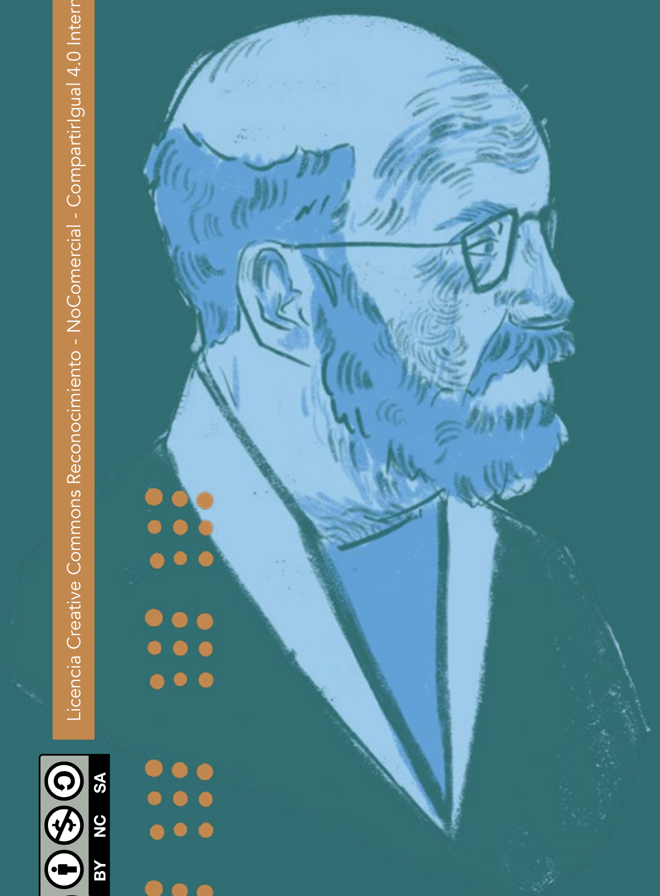
Recibido el 10 de marzo de 2023, aceptado el 10 de noviembre de 2023. | ISSN: 2954-4025

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL RELACIONAR UNA FUNCIÓN CON SU FUNCIÓN DERIVADA DESDE UN ENFOQUE GRÁFICO

CHARACTERIZATION OF UNIVERSITY STUDENTS' KNOWLEDGE AT ASSOCIATING A FUNCTION WITH ITS DERIVATIVE FUNCTION THROUGH A GRAPHIC APPROACH



José Antonio Palacios Briseño[1]
Cecilia Hernández Garcíadiego

Universidad Autónoma de Querétaro,
Santiago de Querétaro, México

[1]jose.antonio.palacios@uaq.mx

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo analizar cómo relacionan ocho estudiantes universitarios una función con su función derivada en una actividad de enfoque meramente gráfico. Dicha actividad forma parte de un cuestionario de diagnóstico utilizado en una investigación más amplia, cuyo objetivo es construir el concepto de derivada en estudiantes universitarios con ayuda de la teoría APOE, que proporciona estructuras mentales necesarias para la comprensión de un concepto matemático: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. El diseño del cuestionario y los detalles de la actividad a analizar se presentan en la primera parte del escrito, mientras que en la segunda parte se pueden observar los análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas observadas. En general, los resultados muestran deficiencias en los estudiantes al enfrentarse a ejercicios de enfoque gráfico. Asimismo, las justificaciones observadas en una gran parte de los estudiantes muestran una inclinación por la resolución de ejercicios desde un enfoque algebraico, dejando así a un lado el aspecto gráfico de la actividad. Se espera que la información recabada sea de utilidad para futuras investigaciones como antecedentes de su trabajo y también para que profesores en activo incentiven la resolución de este tipo de actividades en las aulas.

Palabras clave: aspecto gráfico, cálculo diferencial, derivada, teoría APOE.

Abstract

This paper aims to analyze how eight university students associate a function with its derivative in a task with a purely graphical approach. This task is part of a diagnostic test used in a broader research whose objective is to build the concept of derivative in university students with the help of the APOS theory, which provides mental structures required to understand a mathematical concept: *action*, *process*, *object*, and *scheme*. The first part of the paper shows the design of the questionnaire and the details of the task to analyze, meanwhile, the second part presents the qualitative and quantitative analyses of the observed answers. In general, the results show deficiencies when students faced graphic focus exercises. Likewise, the justifications observed in the majority of the students present an inclination towards solving exercises from an algebraic perspective, thus overlooking the graphical nature of the activity. We assume that future research may use these results as background for their works, and active teachers could encourage their students to solve this type of tasks in the classrooms.

Keywords: graphic aspect, differential calculus, derivative, APOS theory.

Introducción

El cálculo tiene como una de sus ideas principales el concepto de derivada, el cual es una base tanto para la comprensión del cálculo como de otras ramas científicas, como puede ser la física. Así, el concepto de derivada es un tema ampliamente investigado, ya sea al analizar su comprensión por parte de los estudiantes (Artigue *et al.*, 1995; Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018; Domínguez Contreras y Sánchez Galeano, 2016; Fuentealba *et al.*, 2018; Londoño *et al.*, 2013; Sánchez Matamoros, 2010) o caracterizar los conocimientos de los profesores para una enseñanza correcta del concepto (Amaro, 2020; Badillo *et al.*, 2011; Castro *et al.*, 2015; Gavilán *et al.*, 2007).

La complejidad en el aprendizaje y la comprensión de este concepto provienen de diferentes raíces. Una de ellas la señalan Artigue *et al.* (1995), pues comparten que la mecanización algebraica y memorización en el proceso de aprendizaje de la derivada son una barrera que impide al estudiante la comprensión más amplia del concepto y de sus métodos de solución en ejercicios conceptuales o problemas. La comprensión de la derivada requiere de sobrepasar dicha barrera (Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018; González García *et al.*, 2018). Esta opinión la comparten Berry y Nyman (2003), quienes afirman que en cursos iniciales de Cálculo los estudiantes no realizan abstracciones mentales que les permitan asimilar el concepto y se quedan solo en la memorización de reglas de derivación.

Además, en el trabajo de investigación realizado por Amaro (2020) se tiene como uno de sus resultados el hecho de que incluso profesores suelen memorizar el concepto de derivada como "la pendiente de la recta tangente a una función en un punto" o como "la tasa de cambio instantánea" junto a algoritmos y fórmulas, pero presentan dificultades para resolver ejercicios conceptuales que exigen una reflexión compleja. Esta situación es claramente extrapolable a los estudiantes.

La mayoría de los estudiantes que son capaces de memorizar definiciones y algoritmos no cuentan con la habilidad de entender los resultados del cálculo de la derivada de una función en un punto determinado como un número que está estrechamente ligado con una nueva expresión: la función derivada (Park, 2013). Asiala *et al.* (1997) explican la importancia de que los estudiantes entiendan la relación entre el valor numérico de la función derivada en un punto con el valor de la pendiente de la recta tangente a la función original en el mismo punto. Además, afirman que la representación gráfica de la pendiente de la recta tangente aproxima al estudiante a comprender el valor de la función derivada como una nueva función.

> El objetivo de este estudio es analizar cómo relacionan ocho estudiantes universitarios una función derivada en una actividad de enfoque meramente gráfico con ayuda de la teoría APOE, que proporciona estructuras mentales necesarias para la comprensión de un concepto matemático.

Del análisis de estas situaciones surge la pregunta: ¿cómo relacionan los estudiantes una función con su función derivada desde una representación puramente gráfica?

Para responder presentamos resultados parciales de una investigación más amplia enfocada en la caracterización del conocimiento presentado por estudiantes universitarios respecto al concepto de derivada. Dicha caracterización se fundamenta en las estructuras mentales de la teoría APOE (Dubinsky, 1991). Así, en este artículo se busca, primeramente, ejemplificar el uso de las estructuras mentales contempladas dentro de la teoría APOE para el diseño y análisis de las actividades del cuestionario a utilizar. Posteriormente, se realiza la caracterización del conocimiento sobre el concepto de derivada a partir de una muestra de ocho estudiantes universitarios de primer semestre pertenecientes a diferentes ingenierías. A estos estudiantes se les aplicó dicho cuestionario con cinco actividades sobre derivadas, el cual fue una herramienta de diagnóstico acerca de los conocimientos presentados por los estudiantes antes de cualquier intervención en el aula. De entre las cinco actividades se ha elegido una, la cual analiza la capacidad del estudiante para relacionar una función f y su función derivada f' desde una representación gráfica.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

Marco teórico y metodología

Teoría APOE

La investigación se realiza desde el marco de la teoría constructivista APOE desarrollada por Dubinsky (1991) para describir la construcción de un concepto matemático a través de estructuras mentales, que realiza el estudiante al momento de su aprendizaje. APOE señala que, para lograr la comprensión de un concepto, el estudiante debe transitar por cada una de las estructuras mentales que le dan nombre: acción, proceso, objeto y esquema.

La descomposición genética es un elemento esencial de este modelo, ya que describe las estructuras mentales específicas para construir un concepto de interés (Fuentealba *et al.*, 2019). Las actividades que conforman el cuestionario de diagnóstico se basan en las descomposiciones genéticas propuestas por Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012).

De manera general, se dice que un estudiante muestra una *concepción acción* cuando necesita instrucciones sobre cómo realizar paso a paso una operación (Dubinsky y McDonald, 2001). En cambio, el estudiante evidencia una *concepción proceso* cuando realiza de manera reiterada dichas acciones, reflexionando sobre ellas e incorporándolas a su consciencia (Gutiérrez y Valdivé, 2012). Mientras tanto, la *concepción objeto* es presentada cuando el estudiante es capaz de ver un proceso como un todo y realizar diversas transformaciones u operaciones sobre un concepto (Trigueros, 2005). Por último, la *concepción esquema* puede ser descrita como "la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática" (Trigueros, 2005).

Por otra parte, Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012) presentan sus respectivas descomposiciones genéticas del concepto de derivada tomando como base otras nociones, como la recta secante, y la tangente. Para estos autores, el estudiante muestra una *concepción acción* cuando es capaz de trazar una recta secante que corte a una curva en unos puntos cualesquiera P y Q y calcular su pendiente. Por otro lado, muestra una *concepción proceso* si es capaz de comprender que una recta secante puede cortar puntos P y Q cada vez más cercanos a lo largo de la curva. Además, si el estudiante interioriza este proceso y observa qué ocurre con la recta secante cuando Q tiende a P afirmando que la recta tangente no es otra cosa más que la posición límite de la recta secante, se dice que tal estudiante muestra una *concepción objeto*.

Es importante recalcar dos cuestiones. La primera de ellas es recordar que diferentes concepciones objeto pueden nacer del desarrollo de acciones, procesos y otros objetos en el estudiante. En consecuencia, los autores también comparten que el estudiante muestra una *concepción objeto* cuando tiene la habilidad de analizar las relaciones entre una función y su función derivada desde sus representaciones gráficas. La segunda cuestión importante a remarcar es que, según Gutiérrez y Valdivé (2012), la construcción de la estructura mental esquema ocurre cuando el estudiante es capaz de resolver problemas de optimización (geometría), mecánica clásica (física) y crecimiento o decrecimiento de magnitudes (biología). Por lo tanto, en el cuestionario mencionado no se analiza una *concepción esquema* en el estudiante, pues esta queda fuera del diseño de las actividades, las cuales se enfocan en estudiar la comprensión del concepto a través de ejercicios conceptuales excluyendo cualquier tipo de problema de aplicación.

Por último, la metodología utilizada es de tipo mixta, ya que se analizarán cualitativamente la concepción y justificación matemáticas mostradas por el estudiante y se tomará en cuenta la variable de corrección dentro de un análisis cuantitativo: respuesta correcta y respuesta incorrecta.

Muestra

Se contó con la participación de estudiantes de segundo semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, Campus Centro Universitario. El total de la muestra fue de ocho estudiantes, los cuales tenían como requisitos para formar parte del estudio: ser mayores de edad, haber aprobado Cálculo diferencial y estar cursando Cálculo integral en el semestre en que se aplicó el cuestionario.

Cuestionario

El cuestionario diseñado consta de cinco actividades y se centra principalmente en la comprensión del concepto de derivada desde la representación gráfica. Para analizar este nivel de comprensión, se incluyeron actividades que correspondieran a cada una de las estructuras mentales presentadas en las descomposiciones genéticas realizadas por Asiala *et al.* (1997) y Gutiérrez y Valdivé (2012).

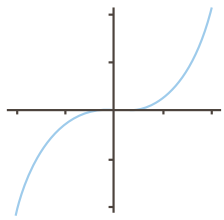
La Actividad 1 fue diseñada para activar la estructura mental *acción* en el estudiante al instarlo a identificar dos puntos en una función, trazar una recta secante que pase por estos y calcular la pendiente de dicha recta. Dentro de la Actividad 2 se analiza la *concepción proceso*, observando si el estudiante es capaz de determinar el número de rectas secantes que pueden ser trazadas a lo largo de una circunferencia. Para las Actividades 3, 4 y 5 se observa si el estudiante es capaz de construir una estructura mental objeto. La Actividad 3 fue diseñada para verificar si el estudiante comprende la definición de la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes; las últimas dos actividades se enfocan en que el estudiante analice la relación entre una función y su derivada. La Actividad 4 fue aplicada para que el estudiante analizara gráficamente una función y determinara su derivada de entre varias opciones. Por otra parte, la Actividad 5 busca que el estudiante bosqueje una función después del análisis de su función derivada. Esta penúltima actividad ha sido elegida como objeto de estudio para el presente trabajo.

La actividad

En esta sección se presenta a detalle la actividad del cuestionario diagnóstico que será analizada, la cual ha sido seleccionada porque se considera que en ella se representan las características necesarias para responder la pregunta de investigación planteada.

La Actividad 4 en la Figura 1 fue seleccionada de Badillo *et al.* (2011) y proporciona información vital sobre el conocimiento del estudiante respecto a la relación entre una función f y su derivada f'; se requiere analizar una función presentada y seleccionar la función derivada de entre un grupo de opciones a partir de observar la función original. Además, el enfoque gráfico hace de esta una actividad atípica para los estudiantes, puesto que dentro del aula predominan las evaluaciones que priorizan el aspecto algebraico (Asiala *et al.*, 1997; Briceño *et al.*, 2018). Dicha actividad exige al estudiante recordar que f' constituye una nueva función y que puede ser representada en el plano cartesiano a lo largo del dominio de la función original o en un dominio más pequeño, dependiendo de las funciones a tratar. La presente tarea puede completarse siguiendo diferentes caminos, por ejemplo, el estudiante puede estimar el valor de la derivada en cualquier valor de x, al trazar la recta tangente en un punto x sobre la curva y estimando su pendiente. Otro camino posible es observar las opciones de derivadas presentadas y así determinar la monotonía de la función original. Sin embargo, aun cuando las respuestas esperadas se pueden encasillar en estas dos opciones, la presentación gráfica en la actividad deja abierto el análisis subjetivo de cada estudiante y, por lo tanto, la posibilidad de conocer cómo enfrenta este tipo de ejercicios conceptuales donde el contexto es puramente visual.

Actividad 4. Si se tiene el gráfico de la siguiente función:



¿Cuál de las siguientes figuras muestra la función derivada que le corresponde? Fundamente tu respuesta.

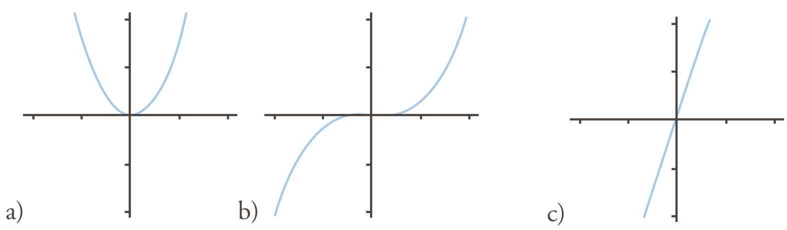


Figura 1.

Actividad 4 del cuestionario.

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Análisis de las respuestas

Como se anticipó en la sección anterior, se esperaba que los estudiantes introdujeran de manera formal la noción de la pendiente de la recta tangente y/o la monotonía de la función, y que dichas nociones les ayudaran a relacionar la función f presentada con su respectiva respuesta correcta a). Sin embargo, aun cuando se pueden ver vestigios de estas ideas en algunas pocas respuestas, las justificaciones presentadas por cada estudiante tienen características distintas a las esperadas. De tal modo, en esta sección se analiza las características de cada tipo de respuesta (TR) junto a un respectivo ejemplo representativo analizado de un estudiante (E).

Se identificaron 5 tipos de prácticas matemáticas que se han catalogado como:

1) Determinación de una expresión simbólica-Recta tangente

2) Análisis del grado de una función

3) Análisis de intervalos de incremento y disminución

4) Relación de los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función

5) Nociones de la segunda derivada

TR1: Determinación de una expresión simbólica - Recta tangente

Una de las características de este tipo de solución yace en que el estudiante, a partir de la gráfica de la función presentada (la cual llamaremos f de ahora en adelante), intenta determinar una expresión simbólica que la represente. Otra característica es que incluya dentro de sus respuestas los términos *recta* o *recta tangente* (Figura 2).

Actividad 4:

La respuesta a a) porque es la única función que toca a f(x) en un solo punto, lo cual es fundamental para cumplir la característica de las rectas tangentes, que es la derivada de la función original. Mis aproximaciones indican que quizá f(x) original es tan(x) y el inciso a) $= x^2$, en lo cual entro en cierta discusión porque no corresponde a dx de tan(x), pero cumple bien la característica de una derivada.

FIGURA 2. Respuesta y fundamentos compartidos por E1.

Es evidente que E1, a falta de información algebraica o tabular dentro de las instrucciones de la actividad, invoca una función explícita, en este caso $f'(x) = \tan x$, pues dicha función guarda una gran similitud con f cuando $-\pi < x < \pi$. Se intuye que el estudiante realiza este paso para determinar con reglas de derivación la expresión simbólica para $f'(x)$ y así determinar la gráfica que represente la función derivada.

Anteriormente, E1 adjudica la característica propia de la recta tangente a la función derivada: tocar en un solo punto una curva. Aun sin concretar adecuadamente dicha idea, su suposición le ayuda a seleccionar correctamente la opción a). Su respuesta nos da la oportunidad de inferir que el estudiante es incapaz de notar que tanto la función del inciso a) como la de la opción c) tocan de nuevo f, puesto que todas las gráficas presentadas se despliegan en el dominio de los números reales ($\mathbb{R}$), aunque el ejercicio solamente muestre un segmento limitado.

E1 no logra concretar una justificación idónea entrelazando ambos tópicos de su justificación, dado que, incluso cuando anteriormente había seleccionado de manera correcta la respuesta (partiendo de ideas erróneas), intenta determinar una expresión simbólica para representar la función derivada, en su caso $f'(x) = x^2$. Su intuición algebraica le reafirma que esta función explícita f' no es la derivada de la f que determinó anteriormente. Con lo anterior, se podría argumentar que los estudiantes que presentan este tipo de respuesta a través de la práctica matemática realizada no cuentan con el conocimiento necesario para resolver la actividad; por ende, no muestran evidencia suficiente de poseer la concepción mental *objeto*.

TR2: Análisis del grado de una función

La característica principal de este tipo de respuesta radica en que el estudiante, a partir del enfoque meramente visual de la actividad, intenta dar una respuesta correcta analizando el grado de la función f y afirmando que f' debe ser de grado menor (Figura 3).

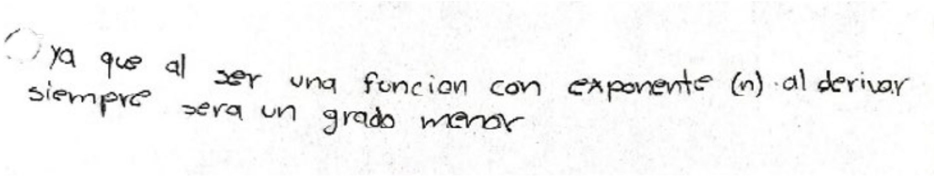

ya que al ser una funcion con exponente (n) al derivar siempre sera un grado menor

Figura 3. Fundamentos compartidos por E2.

Es posible intuir que el estudiante, a pesar de la falta de una expresión simbólica para cada función presentada, sabe que las funciones polinomiales pueden representarse como $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$ con $a_n \neq 0$ (siendo los coeficientes números reales y *n* el grado de la función), y las relaciona con las curvas presentadas. Además, dentro de su respuesta se observan elementos que describen un conocimiento de las reglas de derivación, $f(x) = \frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ para este caso en específico.

Sin embargo, el estudiante parece no percatarse de que la respuesta seleccionada no es la función derivada de f, pues afirma que la alternativa correcta es la opción c). La justificación presentada es más que suficiente para resolver de manera correcta la actividad, pero la falta de conocimiento sobre gráficas de funciones polinomiales lleva a argumentar que E2 no puede mostrar una concepción mental *objeto*.

TR3: Análisis de intervalos de incremento y disminución

La característica del presente tipo de solución radica en que el estudiante, sin más que las gráficas presentadas en la actividad, determina su respuesta partiendo del "movimiento" de la curva dentro de los parámetros presentados (Figura 4).

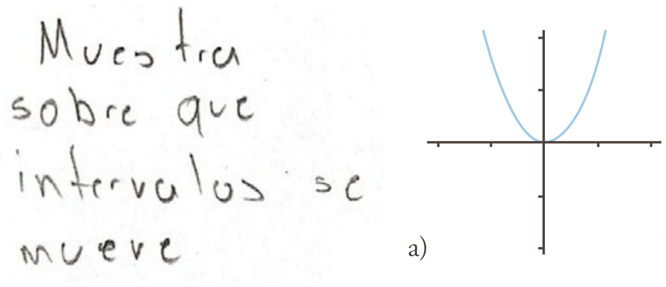


Figura 4. Respuesta y fundamentos compartidos por E3.

La brevedad de la respuesta nos lleva a inferir gran parte de su justificación. Por una parte, podría decirse que el estudiante E3, con el término *intervalos* que presenta, hace referencia a los intervalos de incremento y disminución de la función f, lo que lo llevaría a determinar la monotonía de la función a lo largo del dominio presentado. Por otra parte, pudo haber relacionado dicha monotonía con el signo de la función derivada, para así terminar conjeturando que la función f es creciente en la gráfica presentada y, por ende, $f'(x) \geq 0$ en el dominio observado.

Estas deducciones, junto a la brevedad de la justificación, no dan pie para argumentar que el estudiante realizó alguna interpretación errónea en sus fundamentos y/o en su respuesta. Por lo tanto, se le adjudica la construcción de la estructura mental *objeto*.

TR4: Relación de los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función

El presente tipo de respuesta muestra una combinación de los dos tipos anteriores. El estudiante justifica su elección a través del análisis del grado de la función y su relación con los intervalos de incremento y disminución. Tal razonamiento se retrata en la justificación de E4 (Figura 5).

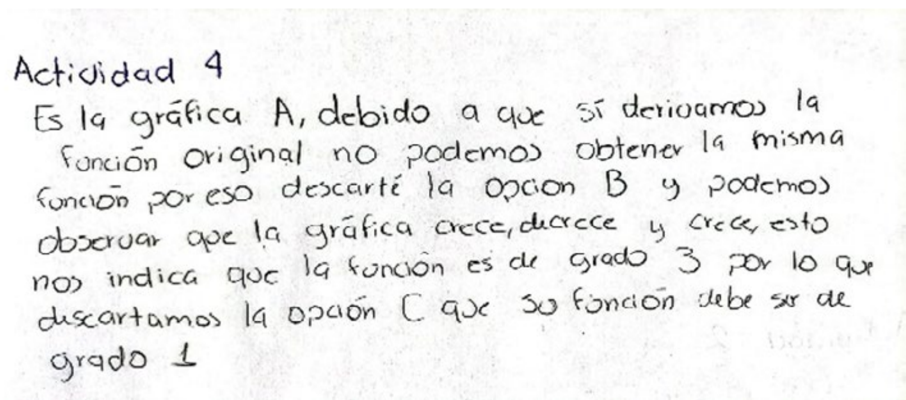


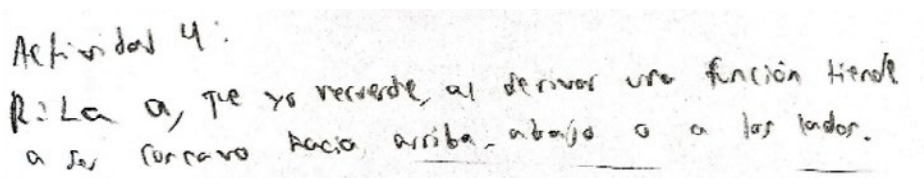
Figura 5. Respuesta y fundamentos compartidos por E5.

En esta respuesta se observa que el estudiante E4, sin generalizar, determina correctamente que la función derivada de f no puede ser representada como ella misma; de esta manera, descarta la opción b). Por otra parte, la característica importante en su respuesta radica en el pensamiento que lo lleva a relacionar los intervalos de incremento y disminución con el grado de una función. Así, afirma que la función f es de grado 3 pero la opción c) es de grado 1, mostrando así vestigios de conocimiento acerca de la reglas de derivación, $f'(x) = \frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ para este caso en específico. Es importante recordar que no hay una relación entre el número de intervalos de incremento y disminución con el grado de una función, por lo que se podría intuir que dicha noción errónea sustituye en la mente del estudiante a aquella que nos dice que una función de grado n tiene una cantidad n de raíces. Sin embargo, esto tampoco es cierto para toda función polinomial, pues el número de raíces de una función puede ser menor a su grado. No obstante dicha relación propuesta por E4, muestra conocimiento argumentando que observa en las gráficas funciones polinomiales y reconoce el grado de dichas funciones. Como consecuencia, se le adjudica una concepción mental *objeto* a los estudiantes que presentan este tipo de respuesta.

TR5: Nociones de la segunda derivada

La característica más importante de este último tipo de respuesta es la inserción de términos matemáticos relacionados al tema de la segunda derivada. La Figura 6 muestra la justificación del estudiante E5, la cual ejemplifica el presente tipo de respuesta:

Figura 6. Respuesta y fundamentos compartidos por E5.


Actividad 4:
R: La a, que yo recuerde, al derivar una función tiende a ser concavo hacia arriba, abajo o a los lados.

Se puede ver que el estudiante utiliza el término *cóncava* para tratar de justificar su respuesta, afirmando que la concavidad de una función resulta de derivarla, pero no específica cómo su justificación aplica a la respuesta seleccionada. El estudiante E5 pasa por alto que el término que introduce se relaciona de mejor manera con la segunda derivada f'', la cual, al igual que f', nos proporciona información sobre la forma de la gráfica de f. La información que nos presenta ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba, mientras que si $f'' < 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo. El estudiante parece ignorar que, al utilizar el término de la concavidad en su justificación, sería más adecuado encontrar la segunda derivada de f que la función f' solicitada. Se argumenta que los estudiantes que presentan este tipo de respuesta no muestran una concepción mental *objeto* para esta actividad.

Análisis de resultados

La caracterización de las respuestas presentadas por los estudiantes en la Actividad 4 se realizó a través del análisis cualitativo dentro de la sección anterior. Para el análisis cuantitativo se tomaron como respuestas correctas aquellas que mostraran vestigios de una justificación válida para fundamentar que el estudiante muestra la *concepción objeto*. En la Tabla 1 se muestran los resultados de acuerdo con el grado de corrección:

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje del grado de corrección.

Grado de corrección	Frecuencia	%
Correcta	3	37.5
Incorrecta	5	62.5
Total	8	100

El grado de corrección evidencia que solo el 37.5 % de los estudiantes logró mostrar justificaciones suficientemente estructuradas para resolver la Actividad 4 analizada. Más de la mitad de los estudiantes exhiben dificultades para resolver este tipo de actividad conceptual con un enfoque gráfico. Por otra parte, la Tabla 2 proporciona información relevante sobre el tipo de respuesta utilizado por cada estudiante para la resolución de la actividad:

Tipo de respuesta	Frecuencia	%
TR1: Determinación de una expresión simbólica-Recta tangente	2	25
TR2: Análisis del grado de una función	1	12.5
TR3: Análisis de intervalos de incremento y disminución	1	12.5
TR4: Relación de los intervalos incremento y disminución con el grado de una función	2	25
TR5: Nociones de la segunda derivada	2	25
Total	8	100

Tabla 2.
Frecuencia y porcentaje del tipo de respuestas observadas.

Directa o indirectamente en su respuesta, cinco (62.5 %) de los estudiantes necesitan recurrir a la expresión simbólica de la función para resolver la actividad, ya sea determinando una expresión simbólica (TR1) o tratando de intuir una expresión simbólica a partir del grado de una función (TR2, TR4). Disponer de la expresión simbólica les supondría una ayuda para que, mediante reglas de derivación, puedan determinar f' algorítmicamente. Así, queda claro que el estudiante trata de llevar la actividad de la representación gráfica a la representación simbólica. Estos intentos reafirman los estudios según los cuales los conocimientos del estudiante respecto al concepto de derivada se basan principalmente en las reproducciones de procedimientos mecánicos (reglas de derivación) para la resolución de ejercicios (Artigue *et al.*, 1995; Asiala *et al.*, 1997; Berry y Nyman, 2003; Briceño *et al.*, 2018; González García *et al.*, 2018; Londoño *et al.*, 2013).

Por su parte, uno (12.5 %) de los estudiantes realiza una justificación acertada determinando que las funciones presentadas son polinomiales, y posteriormente afirma que f' debe ser un grado menor que f (TR2). Sin embargo, el estudiante muestra deficiencias para determinar correctamente la gráfica de la función derivada, inclusive cuando su justificación para este caso en específico es acertada. Esta clase de error resalta la dificultad en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes debido a la flaqueza de los conocimientos previos, por ejemplo, la dificultad para distinguir la gráfica de una función (González García *et al.*, 2018).

PädiUAQ | Vol. 7 Núm. 14 | julio-diciembre | Facultad de Ingeniería | Universidad Autónoma de Querétaro

Conclusiones

En el presente escrito se ha caracterizado el conocimiento presentado por estudiantes universitarios alusivo a la capacidad de relacionar una función con su función derivada en una actividad de enfoque exclusivamente gráfico. Dicha caracterización fue lograda con ayuda del cuestionario diagnóstico creado a partir de un enfoque de descomposición genética determinada para el presente trabajo de investigación, la cual es provista por la teoría APOE y fue de gran ayuda para seleccionar la secuencia de actividades que permitieran analizar y caracterizar las estructuras mentales utilizadas por los estudiantes para construir el concepto de derivada.

La estructura mental de estudio analizada en este trabajo es la de *objeto*. Las justificaciones matemáticas presentadas en dicha actividad permitieron identificar varios tipos de respuestas, las cuales llevaron a conocer cómo los estudiantes relacionan una función con su derivada cuando se les presentan únicamente las gráficas de f y sus posibles f'. A partir de estas justificaciones se decidió, con fundamentos en la descomposición genética del concepto, si el estudiante mostraba o no la concepción mental *objeto*. Por ello, la teoría APOE fue imprescindible para el desarrollo del cuestionario de diagnóstico y, además, para caracterizar el *nivel* de comprensión que maneja un estudiante en un ejercicio o actividad matemática.

Los resultados de los análisis cualitativo y cuantitativo muestran que los estudiantes presentan deficiencias para resolver tareas donde se les solicite interpretar gráficamente el concepto de derivada. Para este caso necesitaban extraer información de una función presentada y con ella determinar su derivada. Resultados como estos solo evidencian que sigue vigente el tratamiento algorítmico que se le da al concepto de derivada en los salones de clases.

De manera general, se ha exhibido cómo el conocimiento algorítmico es insuficiente para abordar ejercicios conceptuales que vayan más allá de la utilización de reglas y/o fórmulas para su resolución, pues para ello es necesario comprender la representación gráfica del concepto. Urge la promoción del análisis global de los conceptos matemáticos en los salones de clases para que el estudiante pueda confirmar la coherencia de su trabajo analizando los dos enfoques que suelen presentar los conceptos matemáticos: el algorítmico y el gráfico.

Un trabajo de este tipo busca promover las representaciones visuales en los salones del aula para una enseñanza íntegra de las matemáticas. Asimismo, se entiende que este trabajo de investigación puede ser de ayuda para mejorar la capacidad de anticipación en profesores, al momento de trabajar en clases con el enfoque gráfico del concepto de derivada. Ambas razones justifican la elaboración de material didáctico que mejore la enseñanza gráfica del concepto de derivada con el objetivo de disminuir su incomprensión y de anticipar las debilidades conceptuales que presentan los estudiantes.

PädiUAQ I Vol. 7 Núm. 14 I julio-diciembre I Facultad de Ingeniería I Universidad Autónoma de Querétaro

Referencias

Amaro, G. (2020). *Análisis de la construcción de derivada en profesores de matemáticas de nivel medio superior basado en la Teoría APOE*. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/43ce21d9-c058-4f9e-a765-dfdc-19d3b43f

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica. https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/40560

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431. Doi: 10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(2), 191-206. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n2-badillo-azcarate-font

Berry, J. y Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495. Doi: 10.1016/J.JMATHB.2003.09.006

Briceño, E., Hernández, J. y Espino, A. (2018). Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. *El Cálculo y Su Enseñanza*, 10, 31-47. Doi: 10.61174/recacym.v10i1.23

Castro, W., Pino-Fan, L. y Font, V. (2015). El conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la derivada de profesores colombianos activos. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *28* (pp. 1590-1597). Comité Latinoamericano de Matemática

Educativa A.C. https://www.researchgate.net/publication/281038402_EL_CONOCIMIENTO_DIDACTICO-MATEMATICO_PARA_LA_ENSENANZA_DE_LA_DERIVADA_DE_PROFESORES_COLOMBIANOS_ACTIVOS

Domínguez, V. y Sánchez, M. (2016). El concepto de derivada en estudiantes de educación media. *Eco Matemático*, *7*(1), 86-91. Doi: 10.22463/17948231.1105

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp.160-202). Springer. Doi: 10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275-282). Springer. Doi: org/10.1007/0-306-47231-7_25

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *37*(2). Doi: 10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez, G. y Cárcamo, A. (2018). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2). Doi: 10.29333/EJMSTE/100640

Gavilán, J., García, M. y Linares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *25*(2), 157-170. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/87869

González, A., Muñiz, L. y Rodríguez, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449-462. Doi: 10.17811/RIFIE.47.4.2018.449-462

Gutiérrez, L. y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia*, *6*(3), 104-122. https://dialnet.unirioja.

es/servlet/articulo?codigo=5305449

Londoño, N., Kakes, A. y Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 935-942. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. https://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624-640. Doi: 10.1080/0020739X.2013.795248

Sánchez, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto)* [Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla]. https://idus.us.es/handle/11441/73311

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31. Doi: 10.24844/EM1701.01

INICIO