Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA FAVORECER EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A TRAVÉS DE PATRONES FIGURALES EN GEOGEBRA

DIDACTIC PROPOSAL TO PROMOTE ALGEBRAIC REASONING THROUGH FIGURAL PATTERNS IN GEOGEBRA

Cecilia Vianey Muñoz Chávez[1]
Luisa Ramírez Granados[2]
Lilia Patricia Aké Tec[3]

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

[1] cecymunoz238@gmail.com
[2] luisa.ramirez@uaq.com

Resumen

El presente estudio tiene por objetivo mostrar una propuesta didáctica para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato mediante el uso de GeoGebra. La metodología empleada es cualitativa y se basa en el diseño que tiene por fundamento tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico. Asimismo, este diseño considera tres etapas: selección de la sucesión, adaptación de la sucesión a un patrón figural y generación del patrón figural en GeoGebra. Como resultado, se presenta el diseño de actividades referentes a patrones figurales y su adaptación al ambiente GeoGebra. En conclusión, los patrones funcionan como una herramienta para introducir el álgebra escolar, ya que favorecen la notación algebraica y están relacionados con la noción de sucesión; además, el uso del software es un apoyo tanto para el aprendizaje y enseñanza del álgebra como para el acercamiento del alumno y profesor a esta tecnología.

Palabras clave: GeoGebra, razonamiento algebraico, patrones, sucesiones.

Abstract

This study's objective is to present a didactic proposal to promote algebraic reasoning in high school students working with GeoGebra. A qualitative methodology, design-based research, was used because of its foundation on three axes: didactic, mathematical, and technological. The design considers three stages: sequence selection, adaptation to a figural pattern and finally generation of the figural pattern in GeoGebra. As a result, design of activities related to figural patterns and their adaptation to GeoGebra's environment is presented. It is concluded that patterns turn out to be a tool to introduce school algebra since algebraic notation and notion of succession are related. In addition, using proposed software contributes teacher and student's approach to apply technology as a support tool for learning and teaching algebra.

Keywords: GeoGebra, algebraic reasoning, patterns, successions.

Introducción

El estudio del álgebra en los distintos niveles educativos ha sido, a través de los años, una asignatura que representa dificultad para los estudiantes, debido al carácter simbólico y la manipulación sintáctica desprovista de significado (Castro, 2012). Sánchez y del Valle (2016) mencionan que, entre las causas de las dificultades en el álgebra, se encuentran:

a. El tratamiento inadecuado de los símbolos;

b. la falta de generalización aritmético-algebraica;

c. la no interpretación del álgebra como proceso de operacionalización;

d. el uso inadecuado del lenguaje simbólico-literal;

e. la ausencia del desarrollo abstracto.

También existen dificultades de índole operacional como:

f. La forma de ver el signo igual (=) que influye en el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas;

g. la notación algebraica;

h. la falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas.

El punto anterior coincide con lo que Both *et al.* (2017) mencionan respecto a la incapacidad de los estudiantes frente a problemas que impliquen expresiones equivalentes. Para agravar las cosas, surgen problemas relacionados con la no comprensión del significado de las letras, derivada de tareas que involucran incógnitas, variables y parámetros.

Por otro lado, Castellanos y Obando (2009) consideran que aspectos como la naturaleza, el significado de los símbolos y las letras, el uso inapropiado de fórmulas o las reglas de procedimientos son fuente de dificultades. Además, los autores añaden que los estudiantes presentan complicaciones al realizar generalizaciones de expresiones algebraicas, producto del análisis de determinadas situaciones particulares. En síntesis, el desempeño de los estudiantes en la materia del Álgebra sufre carencias alarmantes. Un análisis hecho por García *et al.* (2018) muestra que las puntuaciones más bajas en Matemáticas se tienen en Brasil y México, según los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Estos autores enfatizan la necesidad de incluir políticas de apoyo a estudiantes que carecen de habilidades básicas en matemáticas en los niveles de educación media superior y superior.

> El presente estudio tiene por objetivo mostrar una propuesta didáctica para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato mediante el uso de GeoGebra. La metodología empleada es cualitativa.

Un factor que afecta en la falta de aprendizaje de los estudiantes, respecto al álgebra escolar, es la enseñanza tradicional que genera que la interpreten como solución de ecuaciones, factorización de polinomios, análisis de funciones y gráficas (Castro, 2012). En consecuencia, la enseñanza ligada a una interpretación manipulativa de símbolos y la realización de operaciones conlleva a que los estudiantes carezcan de comprensión en la resolución de situaciones algebraicas; es decir, la matematización de situaciones mediante la extracción y el reconocimiento de las matemáticas contenidas en situaciones del mundo real, o bien una situación diferente al contexto simbólico del álgebra (Flores y Auzmendi, 2016). De esta manera, al pretender que un estudiante obtenga un alto nivel de comprensión, es menester que pueda usar los procesos de matematización que incluyen pensar, razonar, argumentar, justificar, comunicar, modelar, plantear, resolver problemas y representarlos.

La información recabada manifiesta la problemática en torno al ámbito del álgebra, por lo cual es necesario cimentar propuestas didácticas con bases sólidas en el álgebra que provean al alumno de un razonamiento matemático. Para este propósito, se pretende elaborar actividades que

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

promuevan el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas como el análisis, la generalización, la validación y la capacidad de utilizar diferentes métodos. Asimismo, dichas propuestas didácticas deben fungir como herramientas para el docente, que sirvan en su gestión educativa para promover la construcción del razonamiento matemático. Por este motivo, es menester implementar propuestas didácticas que permitan tanto a los profesores una adecuada gestión en el aula como a los alumnos desarrollar el razonamiento algebraico.

Autores como Muñoz y Ríos (2008) mencionan que la mayoría de los estudiantes, incluidos docentes, no le encuentran utilidad a varios de los conceptos algebraicos. De esa manera, los docentes consideran irrelevante la implementación de actividades que permitan trabajar con generalizaciones y posteriormente conjeturar y extraer relaciones importantes, a partir del análisis de un caso determinado.

Al respecto, durante las últimas décadas se han extraído investigaciones que apoyan la introducción de los *patrones*, uno de los enfoques que favorecen el razonamiento algebraico a través del análisis, la generalización, la validación e incluso la necesidad de utilizar literales (Rivera, 2010; Valenzuela y Gutiérrez, 2018); la noción antes mencionada se despliega en el apartado del marco teórico. De esta manera, como primer paso para desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes se encuentra el diseño de propuestas didácticas que lo permitan. Por tal motivo, el objetivo del artículo es diseñar una propuesta didáctica para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula de bachillerato basada en *patrones* a través del software GeoGebra. Es importante mencionar que este enfoque se ha utilizado en investigaciones que van desde la primaria (6-12 años) hasta el bachillerato (16-18 años) en búsqueda de promover el razonamiento algebraico, a pesar de que el diseño está adaptado para estudiantes de bachillerato.

Marco teórico

Los aspectos teóricos a considerar para el diseño de la propuesta se fundamentan en tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico. Como *fundamento didáctico* se encuentra la orientación del estudio de los patrones. Hay que reconocer que un patrón es una regla o ley de formación de una sucesión finita o infinita de objetos matemáticos o no matemáticos (Carmona, 2016). La regla se deduce a partir de una generalización; en primera instancia, para generalizar el patrón es necesario el análisis de la forma en la que se dan los cambios entre cada elemento, tanto de manera numérica como de manera visual; en otras palabras, hay que encontrar las características comunes entre los elementos que se analizan (López, 2016). En el estudio de los patrones destacan los lineales, cuadráticos, numéricos y figurales. El diseño de la presente propuesta didáctica considera los patrones figurales, que proporcionan un apoyo visual que facilita encontrar la regla general de la secuencia y otorgan significado a los símbolos y signos algebraicos. En la Figura 1 se exhibe un patrón lineal figural.

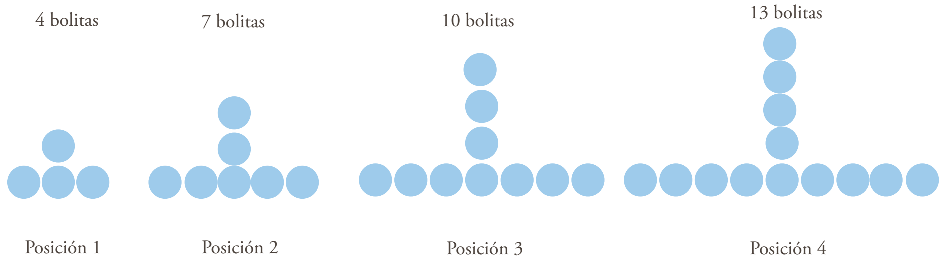


Figura 1. Patrón lineal figural.

De la Figura 1 se analiza que la posición 5 estará conformada por 16 bolitas y en la posición 6 se tendrán 19 bolitas. La generalización consiste en determinar una regla general que permita encontrar cualquier término, como el término *n*-ésimo. En este caso particular, es por medio de la expresión (1):

$$a_n = 3n + 1 \ con \ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Por otro lado, se observa en la Figura 2 el caso de los patrones cuadráticos figurales:

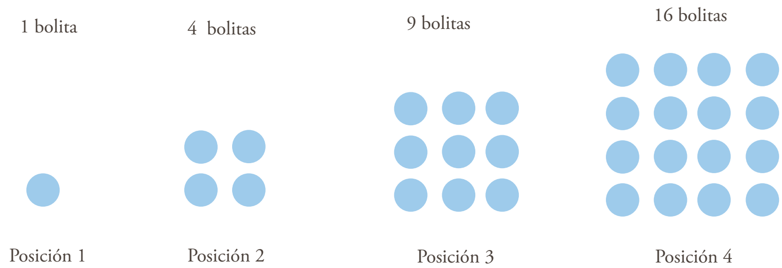


Figura 2. Patrón cuadrático figural.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

En la Figura 2 se analiza el arreglo en la posición 5, conformada por 25 bolitas; asimismo, la posición 6 tendrá 36 bolitas. Estas consideraciones fundamentan que la generalización (la regla que permite calcular el término n-ésimo) se exprese de la siguiente manera (2):

$$a_n = n^2 \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

En el caso de los patrones cuadráticos figurales, el estudiante utiliza una estrategia funcional para describir el comportamiento del patrón. Por ejemplo, en la Figura 2 se propone una relación (3):

$$f(n) = n^2 \qquad (3)$$

Por consiguiente, los alumnos lograrán calcular cuántas bolitas habrá en la posición n-ésima. Para el caso de los patrones lineales figurales, también es factible seguir la estrategia de relacionar la posición de la figura y el número de elementos de esta mediante la función afín (4).

$$f(n) = a \bullet n + b \; (b \neq 0) \qquad (4)$$

Donde:

a es el patrón de crecimiento;

b es el término que se mantiene constante.

En este sentido, Carmona (2016) expone las siguientes fases para definir un patrón:

— Fase 1. Describir el patrón: a los estudiantes se les dificulta comunicar lo que han percibido, por lo que en esta etapa se sugiere expresar la percepción a través de pruebas en voz alta.

— Fase 2. Registrar un patrón: en esta etapa se plasman las ideas en un lenguaje visible vía símbolos, comunicación escrita y recursos gráficos. Así el estudiante podrá comprobar y modificar los patrones al escribir las ideas y discutirlas.

— Fase 3. Validar la formulación: en esta etapa se verifica la utilidad de la regla encontrada.

De los patrones figurales lineales y cuadráticos, la propuesta didáctica considera los patrones figurales lineales, cuya definición se contempló en el posicionamiento de Carmona (2016). Por otro lado, para algunos autores como Zapatera (2018), solicitar de manera directa el término *n*-ésimo de una serie implica un reto para los estudiantes de cualquier nivel educativo. A tal fin, el posicionamiento planteado por Zapatera (2018) resulta apropiado para el presente artículo, por lo que se ha incorporado al diseño de la propuesta didáctica. El autor estipula las siguientes consignas de generalización:

- Una generalización cercana en la que se solicita calcular el valor $f(n)$ para "pequeño"; por ejemplo $n = 5$ puede obtenerse mediante el recuento, utilizando dibujos o llevando el recuento a través de una tabla de valores.

- Una generalización lejana en la que se solicita calcular el valor de $f(n)$ para *n* "grande" y requiere la identificación de un comportamiento invariante que no necesariamente se ajusta a una regla general.

- Una expresión de la regla general que puede denotarse de manera verbal, pero en niveles educativos avanzados tendría que expresarse en términos algebraicos. Esta regla general permite calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n.

- Un proceso inverso para encontrar el valor de la posición (n) dado el número de elementos $f(n)$.

El *fundamento matemático* asociado al estudio de los patrones es la noción de sucesión; cabe señalar que una sucesión es un conjunto de objetos, números, figuras, etcétera. colocado en un orden específico. Hay un primer término, el cual puede denominarse a_1, un segundo a_2, un tercero a_3 y así sucesivamente con "n" entero y a_n el n-ésimo término; "a" es una función de "n" (Stewart *et al.*, 2010). La utilidad de esta noción es amplia, ya que el alumno desde los primeros cursos de educación básica comienza a estudiar secuencias y, conforme avanza los diferentes niveles educativos, se aproxima al estudio de las sucesiones.

Finalmente, el *fundamento tecnológico* consiste en integrar GeoGebra para comprender de manera visual el desarrollo del patrón. En este sentido, Avecilla *et al.* (2015) mencionan que:

> los estudiantes pueden beneficiarse de diferentes formas de integración de la tecnología, ya que nuevas oportunidades de apren-

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

> dizaje se proporcionan en entornos tecnológicos. Lo previo podría proveer a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento con base en la visualización y exploración de objetos y conceptos matemáticos en entornos multimedia (p. 121).

La plataforma GeoGebra se desempeña como una herramienta facilitadora de procesos de abstracción, ya que puede mostrar cómo construir una relación entre un modelo geométrico y uno algebraico (Avecilla *et al.*, 2015). En otras palabras, es un apoyo considerable a la hora de trabajar en el reconocimiento de patrones que lleven consigo a la generalización de estos, pues se tiene una representación visual de lo estudiado.

En torno a los tres ejes descritos se procedió, como primera instancia, al diseño de la propuesta didáctica de la concepción del patrón figural, la cual se desarrolla en tres etapas:

1. la selección de la sucesión;
2. la adaptación de la sucesión a un patrón figural;
3. la generación del patrón figural en GeoGebra.

A posteriori, en una segunda parte se propusieron consignas específicas para que los estudiantes generen acciones matemáticas.

Metodología

Se adopta una metodología cualitativa (Leatham, 2019) de tipo documental basada en el diseño de tareas (Liang y Hoyles, 2013) y fundamentada en los tres ejes mencionados en el marco teórico. En la primera parte del diseño de la propuesta se consideraron tres etapas:

1. la selección de la sucesión;
2. la adaptación de la sucesión a un patrón figural;
3. la generación del patrón figural en GeoGebra.

En la *primera etapa* de selección de la sucesión se determina el término *n*-ésimo de la sucesión. Por ejemplo, la expresión (1):

$$a_n = 3n + 1 \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

En la *segunda etapa* se adapta a un patrón figural, una vez determinado el término *n*-ésimo. Por ejemplo, en la Figura 3 la secuencia se comporta de acuerdo a la expresión (1):

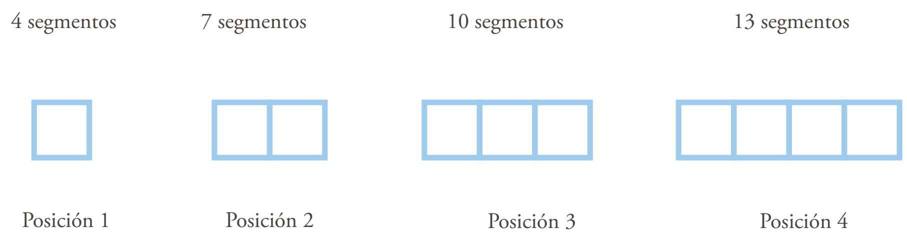


FIGURA 3. Patrón figural lineal equivalente.

Asimismo, el patrón de la Figura 1 también tiene el mismo comportamiento. De esta manera, es relevante la adaptación de la sucesión al patrón figural debido a la influencia del análisis visual, el cual incide en la descripción y el registro del patrón (Carmona, 2016). Por ejemplo, para el patrón de la Figura 3 puede obtenerse la expresión (1) si visualmente se advierte que el segmento vertical que cierra el último cuadrado es representado por la constante "+ 1". Es decir, en la primera posición hay 3 segmentos más un segmento que cierra el cuadrado (remarcado en color morado), en la segunda posición hay seis segmentos más un segmento que cierra el cuadrado y así sucesivamente (Figura 4).

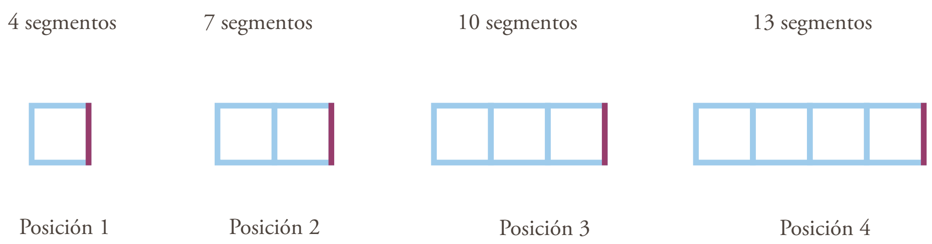


FIGURA 4. Patrón figural lineal equivalente descompuesto.

En el patrón de la Figura 1 puede analizarse visualmente la agrupación de bolitas. Así, en la segunda posición, hay dos grupos de dos bolitas en la horizontal y sobra una bolita; en la línea vertical hay un grupo de dos bolitas. En la tercera posición, hay dos grupos de 3 bolitas en la horizontal, sobra una bolita y en la línea vertical hay un grupo de tres bolitas (Figura 5).

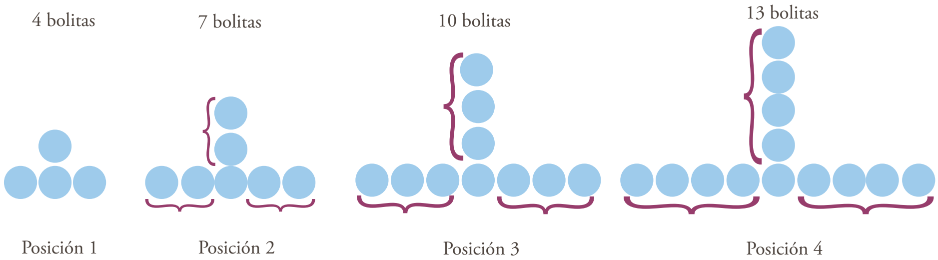


FIGURA 5.
Patrón figural lineal descompuesto.

Con la descomposición anterior se obtiene la expresión (5) y, a su vez, se advierte que (1) y (5) son expresiones equivalentes.

$$a_n = (2n + 1) + n \; con \; n \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

En la *tercera etapa,* una vez que la sucesión fue seleccionada y adaptada a algún patrón figural, se procede a incorporarla en la plataforma GeoGebra. A continuación, se mostrará en la Figura 6 la incorporación del patrón, de manera que GeoGebra facilita el análisis visual del patrón al generar tantos elementos de la sucesión como se defina.

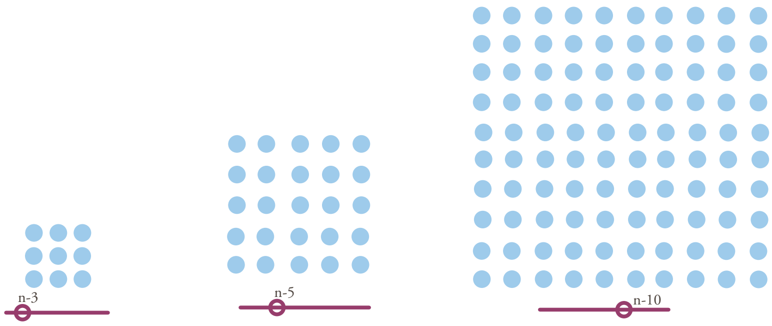
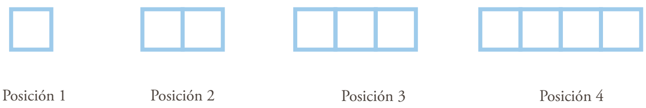


FIGURA 6.
Patrón figural cuadrático en GeoGebra.

Antes que nada, una de las limitantes del trabajo en lápiz y papel es reproducir la secuencia de las figuras dadas. Sin embargo, GeoGebra favorece la generación de diversas posiciones del patrón y coadyuva a que el estudiante valide sus propuestas para el término *n*-ésimo, lo que Carmona (2016) denomina como "validar la formulación".

En la segunda parte del diseño de la propuesta, el planteamiento de consignas se realizó de acuerdo a la propuesta de Zapatera (2018) sobre determinar los términos cercanos y lejanos, el término *n*-ésimo y el proceso inverso. De esta manera, una tarea de la propuesta didáctica logra estructurarse de la siguiente forma:

Analiza la siguiente figura y utiliza el material dispuesto en GeoGebra para contestar las preguntas que se te plantean:



1. En la posición 7, ¿cuántos palitos habrán formado los cuadrados adosados?
2. En la posición 18, ¿cuántos palitos habrán formado los cuadrados adosados?
3. ¿Cuántos palitos habrá en la posición *n*-ésima?
4. Si tenemos 49 palitos, ¿en qué posición nos encontramos?

Figura 7. Ejemplo de tarea sobre un patrón figural lineal.

A continuación, se expone como resultado la propuesta didáctica para el trabajo con patrones lineales figurales, cuyo diseño fue realizado a partir de la explicación metodológica previa.

Resultados

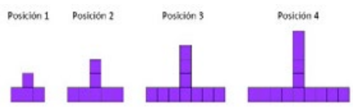
La propuesta didáctica estuvo integrada por cuatro tareas sobre patrones lineales. Como se ha descrito anteriormente, en el primer paso fueron seleccionadas las sucesiones y determinados los términos *n*-ésimos de cada una, como se muestra en la Tabla 1.

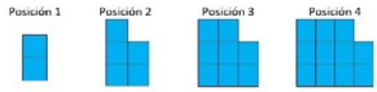
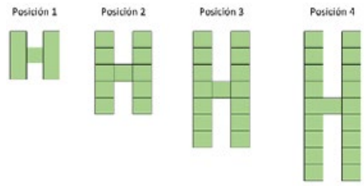
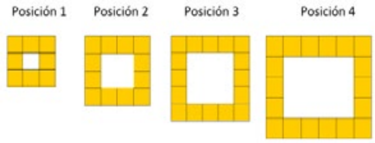
Tabla 1. Términos *n*-ésimos seleccionados.

Término n-ésimo	Expresión
$a_n = 3n + 1$	(1)
$a_n = 3n + 1$	(6)
$a_n = 4n + 3$	(7)
$a_n = 4n + 4$	(8)

Una vez seleccionadas las sucesiones y determinado su respectivo término *n*-ésimo, como segundo paso se procede a adaptarlas a un patrón figural. Las figuras seleccionadas para las expresiones son presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2. Figuras seleccionadas para las sucesiones.

Expresión	Figura
(1)	

(6)	
(7)	
(8)	

Posterior a la determinación de la figura, se procede a su generación en GeoGebra, como tercer paso. En el caso de la expresión (1), fueron implementados los comandos *secuencia y segmentos* de GeoGebra. Es así como la figura se descompuso en segmentos y programó de acuerdo a su posicionamiento en el plano cartesiano. Asimismo, se generó la fila de cuadrados horizontales, como puede apreciarse en la Figura 8; a su vez, se advierte en la posición 1 que las coordenadas de los extremos son (0,0) y (3,0) para generar la base de la figura. Ahora bien, para la posición 2 se tienen las coordenadas (0,0) y (5,0); por otro lado, para la posición 3 se tienen (0,0) y (7,0).

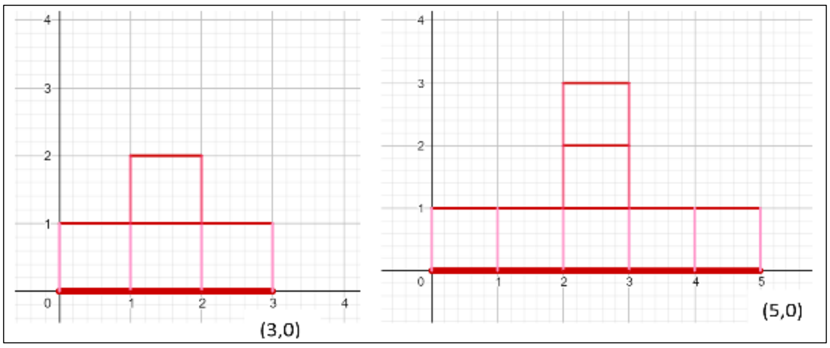


Figura 8.
Generación de la base del patrón figural (1).

Es necesario recalcar que, de continuar sucesivamente las coordenadas, cambiarán los puntos extremos finales de las figuras, en específico, la abscisa que va incrementando en 2: (3,0), (5,0), (7,0), (9,0), (11,0), etc., la cual representa el siguiente comportamiento: (2i + 1,0).

Para generar la línea superior paralela a la base, se continúa con el mismo razonamiento e identificación de las coordenadas que van cambiando. Al llegar a este punto, se utilizaron los comandos secuencia y segmento de GeoGebra, por lo que para la posición 1, las coordenadas de los extremos son (0,1) y (3,1), y la posición 2 es (0,1) y (5,1). De esta manera, la abscisa obtenida incrementará en 2 y la ordenada se mantendrá constante en 1: (3,1), (5,1), (7,1), (9,1), etc., representando el siguiente comportamiento: $(2i + 1,1)$. Así, los razonamientos para generar estas dos líneas en GeoGebra se aprecian en la Figura 9.

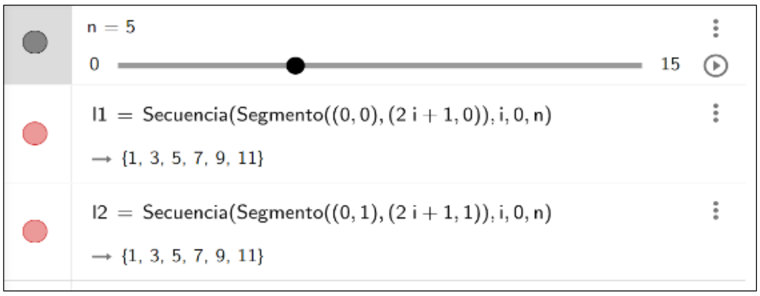


FIGURA 9. Comandos utilizados en GeoGebra para la base 1.

Por otro lado, para generar las líneas verticales se siguieron razonamientos similares a los previos; a su vez, fueron utilizados los mismos comandos. De la Figura 10 se analizó que las líneas verticales tienen como coordenadas en los extremos $(i,0)$ e $(i,1)$, donde i varía desde 1 hasta $2n + 1$ y el último segmento, que cerrará el rectángulo, tendrá como puntos extremos los puntos $(2n + 1,0)$ y $(2n + 1,1)$.

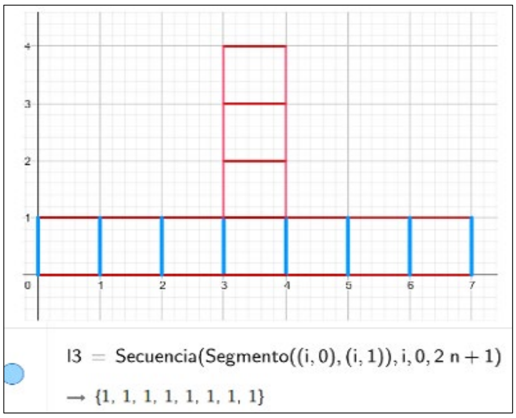


FIGURA 10. Comandos utilizados en GeoGebra para la base 2.

Finalmente, la Figura 11 denota que para graficar los cuadrados apilados en vertical se comienza con la primera línea, y para la posición 1 se cuenta con las coordenadas de los extremos (1,1) y (1,2); la posición 2 tiene (2,1) y (2,3), y para la posición 3 es (3,1) y (3,4). Así, la abscisa del primer punto extremo tiene el comportamiento $(n,1)$ y el otro extremo $(n,n + 1)$. La segunda línea es paralela a la primera y por consiguiente, se desplaza una unidad hacia la derecha. Dado que estos dos puntos dependen estrictamente de *n*, solo se utiliza el comando segmento de GeoGebra.

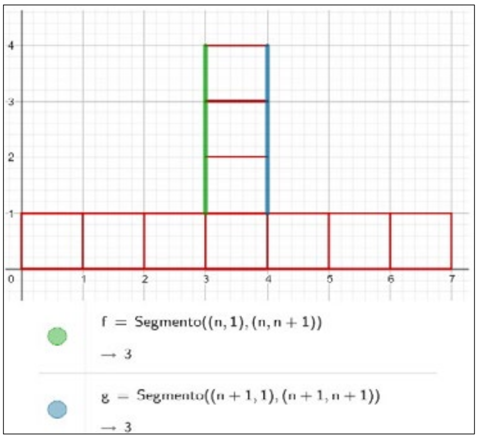


FIGURA 11.
Comandos utilizados en GeoGebra para los cuadrados apilados en vertical.

Como último paso, para graficar las líneas horizontales que dividen este rectángulo en cuadrados apilados, se identifica que los extremos de cada segmento tengan el comportamiento (n,i) y $(n + 1,i)$. A continuación, en la Figura 12 se presentan los diseños desarrollados en GeoGebra para cada una de las sucesiones seleccionadas.

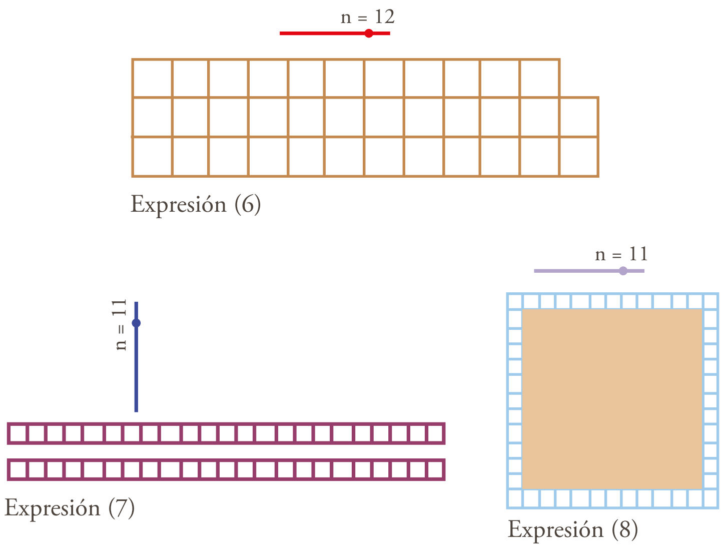
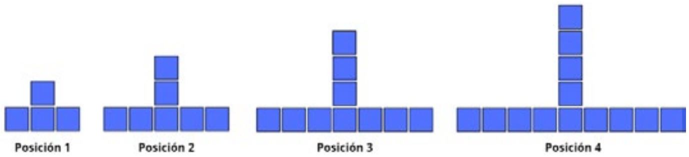


FIGURA 12.
Patrones generados en GeoGebra.

Una vez generados los patrones en GeoGebra, son incorporadas las consignas y las instrucciones que guían la generalización. Como resultado, una de las tareas que integra la propuesta didáctica quedaría diseñada de la siguiente forma para el caso de la expresión (1):

Tabla 3. Primera tarea sobre generalización de patrones de la propuesta didáctica.

Analiza la siguiente secuencia de figuras. Advertirás que en la primera posición hay 4 cuadritos, en la segunda posición hay 7 cuadritos, en la tercera posición hay 10 cuadritos y en la cuarta posición hay 13 cuadritos:



Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/vtwvzngw) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 6 y 7, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
2. En las posiciones 17 y 18, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
3. ¿Cuántos cuadritos morados habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 73 cuadritos morados, ¿en qué posición nos encontramos?

El resto de las tareas que integran la propuesta didáctica y basan sus patrones generados en GeoGebra siguen la misma lógica respecto a su diseño (Figura 12).

Conclusiones

En definitiva, los patrones resultaron ser una herramienta eficaz para introducir el álgebra escolar al favorecer la notación algebraica y por su adecuada relación con la noción de sucesión. Por extensión, la generalización de patrones permite al estudiante describir el patrón y comunicar los cambios presentados en las posiciones de las figuras. Al respecto, también promueve la necesidad de utilizar literales para registrar el patrón en su término *n*-ésimo. El apoyo del ambiente dinámico GeoGebra facilita a los estudiantes validar sus posibles expresiones de la regla general, al trazar figuras de posiciones magnas (posición 30, posición 106, etc.). Además, el uso del software le permite tanto al alumno como al profesor usar este tipo de tecnología como un apoyo para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

El planteamiento de la propuesta didáctica genera varias implicaciones. En primera instancia, supone que estudiantes y docentes incorporen este tipo de tareas matemáticas con el uso de recursos tecnológicos, como GeoGebra. La segunda implicación está ligada al diseño de tareas para la generalización de patrones, ya que, si se desea promover el razonamiento algebraico en los estudiantes, es imprescindible proponer tareas en el aula. Por último, la tercera implicación se relaciona con la formación de los profesores de matemáticas, puesto que deben poseer un desarrollado criterio para seleccionar o diseñar este tipo de tareas. Es menester incorporar estos elementos como parte de su conocimiento especializado.

Un punto de partida es focalizar el tipo de tareas propuestas en el aula. Al respecto, García (2019) menciona que la mayoría de las investigaciones no se centran en la descripción del diseño de tareas, al contrario, se presentan como un producto finalizado para la recolección de datos empíricos.

En este sentido, lo expuesto en este artículo explicita los elementos teóricos y metodológicos para diseñar tareas sobre los patrones. Al presentar un diseño de propuesta didáctica, existen limitados datos empíricos que evidencien su funcionalidad; sin embargo, los diversos estudios realizados con estudiantes proporcionan un panorama positivo sobre la aplicación de este enfoque de generalización de patrones en el aula (Rivera, 2013; Kieran *et al.*, 2016; Valenzuela y Gutiérrez, 2018). Como línea de investigación abierta, se sugiere la aplicación en amplias muestras de estudiantes de bachillerato. La generalización de patrones es un enfoque que ha sido estudiado desde diferentes posicionamientos teóricos, los niveles de algebrización de Godino *et al.* (2015), los estadios de generalización de patrones de Zapatera (2019), y bajo metodologías como los experimentos de enseñanza e ingeniería didáctica (Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022; Aké, *et al.*, 2014). De esta manera, la presente propuesta didáctica es pertinente para el estudio del desarrollo del razonamiento algebraico, ya que abre la posibilidad de considerar diversos posicionamientos teóricos y metodológicos, así como la incorporación de elementos que permitan estudiar y fundamentar el uso de esta tecnología en el aula.

Agradecimientos

Las autoras agradecen a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro por el financiamiento otorgado para este estudio, que es parte de un proyecto más amplio en el marco de los Proyectos de Atención a Problemas Nacionales. Asimismo, por proporcionarle una beca de licenciatura a la primera autora de este manuscrito.

Referencias

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (5), 25-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.70

Avecilla Barahona, F., Cárdenas Barrera, O., Vaca Barahona, B. e Hidalgo Ponce, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, *28*(5), 121-132.

Carmona Sánchez, I. (2016). *El potencial de los estudiantes de bachillerato en el reconocimiento de patrones: un estudio de casos*. [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1002

Castellanos, M. T. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Conferencia del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 75-94.

Flores López, W. O. y Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e interculturalidad*, *19*(2), 54-64.

García, M., López, A. y Díaz, A. (2018). Análisis del desempeño de estudiantes en tareas matemáticas. Estudio exploratorio en el Instituto Politécnico Nacional de México. *Formación Universitaria*, *11*(5), 41-54. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000500041

Godino, J. D., Neto, T., Aké, L., Etchegaray, S.,Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its*

Nature, its Learning, its Teaching. Springer.

Leatham, K. R. (2019). *Designing, conducting, and publishing quality research in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5.

Liang, B. C. y Hoyles, C. (2013). *Rethinking and researching task design in pattern generalisation.* Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, *2*, 193-200.

López Acosta, L. A. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional].

Muñoz, M. y Ríos, C. (2008). *Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra.* Conferencia del 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

Rivera, F. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. *Psychological and pedagogical considerations.* Springer. http://Doi:10.1007/978-94-007-2712-0

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Sánchez Acevedo, N. y Del Valle, M. E. (2016). Álgebra Escolar: Una revisión preliminar en relación a errores y dificultades. *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques*, *1*(3), 60-75.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2010). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* CENCAGE Learning.

Valenzuela García, J. y Gutiérrez Marfileño, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, *30*(2), 49-72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Zapatera, L. A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación* *en Matemática Educativa*, *21*(1), 87-114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, L. A. (2019). Descriptores del Desarrollo de la Mirada Profesional en el Contexto de la Generalización de Patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*, 1464-1486. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

INICIO