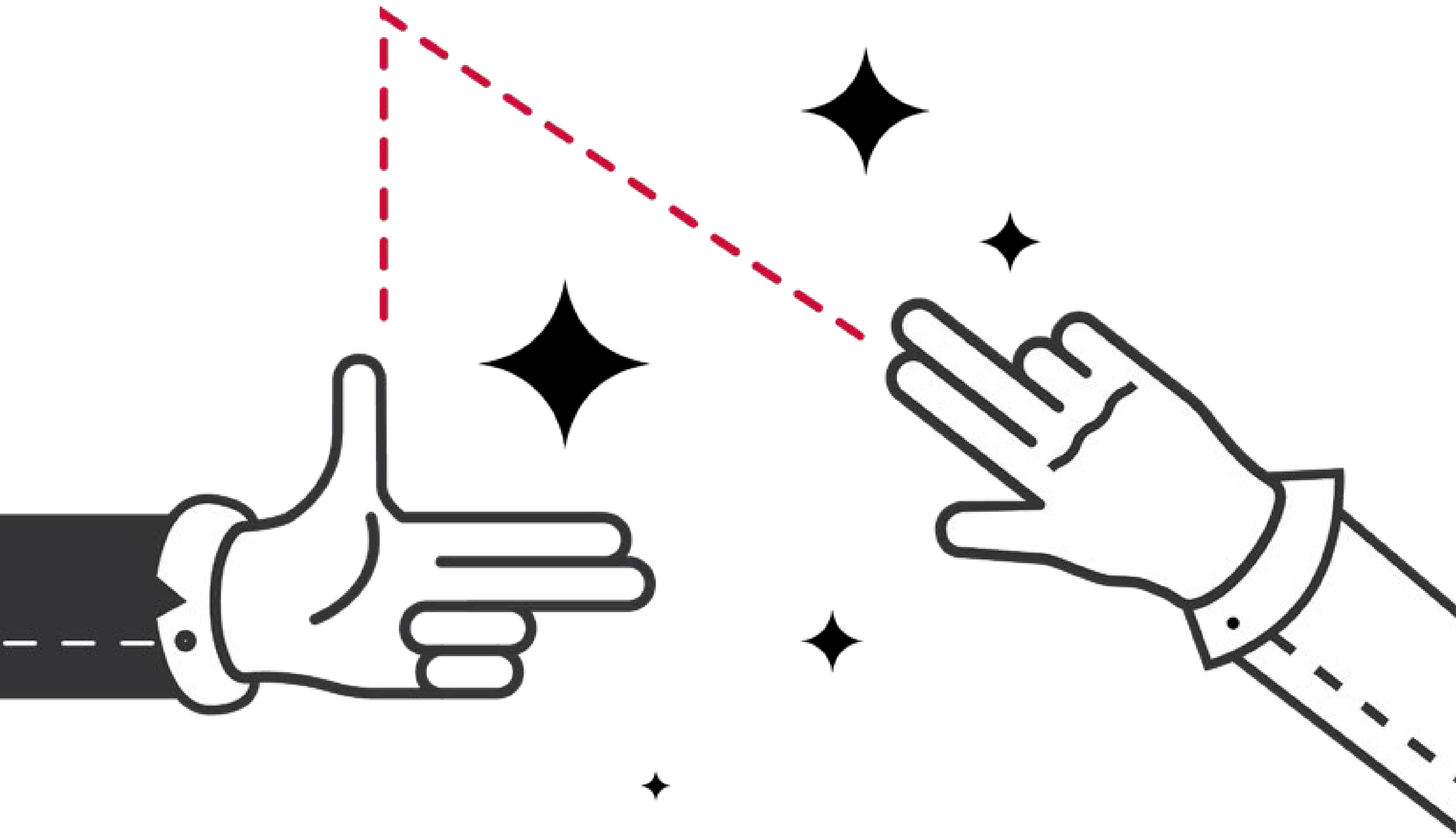


ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE TALES

SOME APLICATIONS OF THALES' THEOREM

[1]Jesús Jerónimo Castro
[2]Francisco Gerardo Jiménez López
[3]Angélica Rosario Jiménez Sánchez

Universidad Autónoma de Querétaro,
[1]*jesusjero@hotmail.com*
[2]*gerjilo@yahoo.com.mx*
[3]*jisar7@gmail.com*

Resumen

A partir del Teorema de Tales, se exploran algunas otras propiedades y construcciones, como el Teorema de Varignon y el Teorema de la bisectriz. Estos conceptos se toman como antecedentes para el planteamiento de problemas geométricos que pueden resultar atractivos para el lector.

Palabras clave: Teorema de Tales, Teorema de Varignon, Teorema de la Bisectriz, problemas de olimpiada, geometría, matemáticas.

Abstract

Starting from Thales' Theorem, some other properties and constructions are explored, such as Varignon's Theorem and the Bisector Theorem. These concepts are taken as background for the formulation of geometric problems that may be attractive to the reader.

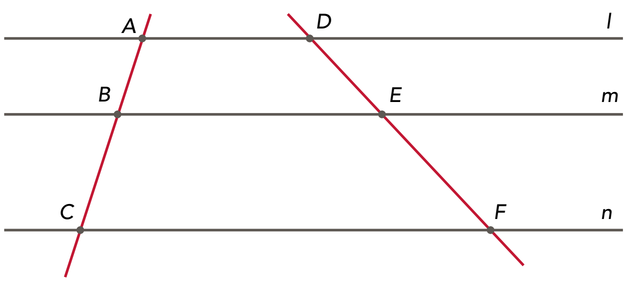
Keywords: Thales' Theorem, Varignon's theorem, Bisector theorem, olympiad problems, Geometry, mathematics.

Introducción

Uno de los teoremas más utilizados al resolver problemas de geometría euclidiana es, sin duda, el Teorema de Tales. Este afirma lo siguiente:

Teorema de Tales. Sean l, m, n tres líneas paralelas; supongamos dos líneas transversales a ellas que la cortan en los puntos A, B, C y D, E, F, respectivamente. Entonces se cumple que:

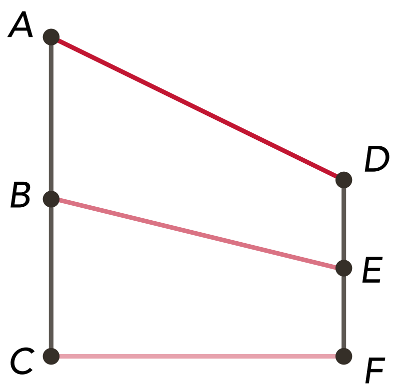
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



El recíproco de este teorema no se cumple en general; es decir, si tenemos un par de segmentos AC y DF y los puntos B y E en ellos de modo que se cumple que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

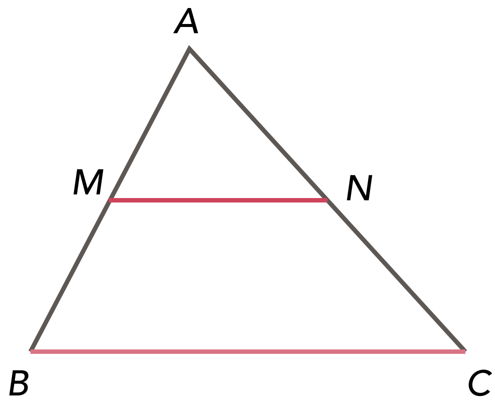
no necesariamente tendremos que AD, BE y CF son paralelas. Por ejemplo, en la siguiente figura, los puntos B y E son los puntos medios de AC y DF, de manera que se cumple la proporción anterior; sin embargo AD, BE y CF no son segmentos paralelos.



Por otro lado, si los dos segmentos comparten un extremo, entonces el recíproco del Teorema de Tales se cumple, es decir, si M y N son puntos sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC y se cumple que:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Entonces MN es paralelo a BC.



Simplemente nos referiremos como Teorema de Tales tanto al teorema directo como al recíproco cuando es aplicado a triángulos.

Algunas aplicaciones

Como primera aplicación del Teorema de Tales tenemos el siguiente resultado.

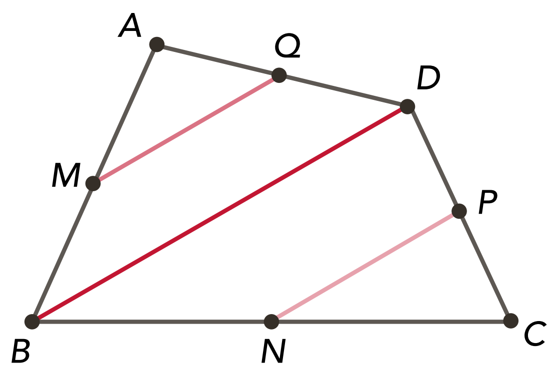
Teorema de Varignon. Sean M, N, P y Q los puntos medios de los lados de un cuadrilátero $ABCD$. Entonces $MNPQ$ es un paralelogramo.

Demostración

Supongamos que los puntos medios son los que corresponden a los lados mostrados en la siguiente figura. Trazamos la diagonal BD. Notemos que, dado que M y Q son puntos medios de AB y AD, entonces se cumple que:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QD'}$$

por el Teorema de Tales, tenemos que MQ es paralelo a BD. Análogamente, se prueba que NP es paralelo a BD. Por transitividad tenemos que MQ es paralelo a NP. De manera totalmente análoga se prueba que QP es paralelo a MN, trazando la diagonal AC. Concluimos entonces que $MNPQ$ es un paralelogramo.



Observemos que en ningún momento usamos al cuadrilátero $ABCD$ convexo, por lo que este Teorema sigue siendo válido para cuadriláteros cóncavos.

El siguiente teorema es muy útil en la resolución de muchos problemas de Geometría.

Teorema de la bisectriz. Sea D el punto sobre el lado BC de un triangulo ABC, de modo que AD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$. Entonces se cumple que:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC'}$$

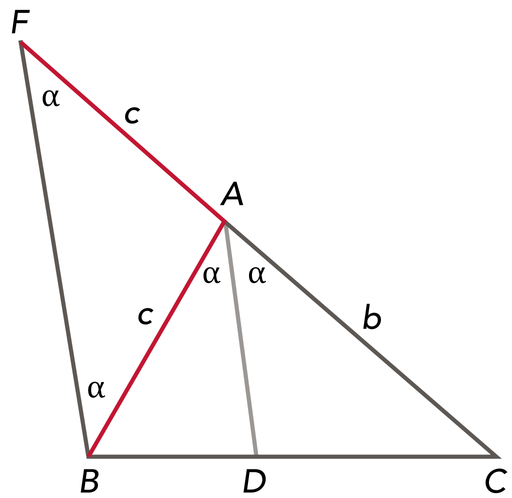
Demostración

Prolongamos el lado AC más allá del punto A hasta un punto F, tal que $FA = AB$. Como el triangulo FAB es isósceles, con $FA = AB$, tenemos que se cumple que $\angle BFA = \angle FAB = a$. Como $\angle FAB + \angle BAC = 180°$ y también $\angle FAB + \angle BFA + \angle FAB = 180°$, tenemos que $\angle BAC = 2a$, de donde se sigue que $\angle DAC = \alpha$. De esto último se obtiene que FB es paralela a AD; podemos aplicar el Teorema de Tales y entonces:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{FA}{AC'}$$

Y, como $FA = AB$, tenemos que:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC'}$$

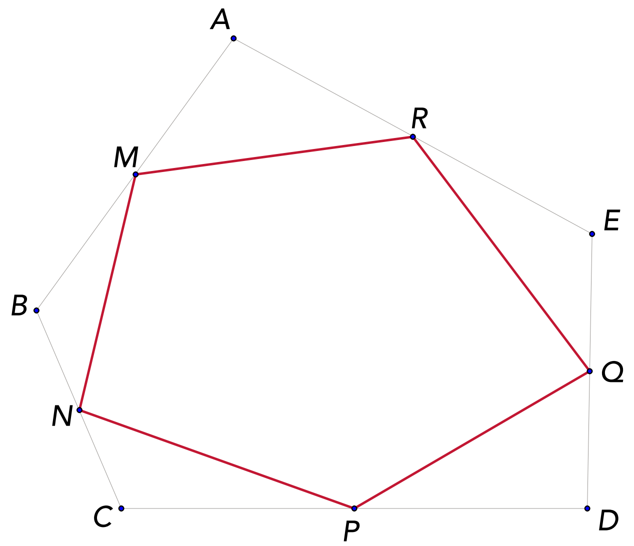


Problemas propuestos

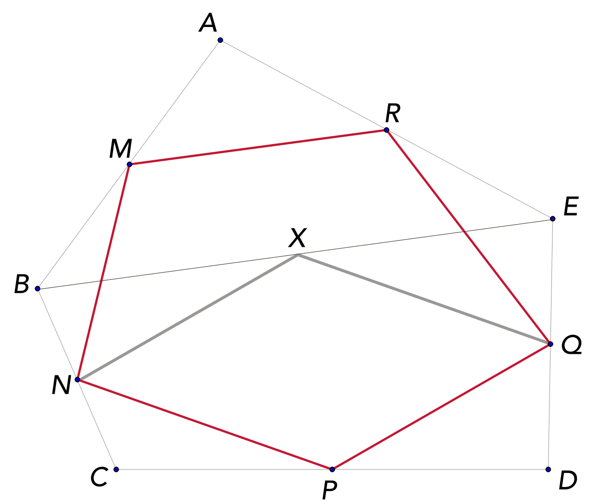
Problema 1. (El terreno pentagonal) En el reino de Matematilandia existió alguna vez un gran matemático llamado Sin Pan, cuyo propósito era fundar su propia escuela de Matemáticas. Como era muy pobre, no contaba con un terreno donde edificarla. Se acercó al emperador del reino para solicitar su ayuda y éste le propuso:

Tengo un terreno en forma pentagonal (no necesariamente regular), sin embargo, allí sólo encontrarás 5 estacas de madera colocadas en los puntos medios de los lados del terreno. Si logras determinar cuál es la frontera del terreno, entonces será tuyo.

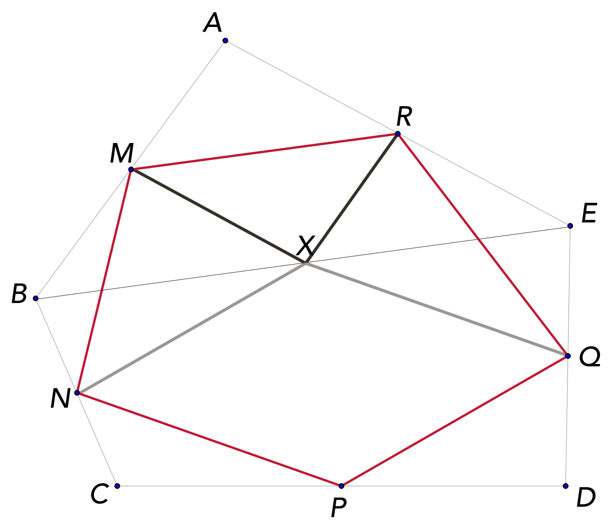
La gran genialidad de Sin Pan le permitió resolver el enigma, no obstante, ordenó en su testamento que se quemaran todos sus libros y apuntes. Hasta el día de hoy el enigma de cómo resolvió Sin Pan el problema sigue cautivando nuestra atención. Un famoso historiador logró encontrar los siguientes diagramas que, se presume, pertenecieron a Sin Pan:



En este diagrama los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* corresponden a los vértices del pentágono y los puntos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* a los puntos donde están clavadas las estacas.



En este diagrama, *NPQX* es un paralelogramo y se puede observar que los puntos *B*, *X* y *E* son colineales.



En este último diagrama se observa que los puntos *M*, *X* y *R* son los puntos medios de los lados del triángulo *ABE*.

Se sabe que, con la información de estos tres diagramas, Sin Pan logró determinar la posición de los vértices *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. A partir de toda esta información, describe cómo hizo Sin Pan para encontrar los vértices del pentágono.

Problema 2. Dado un segmento *AB*, donde las coordenadas de los puntos son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, consideramos un punto $C(x, y)$ en el segmento *AB* de modo que:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

Demuestra que las coordenadas de *C* se obtienen por

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Problema 3. Demuestra que las diagonales en todo paralelogramo se cortan mutuamente en sus puntos medios.

Problema 4. Demuestra que, si en un cuadrilátero las diagonales se cortan mutuamente en su punto medio, entonces el cuadrilátero debe ser un paralelogramo.

Problema 5. Sean *M* y *N* los puntos medios de los lados *AB* y *AC* de un triángulo *ABC*. Demuestra que $MN = (1/2)BC$.

Problema 6. Demuestra que el segmento de línea que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero biseca el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.