KARLA PATRICIA SALDAÑA SÁNCHEZ
JESÚS JERÓNIMO CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO,
FACULTAD DE INGENIERÍA.

02

APLICACIÓN DE LA MODELIZACIÓN EN EJEMPLOS DE GEOMETRÍA Y CÁLCULOS

MODELLING APPLIED IN GEOMETRY AND CALCULUS EXAMPLES

RESUMEN

En este artículo se presenta una serie de problemas donde se aplica la modelización geométrica e, incluso, interdisciplinar para la enseñanza de las Matemáticas a nivel bachillerato. Es conocido que los estudiantes muestran mayor interés en problemas relacionados con situaciones de la vida real que en aquellos planteados solamente en el contexto matemático. Este trabajo observa el proceso de modelización de Blum y Leiß que explica paso a paso cómo debe ser modelizado un problema para poder resolverlo. En el sistema educativo en México se considera la modelización como uno de los niveles más altos de aprendizaje, ya que es cuando los alumnos son capaces de relacionar sus conocimientos previos con problemas reales y así resolverlos con objetos matemáticos, para después llevarlos a la interpretación en la vida real. En este artículo veremos que la modelización matemática no es sólo el hecho de representar los problemas de manera abstracta, sino además, una propuesta de resolución de éstos.

Palabras clave: modelización matemática, geometría, enseñanza, aprendizaje, vida real, interpretación.

ABSTRACT

This article presents a few problems where geometric and even interdisciplinary modelling is applied for mathematics teaching. It is well known that students show more interest in real life problems that in those only concerned with mathematical objects. This article shows the modelling process according to Blum y Leiß, where they explain step by step how a problem should be modelled in order to be solved. In the Mexican educative system, modelling is considered as one of the highest levels of learning since it happens when the students are capable to match their knowledge with real problems and solve them with mathematical objects for later taking them to real life interpretation. In this article we shall see that Mathematical modelling is not only representing problems in an abstract way but also generating a proposal for solving them.

Keywords: mathematical modelling, geometry, teaching, learning, real life, interpretation

INTRODUCCIÓN

El uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas se realiza desde hace aproximadamente 30 años, lo cual se ha convertido en una parte fundamental de la investigación en la enseñanza de las matemáticas. Recientemente se incluyen en varios congresos de educación matemática varios artículos acerca de la modelización matemática y sus aplicaciones. El ICMI (International Commission on Mathemathical Instruction) tiene una sección dedicada a la modelización y sus aplicaciones, de la misma forma, la NCTM considera la importancia de integrar la modelización como una manera de resolver problemas y el informe PISA 2012 tiene en cuenta que es fundamental la construcción de modelos matemáticos a partir de un problema real para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En referencia a esto, la modelización matemática se ha ido utilizando en varios países para la enseñanza en el nivel básico. Un ejemplo de la aplicación de la modelización en la educación se encuentra en España a nivel secundaria donde se integran la modelización matemática y la construcción de modelos matemáticos (Búa y Fernández, 2015). En México en el libro de La enseñanza de la Geometría (García y López, 2015) se menciona que si se obtienen las habilidades visuales, las de comunicación, de dibujo y las de razonamiento se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos, al resolver problemas dentro de la misma geometría, sino también que modelen geométricamente situaciones del mundo físico o de otras disciplinas, a esto se le llama habilidades de transferencia y puede darse de diferentes formas; puede ser que el alumno utilice el contenido aprendido en geometría para resolver otra tarea que pertenezca al ámbito matemático, o que lo transfiera a otra área como la química, por menciona alguna.

En la actualidad el término modelización tiene mayor significado, ya que la investigación sobre ese tema no ha dejado de avanzar. Es necesario que la investigación en educación matemática que se realiza en todos los segmentos de la sociedad, se relacione con contenidos matemáticos aplicables a la vida real y con la necesidad de desarrollar una "competencia modeladora" como una competencia matemática básica de cualquier ciudadano, como dice el reciente informe mundial PISA. En 1993 se incluye en la reforma curricular de México el enfoque de resolución de problemas y se profundiza en el 2006. En este enfoque se plantea que el aprendizaje de las matemáticas se ahora debe orientar a que los alumnos puedan resolver problemas en diferentes contextos, anteriormente, la enseñanza era principalmente memorística y la aplicación mecánica de fórmulas o algoritmos.

Según Blum y Leiß (2015), la enseñanza de las matemáticas escolares va dirigida a que los alumnos desarrollen competencias y adquieran conocimientos que les permitan resolver situaciones matemáticas en la escuela así como en el "mundo real".

Por definición las competencias en modelización incluyen las competencias en resolución de problemas. En la mayoría de los casos, la matematización y el análisis del problema se constituyen en un problema matemático para el que modela y, en consecuencia, el proceso de modelización incluye resolución de problemas matemáticos. Pero es importante darse cuenta que es el problema de la vida real el que debería guiar la actividad de modelización y que la resolución del problema está subordinada a éste. Desde un punto de vista didáctico es importante que la perspectiva de modelización coloque a la actividad de resolución de problemas en un contexto real e incluya solución de problemas de naturaleza extramatemática (Blomhøj, 2004).

¿Qué es la modelización matemática?

La modelización matemática, en tanto estrategia didáctica y pedagógica, asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales, permitiendo la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. El principio fundamental es que los modelos son tratados como instrumentos para enseñar conceptos matemáticos.

Los modelos describen nuestras creencias acerca de cómo funciona el mundo. En la modelización matemática se traducen estas creencias en lenguaje matemático. Esto puede tener diversas ventajas como:

1. Las matemáticas son un lenguaje muy preciso.
2. Las matemáticas se configuran como un lenguaje conciso, con reglas y manipulación bien definidas.
3. Todos los resultados matemáticos probados a través de los años están a nuestra disposición.
4. Las computadoras pueden ser usadas para realizar cálculos numéricos (Marion y Dawson, 2008).

Actualmente existe investigación en modelización y sus aplicaciones centrada en la enseñanza explícita, lo que lleva hacia el encuentro de problemas de procesos de modelización:

- Problematización epistemológica: se cuestiona si las situaciones reales tienen propiedades didácticas.
- Problematización cognitiva: necesidad de profundizar los conocimientos activados por la realización de tareas de modelización y sus aplicaciones.

Argumentos a favor de la modelización

1. La modelización matemática une la experiencia de la vida diaria de los estudiantes y las matemáticas. Debido a esto se motiva el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo el apoyo cognitivo a conceptualizaciones de los alumnos, y se coloca a las matemáticas como forma de entender situaciones de la vida diaria.
2. En el desarrollo de las sociedades altamente tecnológicas las competencias para manipular los modelos matemáticos son muy importantes, no sólo en el mundo educativo sino también en el laboral.
3. Los modelos matemáticos son muy importantes en la sociedad actual, por lo tanto, el desarrollo de competencias en criticar modelos matemáticos y la forma en que son utilizados son necesarios para el mantenimiento y desarrollo de la sociedad.

La modelización matemática como práctica de enseñanza

La modelización matemática es una tarea difícil. El maestro tiene que colocar una situación o fenómeno de la vida diaria donde los alumnos puedan aplicar todo su conocimiento matemático en el proceso de modelización.

Objetivo: Mostrar cómo se realiza modelización geométrica o interdisciplinar en problemas inspirados en la vida real.

METODOLOGÍA: MATERIALES Y MÉTODOS

En la Figura 1 se muestra el ciclo de la modelización, según Blum y Leiß (2005), que se tendrá como metodología para realizar la modelización en geometría. Ésta se separa en dos campos grises: el de la izquierda es el mundo real y el de la derecha es el de las matemáticas.

Construir, simplificar/estructurar. Modelación de Blum y Leiß (2005)

a) Entender y reconocer un problema que se pueda afrontar matemáticamente.
b) Simplificar y estructurar. Reconocer las restricciones y especificaciones tomar decisiones acerca de éstas.

Matematizar

c) Identificar objetos y relaciones relevantes.
d) Elegir variables relevantes distinguiéndolas de otras
e) Reconocer el entorno matemático que se necesita.
f) Explicar relaciones reales con el objeto matemático.
g) Verificar la coherencia en el conjunto de supuestos y las relaciones matemáticas con el objeto real.

Trabajar matemáticamente

h) Establecer la relación entre las variables usando lenguaje matemático.
i) Formular hipótesis matemáticas.
j) Formular problemas en una forma matemática.
k) Resolución de problemas de una forma matemática.

Interpretar

l) Encontrar e interpretar soluciones matemáticamente en el modelo utilizado.

Validar

m) Conocer el significado de las soluciones en el mundo real.
n) Validar el modelo y cambiarlo si es necesario.
ñ) Discutir acerca de los resultados.

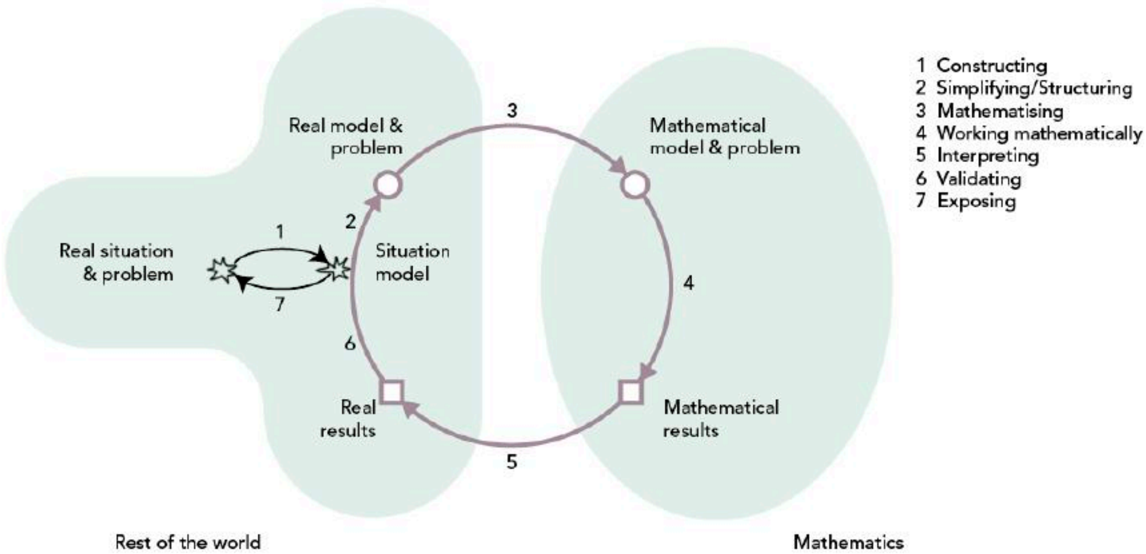

Figura 1. El ciclo de modelización según Blum y Leiß

Exponer

o) Comunicar resultados.

EJEMPLOS APLICADOS DE MODELIZACIÓN GEOMÉTRICA

Problema 1

En una graduación donde van a brindar 50 alumnos, calcular el mínimo de botellas de vino (750 ml) que se necesita para el brindis. Toma en cuenta que la copa se debe de llenar a 2/3 de su capacidad. (La copa es esférica con radio 3 cm)

Construir, simplificar/estructurar

La copa tiene forma esférica (véase Figura 2), por lo tanto, se podrá obtener el volumen con esa medida, el problema indica que se debe servir 2/3 de ella.

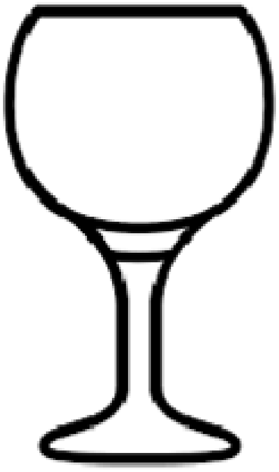

Figura 2.

Matematizar

La fórmula para obtener el volumen de una esfera es:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (1)$$

Como sólo se va a llenar 2/3 de la esfera tenemos:

$$v_{copa} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \qquad (2)$$

$$v_{necesario} = 50 * v_{copa} \qquad (3)$$

$$no.\,botellas = \frac{v_{necesario}}{750\ ml} \qquad (4)$$

Trabajar matemáticamente

$$v_{copa} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi(3\ cm)^3\right) = \frac{216}{9}\pi\ cm^3 = 24\ \pi\ cm^3$$

$$v_{necesario} = 50 * v_{copa} = 50 * 24\ \pi\ cm^3 = 1200\ \pi\ cm^3$$

$$no.\,botellas = \frac{1200\ \pi\ cm^3}{750\ cm^3} \approx 5.0266\ botellas$$

Interpretar

El volumen de 2/3 de la copa es 24 π cm^3 y cómo necesitamos 50 copas el volumen necesario será de 1200 π cm^3. Y si cada botella contiene 750 ml de producto necesitaremos 5.0266 botellas, o sea, 6 botellas.

Validar y exponer

El volumen mínimo total que será necesario para llenar 2/3 de la copa de cada uno de los estudiantes es de 6 botellas de 750 ml cada una.

Problema 2

Una vaca se encuentra atada a la esquina de su establo (por fuera) con una cuerda de 16 metros. Su establo es cuadrado de 8 metros de lado. ¿Cuál es el área de la superficie por donde se puede desplazar?

¿El problema se puede afrontar matemáticamente? Sí, ya que hablamos de áreas y figuras geométricas.

Matematizar

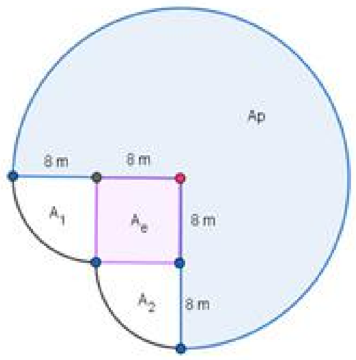

Figura 3

En la Figura 3 se observa:

a) Punto rosa: donde fue atada la vaca.

b) Ap= área donde se puede desplazar fuera de su establo. El punto rosa es el centro del círculo con radio 16 (medida de la cuerda con la que se encuentra atada).

c) A_1 y A_2= áreas donde la vaca se desplaza del otro lado de su establo.

d) A_e= área del establo.

A_3 es la suma de A_1 y A_2.

Se visualiza que la suma de A_1 y A_2 forma un medio círculo con radio 8 metros, entonces:

$$A_1 + A_2 = A_3 \rightarrow \ A_3 = \frac{1}{2}(\pi(r)^2) \tag{1}$$

Donde Ap es el área color azul que es la otra parte por donde se puede desplazar la vaca. Se observa que corresponde a ¾ de un círculo con radio 16 m.

$$A_p = \frac{3}{4}(\pi(r)^2) \tag{2}$$

Por último, se tiene el área del establo:

$$Ae = l^2 \tag{3}$$

También el área total:

$$\acute{A}rea\ total = A_3 + A_p + A_e \tag{4}$$

Trabajar matemáticamente

$$A_1 + A_2 = A_3 \rightarrow \ A_3 = \frac{1}{2}(\pi(8m)^2) \tag{5}$$

$$A_p = \frac{3}{4}(\pi(16m)^2) = 192\pi m^2 \tag{6}$$

$$A_e = (8m)^2 = 64\ m^2 \tag{7}$$

Luego:

$$\acute{A}rea\ total = \ 32\pi m^2 + 192\pi m^2 + 64\ m^2 \approx 767.72\ m^2 \tag{8}$$

Interpretar

El área total es la suma de las áreas A_1, A_2, A_p y A_e.

Validar y exponer

Con el trabajo matemático se valida y expone que el área de desplazamiento de la vaca es 767.72 m^2.

Problema 3

Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre sube corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana que se encuentra en la parte más alta de la montaña. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 min en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. ¿Cómo sabremos si está en lo correcto?

Construir, simplificar/estructurar

Se construye una gráfica en el plano cartesiano, en la cual se muestren los recorridos de subida y bajada con respecto al tiempo.

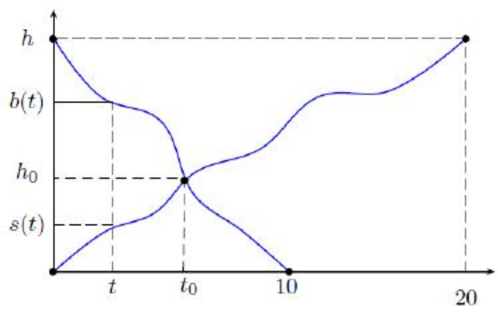

Figura 4

Matematizar

Supongamos que la altura de la montaña es una cantidad (h) y graficamos considerando el eje horizontal que representa el tiempo (t) y el eje vertical la altura a la que se encuentra el hombre en el tiempo (t).

Trabajar matemáticamente

Como las gráficas de subida y bajada se representan por curvas continuas es claro que las trayectorias de éstas deben cruzarse en algún momento.

Interpretar

Precisamente en ese momento que se cruzan las trayectorias el hombre se encontraba el sábado y el domingo a la misma altura a la misma hora.

Validar y exponer

La validación se obtiene a partir de la observación de la gráfica que representa la altura en cada momento para cada uno de los trayectos.

Problema 4

Tenemos un tablero de 3x3, coloreado como se muestra en la figura siguiente y se colocan cuatro caballos de ajedrez en las esquinas del tablero. Los de las esquinas superiores son negros y los de las esquinas inferiores son blancos. Siguiendo los movimientos permitidos para un caballo en el juego de ajedrez, ¿pueden cada uno de los caballos llegar a la esquina opuesta?

Construir, simplificar/estructurar

Observemos cómo están localizados los caballos en el tablero (Figura 5).

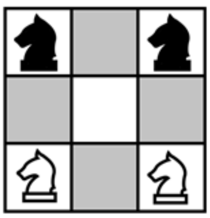

Figura 5

Matematizar

Asignamos números a cada uno de los cuadros del tablero de la manera siguiente (Figura 6).

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Figura 6

Trabajar matemáticamente

Representamos cada casilla del tablero como un vértice de un octágono y la casilla con el número 5 como un punto dentro del octágono. Asignamos los números de casilla a cada vértice tomando en cuenta que exista movimiento directo de un caballo de un vértice a otro adyacente. Por ejemplo, un caballo en la casilla 1 puede moverse a la casilla 6 o a la casilla 8, por tal motivo los vértices adyacentes del 1 en el octágono son el 6 y el 8. La única casilla que no puede alcanzarse mediante movimientos de caballo de ajedrez es la correspondiente al número 5, por eso la representamos como un punto aislado del octágono (Figura 7).

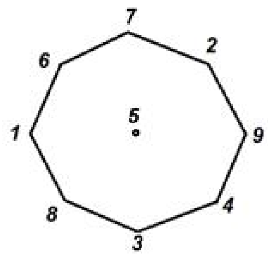

Figura 7

La posición original de los caballos corresponde al diagrama de la izquierda y el estado final al que se desea llegar queda representado por el diagrama de la parte derecha (Figura 8).

El caballo negro en la posición 1 se va a mover a la posición 9.

El caballo negro en la posición 7 se va a mover a la posición 3.

El caballo blanco en la posición 3 se va a mover a la posición 7.

El caballo blanco en la posición 9 se va a mover a l posición 1.

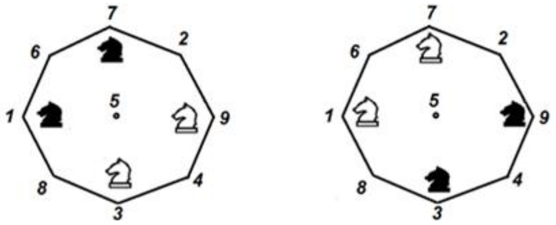

Figura 8

Interpretar

Observemos que no importa que caballo se desee mover, no puede cambiar el orden en el que aparecen: los dos blancos de un lado y los dos negros del otro. Esto se debe a que un caballo no puede brincar a otro ya que los movimientos permitidos para cada uno de ellos es mediante vértices adyacentes en el octágono.

Validar y exponer

Se concluye entonces que se necesitan 4 movimientos por cada caballo para llegar a la posición final.

Problema 5

Demostrar que en cualquier reunión de 6 personas hay tres personas que se conocen entre sí o tres que se desconocen mutuamente.

Construir, simplificar/estructurar

Representamos a cada una de las 6 personas como los vértices de un hexágono y a las posibles relaciones (conocerse o no conocerse) mediante segmentos de línea punteados (Figura 9).

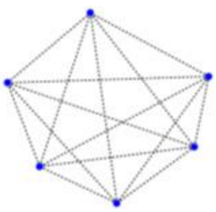
Figura 9

Matematizar

Elegimos a una de las personas y analizaremos sus posibles relaciones con las otras personas. Si dos personas se conocen pintamos el segmento que une a los puntos que los representan de color rojo, en caso de no conocerse dos personas pintamos el segmento que une a los puntos que las representan de color verde. De este modo, el problema se traduce en demostrar que no importa como pintemos los lados y diagonales de un hexágono, siempre habrá un triángulo con vértices en los vértices del hexágono, el cual tiene sus tres lados del mismo color (rojo o verde).

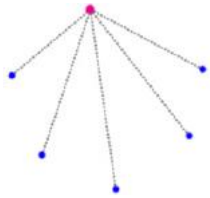
Figura 10

Trabajar matemáticamente

Como las posibles relaciones de la persona elegida con los demás son 5, tenemos que al menos tres de los 5 segmentos que llegan a ese vértice son del mismo color, por ejemplo, rojos (Figura 11).

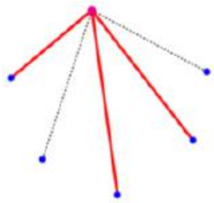
Figura 11

Si alguno de los segmentos que une un par de extremos es rojo, entonces ya tendríamos un triángulo con sus tres lados rojos.

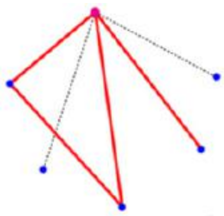
Figura 12

Entonces lo pintamos de verde:

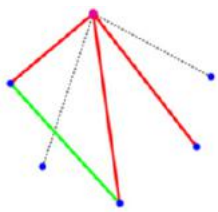
Figura 13

De igual modo se hace con otra pareja de extremos de segmentos rojos:

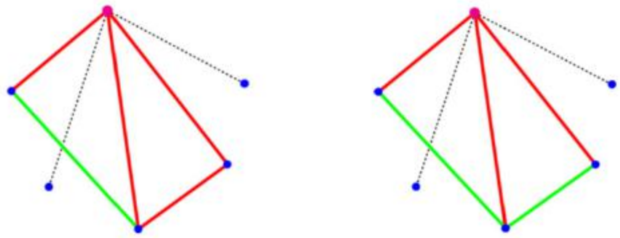

Figura 14

Sin embargo, al considerar el tercer extremo entre segmentos rojos, se distingue que, si se pinta rojo, se obtiene un triángulo rojo y, si se hace verde, resulta un triángulo verde. Por lo tanto, siempre tiene un triángulo rojo o un triángulo verde.

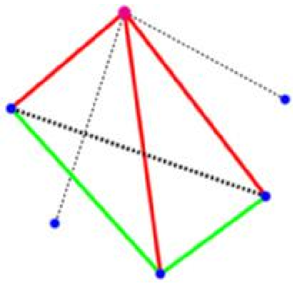

Figura 15

Interpretar

Como siempre hay un triángulo rojo o un triángulo verde, hay tres personas que se conocen entre sí o hay tres personas que se desconocen entre sí.

Validar y exponer

Notemos que el análisis del problema empieza suponiendo que hay al menos tres de las relaciones, de las cinco posibles, de una persona que son del mismo color. Después se analizaron los casos posibles en la manera de pintar los tres segmentos dados y se concluyó que siempre existía un triángulo con sus tres lados del mismo color. Si en lugar de ser tres segmentos rojos tuviéramos 4 o 5, es suficiente elegir tres de ellos y con eso repetir el análisis. Es así se concluye que el análisis realizado incluye todas las posibilidades y por tanto la prueba está completa.

DISCUSIÓN

Para un análisis complementario, Bosch *et. al* (2007) proponen que la modelización también se puede hacer con base en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, ya que propone que toda actividad humana (en este caso actividad matemática) puede ser modelada por praxeologías, dicho término proviene de la composición de praxis+logos; para la TAD praxis es el conjunto de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos y logos que se refiere a los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se usan (tecnología), también existe otro nivel que es el "saber" que es lo que explica la tecnología y se refiere a la teoría.

Las praxeologías (Chevallard, 1999) se definen como:

Tipos de tareas: Existen tareas (t) y tipos de tareas (T), las tareas son las que se expresan como un verbo, por ejemplo: limpiar el cuarto, hacer la comida, correr en el parque. Tipo de tarea es un objeto relativamente preciso: subir la escalera al segundo piso es un tipo de tarea pero el subir no lo es.

Técnicas: Sea pues un tipo T de tareas, para realizar este tipo de tarea se necesita una determinada manera de hacer (ô), a esto se le llama técnica. Una praxeología contiene un bloque designado [T/ô] que se le denomina bloque práctico-técnico y se identifica como el saber hacer.

Tecnología: Se entiende por tecnología y se indica generalmente por θ el discurso cuyo objetivo tiene justificar la técnica para asegurar que se realice el tipo de tarea (T).

Teorías: El discurso tecnológico tiene afirmaciones escritas con las que se pasa a un nivel superior de justificación, explicación y producción. El de la teoría que se simboliza como Θ.

Chevallard menciona que existe un proceso de estudio de la praxeología matemática y que está determinado por seis momentos didácticos, dónde en este caso no hay una estructura lineal:

Los seis momentos didácticos son:

a) Momento del primer encuentro

Se refiere a la primera vez que los estudiantes entran en contacto con el problema a resolver. Éste momento no es único ya que el estudiante puede volver a entrar en contacto con el problema inicial. Su función es dar una visión general de la problemática que se va a realizar para que comience el estudio.

b) Momento exploratorio

Se explora el problema en cuestión, se inscribe dentro de un tipo de tareas (de los previamente definidos) y se elabora una técnica para esta. El momento exploratorio tiene 2 etapas; la primera es la investigación de técnicas para solucionar el problema planteado y la segunda es donde los tipos de problemas son concretos y existen técnicas matemáticas para dar solución a ellos.

c) Momento del trabajo de la técnica

Se inicia con la técnica que fue utilizada en el momento exploratorio, y posteriormente se estimula para generar técnicas "nuevas" a partir de ésta y así continuar con el estudio de la problemática. Tiene que tener un muy buen dominio de la técnica ya que con esto se generarán nuevas tareas así que es importante que el alumno esté familiarizado con ella.

d) Momento tecnológico-teórico

Aparecen nuevas situaciones matemáticas relativas a las técnicas, como por ejemplo interpretación, justificación y alcance y relación de las mismas técnicas. La respuesta para estas situaciones requerirá de la realización de nuevas tareas matemáticas que también se integrarán a la praxeología en construcción.

e) Momento de la institucionalización

En este momento es donde aparece la praxeología elaborada, pues especifica todo lo que se ha utilizado para su construcción y que finalmente con esto adquiere la definición de praxeología.

f) Momento de la evaluación

Se evalúa toda la praxeología en sí; desde la identificación de las tareas, ¿a qué se asocian?, ¿existe variedad en ellas?, las técnicas sí están trabajadas de la forma correcta, ¿tienen una buena fundamentación?, ¿son las adecuadas para realizar las tareas solicitadas? Y si el discurso tecnológico es explícito y si ayuda a interpretar y justificar las técnicas.

CONCLUSIONES

En los ejemplos vistos anteriormente se puede notar que el ciclo de modelización de Blum y Leiß se puede usar fácilmente para resolver problemas creando modelos matemáticos a partir de conocimientos simples, de acuerdo con David Ausubel (1976), durante el aprendizaje significativo el aprendiz relaciona los conocimientos previos de una manera sustancial con los nuevos conocimientos. El aprendiz debe de estar dispuesto a aprender significativamente. Por otro lado, también importa la forma en que se plantean los materiales de estudio y las experiencias educativas. Si se logra el aprendizaje significativo, se trasciende la repetición memorística de contenidos y se logra construir significado, dar sentido a lo aprendido, y entender su ámbito de aplicación y relevancia en situaciones académicas y cotidianas. La resolución de problemas con modelización no se reduce a sólo interpretar los resultados con fórmulas matemáticas, gráficas o dibujos, es el hecho de generar un modelo dónde con ayuda de los conocimientos previos se llegue a una resolución final. La modelización se confunde muchas veces con interpretación pero en los ejemplos previos no es el caso ya que se tiene que generar una "fórmula final" (por llamarla así) para poder resolver los problemas propuestos.

El análisis previo realizado con base en la TAD muestra que también el ciclo de modelización se puede expresar en términos de praxeologías para respaldar la manera de utilizar la modelización en la enseñanza. El proceso de modelización es un proceso continuo y progresivo cuya idea fundamental se encuentra en el cuestionamiento constante de la adecuación del modelo a la tarea propuesta y de su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso de estudio.

Por lo tanto, si los alumnos son capaces de cuestionar los modelos matemáticos que desarrollen para las tareas propuestas, al mismo tiempo podrán reflexionar respecto a sus resultados obtenidos.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak, J. H. y H. Hanesian. (1976). Significado y aprendizaje significativo. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, pp. 53-106.

Blum, W. y Leiß, D. (2005). How do students and teachers deal with odelling problems? *Mathematical Modelling* (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics, pp. 222-231.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling-A theory for practice*. Suecia: National Center for Mathematics Education, 2004, pp. 145-159.

Búa, J. B. y Fernández, M. T. (2015). Dos ejemplos de modelización matemática basadas en fenómenos. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 221-266.

García, S. y López, O. L. (2008). L*a enseñanza de la Geometría*. Ciudad de México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.