder la inquietud del estudiante, mientras que el ítem 3b pregunta por las propiedades de la función que pueden abordarse

FIGURA 3.

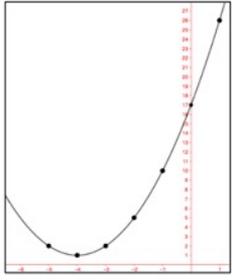
Tarea 2
el cuestionario.

Tarea 2. La temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) de un cuerpo varía con respecto al tiempo t (en horas) transcurrido desde que ha sido sometida a calor y se rige bajo la expresión $T(t) = 16t - 3.2t^2$ con $0 \leq t < 5$. Se solicita representar gráficamente la relación Temperatura-tiempo y encontrar la temperatura máxima que alcanza la pieza.

- Encuentre la representación gráfica de la función y determine la temperatura máxima en el intervalo dado.
- De acuerdo con el currículo escolar del bachillerato tecnológico, ¿considera que esta tarea tiene una relación transversal con contenidos matemáticos de otras asignaturas?, de ser así, ¿cuál es esa relación de contenidos y a qué asignatura o asignaturas pertenecen?

mediante el estudio de dicha situación. A través del significado de la función manifestado en esta tarea, que es el de la función como representación gráfica, se pretende que los profesores puedan considerar los registros gráfico y cartesiano en el abordaje de la tarea.

Tarea 3. Un profesor solicita a los estudiantes determinar pares ordenados de la función representada en la gráfica, de acuerdo con la tabla dada. Al terminar, un estudiante pregunta si estos son los únicos pares ordenados con los que cuenta la función.



abscisa	ordenada	(x,y)
-5		(,)
-4		(,)
-3		(,)
-2		(,)
-1		(,)
0		(,)
1		(,)

a) ¿Qué explicación o estrategia utilizaría para resolver la inquietud del estudiante?
b) ¿Qué propiedad o propiedades de la función pueden abordarse mediante el estudio de esta situación?

FIGURA 4.
Tarea 3
del cuestionario.

La siguiente tarea se muestra en la Figura 5 y es referente a una situación específica en la que un profesor solicita a sus estudiantes que identifiquen los pares ordenados que forman parte de una función dada, expresada en el registro algebraico, mediante un lenguaje formal. A través de sus ítems a y b, se indaga por el conocimiento en el horizonte matemático (CH) y por el especializado del contenido (CEC), respectivamente. En lo referente al primer ítem, se solicita reflexionar si dicha tarea es pertinente para abordarla en el nivel medio superior, mientras que en el ítem 4b se pregunta por los contenidos matemáticos que deberían conocer y utilizar los estudiantes para dar una respuesta correcta a la tarea. El significado de la función es a partir de la teoría de conjuntos y se pretende movilizar entre los registros algebraico y cartesiano.

En la tarea 5, que se muestra en la Figura 6, el significado de la función es como expresión analítica. Esta tarea es referente a una situación que describe el procedimiento que realizó un estudiante, en el que cometió un error a la hora de encontrar la imagen de ciertos valores para x .

Tarea 4. Un profesor solicita a sus estudiantes determinar la siguiente función como conjunto de pares ordenados: $F = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, si $A = \{x : 3 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x - 2 : 5 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

a) ¿Considera que esta tarea es pertinente para el nivel medio superior? Justifique su respuesta.
b) ¿Qué contenido o contenidos matemáticos deberían utilizar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

FIGURA 5.
Tarea 4
del cuestionario.

Con esto, se indaga, respectivamente, en sus ítems a y b, en el conocimiento del contenido y los estudiantes (CCEs) y en el conocimiento del currículo (CC). En el ítem 5a se pregunta por el posible razonamiento que siguió el estudiante y que lo llevó a cometer un error, mientras que en el ítem 5b se cuestiona por las estrategias que los profesores propondrían en el currículo para evitar el error mostrado en dicha tarea. Para esta tarea se consideran los registros en lenguaje natural, algebraico y numérico.

Tarea 5. Para cada valor x de la función f , hay un único valor y . Ambos valores se corresponden elevando al cuadrado los valores x , y agregando 5 al resultado de dicha potencia. Al representar numéricamente esta función, un alumno obtuvo los siguientes datos, en donde se muestra un error común en los estudiantes:

x	Operaciones	f(x)
-3	$-3^2+5 = -9+5 = -4$	-4
-2	$-2^2+5 = -4+5 = 1$	1
-1	$-1^2+5 = -1+5 = 4$	4
0	$0^2+5 = 0+5 = 5$	5
1	$1^2+5 = 1+5 = 6$	6
2	$2^2+5 = 4+5 = 9$	9
3	$3^2+5 = 9+5 = 14$	14

- a) Describa el posible razonamiento del alumno que lo condujo a ello.
- b) ¿Qué estrategia o estrategias propondría en el currículo para evitar la ocurrencia de errores como este?

FIGURA 6.

Tarea 5
del cuestionario.

Finalmente, en la Figura 7 se muestra la última tarea del cuestionario, la cual es referente al análisis de un gráfico que cuantifica a los casos de contagio que han ocurrido a lo largo del tiempo, del virus SARS-CoV-2, desde que se declaró como pandemia. Con el gráfico se pretende indagar por el conocimiento del contenido y la enseñanza (CCEn) y por el conocimiento en el horizonte matemático (CH), en los ítems a y b, respectivamente, de esta tarea. El ítem 6a pregunta por los argumentos que los profesores podrían utilizar para explicar que un gráfico representa una función, mientras que el ítem 6b pregunta por contenidos matemáticos más avanzados del currículo escolar que se podrían relacionar con la situación mostrada en dicha tarea. Esta tarea se diseñó bajo el significado de función como correspondencia arbitraria, utilizando el registro gráfico.

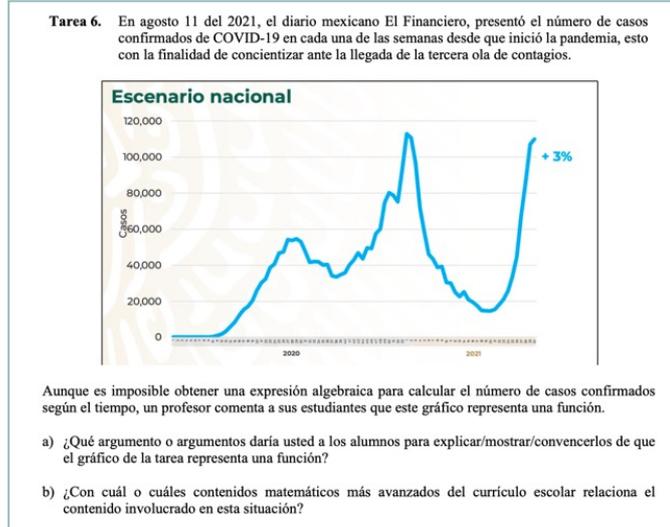


FIGURA 7.

Tarea 6 del cuestionario.

Conclusiones

Conocer y comprender los conocimientos con los que cuenta el profesor de matemáticas fortalece, sin duda, a las investigaciones realizadas en Matemática Educativa, pues muestran una referencia para profundizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este caso, el concepto de función representa una noción importante en el currículo de matemáticas a nivel bachillerato, debido a que de él se derivan contenidos más complejos que deben abordarse para la formación común de los estudiantes. Por ello, es necesario distinguir qué conocimientos caracterizan a los profesores de matemáticas respecto a este concepto. El cuestionario aquí propuesto permite recoger información para identificar el conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de función, sus significados y representaciones.

El estudio del conocimiento del profesor en tópicos específicos es una tendencia actual en las investigaciones (e. g. Castro y Pino Fan, 2021; Burgos *et al.*, 2018; Vásquez y Alsina, 2017). Los instrumentos requeridos para el estudio de dicho conocimiento están articulados en las tareas, actividades, situaciones problema, etc., cuyo diseño, generalmente, pasa por alto en las investigaciones (García, 2019). De esta manera, lo expuesto en el presente artículo orienta el diseño de las tareas considerando elementos teóricos que sirven de pauta para investigaciones similares sobre diseño de cuestionarios o instrumentos (e. g. Espinoza y Pochulu, 2020) y que, además, contribuye a la caracterización de los conocimientos del profesor en tópicos específicos.

Al presentar el diseño de un cuestionario, se tiene la limitación de no contar con resultados empíricos, por lo que, como línea de investigación abierta se puede sugerir la aplicación en muestras amplias de profesores en formación y en servicio. Cobra relevancia realizar investigaciones con profesores en servicio en México, dado que existe una tendencia por estudiar al profesorado en formación en comparación con las investigaciones hechas con profesores en ejercicio (Camarena, 2015). Adicionalmente, las tareas presentadas se han diseñado con conocimientos propios de bachillerato, ya que contempla tareas sobre el conocimiento común, por lo que el cuestionario podría ser un instrumento que permita medir el conocimiento matemático, respecto al concepto de función, con el que los estudiantes ingresan a la universidad.

Referencias

- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2014). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. En CIBEM (Eds.). *Actas de las VII CIBEM* (pp. 5063-5069).
- Aguilar, S. y Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Revista de Medios y Educación*, (47), 73-88. <https://doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i47.05>.
- Amaya, T., Castellanos, G. y Pino Fan, L. (2021). Competencias de los profesores de matemáticas en formación a la hora de transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, 35 (2), 1-15. <https://doi.org/10.15359/ru.35-2.12>.
- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de las matemáticas para afrontarlo? *Educación Matemática*, 16 (3), 5-28. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302>.
- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28 (3), 31-59. <https://doi.org/10.24844/EM2803.02>.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
- Burgos, M., Beltrán Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22.
- Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En X. Martínez, y P. Camarena (Eds.), *Educación Matemática en el Siglo XXI* (pp. 191-216). Instituto Politécnico Nacional.
- Castro, W.F. y Pino Fan, L. (2021). Comparing the didactic-mathematical knowledge on the derivative of in-service and preservice teachers. *Acta Scientiae*, 23 (3), 34-99.

- De la Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos Matemáticos*, 11, 121-133.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1). <http://eudml.org/doc/44160>.
- Espinoza, R. F. y Pochulu, M. D. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, 34 (66), 294-313.
- García, F. (2019). Introducción al diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 1-4. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.264>.
- Gavilán, J. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática*, 18(2), 167-170. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40558507008>.
- Graciano Barragán, J. y Aké, L. (2021). Conocimiento de profesores de matemáticas en formación sobre los productos notables. *Uniciencia*, 35 (1), 90-107. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.6>.
- Ibarrola, M. y Martínez, M. (2018). Conformación de una identidad docente entre profesionistas universitarios contratados por asignatura en el nivel medio superior. *Sinéctica*, 51 (00008). [https://doi.org/10.31391/s2007-7033\(2018\)0051-008](https://doi.org/10.31391/s2007-7033(2018)0051-008).
- Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, 7 (2), 1-20.
- Martínez Sierra, G., Valle Zequeida, M., García García, J. y Dolores Flores, C. (2019). "Las matemáticas son para ser aplicadas": Creencias

- matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática*, 31 (1). <https://doi.org/10.24844/em3101.04>.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2012). *Challenges in basic mathematics education*. <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf>.
- Pino Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma*, 36 (1), 87-109.
- Pino Fan, L., Parra Urrea, Y. y Castro, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11 (23), 201-220. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc>.
- Ribeiro, A. y Cury, H. (2018). Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função. *Autêntica*.
- Rodríguez Flores A., Picardo Alfaro, M., Espinoza González, J., Rojas González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA*, 32 (1), 89-107. <https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6>.
- Roque, T. (2012). História da matemática – Uma visão crítica, desfrezando mitos e lendas. Zahar.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5 (4), 129-145. <https://doi.org/10.30827/pna.v5i4.6151>.
- Sánchez Santiesteban, J., Cruz, M., Cabrera, A. y Sigarreta, J. (2022). El significado del concepto de pendiente desde la perspectiva universitaria. *Universidad y Sociedad*, 14 (4), 156-171. <https://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus/article/view/3032>.
- Santibañez, L. (2007). Formación y actualización de maestros de secundaria en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 12, 305-335.
- Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D., Carrillo, J. y Pino Fan, L.R. (2019) What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational*

Studies in Mathematics, 22,
1-36. [https://doi.org/10.1007/
BF00302715](https://doi.org/10.1007/BF00302715)

Shulman, L. S. (1986). Those
Who Understand: Knowle-
dge growth in Teaching.
Educational Researcher,
15 (2), 4-14. [https://doi.or-
g/10.3102/0013189X015002004](https://doi.org/10.3102/0013189X015002004)

Tasdan, B. y Koyunkaya, M.
(2017). Examination of
pre-service mathematics
teacher's knowledge of tea-
ching function concept. *Acta
Didactica Napocensia*, 10 (3),
1-18. [https://doi.org/10.24193/
adn.10.3.1](https://doi.org/10.24193/adn.10.3.1).

Vásquez, C. y Alsina, A. (2017).
Aproximación al conocimien-
to común del contenido para
enseñar probabilidad desde
el modelo del Conocimien-
to Didáctico-matemático.
Educación Matemática, 29 (3),
79-108.

INICIO